Cours de Mathématiques

Sup MPSI PCSI PTSI TSI

En partenariat avec l'association Sésamath http://www.sesamath.net

et le site http://www.les-mathematiques.net

Document en cours de relecture

Alain Soyeur - François Capaces - Emmanuel Vieillard-Baron

23 mars 2011

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

C'est plus Zamuzant en Z.
Publicité Peugeot - 20e siècle.

Pour bien aborder ce chapitre

En 1545, le mathématicien Gerolamo Cardano publie une formule donnant une solution par radicaux de l'équation[1] $x^3 = ax + b$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Cette formule avait été découverte par les mathématiciens del Ferro et Tartaglia. Ce dernier l'avait communiqué à Cardano en lui demandant de s'engager à ne pas la publier, promesse que Cardano ne tint pas.
Bombelli, en 1572, applique la formule à l'équation $x^3 = 9x + 2$ et il obtient :

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{-26}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-26}}.$$

Il relève par ailleurs que $x = 4$ et $x = -2 \pm \sqrt{3}$ sont les 3 solutions de l'équation. Il se retrouve donc face au problème suivant : alors que les solutions de l'équation sont toutes réelles, il faut écrire des racines de nombres négatifs pour les calculer. Bombelli ne se démonte pas et il invente alors des règles de calcul permettant de manipuler des quantités de la forme $a + \sqrt{-b}$ avec $b > 0$ qui n'ont pas de sens. Il écrit par exemple $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. Ces nouveaux nombres ne sont pas compris tout de suite et leur manipulation conduit à des absurdités. Au 17e siècle, René Descartes propose, tant leur existence est contestable, de les appeler nombres imaginaires[2]. Il faut attendre la fin du 18e siècle et les travaux de Caspar Wessel pour que la construction des nombres complexes soit bien formalisée et pour comprendre leur interprétation géométrique. Ses travaux passent malheureusement complètement inaperçus. Quelques années plus tard, Carl Friedrich Gauss redécouvre et popularise les travaux de Wessel. Il démontre en particulier le théorème fondamental de l'algèbre (voir théorème 21.24 page 778) qui dit qu'un polynôme à coefficients complexes de degré n admet n racines comptées avec leur multiplicité.
Ce chapitre reprend et approfondit les notions apprises au lycée quant aux nombres complexes. On verra en particulier comment on peut les utiliser pour trouver les racines de certains polynômes à coefficients réels ou complexes, comment ils servent à résoudre des problèmes de géométrie plane ainsi que des problèmes d'analyse réelle comme celui de la primitivation de produits de fonctions trigonométriques ou la résolution d'équations trigonométriques. Ce chapitre servira aussi d'introduction à la notion de structure algébrique et plus particulièrement à celle de groupe et celle de corps. Les groupes sont des objets fondamentaux et vous verrez qu'ils sont omniprésents dans le cours de mathématiques durant vos deux années en classe préparatoire.
Les fonctions trigonométriques seront utilisées en permanence pendant ces deux années et ce dès ce premier chapitre. Il est indispensable d'avoir une connaissance parfaite du paragraphe B.1 page 1155 de l'annexe B.

1. Les nombres complexes ont été découvert en étudiant des équations polynomiales de degré 3 et non pas de degré 2 car les mathématiciens du 16e siècle considèrent que des quantités comme $x^2 + 1$ sont strictement positives et que cela n'a pas de sens de chercher leurs racines

2. Les nombres négatifs ne sont d'ailleurs alors guère mieux compris. Dans son dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, d'Alembert en parle comme d'une idée dangereuse : « Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. Ceux qui prétendent que 1 n'est pas comparable à -1, & que le rapport entre 1 & -1 est différent du rapport entre $--1$ & 1, sont dans une double erreur : (...) Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité négative isolée : -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée. »

Vous aurez aussi souvent à manipuler des sommes ou des produits (symbolisés respectivement par les symboles $\sum$ et Π). Il sera utile pour vous familiariser avec ces calculs de lire le paragraphe B.2 page 1158, toujours dans l'annexe B. Vous y trouverez les définitions de ces symboles ainsi que des méthodes et des formules classiques : télescopage, formule du binôme, sommes géométriques, arithmétiques, etc ... Ces notions seront re-précisées au chapitre 8.

1.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1.1 Un peu de vocabulaire

DÉFINITION 1.1 ♡ **Produit cartésien**
On appelle *produit cartésien* de deux ensembles A et B l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

Notation 1.1 On notera A^2 le produit cartésien $A \times A$.

Exemple 1.2 $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels.

DÉFINITION 1.2 ♡ **Loi de composition interne**
Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne* une application de $E \times E$ dans E :

$$\varphi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow & E \\ (a, b) & \longmapsto & a \star b \end{cases}$$

Exemple 1.3 Si $E = \mathbb{N}$, la multiplication ou l'addition des entiers forme une loi de composition interne. Ce n'est pas le cas de la soustraction car la différence de deux entiers positifs n'est pas toujours un entier positif.

1.1.2 Construction de $\mathbb{C}$

DÉFINITION 1.3 **Corps des nombres complexes**
Nous appellerons *corps des nombres complexes* que nous noterons $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$ définies de la façon suivante. Pour tous couples (a, b), $(a', b') \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \otimes (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Remarque 1.1 Nous expliciterons et justifierons l'utilisation du mot *corps* un peu plus loin.

- Pour simplifier les écritures, nous noterons + et × (ou ·) les lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$.
- Pour tout nombre réel a, nous conviendrons d'identifier le nombre complexe $(a, 0)$ avec le réel a. Nous noterons par ailleurs i le nombre complexe $(0, 1)$. En appliquant cette convention et en utilisant la définition de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$, on peut écrire pour tout nombre complexe (a, b),

  $$(a, b) = a + i\,b.$$

  En effet, $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$. Par ailleurs, $(0, b) = (b, 0) \times (0, 1) = i.b$ donc $(a, b) = a + i.b$ ou plus simplement $a + ib$.

PROPOSITION 1.1
Le nombre complexe i précédemment introduit vérifie $\boxed{i^2 = -1}$.

Démonstration *On a* $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$.

1.1.3 Propriétés des opérations sur $\mathbb{C}$

Avec les conventions d'écriture précédentes, l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{R}^2$ deviennent pour tous complexes $a + i\,b$ et $a' + i\,b'$,

$$(a + i\,b) + (a' + i\,b') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a + i\,b)(a' + i\,b') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

Proposition 1.2 Propriétés de l'addition dans $\mathbb{C}$
L'addition dans $\mathbb{C}$
– est *associative* : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} \quad z + (z' + z'') = (z + z') + z''$;
– est *commutative* : $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad z + z' = z' + z$
– possède un *élément neutre* 0 : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z + 0 = z$;
– de plus, tout nombre complexe $z = a + i\,b$ possède un *opposé*, $-z = -a - i\,b$.
On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{C}, +)$ est un *groupe commutatif*.

Démonstration *Vérifications laissées en exercice au lecteur.*

Remarque 1.2 Expliquons brièvement ce qu'est un groupe. Cette notion sera développée et étudiée dans le chapitre 19. Considérons un ensemble G et une application $\star$ qui à un couple (x, y) d'éléments de G associe un élément noté $x \star y$ de G. Une telle application est appelée une loi de composition interne sur G. On dit que $(G, \star)$ est un groupe si $\star$ est une loi de composition interne sur G qui vérifie les propriétés suivantes :

1. la loi $\star$ est associative : $\forall x, y, z \in G, \quad x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.
2. la loi $\star$ admet un élément neutre $e \in G$: $\forall x \in G, \quad x \star e = e \star x = x$.
3. tout élément x de G admet un symétrique y : $\forall x \in G, \quad \exists y \in G : \quad x \star y = y \star x = e$.

Si de plus la loi $\star$ est commutative, c'est-à-dire si elle vérifie : $\forall x, y \in G, \quad x \star y = y \star x$, alors on dit que le groupe est *abélien* (ou *commutatif*).

Il est clair que l'addition dans $\mathbb{C}$ vérifie ces propriétés. C'est aussi le cas de la multiplication dans $\mathbb{C}^*$ [3] :

Proposition 1.3 Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$
La multiplication dans $\mathbb{C}$
– est *associative* : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} \quad z(z'z'') = (zz')z''$
– est *commutative* : $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad zz' = z'z$
– possède un *élément neutre* 1 : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \times 1 = z$
De plus, tout nombre complexe non nul $z = a + i\,b$ possède un *inverse* z^{-1} vérifiant $z \times z^{-1} = 1$ donné par

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un *groupe commutatif*.

Démonstration *Prouvons l'existence d'un inverse. Soit $z = a + i\,b$ un complexe non nul. Remarquons que $(a + i\,b)(a - i\,b) = a^2 + b^2$. Le complexe z étant non nul, $a^2 + b^2 \neq 0$ [4]. En divisant les deux membres de l'égalité par $a^2 + b^2$, on trouve*

$$(a + i\,b) \times \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = 1$$

ce qui prouve que z possède un inverse z^{-1} qui s'écrit $\dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad z\left(z' + z''\right) = zz' + zz'' \quad \text{et} \quad \left(z + z'\right)z'' = zz'' + z'z''.$$

On résume les deux propositions précédentes en disant que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un *corps*. Nous définirons ce terme dans le chapitre 19.
Une conséquence importante est que les formules fondamentales suivantes sont valables dans $\mathbb{C}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$ Formule du binôme

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$ Formule de factorisation

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$ Somme géométrique

Les deux premières seront démontrées dans le théorème 19.17 page 725 et la troisième dans la proposition 8.7 page 307.

3. $\mathbb{C}^*$ représente l'ensemble des nombres complexes privé de 0
4. En effet, si la somme de deux nombres positifs est nulle, alors ces deux nombres sont nécessairement nuls.

1.2 Parties réelle, imaginaire, Conjugaison

1.2.1 Partie réelle, partie imaginaire d'un nombre complexe

PROPOSITION 1.4
Soient a, a', b et b' des réels. On a :
- $a + i\,b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
- $a + i\,b = a' + i\,b' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Pour tout nombre complexe z il existe donc un unique couple (a, b) de réels tels que $z = a + i\,b$.
- $a + i\,b$ est la *forme algébrique de* z.
- a est la *partie réelle de* z. On la note $\mathrm{Re}(z)$
- b est la *partie imaginaire de* z. On la note $\mathrm{Im}(z)$.

Démonstration *En utilisant les conventions précédentes,* $a + i\,b = 0$ *se lit* $(a, b) = (0, 0)$ *ce qui est vrai si et seulement si* $a = 0$ *et* $b = 0$. *La suite en découle facilement.*

Dans toute la suite du chapitre a et b désignent des nombres réels sauf mention du contraire.

PROPOSITION 1.5 **Nombre imaginaire pur**

1. Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0}$$

2. Si un nombre complexe a sa partie réelle nulle, on dit qu'il est *imaginaire pur*. On notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs

$$\boxed{z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0}$$

Démonstration *C'est une conséquence directe des définitions.*

1.2.2 Conjugaison

DÉFINITION 1.4 **Conjugué d'un nombre complexe**
Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$, un nombre complexe. On appelle *complexe conjugué* de z que l'on note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par $\boxed{\bar{z} = a - i\,b}$.

PROPOSITION 1.6
Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, on a

1. $\boxed{\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}}$
2. $\boxed{\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}}$.
3. $\boxed{\bar{\bar{z}} = z}$.
4. $\boxed{\bar{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}}$
5. $\boxed{\bar{z} = -z \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$

Démonstration *Calculs immédiats.*

PROPOSITION 1.7 ♡ **Propriétés de la conjugaison**
Pour tous complexes $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $\boxed{\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'}$
2. $\boxed{\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'}$
3. $\boxed{\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}}$ si $z' \neq 0$.

Démonstration *Calculs immédiats. Pour le quotient* (3), *on peut raccourcir les calculs en remarquant que si* $u = z/z'$ *alors* $z = u\,z'$ *et appliquer* (2).

Application 1.4 **Mise sous forme algébrique d'un quotient de nombres complexes.** Pour mettre sous forme algébrique le complexe $\frac{3-2i}{2+i}$, on multiplie le quotient, en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-7i}{2^2-i^2} = \frac{1}{5}(4-7i)$$

Remarque 1.3 Si $z \in \mathbb{C}$ alors $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+^*$.

1.3 Représentation géométrique des complexes

1.3.1 Représentation d'Argand

On notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan et $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan. Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal du plan. À tout point M de coordonnées (x, y) dans ce repère on peut faire correspondre le nombre complexe $z = x + i\,y$. On réalise ainsi une bijection de $\mathbb{C}$ vers le plan. À tout nombre complexe on peut faire correspondre un unique point du plan et réciproquement à tout point du plan on peut faire correspondre un unique complexe. Cette représentation est due au mathématicien français **Jean Robert Argand** (1768 – 1822) et va s'avérer d'un grand intérêt en géométrie. Certains problèmes de géométrie se traduisent très bien en calculs faisant intervenir des nombres complexes et réciproquement, certains calculs avec les nombres complexes ont une interprétation géométrique naturelle.

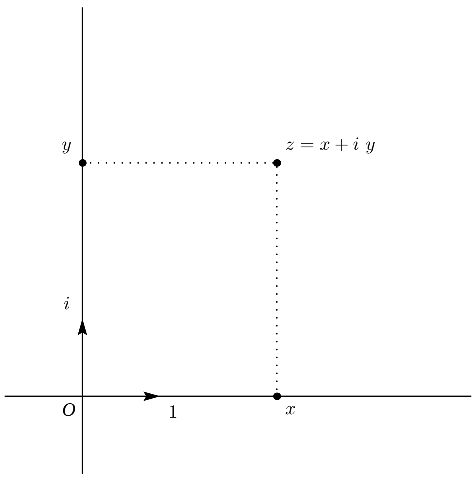


FIGURE 1.1 – Représentation d'Argand

De la même façon, on peut identifier l'ensemble des vecteurs $\mathscr{V}$ du plan avec $\mathbb{C}$ en associant à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$ de coordonnées (α, β) dans $\mathscr{R}$ le complexe $\alpha + i\,\beta$ et réciproquement.

DÉFINITION 1.5 **Image d'un nombre complexe, affixe d'un point, d'un vecteur**
Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal du plan.
- L'*image* du nombre complexe $z = x + i\,y$ est le point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$.
- L'*affixe du point* M de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$ est le nombre complexe $z = x + i\,y$ que l'on notera Aff(M).
- L' *affixe du vecteur* $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}$ est le complexe $\alpha + i\,\beta$ que l'on notera $\text{Aff}(\overrightarrow{u})$.

Remarque 1.4 Les points du plan d'affixe réelle sont situés sur *l'axe réel* $(O, \overrightarrow{\imath})$. Ceux qui ont une affixe imaginaire sont situés sur *l'axe imaginaire* $(O, \overrightarrow{\jmath})$.

1.3.2 Interprétation géométrique de quelques opérations

On considère dorénavant et pour tout le reste du chapitre qu'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ a été fixé, ce qui permet d'identifier $\mathbb{C}$ au plan $\mathscr{P}$.

PROPOSITION 1.8 **Propriétés de l'affixe**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient A et B deux points de $\mathscr{P}$:

$$\boxed{\text{Aff}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \text{Aff}(\overrightarrow{u}) + \text{Aff}(\overrightarrow{v})}$$

$$\text{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{Aff}(B) - \text{Aff}(A)$$

Démonstration

1. *Supposons que* $\text{Aff}(\vec{u}) = a + i\,b$ *et* $\text{Aff}(\vec{v}) = c + i\,d$ *alors* $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, $\vec{v} = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$ *et* $\vec{u} + \vec{v} = (a+c)\vec{\imath} + (b+d)\vec{\jmath}$. *Ce qui prouve que* $\text{Aff}(\vec{u} + \vec{v}) = (a+c) + i(b+d) = (a+i\,b) + (c+i\,d) = \text{Aff}(\vec{u}) + \text{Aff}(\vec{v})$.
2. *Comme* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$*, en utilisant l'égalité précédente, on obtient* $\text{Aff}(\overrightarrow{OB}) = \text{Aff}(\overrightarrow{OA}) + \text{Aff}(\overrightarrow{AB})$*, soit* $\text{Aff}(B) = \text{Aff}(A) + \text{Aff}(\overrightarrow{AB})$.

PROPOSITION 1.9 **Interprétation géométrique de $z \mapsto z + a$**
Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe a. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe $z + a$.

Démonstration *Au point* M *de* $\mathscr{P}$*, la translation de vecteur* $\vec{u}$ *associe le point* M′ *tel que* $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$. *Si* z, z' *et* a *sont les affixes respectives de* M, M′ *et* $\vec{u}$*, la proposition précédente conduit à* $z' = z + a$.

PROPOSITION 1.10 **Interprétation géométrique de $z \mapsto \bar{z}$**
La réflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$ est l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe $\bar{z}$.

Démonstration *La réflexion d'axe* $(O, \vec{\imath})$ *associe à tout point* M *de coordonnées* (x, y) *le point* M′ *de coordonnées* $(x, -y)$. *La proposition s'en déduit immédiatement.*

1.4 Module d'un nombre complexe, inégalités triangulaires

DÉFINITION 1.6 **Module d'un nombre complexe**
Soient $z = a + i\,b$ un nombre complexe et M son image dans $\mathscr{P}$. On appelle *module* de z le *réel positif ou nul* noté $|z|$ et donné par :

$$|z| = ||\overrightarrow{OM}||$$

PROPOSITION 1.11 ♡ **Expression du module d'un nombre complexe**
Pour tout complexe $z = a + i\,b$,

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Démonstration *Soit* $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ *et soit* M *l'image de* z *dans* $\mathscr{P}$ *alors on sait que* $|z|^2 = ||\overrightarrow{OM}||^2 = a^2 + b^2$. *Par ailleurs,* $z\bar{z} = (a + i\,b)(a - i\,b) = a^2 + b^2$.

PROPOSITION 1.12 ♡ **Propriétés du module**
Pour tout nombre complexe z,

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z| = |\bar{z}|$
3. $\text{Re}(z) \leqslant |\text{Re}(z)| \leqslant |z|$
4. $\text{Im}(z) \leqslant |\text{Im}(z)| \leqslant |z|$

Démonstration

1. *Soit* $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| = 0$ *alors* $a^2 + b^2 = 0$ *ce qui n'est possible que si* $a = b = 0$. *Réciproquement, si* $z = 0$ *alors* $|z| = 0$.
2. *Évident.*
3. *Si* $z = a + i\,b$ *alors* $\text{Re}(z) = a \leqslant |a| = \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.
4. *De même.*

PROPOSITION 1.13
Pour tous nombres complexes z, z',

1. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$.
2. $|z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} = \bar{z}$.
3. $|zz'| = |z||z'|$.
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$.

Démonstration

1. *Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a*

$$z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

donc $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

2. *Si $|z| = 1$, le résultat précédent amène :* $\frac{1}{z} = \overline{z}$. *La réciproque est évidente.*
3. *Pour la troisième, écrivons* $|zz'|^2 = (zz')\overline{(zz')} = z\bar{z}z'\bar{z}' = |z|^2|z'|^2$. *On termine en passant à la racine carrée et en remarquant que* $|zz'| \geqslant 0$ *et que* $|z| \geqslant 0$, $|z'| \geqslant 0$.
4. *Et pour la dernière :* $\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \frac{z}{z'}\frac{\overline{z}}{\overline{z}'} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$. *On termine alors de la même façon qu'en 3.*

PROPOSITION 1.14 ♡♡♡ **Inégalités triangulaires**
Pour tous nombres complexes z et z', on a

1. $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$.
2. $\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z-z'|$.

Démonstration *Soient deux complexes $z, z' \in \mathbb{C}$.*

1. *On peut démontrer de manière géométrique la première inégalité triangulaire en remarquant que c'est une traduction, dans le cadre complexe, de celle vue pour le triangle en classe de cinquième. Si le point* M *est l'image du complexe z et le point* N *l'image du complexe $z+z'$ dans $\mathscr{P}$, alors, dans le triangle* OMN, $\mathrm{ON} \leqslant \mathrm{OM}+\mathrm{MN}$. *Comme* $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{\mathrm{MN}}) = \mathrm{Aff}(\mathrm{N}) - \mathrm{Aff}(\mathrm{M}) = z+z'-z = z'$, *on a* $\mathrm{MN} = |z'|$. *Par ailleurs,* $\mathrm{ON} = |z+z'|$ *et* $\mathrm{OM} = |z|$. *On peut aussi démontrer cette première inégalité de manière algébrique. Développons le module au carré*

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{z'}) + |z'|^2$$

En utilisant l'inégalité $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant |z||z'|$, *on en tire que*

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = \left(|z|+|z'|\right)^2$$

et il suffit de prendre la racine carrée de ces nombres positifs.

2. *Utilisons l'inégalité triangulaire déjà démontrée :*

$$|z| = |(z+z') + (-z')| \leqslant |z+z'| + |-z'| = |z+z'| + |z'|$$

d'où $|z|-|z'| \leqslant |z+z'|$. *On obtient de façon symétrique*

$$|z'| = |(z+z') + (-z)| \leqslant |z+z'| + |z|$$

d'où également $|z'|-|z| \leqslant |z+z'|$. *Puisque* $|z|-|z'| \leqslant |z+z'|$ *et que* $-(|z|-|z'|) \leqslant |z+z'|$, *on a bien* $\big||z|-|z'|\big| \leqslant |z+z'|$.

PROPOSITION 1.15
Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit A le point du plan d'affixe a. L'ensemble des points du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

- $|z-a| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.
- $|z-a| \leqslant r$ est le disque fermé de centre A et de rayon r.
- $|z-a| < r$ est le disque ouvert de centre A et de rayon r.

Démonstration *Ces trois résultats proviennent de l'égalité* $|z-a| = \mathrm{AM}$

1.5 Nombres complexes de module 1

1.5.1 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

PROPOSITION 1.16 **Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module** 1
Nous noterons $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Cet ensemble vérifie les propriétés suivantes.

1. $\mathbb{U}$ est *stable* pour le produit : $\forall z, z' \in \mathbb{U}, \quad z.z' \in \mathbb{U}$.

2. Le produit est *associatif* : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{U}, \quad (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$.
3. Le complexe 1 est élément de $\mathbb{U}$ et est l'élément *neutre* du produit : $\forall z \in \mathbb{U}, \quad z \times 1 = 1 \times z = z$.
4. Si z est élément de $\mathbb{U}$, alors son *inverse* $\dfrac{1}{z}$ aussi. De plus, on a $\boxed{\dfrac{1}{z} = \bar{z}}$.
5. Le produit est *commutatif* : $\forall z, z' \in \mathbb{U}, \quad z \times z' = z' \times z$.

On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif appelé *groupe des nombres complexes de module* 1.

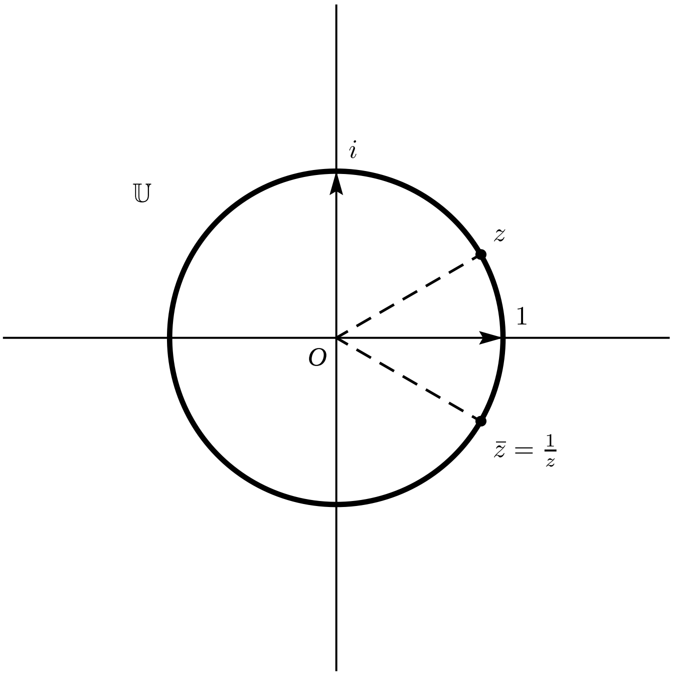


FIGURE 1.2 – groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Démonstration *Soient $z, z' \in \mathbb{U}$.*

1. *On a : $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$. Donc $z \times z' \in \mathbb{U}$.*
2. *L'associativité est une conséquence directe de l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$.*
3. *On a : $|1| = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}$. La suite est évidente.*
4. *On a : $z \times \bar{z} = \bar{z} \times z = |z|^2 = 1$ donc $\bar{z}$ est l'inverse de z. En utilisant les notations introduites précédemment, on obtient $z^{-1} = 1/z = \bar{z}$.*
5. *La commutativité est une conséquence directe de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 1.5 On verra dans l'exemple 19.10 page 722 une méthode plus rapide pour vérifier que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe.

1.5.2 Exponentielle imaginaire

On suppose ici connues les propriétés élémentaires des fonctions cosinus et sinus ainsi que les différentes formules de trigonométrie circulaire. On pourra se reporter à ce sujet à l'annexe B paragraphe B.1. Ce paragraphe doit être parfaitement maîtrisé.

LEMME 1.17
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un réel (pas unique) θ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

Démonstration *Comme $a^2 + b^2 = 1$, on a nécessairement $-1 \leqslant a \leqslant 1$ et $-1 \leqslant b \leqslant 1$. L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $\cos$ étant $[-1, 1]$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\alpha = a$. Comme : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, il vient $\sin^2\alpha = b^2$. Une des deux égalités suivantes est alors vérifiée par α, $\sin\alpha = b$ ou bien $\sin\alpha = -b$.*
– *Si la première est vraie, nous posons $\theta = \alpha$.*
– *Sinon, la seconde est alors vraie et nous posons $\theta = -\alpha$.*
Dans les deux cas, le réel θ construit vérifie les deux égalités mentionnées dans l'énoncé du lemme.

PROPOSITION 1.18
Pour tout complexe $z \in \mathbb{U}$, il existe un réel θ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Démonstration *Soit $z = a + ib \in \mathbb{U}$. Par définition de $\mathbb{U}$, a et b vérifient $a^2 + b^2 = 1$. Par application du lemme précédent, il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. On a donc $z = \cos\theta + i\sin\theta$.*

Remarque 1.6
Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe z alors θ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}}\right)$. Cette mesure est définie à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

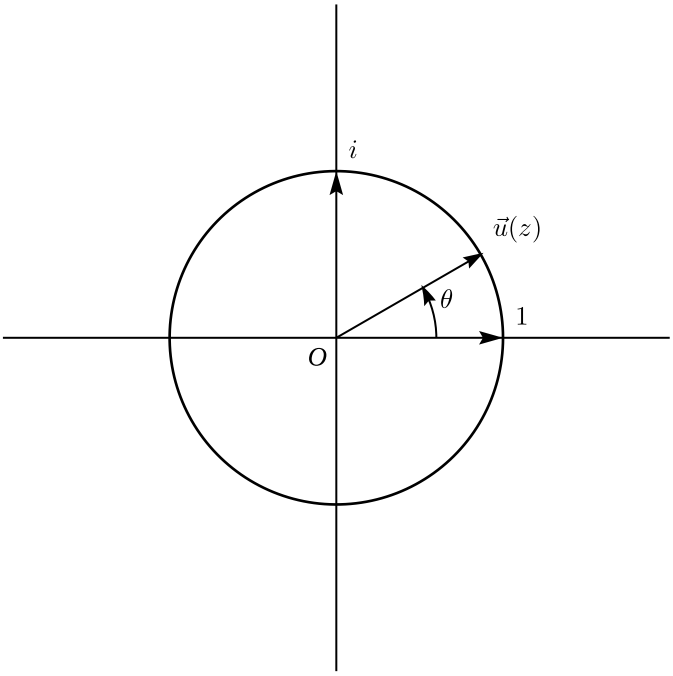


FIGURE 1.3 – Interprétation géométrique de la proposition 1.18

DÉFINITION 1.7 **Exponentielle imaginaire**

Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, nous appellerons *exponentielle imaginaire* de θ et nous noterons $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Remarque 1.7
- Soit $z \in \mathbb{U}$. D'après la proposition 1.18, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
- Réciproquement, tout nombre complexe de la forme $e^{i\theta}$ est de module 1. Donc

$$\boxed{\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}\right\}}$$

Remarque 1.8 La définition précédente est justifiée par l'égalité suivante, qui généralise la propriété fondamentale de l'exponentielle réelle $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{a+b} = e^a e^b$.

PROPOSITION 1.19 ♡ **Propriété de morphisme de l'exponentielle imaginaire**

$$\boxed{\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}}$$

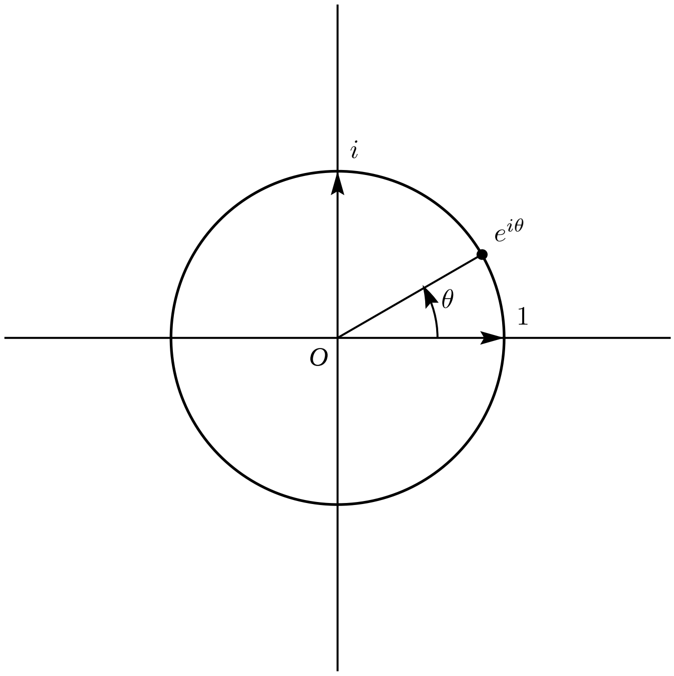


FIGURE 1.4 – $e^{i\theta}$

Démonstration *Soient* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{aligned}
e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \text{ par définition de l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur}\\
&= \left(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')\right) + i\left(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')\right) \text{par application des formules d'addition}\\
&= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\left(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right)\\
&= e^{i\theta}e^{i\theta'}
\end{aligned}$$

Remarque 1.9

Afin d'expliquer cette terminologie, explicitons ce qu'est un morphisme de groupes. Cette notion sera étudiée dans le paragraphe 19.1.3 du chapitre 19. Soit $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes. On dit qu'une application φ de G_1 dans G_2 est un *morphisme* de groupes lorsque

$$\forall x, y \in G_1, \quad \varphi(x \star_1 y) = \varphi(x) \star_2 \varphi(y)$$

Nous pouvons alors reformuler la propriété précédente.

PROPOSITION 1.20

La fonction exponentielle est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{U}, \times)$

Remarque 1.10

Avec les notations de la définition 1.9, on définit

- Le *noyau* du morphisme φ comme étant le sous-ensemble de G_1 noté $\operatorname{Ker}\varphi$ donné par : $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in G_1 \mid \varphi(x) = e_2\}$ où e_2 est le neutre de G_2.
- L'*image* du morphisme φ comme étant le sous-ensemble de G_2 noté $\operatorname{Im}\varphi$ donné par : $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in G_1\}$.

Notre morphisme de groupes

$$\varphi : \begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{cases}$$

a pour noyau $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}}$ et pour image $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{U}}$.

PROPOSITION 1.21

Soient θ et θ' deux réels, on a $\boxed{e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \theta' + 2k\pi}$

Démonstration *Si* $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ *alors* $e^{i(\theta-\theta')} = 0$ *et* $\theta - \theta' = 2k\pi$ *où* $k \in \mathbb{Z}$. *Par conséquent* $\theta = \theta' + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$. *La réciproque est évidente.*

Remarque 1.11 $e^{i\times 0}=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=1$, $e^{i\pi}=-1$. Cette dernière égalité, écrite sous la forme $\boxed{e^{i\pi}+1=0}$ est connue sous le nom de « *Relation d'Euler* ». Elle est remarquable car elle lie cinq nombres fondamentaux en mathématiques $e, i, \pi, 1$ et 0.

COROLLAIRE 1.22
Pour tout réel $\theta\in\mathbb{R}$, on a $\boxed{e^{-i\theta}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}=\overline{e^{i\theta}}}$

Démonstration *En effet, si $\theta\in\mathbb{R}$, $e^{i\theta}e^{-i\theta}=e^{i(\theta-\theta)}=e^{i\times 0}=1$. Par conséquent, l'inverse du nombre complexe $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$. Comme $e^{i\theta}\in\mathbb{U}$, par application de la proposition 1.16, l'inverse de $e^{i\theta}$ est aussi $\overline{e^{i\theta}}$, d'où les deux égalités ci-dessus.*

THÉORÈME 1.23 ♡ **Formules d'Euler**

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \boxed{\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}\quad\text{et}\quad\boxed{\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

Démonstration *Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a :*

$$\begin{cases} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta\end{cases}$$

En additionnant la première équation à la deuxième et en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par 2, on obtient la formule annoncée pour $\cos\theta$. De même, en soustrayant la deuxième équation à la première et en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par $2i$, on obtient la formule annoncée pour $\sin\theta$.

BIO 1 Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg.



Peu après sa naissance les parents d'Euler déménagent à Riehen. Le père d'Euler est un ami de la famille Bernoulli et Jean Bernoulli, dont Euler profita des leçons, est alors considéré comme le meilleur mathématicien européen. Le père d'Euler souhaite que Leohnard devienne comme lui pasteur mais Jean Bernoulli qui a remarqué les aptitudes remarquables de son élève, le convainc qu'il est destiné aux mathématiques.
Après ses études à Bâle, il obtient un poste à Saint-Pétersbourg en 1726 qu'il quitte pour un poste à l'académie de Berlin en 1741. Malgré la qualité de ses contributions à l'académie, il est contraint de la quitter en raison d'un conflit avec Frédéric II. Voltaire qui était bien vu par le roi avait des qualités rhétoriques qu'Euler n'avait pas et dont il fut la victime. En 1766, il retourne à Saint-Pétersbourg où il décéda en 1783.
Euler souffrit tout au long de sa vie de graves problèmes de vue. Fait remarquable, il effectua la plus grande partie de ses découvertes lors des dix-sept dernières années de sa vie, alors qu'il était devenu aveugle. Il fut, avec 886 publications, un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps. Il est à l'origine de multiples contributions en analyse (nombres complexes, introduction des fonctions logarithmes et exponentielles, détermination de la somme des inverses des carrés d'entiers, introduction de la fonction gamma, invention du calcul des variations, ...), géométrie (cercle et droite d'Euler d'un triangle, formule liant le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre, ...), théorie des nombres (fonction indicatrice d'Euler, ...), théorie des graphes (problème des sept ponts de Königsberg) ou même en physique (angles d'Euler, résistance des matériaux, dynamique des fluides...) et en astronomie (calcul de la parallaxe du soleil,...).

PROPOSITION 1.24 ♡ **Formule de Moivre**

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad\forall n\in\mathbb{Z},\quad\boxed{e^{in\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^n}$$

Démonstration *Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Montrons d'abord par récurrence la propriété pour $n\in\mathbb{N}$.*

– *Si $n=0$, on a : $e^{i\times 0}=1=\left(e^{i\theta}\right)^0$. L'égalité est donc vraie au rang 0.*

– *Supposons l'égalité vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$:*

$$\begin{aligned} e^{i(n+1)\theta} &= e^{i(n\theta+\theta)} \\ &= e^{i\theta}e^{in\theta} \text{ car exp est un morphisme de groupes} \\ &= e^{i\theta}\left(e^{i\theta}\right)^n \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \left(e^{i\theta}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Démontrons maintenant la propriété pour $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. On a alors $-n \in \mathbb{N}$ et on peut appliquer la relation que nous venons de prouver à l'entier $-n$. Cela donne : $e^{i(-n)\theta} = \left(e^{-i\theta}\right)^n$. Mais d'après la proposition 1.22, on a $e^{i(-n)\theta} = e^{-in\theta} = \dfrac{1}{e^{in\theta}}$ et $\left(e^{-i\theta}\right)^n = \left(\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)^n$, donc $\dfrac{1}{e^{in\theta}} = \left(\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)^n$ et l'on a bien $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$. La relation est alors démontrée pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Les formules suivantes interviennent souvent dans les exercices.

PROPOSITION 1.25 ♡♡♡ **Factorisation par les angles moitiés**

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{ix}+1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2e^{\frac{ix}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \qquad e^{ix}-1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2ie^{\frac{ix}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Remarque 1.12 On a la factorisation de l'angle moitié plus générale (voir figure 1.6) :

$$e^{ix}+e^{iy} = e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right) = 2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

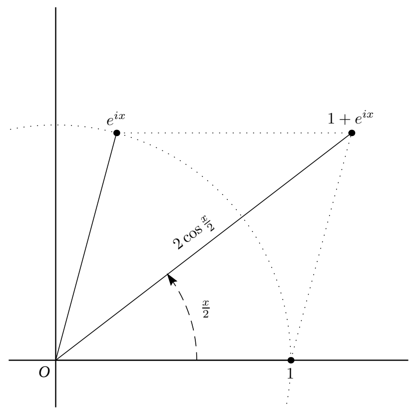


FIGURE 1.5 – $e^{ix}+1 = 2e^{\frac{ix}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

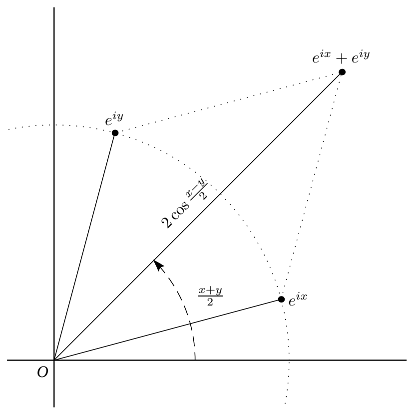


FIGURE 1.6 – $e^{ix}+e^{iy} = 2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

BIO 2 Abraham de Moivre né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François et mort le 27 novembre 1754 à Londres.

Abraham de Moivre est un mathématicien français qui vécut la plus grande partie de sa vie en exil à Londres en raison de la révocation de l'Edit de Nantes. Il fut l'auteur de deux ouvrages majeurs en mathématiques. Le premier, consacré aux probabilités ``Doctrine of chance´´et paru en 1718, s'intéresse en particulier au calcul des probabilités d'un événement aléatoire dépendant d'autres événements aléatoires ainsi qu'aux problèmes de convergence des variables aléatoires. Le second, ``Miscellanea Analytica´´, paru en 1730, est un ouvrage d'analyse dans lequel figure pour la première fois la fameuse « formule de Stirling ». On raconte cette histoire au sujet de sa mort. Il s'était rendu compte qu'il dormait un quart d'heure de plus chaque nuit. En utilisant cette suite arithmétique, il avait calculé à quelle date il mourrait : cela devait correspondre au jour où il dormirait 24 heures. Ce fut exactement ce qu'il advint.



1.6 Argument, fonction exponentielle complexe

1.6.1 Argument d'un nombre complexe

PROPOSITION 1.26 **Argument d'un nombre complexe, Argument principal d'un nombre complexe**
Soit z un nombre complexe *non nul*. Il existe au moins un nombre réel θ tel que $\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$ où $\rho = |z| \in \mathbb{R}_+^*$ est le module de z.
– $\rho e^{i\theta}$ est une *forme trigonométrique* de z.
– Le réel θ est appelé *un argument de* z.
Un tel nombre n'est pas unique : si θ_0 est un argument de z, l'ensemble de tous les arguments de z est donné par $\{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On notera $\arg(z) = \theta_0\,[2\pi]$. Enfin, il existe un unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appellera *l'argument principal* de z.

Démonstration *Soit z un nombre complexe non nul. Posons $\rho = |z| \neq 0$, on a alors $z/\rho \in \mathbb{U}$. D'après la remarque 1.7, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $z/\rho = e^{i\theta}$ ce qui prouve l'existence d'un argument de z. Si $\theta' \in \mathbb{R}$ est un autre argument de z, on a bien : $\theta' \equiv \theta\,[2\pi]$. En effet, en partant de $z = e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ et en utilisant la proposition 1.21, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$.*

Exemple 1.5 On a :

$$\arg 1 \equiv 0\,[2\pi] \quad \arg i \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad \arg -1 \equiv \pi\,[2\pi] \quad \arg -i \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

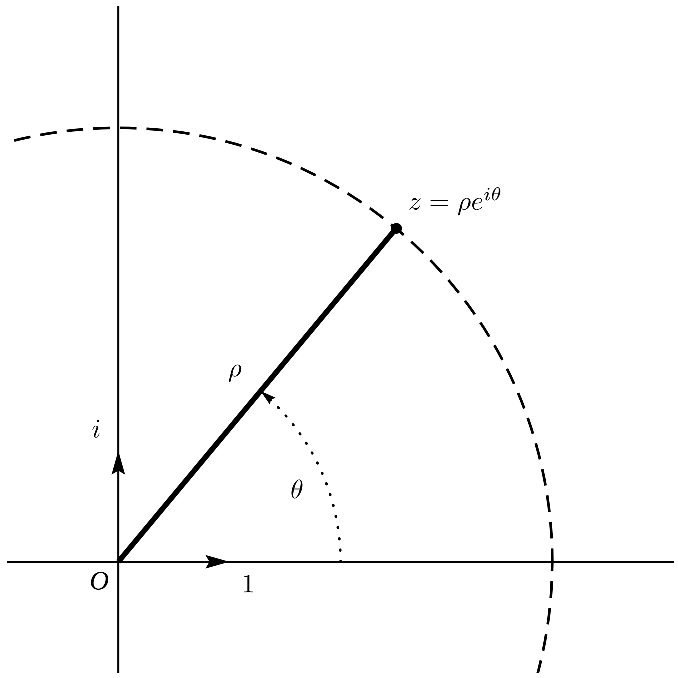


FIGURE 1.7 – Représentation trigonométrique d'un nombre complexe

PLAN 1.1 : Comment calculer le module et un argument d'un nombre complexe donné

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ d'argument $\theta \in \mathbb{R}$ et de module $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimons ρ et θ en fonction de a et b :
- *On a $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*
- *Comme $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, on cherche un unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ vérifiant $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.*

PROPOSITION 1.27 **Produit et quotient de deux nombres complexes sous forme trigonométrique**
Soient deux nombres complexes non nuls : $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$,

1. $\boxed{zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}}$
2. $\boxed{\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}}$.

__Démonstration__ C'est une conséquence directe de la proposition 1.19.

COROLLAIRE 1.28
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

1. $\boxed{\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]}$
2. $\boxed{\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]}$.
3. $\boxed{\arg(\bar{z}) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]}$

__Démonstration__ Démontrons la première égalité, la démonstration des deux suivantes est identique. Notons θ (respectivement θ') un argument de z (respectivement de z') et ρ (respectivement ρ') le module de z (de z'). Par application de la propriété précédente, $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$. Par conséquent $\arg(zz') = \theta + \theta'\ [2\pi] = \arg z + \arg z'\ [2\pi]$.

PROPOSITION 1.29
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\boxed{\arg(z^n) = n\arg(z)\ ([2\pi])}$

__Démonstration__ Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$. L'écriture trigonométrique de z est $z = \rho e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z et ρ est le module de z. On a donc : $z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n \left(e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$ par application de la formule de Moivre. Par conséquent, $\arg(z^n) = n\theta\ ([2\pi]) = n\arg(z)\ [2\pi]$.

1.6.2 Fonction exponentielle complexe

On suppose ici connues les propriétés de la fonction exponentielle réelle. On pourra à ce sujet consulter le paragraphe 4.1.2.

DÉFINITION 1.8 **Fonction exponentielle complexe**
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle exponentielle de z le nombre complexe

$$\boxed{e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}}$$

La fonction qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe e^z ainsi définie s'appelle *fonction exponentielle complexe*.

Remarque 1.13
- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a[\cos b + i \sin b]$
- Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a $|e^z| = \left|e^a e^{ib}\right| = |e^a|\left|e^{ib}\right| = |e^a| = e^a$ car la fonction exponentielle réelle est strictement positive.
- La fonction exponentielle complexe ne s'annule jamais : $|e^z| = e^a \neq 0$. La fonction exponentielle complexe est donc à image dans $\mathbb{C}^*$.
- La fonction exponentielle complexe prolonge la fonction exponentielle réelle (ce qui signifie que sa restriction aux nombres réels coïncide avec la fonction exponentielle réelle).
- Si Z est un complexe non nul, on peut l'écrire sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$. Un complexe $z = a + ib$ vérifie $e^z = Z$ si et seulement si $e^a e^{ib} = \rho e^{i\theta}$. En prenant le module, on trouve que $\boxed{a = \ln(\rho)}$ puis ensuite $\boxed{b = \theta + 2k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z})$.
- La fonction exponentielle complexe $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\star \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}\right.$ est surjective (Voir la définition 1.7 page 1139) mais pas injective (Voir la définition 1.6 page 1138). Il sera impossible à notre niveau de définir un logarithme complexe.

PROPOSITION 1.30 **La fonction exponentielle complexe est un morphisme du groupe** $(\mathbb{C}, +)$ **dans le groupe** $(\mathbb{C}^*, \times)$

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \boxed{e^{z+z'} = e^z e^{z'}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \boxed{\left(e^z\right)^{-1} = \left(e^{-z}\right)}$$

Démonstration
- *Soient $z = a + ib, z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$. En utilisant les propriétés de l'exponentielle réelle et imaginaire, $e^z e^{z'} = e^a e^{ib} e^{a'} e^{ib'} = e^{a+a'} e^{i(b+b')} = e^{z+z'}$.*
- *Soit $z \in \mathbb{C}$. Par application de la propriété précédente, $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. Par conséquent, e^{-z} est l'inverse de e^z et $\left(e^z\right)^{-1} = \left(e^{-z}\right)$.*

Vous pouvez maintenant étudier l'appendice B.3 pour des applications très importantes de l'exponentielle imaginaire aux calculs trigonométriques. Avant cela, il est conseillé de lire l'appendice B.2 pour vous familiariser avec les techniques de calcul de sommes et à la notation $\sum$.

1.7 Racines n-ièmes de l'unité

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul : $n \in \mathbb{N}^*$.

DÉFINITION 1.9 **Racine n-ième d'un nombre complexe**
Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *racine n-ième du nombre complexe z* tout nombre complexe ξ vérifiant $\boxed{\xi^n = z}$.

Exemple 1.6 i est une racine deuxième de -1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine cubique de 1, $i\sqrt{2}$ est une racine deuxième de -2.

DÉFINITION 1.10 **Racine n-ième de l'unité**
On appelle *racine n-ième de l'unité* une racine n-ième de 1, c'est-à-dire un nombre complexe z tel que $\boxed{z^n = 1}$. On notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des
racines n-ièmes de l'unité : $\boxed{\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}}$.

Remarque 1.14
- Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $1 \in \mathbb{U}_n$ et $-1 \in \mathbb{U}_n$ si et seulement si n est pair.
- On a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. En effet, si $z \in \mathbb{U}_n$ alors $z^n = 1$ et donc $|z|^n = |z^n| = 1$. Comme $|z| \in \mathbb{R}_+^*$, cette égalité n'est possible que si $|z| = 1$.

Notation 1.7 Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$. On note $[\![m, n]\!]$ l'intervalle d'entiers donné par :

$$[\![m, n]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant k \leqslant n\}.$$

PROPOSITION 1.31 ♡♡♡ **Les racines n-ièmes de l'unité sont de la forme $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$**
Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité. Elles sont données par les puissances de ω : ω^k où $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$$

Démonstration *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$. En prenant le module, on en déduit que $|z| = 1$. Il existe donc un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. On doit alors avoir $e^{in\theta} = 1$, c'est-à-dire $n\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme on veut $\theta \in [0, 2\pi[$, on doit avoir $0 \leqslant k < n$ et donc $k \in [\![0, n-1]\!]$ d'où $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega^k$. Réciproquement, tout complexe de cette forme vérifie bien $z^n = 1$.*

PROPOSITION 1.32 $(\mathbb{U}_n, \times)$ **est un groupe commutatif**
L'ensemble $\mathbb{U}_n$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{U}_n$ est *stable* pour le produit (c-a-d : $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{U}_n, \quad \xi \times \xi' \in \mathbb{U}_n$).
2. Le produit est *associatif* (c-a-d : $\forall \xi, \xi', \xi'' \in \mathbb{U}_n, \quad (\xi \times \xi') \times \xi'' = \xi \times (\xi' \times \xi'')$).
3. Le complexe 1 est élément de $\mathbb{U}_n$ et est l'élément *neutre* du produit (c-a-d : $\forall \xi \in \mathbb{U}_n, \quad \xi \times 1 = 1 \times \xi = \xi$).
4. Si ξ est élément de $\mathbb{U}_n$, alors son *inverse* $\frac{1}{\xi}$ aussi. De plus, on a :
$$\frac{1}{\xi} = \bar{\xi}$$
5. Le produit est *commutatif* (c-a-d : $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{U}_n, \quad \xi \times \xi' = \xi' \times \xi$).

$(\mathbb{U}_n, \times)$ est donc muni d'une structure de groupe commutatif.

Démonstration *Soient $\xi, \xi' \in \mathbb{U}_n$:*

1. *On a : $(\xi \times \xi')^n = \xi^n \times \xi'^n = 1$. Donc $\xi \times \xi' \in \mathbb{U}_n$.*
2. *L'associativité est une conséquence directe de l'associativité du produit dans $\mathbb{C}$.*
3. *On a : $1^n = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}_n$. La suite est évidente.*
4. *Remarquant tout d'abord que $\bar{\xi}^n = \overline{\xi^n} = 1$. Donc $\bar{\xi} \in \mathbb{U}_n$. De plus : $\xi \times \bar{\xi} = \bar{\xi} \times \xi = 1$ car $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. Par conséquent, $\xi^{-1} = 1/\xi = \bar{\xi}$.*
5. *La commutativité est une conséquence directe de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 1.15 En fait, $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$ qui lui-même est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Nous verrons là aussi plus tard comment prouver la propriété précédente de manière plus rapide (voir 46 page 722). L'application $\theta : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, z \mapsto z^n$ est un morphisme de groupe de noyau $\mathbb{U}_n$.

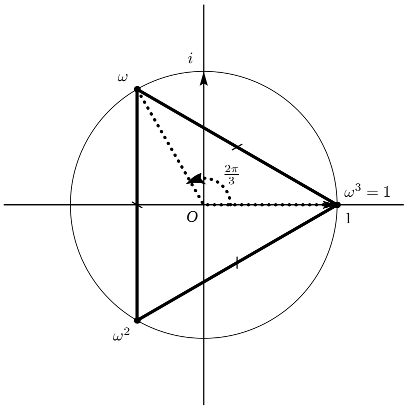


FIGURE 1.8 – $\mathbb{U}_3$

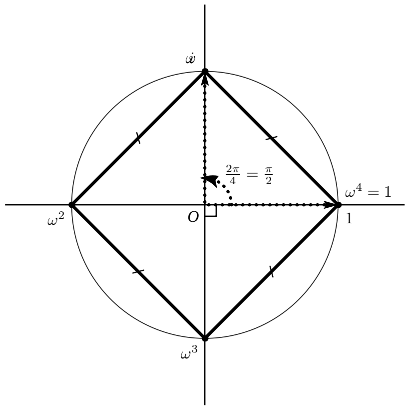


FIGURE 1.9 – $\mathbb{U}_4$

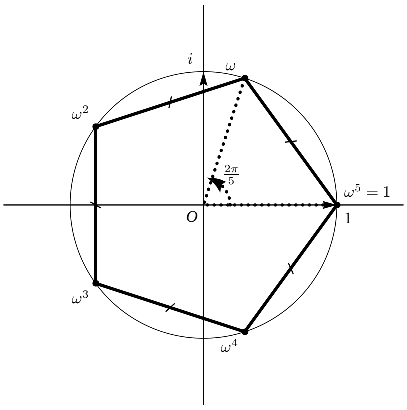


FIGURE 1.10 – $\mathbb{U}_5$

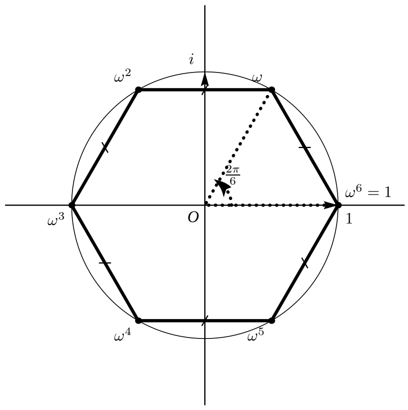


FIGURE 1.11 – $\mathbb{U}_6$

PROPOSITION 1.33 ♡ **La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle**

Soit un entier $n \geqslant 2$. On a : $\boxed{1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0}$.

Démonstration *On utilise la formule d'une somme géométrique de raison* $\omega \neq 1$ *et* $\omega^n = 1$ *:*

$$1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0.$$

Remarque 1.16 On utilisera très souvent les racines cubiques de l'unité. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. C'est une racine cubique primitive de l'unité au sens où $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Les puissances de j sont simples à calculer :

$$j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 3p \\ j & \text{si } k = 3p+1 \\ j^2 & \text{si } k = 3p+2 \end{cases}$$

Les propriétés suivantes interviennent souvent : $\boxed{j^2 = \overline{j} = 1/j}$ et $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

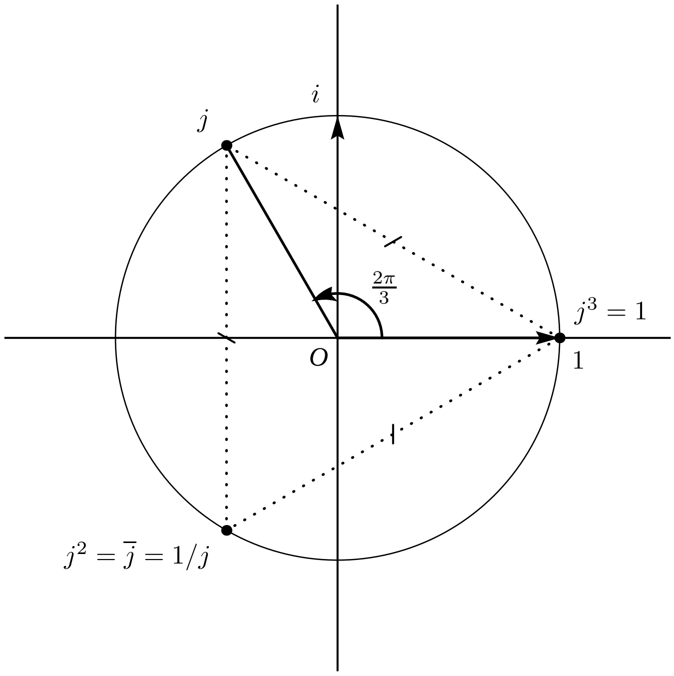


FIGURE 1.12 – Racines cubiques de l'unité

PROPOSITION 1.34 **Expression des racines n-ièmes d'un nombre complexe**
Un complexe *non nul* $z = \rho e^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes données par

$$\boxed{Z_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} = \rho^{1/n} e^{i\theta/n}\omega^k, \quad k \in [\![0, n-1]\!]}.$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ou toute autre racine n-ième primitive de l'unité.

Démonstration *Notons $Z_0 = \rho^{1/n} e^{i\theta/n}$. On a bien $Z_0^n = z$ et donc $Z^n = z$ si et seulement si $(Z/Z_0)^n = 1$ c'est-à-dire si et seulement si (Z/Z_0) est une racine n-ième de l'unité.*

On pourra consulter plus tard l'annexe B paragraphe B.4.4 afin de voir le rôle des racines de l'unité dans la factorisation de certains polynômes.

1.8 Équations du second degré

1.8.1 Racines carrées

DÉFINITION 1.11 **Racine carrée d'un nombre complexe**
Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de z une racine deuxième de z, c'est-à-dire un complexe Z vérifiant $Z^2 = z$.

Par application de la proposition 1.34, on peut affirmer :

PROPOSITION 1.35
Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées. De plus, ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.

⚠ *Attention 1.8* La notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que pour $z \in \mathbb{R}_+$. Si on l'utilise à mauvais escient, on aboutit vite à des absurdités. Par exemple : $-1 = \sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

Remarque 1.17
- Le complexe nul $z = 0$ ne possède qu'une seule racine carrée 0.
- Si $x \in \mathbb{R}_+$, ses deux racines carrées sont données par $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$.
- Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, ses deux racines carrées sont données par $i\sqrt{|x|}$ et $-i\sqrt{|x|}$. En effet, la forme trigonométrique de x est $x = |x|\, e^{i\pi}$. D'après la proposition 1.34, les deux racines carrées de x sont $\sqrt{|x|}e^{i\pi/2} = i\sqrt{|x|}$ et $\sqrt{|x|}e^{\pi/2}e^{2\pi/2} = -i\sqrt{|x|}$.

Pour calculer en pratique les racines carrées d'un nombre complexe z, le plus simple consiste souvent à mettre z sous forme trigonométrique et à appliquer les formules précédentes. On dispose également d'une méthode permettant de calculer les parties réelles et imaginaires des racines carrées de z.

PLAN 1.2 : **Comment calculer les racines carrées d'un nombre complexe**

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. *Soit* $Z = X + iY$ *une des deux racines carrées de* z : $Z^2 = z$. *On a :*

$$\begin{cases} |Z|^2 = |z| \\ \operatorname{Re} Z^2 = \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} Z^2 = \operatorname{Im} z \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ X^2 - Y^2 = a \\ 2XY = \operatorname{Im} z \end{cases}$$

Et en particulier

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ X^2 - Y^2 = a \\ XY \text{ est du signe de } \operatorname{Im} z \end{cases}$$

Exemple 1.9 Calculons les racines carrées de $z = 8 - 6i$. Soit $Z = X + iY$ une des deux racines carrées de z. Les réels X et Y satisfont

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{100} = 10 \\ X^2 - Y^2 = 8 \\ XY \text{ est négatif} \end{cases}$$

Par addition des deux premières équations, on obtient : $X = 3$ ou $X = -3$. Par soustraction de ces deux mêmes équations, on obtient : $Y = 1$ ou $Y = -1$. Comme le produit XY est négatif, les seules possibilités sont $X = 3$ et $Y = -1$ ou alors $X = -3$ et $Y = 1$. En conclusion, $Z = 3 - i$ ou $Z = -3 + i$. On vérifie au brouillon que ces deux complexes vérifient bien $Z^2 = 8 - 6i$.

1.8.2 Équations du second degré

THÉORÈME 1.36 ♡ **Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes**
Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (\star)$$

Notons $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ le *discriminant* de l'équation $(\star)$. On a :

- Si $\Delta = 0$, l'équation $(\star)$ admet une racine double z_0 donnée par : $\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{2a}}$.
- Si $\Delta \neq 0$ et si δ désigne une des deux racines carrées de Δ alors l'équation $(\star)$ admet deux racines distinctes z_1 et z_2 données par : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}}$ et $\boxed{z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}}$.

Démonstration *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *une solution de l'équation* $(\star)$. *Puisque* $a \neq 0$, *nous pouvons écrire le trinôme sous forme canonique*

$$0 = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

En notant $Z = z + b/2a$, *on doit avoir* $Z^2 = \Delta/4a^2$.
– *Si* $\Delta = 0$, *alors* $Z = 0$ *c'est à dire* $z = -b/(2a)$.
– *Si* $\Delta \neq 0$, *en notant* δ *une racine carrée complexe de* Δ, $(Z - \delta)(Z + \delta) = 0$ *c'est à dire* $Z = \pm\delta$ *ou encore* $z = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ *ou* $z = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.
On vérifie dans chacun des cas précédents que z est effectivement solution de l'équation.

COROLLAIRE 1.37 ♡ **Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels**
Soient a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$. Considérons l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\star)$$

Notons $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ son discriminant. Remarquons que $\Delta \in \mathbb{R}$. On a :

- Si $\Delta > 0$, $(\star)$ admet deux solutions distinctes, toutes deux réelles x_1 et x_2 données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- Si $\Delta = 0$, $(\star)$ admet une seule solution x_0 donnée par :

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

- Si $\Delta < 0$, $(\star)$ admet deux solutions distinctes, toutes deux *complexes conjuguées* x_1 et x_2 données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$$

Démonstration

– *Si $\Delta \geqslant 0$, une racine de Δ est donnée par $\delta = \sqrt{\Delta}$ et les formules pour x_0, x_1 et x_2 se déduisent de celles énoncées dans le théorème 1.36.*

– *Si $\Delta < 0$, une racine de Δ est donnée, d'après la remarque 1.17 par $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$. D'après les formules énoncées dans le théorème 1.36, les deux racines de $(\star)$ sont $x_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ qui sont bien complexes et conjuguées.*

On pourra se reporter à l'annexe B paragraphe B.4.1 pour des précisions supplémentaires sur les trinômes du second degré et au paragraphe B.4.5 pour des applications des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

1.9 Nombres complexes et géométrie plane

1.9.1 Distance

PROPOSITION 1.38

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b. La distance de A à B est donnée par $\boxed{\mathrm{AB} = |b-a|}$

Démonstration *L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est donnée par $\mathrm{Aff(B)} - \mathrm{Aff(A)}$. De plus, par définition, $|b-a| = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \mathrm{AB}$.*

1.9.2 Barycentre

PROPOSITION 1.39

Soient A, B et G trois points d'affixes respectives a, b et g ; Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Alors, G est le barycentre des points A et B affectés respectivement des poids α et β si et seulement si

$$\boxed{\alpha(g-a) + \beta(g-b) = 0.}$$

Démonstration *C'est une traduction en terme d'affixe de l'égalité vectorielle $\alpha\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \overrightarrow{0}$ qui définit le barycentre G.*

Remarque 1.18 Si $\alpha = \beta = 1$, le point G est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$. On a alors, avec les notations précédentes, l'égalité $g = (a+b)/2$.

PROPOSITION 1.40

Soient $n \geqslant 2$ un entier, $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ des points du plan d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Le point G est le barycentre des points A_i affectés des poids α_i, $i = 1, \dots, n$ si et seulement si son affixe z vérifie l'équation

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (z_i - z) = 0}$$

Démonstration *C'est une traduction en terme d'affixe de l'égalité vectorielle $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{GA}_i} = \overrightarrow{0}$.*

1.9.3 Angles

PROPOSITION 1.41
Soient A, B, et C trois points du plan tels que C est distinct de A et de B, d'affixes respectives a, b et c. Une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ est alors donnée par $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)\ [2\pi]}$

Démonstration *Remarquons tout d'abord que* $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right) = \arg(b-c) - \arg(a-c)\ [2\pi]$. *Par ailleurs* $b-c = \text{Aff}(\overrightarrow{BC})$ *et* $a-c = \text{Aff}(\overrightarrow{CA})$. *Donc* $\arg(b-c) = (\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{CB}})$ *et* $\arg(a-c) = (\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{CA}})$. *On conclut en utilisant la relation de Chasles pour les angles* $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{CB}}) - (\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{CA}})\ [2\pi]$.

COROLLAIRE 1.42
Soient A, B, et C trois points du plan tels que C est distinct de A, d'affixes respectives a, b et c.
- A, B, et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-b}{c-a}$ est réel.
- Les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{c-b}{c-a}$ est imaginaire pur.

1.10 Transformations remarquables du plan

On notera $\mathscr{P}$ le plan et $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On appelle *transformation du plan* toute application bijective du plan dans lui même. À toute transformation f du plan, on peut associer une application g du plan complexe dans lui même qui au complexe z d'image le point $M \in \mathscr{P}$ associe l'affixe du point $f(M)$:

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \text{Aff}(M) & \longmapsto & \text{Aff}(M') \end{array} \right. \quad \text{où } M' = f(M).$$

On dit alors que g *représente l'application* f *dans le plan complexe*.

1.10.1 Translations, homothéties

DÉFINITION 1.12 **Translation, homothétie**
- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La *translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$, notée $t_{\overrightarrow{u}}$, est la transformation du plan qui à tout point $M \in \mathscr{P}$ associe le point $M' \in \mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.
- Soit Ω un point du plan et λ un réel non nul. L'*homothétie de centre* Ω *et de rapport* λ, noté $h_{\Omega,\lambda}$, est la transformation du plan qui à tout point $M \in \mathscr{P}$ associe le point $M' \in \mathscr{P}$ tel que $\boxed{\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}}$.

Remarque 1.19
- Si le rapport d'une homothétie h vaut 1, alors h est l'application identique (L'application identique de $\mathscr{P}$ est celle qui à tout point $M \in \mathscr{P}$ associe lui même).
- Les translations conservent les longueurs (on dit que ce sont des *isométries*), les homothéties de rapport λ les multiplient par $|\lambda|$.

PROPOSITION 1.43
Soit Ω un point du plan d'affixe ω et λ un réel différent de 0 et 1. L'homothétie de rapport λ et de centre Ω peut être représentée dans le plan complexe par l'application qui à tout $z \in \mathbb{C}$ associe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\boxed{z' - \omega = \lambda(z - \omega)}$ (ou encore $z' = \lambda z + (1-\lambda)\omega$).

Démonstration *Le point* M' *est l'image de* M *par* $h_{\Omega,\lambda}$ *si et seulement si* $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ *ou encore* $\text{Aff}(M) - \text{Aff}(\Omega) = \lambda(\text{Aff}(M)' - \text{Aff}(\Omega))$ *c'est-à-dire* $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.

1.10.2 Rotation

DÉFINITION 1.13 **Rotation**
Soient $\Omega \in \mathscr{P}$ et θ un réel. La rotation de centre Ω et d'angle θ, notée $r_{\Omega,\theta}$ est la transformation du plan qui

– à Ω associe Ω,

– à tout point M différent de Ω associe le point M′ tel que $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \ [2\pi] \\ \|\overrightarrow{\Omega M'}\| = \|\overrightarrow{\Omega M}\| \end{cases}$

PROPOSITION 1.44
Soient $\Omega \in \mathscr{P}$ et θ un réel. Soit ω l'affixe de Ω. La rotation de centre Ω et d'angle θ peut être représentée dans le plan complexe par l'application qui à tout $z \in \mathbb{C}$ associe le complexe z' tel que $\boxed{z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)}$ (ou encore $z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i}\theta)\omega$).

Démonstration *Soient z et z' les affixes respectives de M et M′. Si $M \neq \Omega$, on a :*

$$\begin{aligned} &M' \textit{ est l'image de } M \textit{ par la rotation de centre } \Omega \textit{ et d'angle } \theta \Leftrightarrow \\ &(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \ [2\pi] \textit{ et } \Omega M = \Omega M' \Leftrightarrow \\ &\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \ [2\pi] \textit{ et } |z - w| = |z' - \omega| \Leftrightarrow \\ &\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \ [2\pi] \textit{ et } \left|\frac{z-w}{z'-\omega}\right| = 1 \quad (*). \end{aligned}$$

Soit $\rho e^{i\alpha}$ une représentation trigonométrique de $\dfrac{z-w}{z'-\omega}$. Les deux relations précédentes sont équivalentes à $\rho = 1$ et $\alpha = \theta \ [2\pi]$. Donc $(*)$ est équivalente à $\dfrac{z-w}{z'-\omega} = e^{i\theta}$, soit $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$ et $z = z' = \omega$. L'égalité $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est alors trivialement vérifiée.

1.10.3 Similitudes directes

DÉFINITION 1.14 **Similitude directe**
Une *similitude directe* est une transformation du plan admettant comme représentation dans le plan complexe l'application : $\boxed{\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \end{cases}}$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

PROPOSITION 1.45
Une similitude directe conserve les angles orientés et les rapports de longueurs.

Démonstration *Soit f la similitude représentée par $z \mapsto az + b$, A_1, A_2, A_3, A_4 des points de $\mathscr{P}$ tels que $A_1 \neq A_2$ et $A_3 \neq A_4$, z_1, z_2, z_3, z_4 leurs affixes respectives et z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 les affixes respectives de leurs images par f. Pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, on a donc $z'_i = az_i + b$. En particulier :*

$$\begin{cases} z'_2 - z'_1 = a(z_2 - z_1) \\ z'_4 - z'_3 = a(z_4 - z_3) \end{cases}$$

et donc a étant non nul : $\dfrac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1} = \dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$. Par conséquent

$$(\widehat{\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_3A'_4}}) = \arg(\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}) = \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) = (\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}}) \ [2\pi]$$

et

$$\frac{A'_3A'_4}{A'_1A'_2} = \left|\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}\right| = \left|\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right| = \frac{A_3A_4}{A_1A_2},$$

ce qui prouve la propriété.

PROPOSITION 1.46
La composée de deux similitudes directes est encore une similitude directe.

Démonstration *Soient f et f' deux similitudes directes représentées dans le plan complexe par, respectivement, $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto a'z + b'$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et où $(a', b') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Alors $f' \circ f$ est représentée par $z \mapsto a'(az + b) + b'$ soit $z \mapsto aa'z + a'b + b'$. Notant $\alpha = a'a$ et $\beta = a'b + b'$ et remarquant que α est non nul, on a représenté $f' \circ f$ par $z \mapsto \alpha z + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $f' \circ f$ est donc bien une similitude directe.*

PROPOSITION 1.47
Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Soit f la similitude du plan représentée dans le plan complexe par $z \mapsto az+b$.
- Si $a=1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet *un unique* point invariant Ω ($f(\Omega)=\Omega$) appelé *centre de la similitude*. De plus, dans ce cas, si
  1. α est un argument de a,
  2. r est la rotation de centre Ω et d'angle α ($r_{\Omega,\alpha}$),
  3. h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$ ($h_{\Omega,|a|}$),

  alors f s'écrit comme la composée de h et r : $f = r\circ h = h \circ r$. Le réel $|a|$ est appelé le *rapport de la similitude* et α est une *mesure de l'angle de la similitude*. En particulier,
  - si $a \in \mathbb{R}^*$, f est l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.
  - si $|a|=1$, f est la rotation de centre Ω et d'angle α.

Démonstration
- *Si $a=1$, on reconnaît l'application étudiée dans la proposition 1.9.*
- *Supposons maintenant $a\neq 1$ et recherchons les points invariants par f. Soit un tel point qu'on suppose d'affixe z_0. z_0 est alors solution de l'équation $z_0 = az_0+b$. Cette équation possède une et une seule solution qui est $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$ (car $a \neq 1$!). Notons Ω le point d'affixe z_0. Ω est donc l'unique point invariant de f. Soient M un point d'affixe z. Notons M' le point d'affixe $z' = f(z)$. On a : $z'-z_0 = a(z-z_0)$. Soient α un argument de a, h l'homothétie $h_{\Omega,|a|}$ et r la rotation $r_{\Omega,|a|}$. Vérifions que f s'écrit comme la composée de h et de r. Notons z_1 l'affixe de $r(\mathrm{M})$ et z_2 celle de $h(r(\mathrm{M}))$. D'après les propositions 1.43 et 1.13 :*

  $$z_1 - z_0 = e^{i\alpha}(z-z_0)$$

  $$z_2 - z_0 = |a|(z_1 - z_0)$$

  donc

  $$z_2 - z_0 = |a|e^{i\alpha}(z-z_0) = a(z-z_0)$$

  ce qui prouve que $z_2 = z'$ et donc que z_2 est l'affixe de $f(\mathrm{M})$ On a donc bien montré que $f = h\circ r$. On montre de la même façon que $f = r\circ h$.

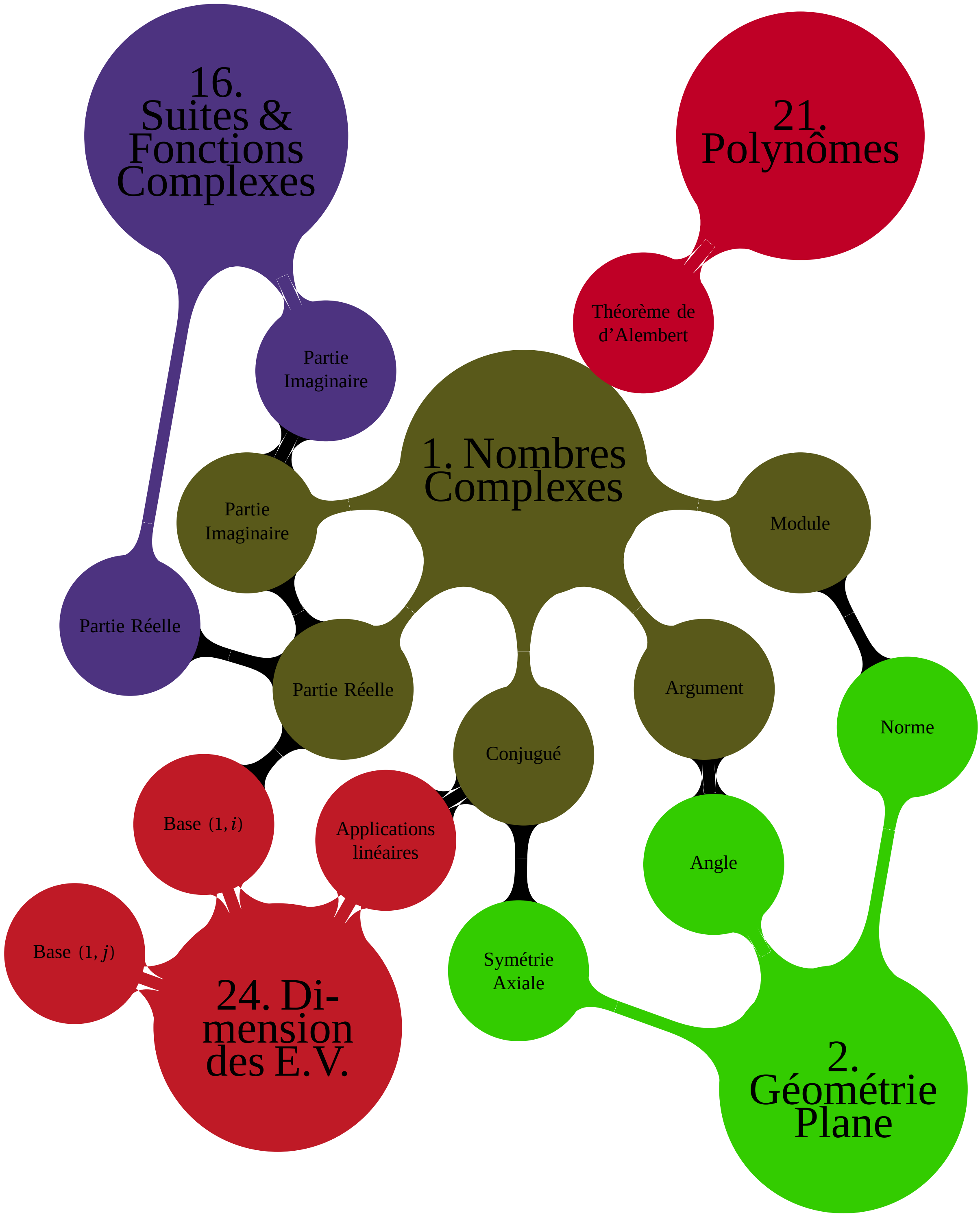
Multimédia : On donne un rapport, un angle et un centre. On pointe avec la souris sur un z du plan complexe et le logiciel construit l'image de z par la rotation , puis l'image de ce point par l'homothétie

En résumé

1. il faut savoir manipuler parfaitement les opérations suivantes sur les nombres complexes : addition, multiplication, conjugaison, calcul du module ou d'un argument.
2. il faut connaître parfaitement les formules d'Euler et de Moivre.
3. la fonction exponentielle complexe doit être bien maîtrisée. La technique de factorisation par les angles moitiés est d'un usage fréquent dans les exercices.
4. il faut savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe ainsi que les solutions d'une équation du second degré à coefficients complexes.
5. il faut avoir bien compris les groupes $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ tant au niveau algébrique que géométrique.
6. les différentes transformations du plan doivent être bien maîtrisées ainsi que la traduction en terme d'affixe des notions d'angle ou de distance.

Il est essentiel de compléter la lecture de ce chapitre par celle des paragraphes suivants de l'annexe B :

1. Trigonométrie, voir paragraphe B.1 page 1155.
2. Calculs de sommes, voir paragraphe B.2 page 1158.
3. Trigonométrie et complexes, voir paragraphe B.3 page 1164.
4. Calculs sur des polynômes, voir le paragraphe B.4.1 page 1168 consacré au trinôme du second degré ainsi que le paragraphe B.4.4 page 1176 consacré à la factorisation des polynômes grâce aux racines de l'unité.


16. Suites & Fonctions Complexes
21. Polynômes
Théorème de d'Alembert
Partie Imaginaire
1. Nombres Complexes
Partie Imaginaire
Module
Partie Réelle
Partie Réelle
Argument
Norme
Conjugué
Base $(1, i)$
Applications linéaires
Angle
Base $(1, j)$
Symétrie Axiale
24. Dimension des E.V.
2. Géométrie Plane

1.11 Exercices

1.11.1 Forme algébrique - Forme trigonométrique

Exercice 1.1 ♡

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)$
2. $z_2 = (1-2i)^2$
3. $z_3 = \frac{1}{1+3i}$
4. $z_4 = \frac{2-i}{1+i}$
5. $z_5 = (2+i)^3$
6. $z_6 = (1+i)^2 - (2-i)^2$

Solution :

1. $z_1 = \dfrac{1}{6}(7-5i)$
2. $z_2 = -3-4i$
3. $z_3 = \dfrac{1}{10}(1-3i)$
4. $z_4 = \dfrac{1}{2}(1-3i)$
5. $z_5 = 2+11i$
6. $z_6 = -3+6i$

Exercice 1.2 ♡

On donne les nombres complexes

$$z_1 = (\sqrt{6} + i\sqrt{2})\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

1. *Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique $a + ib$.*
2. *Déterminer le module puis un argument de z_1, z_2 et $z_1 z_2$.*
3. *Déterminer le module puis un argument de $Z = \frac{z_1}{z_2}$, $Z' = z_2^6$. Écrire Z et Z′ sous forme algébrique.*

Solution :

1. *Un calcul direct donne :* $z_1 = \boxed{i\sqrt{2}}$. *De plus :* $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|} = \boxed{1+i\sqrt{3}}$.
2. *Il est alors clair que* $z_1 = \boxed{\sqrt{2}e^{i\pi/2}}$ *et que* $z_2 = 2\left(1/2 + \sqrt{3}/2i\right) = \boxed{2e^{i\pi/3}}$.
3. *Comme* $Z = z_1/z_2 = \sqrt{2}/2e^{i(\pi/2-\pi/3)} = \sqrt{2}/2e^{i\pi/6}$, *il vient* $\boxed{|Z| = \sqrt{2}/2}$ *et* $\boxed{\arg(Z) = \pi/6\ [2\pi]}$ *d'où* $\boxed{Z = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{3}+i\right)}$. *De même,* $Z' = z_2^6 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^6 = 64e^{i2\pi} = \boxed{64}$.

Exercice 1.3 ♡

Déterminer le module et et un argument de $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Solution : *On montre facilement que* $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ *et que* $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ *d'où* $z = 2^{10}e^{i\frac{35\pi}{3}} = 2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ *car* $35\pi/3 = (36\pi - \pi)/3$. *Le module de z est donc 2^{10} et un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$.*

Exercice 1.4 ♡♡

1. *Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. Déterminer le module et un argument de :* $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$.
2. *En déduire le module et un argument, pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, de :*

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1}.$$

Solution :

1. *Par factorisation par les angles moitiés (voir proposition 1.25 page 30), on trouve :*

$$z = e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Il reste à étudier le signe de $\cos\frac{\theta}{2}$*. Comme* $\theta\in[-\pi,\pi]$*, alors* $\frac{\theta}{2}\in[-\pi/2,\pi/2]$ *et* $\cos\frac{\theta}{2}\geqslant 0$*. Il vient donc :* $\boxed{|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}}$ *et* $\boxed{\arg(z) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]}$*. On montre de même que si* $z' = e^{i\theta}-1$ *alors :*

$$z' = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

On étudie alors le signe de $\sin\frac{\theta}{2}$*. Comme* $\theta\in[-\pi,\pi]$*,* $\sin\theta/2\geqslant 0$ *si* $\theta\in[0,\pi]$ *et* $\sin\theta/2<0$ *si* $\theta\in[-\pi,0[$*. Donc :*

$$\boxed{\left|z'\right| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg\left(z'\right) = \begin{cases}\dfrac{\theta+\pi}{2}\ [2\pi] & \text{si } \theta\in[0,\pi]\\ \dfrac{\theta+3\pi}{2}\ [2\pi] & \text{si } \theta\in[-\pi,0[\end{cases}}$$

2. *En utilisant les résultats de la question précédente, on obtient :*

$$Z = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1} = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} = \operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

On obtient $|Z| = |z|/\left|z'\right| = \boxed{\left|\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}\right|}$ *et* $\arg(Z) = \arg(z)-\arg\left(z'\right) = \boxed{\begin{cases}-\pi/2 & \text{si } \theta\in[0,\pi[\\ -\frac{3\pi}{2}\ [2\pi] & \text{si } \theta\in]-\pi,0[\end{cases}}$.

Exercice 1.5 ♡

Trouver les entiers $n\in\mathbb{N}$ *tels que* $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ *soit réel.*

Solution : *Comme* $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$*, si* $n\in\mathbb{N}$ *:*$\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}}$*. Ce nombre est réel si et seulement si* $n\frac{\pi}{6}\equiv 0\ [\pi]$ *c'est-à-dire si et seulement si* n *est un multiple de* 6*.*

Exercice 1.6 ♡

On considère, pour $\theta\in\mathbb{R}$ *et* $n\in\mathbb{N}$*, le complexe* $z = [1-\sin\theta + i\cos\theta]^n$*. Déterminer les réels* θ *tels que* $\operatorname{Re}(z) = 0$*.*

Solution : *En utilisant la factorisation par les angles moitiés (voir proposition 1.25 page 30), on trouve :*

$$z = [1+e^{i(\pi/2+\theta)}]^n = 2^n\cos^n(\pi/4+\theta/2)e^{in(\pi/4+\theta/2)}$$

et donc :

$$\operatorname{Re}(z) = 2^n cos^n(\pi/4+\theta/2)\cos(n\pi/4+n\theta/2)$$

Par suite : $\operatorname{Re}(z) = 0$ *si et seulement si* $\boxed{\theta = 2k\pi+\pi/2}$ *ou* $\boxed{\theta = (2k+1)\pi/n - \pi/2}$ *où* $k\in\mathbb{Z}$*.*

1.11.2 Polynômes, équations, racines de l'unité

Exercice 1.7 ♡

Soit P *le polynôme défini dans* $\mathbb{C}$ *par :*

$$P(z) = z^3 - z^2 + (5+7i)z + 10 - 2i.$$

1. *Montrer que* P *possède une racine imaginaire pure.*
2. *En déduire une factorisation de* P *de la forme* $P(z) = (z-2i)Q(z)$ *où* Q *est un polynôme du second degré à coefficients complexes.*
3. *Résoudre alors* $P(z) = 0$ *et factoriser complètement le polynôme* P *sur* $\mathbb{C}$*.*

Solution :

1. *Le nombre complexe* $\boxed{2i}$ *est une racine de* P*.*
2. P *admet alors une factorisation de la forme* $P(z) = (z-2i)Q(z)$ *avec* $Q(z) = az^2+bz+c$ *un polynôme à coefficients complexes à déterminer. Par identification, on montre que* $Q(z) = z^2 + (-1+2i)z + 1 + 5i$*.*
3. *En appliquant le théorème de résolution des équations du second degré à coefficients complexes, on trouve que les racines de* Q *sont* $-1+i$ *et* $2-3i$*. On a donc :* $\boxed{P = (z-2i)(z+1-i)(z-2+3i)}$*.*

Exercice 1.8 ♡

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -3+4i$
2. $z_2 = -5-12i$
3. $z_3 = -24-10i$
4. $z_4 = -i$

Solution :

1. *On utilise la méthode vue en cours. Soit* $Z = X + iY$ *une racine carrée de* z_1. (X, Y) *vérifie le système :*

$$\begin{cases} X^2+Y^2 &= 5 \\ X^2-Y^2 &= -3 \\ XY &> 0 \end{cases}.$$

Par addition-soustraction des deux premières équations, il vient que $2X^2 = 2$ *c'est-à-dire* $X = \pm 1$ *et* $2Y^2 = 8$ *c'est-à-dire* $Y = \pm 2$. *On utilise alors que* $XY > 0$ *et on trouve que* $\boxed{Z = 1+2i}$ *ou* $\boxed{Z = -1-2i}$. *Réciproquement, on vérifie que ces deux solutions conviennent.*

2. *On procède de même et on trouve que les deux racines carrées de* z_2 *sont* $\boxed{2-3i}$ *et* $\boxed{-2+3i}$
3. *On procède encore de la même façon et on trouve que les deux racines de* z_4 *sont* $\boxed{1-5i}$ *et* $\boxed{-1+5i}$.
4. *On peut procéder comme avant. Mais on peut aussi utiliser la forme exponentielle de* $-i$ *qui est* $-i = e^{i3\pi/2}$ *donc* $Z = \rho e^{i\theta}$ *est une racine carrée de* $-i$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} \rho &= 1 \\ 2\theta &= \frac{3\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$$

et alors $\rho = 1$ *et* $\theta = 3\pi/4\,[\pi]$. *Donc* $Z = e^{i3\pi/4}$ *ou* $Z = e^{i7\pi/4}$ *ce qui donne, sous forme algébrique* $Z = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}$ *ou* $Z = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}$. *On vérifie réciproquement que ces deux solutions conviennent.*

Exercice 1.9 ♡

Déterminer les racines des polynômes suivants :

1. $z^2 + iz + 5 - 5i$
2. $z^2 + z - iz - 5i$
3. $z^2 - iz + 1 - 3i$
4. $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$

Solution :

1. *Le discriminant de* $z^2 + iz + 5 - 5i$ *est* $\Delta = -21 + 20i$. *Une racine carrée de* Δ *est* $2+5i$. *Les racines du polynôme sont donc :* $\boxed{1+2i}$ *et* $\boxed{-1-3i}$.
2. *Le discriminant de* $z^2 + z - iz - 5i$ *est* $\Delta = 18i$. *Une racine carrée de* Δ *est* $3+3i$. *Les racines du polynôme sont donc :* $\boxed{1+2i}$ *et* $\boxed{-2-i}$.
3. *Le discriminant de* $z^2 - iz + 1 - 3i$ *est* $\Delta = -5 + 12i$. *Une racine carrée de* Δ *est* $2+3i$. *Les racines du polynôme sont donc :* $\boxed{1+2i}$ *et* $\boxed{-1-i}$.
4. *Le discriminant de* $z^2 - 3iz - 3 - i = 0$ *est* $\Delta = 3 + 4i$. *Une racine carrée de* Δ *est* $2+i$. *Les racines du polynôme sont donc :* $\boxed{1+2i}$ *et* $\boxed{-1+i}$.

Exercice 1.10 ♡

Déterminer :

1. *Les racines troisièmes de* -8.
2. *Les racines cinquièmes de* $-i$
3. *Les racines sixièmes de* $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

Solution : *Soit* $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ *avec* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$.

1. *On a* $-8 = 8e^{i\pi}$ *et* z *est une racine troisième de* -8 *si et seulement si* $\rho^3 = 8$ *et* $3\theta = \pi \ [2\pi]$. *Il vient alors* $\rho = 2$ *et* $\theta = \pi/3 \ [2\pi/3]$. *Donc* $z = \boxed{2e^{i\pi/3}}$ *ou* $z = 2e^{i(2\pi/3+\pi/3)} = 2e^{i\pi} = \boxed{-2}$ *ou* $z = 2e^{i(4\pi/3+\pi/3)} = 2e^{i5\pi/3} = \boxed{2e^{-i\pi/3}}$. *On vérifie réciproquement que ces trois nombres conviennent.*

2. *Comme* $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, *on a :* $z^5 = -i$ *si et seulement si* $\rho^5 = 1$ *et* $5\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *c'est-à-dire si et seulement si* $\rho = 1$ *et* $\theta = -\frac{\pi}{10}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]$. *Les cinq racines cinquièmes de* $-i$ *sont donc :* $\boxed{e^{i(4k-1)\frac{\pi}{10}}}$ *avec* $k \in [\![0,4]\!]$.
3. *De même, on montre que* $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$. *Par conséquent,* $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ *si et seulement si* $\rho^6 = 2$ *et* $6\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, *c'est-à-dire si et seulement si :* $\rho = \sqrt[6]{2}$ *et* $\theta \equiv \frac{\pi}{9}\left[\frac{\pi}{3}\right]$. *Les six racines sixième de* $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ *sont donc :* $\boxed{e^{i\frac{(3k+1)\pi}{9}}}$ *avec* $k \in [\![0,5]\!]$.

Exercice 1.11 ♡♡

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0\ \ (\star)$$

Solution : *Posons* $Z = (z-1)^3$. *L'équation devient alors* $Z^2 + Z + 1 = 0$ *qui admet deux solutions :* $Z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ *et* $Z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. *On a alors* $(z-1)^3 = Z_1$ *ou* $(z-1)^3 = Z_2$. *La première équation amène :* $\boxed{z = e^{i\frac{(6k+2)\pi}{9}} + 1}$ *avec* $k \in [\![0,2]\!]$ *et la seconde :* $\boxed{z = e^{i\frac{(6k-2)\pi}{9}} + 1}$ *avec* $k \in [\![0,2]\!]$. *On vérifie réciproquement que ces six nombres sont solutions de* $(\star)$.

Exercice 1.12 ♡♡

1. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$, *l'équation*
$$(1+iz)^5 = (1-iz)^5\ \ (\star) \qquad (1.1)$$
2. *En déduire les valeurs de* $\tan\frac{\pi}{5}$ *et* $\tan\frac{2\pi}{5}$, *que l'on exprimera sous la forme :*
$$\sqrt{p + q\sqrt{n}}, \quad (n,p,q) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}$$
3. *En déduire la valeur de* $\tan\frac{\pi}{10}$.

Solution :

1. *Soit* z *une solution de* $(\star)$. $z \neq -i$ *donc* $1 - iz \neq 0$. *Posons* $U = \dfrac{1+iz}{1-iz}$. *Le nombre complexe* U *doit vérifier* $U^5 = 1$. *En posant* $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, *il existe* $k \in [\![0,4]\!]$ *tel que :*
$$U = \omega^k$$
Alors :
$$z = -i\frac{\omega^k - 1}{\omega^k + 1} = \tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$$
On vérifie réciproquement, que $\boxed{z = \tan\frac{k\pi}{5}}$ *est solution pour* $k \in]0,4[$.
2. *Résolvons de façon différente l'équation* $(\star)$ *en développant les deux membres à l'aide de la formule du binôme de Newton :*
$$\begin{aligned} & 1 + 5(iz) + 10(iz)^2 + 10(iz)^3 + 5(iz)^4 + (iz)^5 \\ & = 1 - 5(iz) + 10(iz)^2 - 10(iz)^3 + 5(iz)^4 - (iz)^5 \\ \iff \quad & 5iz + 10(iz)^3 + (iz)^5 = 0 \\ \iff \quad & z\left[z^4 - 10z^2 + 5\right] = 0 \end{aligned}$$
Et si z *est une solution non-nulle,* $Z = z^2$ *est racine du trinôme*
$$Z^2 - 10Z + 5 = 0$$
qui possède deux racines réelles :
$$Z_1 = 5 - 2\sqrt{5} \quad Z_2 = 5 + 2\sqrt{5}$$
et donc, les racines de $(\star)$ *sont :*
$$\boxed{0, \quad \pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}, \quad \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

Comme $\tan\frac{k\pi}{5}$ *est strictement positif pour* $k = 1,2$*, et comme* $\tan\frac{\pi}{5} < \tan\frac{2\pi}{5}$*, on trouve que*

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

3. *En utilisant la formule de trigonométrie :*

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

avec $\theta = \frac{\pi}{10}$*, et en posant* $A = \tan\frac{\pi}{10}$*,* A *doit vérifier :*

$$\sqrt{5-2\sqrt{5}}A^2 + 2A - \sqrt{5-2\sqrt{5}} = 0$$

et A *est alors la seule racine positive de ce trinôme :*

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}$$

Exercice 1.13 ♡♡

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ *:*

1. $1 + \frac{z+i}{z-i} + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$

2. $(z+i)^n = (z-i)^n$

Solution :

1. *Soit* z *une solution de la première équation. On a nécessairement* $z \neq i$ *car* i *n'est pas une solution de l'équation. Posons* $Z = \frac{z+i}{z-i}$*. Ce complexe vérifie* $1+Z+Z^2+Z^3 = 0$*. Remarquons que* $Z \neq 1$ *car il n'existe pas de complexe* z *tel que* $\frac{z+i}{z-i} = 1$*. Donc* $1+Z+Z^2+Z^3 = \frac{1-Z^4}{1-Z}$ *et* Z *vérifie :* $1-Z^4 = 0$*. Le complexe* Z *est donc une racine quatrième de l'unité différente de* 1*, ce qui amène* $Z = i, -1, -i$*. On écrit ensuite que* $z = i\frac{Z+1}{Z-1}$ *et on trouve les trois solutions* $\boxed{z = 1, 0, -1}$*. On vérifie réciproquement que ces trois nombres sont solutions de l'équation.*
2. *Considérons maintenant une solution* z *de la deuxième équation. Comme précédemment, il est clair que* $z \neq i$*. Posons* $U = \frac{z+i}{z-i}$*. Il vient alors* $U^n = 1$ *et donc* U *est une racine* n*-ième de l'unité différente de 1 :* $U = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *avec* $k \in [\![1, n-1]\!]$*. On écrit alors que*

$$z = i\frac{U+1}{U-1} = i\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}$$

Après factorisation par l'angle moitié, on trouve que $\boxed{z \in \left\{\cot\frac{k\pi}{n} ; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$*. On vérifie réciproquement que ces nombres sont solutions de l'équation.*

Exercice 1.14 ♡♡

Résoudre

$$z^3 = \overline{z}$$

Solution : ♡♡ *On remarque que* $z = 0$ *est une solution de cette équation. Supposons alors* $z \neq 0$*. En prenant les modules, on a :* $|z|^3 = |\overline{z}| = |z|$ *et donc :*$|z| = 1$*. Si* z *est solution, alors en multipliant par* z *on trouve que* $z^4 = |z|^2 = 1$ *d'où* $z \in \{1, i, -1, -i\}$*. On vérifie réciproquement que ces solutions conviennent. L'ensemble solution de l'équation est donc :* $\boxed{\{0, 1, i, -1, -i\}}$*.*

Exercice 1.15 ♡

Soit ω *une racine* n*-ième de l'unité différente de* 1*. On pose*

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k.$$

Déterminer une valeur de S.

Indication 1.9 : On pourra calculer $(1-\omega)S$.

Solution :

$$\begin{aligned}(1-\omega)S &= (1-\omega)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(\omega^k-\omega^{k+1}\right)\\ &= (1-\omega)+2\left(\omega-\omega^2\right)+3\left(\omega^2-\omega^3\right)+\ldots+n\left(\omega^{n-1}-\omega^n\right)\\ &= \underbrace{1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{n-1}}_{=0}+n\omega^n \text{ par télescopage}\\ &= n\end{aligned}$$

et $\boxed{S=\dfrac{n}{\omega-1}}$.

Exercice 1.16 ♡♡

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. *Calculer le produit des éléments de* $\mathbb{U}_n$.

Solution :

$$\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n}\xi=\prod_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k=\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{1+2+\ldots+n-1}=\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=e^{\frac{2i\pi n(n-1)}{2n}}=e^{i(n-1)\pi}=\boxed{(-1)^{n-1}}$$

Exercice 1.17 ♡

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation*

$$1+2z+2z^2+\cdots+2z^{n-1}+z^n=0$$

Indication 1.9 : Multiplier par $(1-z)$.

Solution : *Soit* z *une solution de l'équation. Comme* 1 *n'est pas solution de l'équation, nécessairement* $z\neq 1$. *En multipliant l'équation par* $(1-z)$, *on se ramène à l'équation équivalente :*

$$(1+z)(1-z^n)=0$$

Les solutions de cette équation sont les racines n*-ièmes de l'unité différentes de* 1 *ainsi que* -1.

Exercice 1.18 ♡♡

Pour $n\geqslant 2$, *on note* $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. *Calculer les sommes suivantes :*

$$S_1=\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}\quad(p\in\mathbb{Z}),\qquad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k,\qquad S_3=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\omega^k-1\right|.$$

Solution :

- *La première somme est géométrique de raison* ω^p. *La raison est différente de* 1 *si et seulement si* p *n'est pas un multiple de* n. *Alors*

$$S_1=\frac{\omega^{pn}-1}{\omega^p-1}=\boxed{0}$$

  Si p *est un multiple de* n, *on trouve* $S_1=n$.
- *La deuxième somme se calcule grâce à la formule du binôme :*

$$S_2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega^k-\omega^n=(1+\omega)^n-1=\boxed{-2^n\cos^n\frac{\pi}{n}-1}$$

  en utilisant la factorisation par l'angle moitié

- *La troisième somme se calcule en remarquant que*

$$\left|\omega^k - 1\right| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$$

La première égalité est une conséquence de la factorisation de l'angle moitié et la seconde provient du fait que sinus est positif si $k \in [\![0, n-1]\!]$*. On introduit alors la somme* E *des exponentielles imaginaires correspondante que l'on calcule et finalement,*

$$\mathrm{E} = 2\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2\frac{e^{i\pi}-1}{e^{i\frac{\pi}{n}}-1} = \frac{2ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$\mathrm{S}_3 = \mathrm{Im}(\mathrm{E}) = \boxed{2\cot\mathrm{an}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Exercice 1.19 ♡♡♡ **Racines primitives de l'unité**

Soit $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geqslant 1$ *et soit* $\omega \in \mathbb{U}_n$*. On dit que* ω *est une racine primitive* n*-ième de l'unité si et seulement si toute racine* n*-ième de l'unité s'écrit comme une puissance de* ω*. Autrement dit :*

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$*. Montrer que* $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *est une racine primitive* n*-ième de l'unité si et seulement si* k *est premier avec* n*.*

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ *Par contraposée, si* k *et* n *ne sont pas premiers entre eux, alors ils admettent un diviseur commun* $d \neq \pm 1$ *:* $n = dn'$ *et* $k = dk'$ *avec* $n', k' \in \mathbb{N}$*. En particulier,* $w^{n'} = \left(e^{\frac{2i\pi k' d}{n}}\right)^{n'} = 1$ *et*

$$\left\{w^r \mid r \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{U}_{n'} \subsetneq \mathbb{U}_n$$

car $n' < n$*. On en déduit que* ω *n'est pas primitive.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si* k *et* n *sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Bézout, il existe* $a, b \in \mathbb{Z}$ *tels que* $ak + bn = 1$*. Donc pour tout* $l \in [\![0, n-1]\!]$*,*

$$\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{al} = e^{\frac{2ikal\pi}{n}} = e^{\frac{2i(1-bn)l\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}}$$

et ω *est bien primitive.*

Exercice 1.20 ♡♡♡

Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ *et considérons* $\mathrm{X} = \omega + \omega^2 + \omega^4$ *et* $\mathrm{Y} = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$*.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{X}}$ *et que* $\mathrm{Im}\,\mathrm{X} > 0$*.*
2. *Calculer* $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ *et* XY*. En déduire que* X *et* Y *sont solutions d'une équation du second degré puis calculer* X *et* Y*.*
3. *Exprimer* $\mathrm{Re}\,\mathrm{X}$ *en fonction de* $\cos\frac{2\pi}{7}$*.*
4. *En déduire que* $\cos\frac{2\pi}{7}$ *est une racine du polynôme* $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$*.*

Solution : *On remarque que* ω *est une racine septième de l'unité.*

1. *On remarque que* $\overline{\omega} = \omega^6$*,* $\overline{\omega}^2 = \omega^5$ *et* $\overline{\omega}^4 = \omega^3$*. Il est donc clair que* $\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{X}}$*. Par ailleurs, comme* $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} \in [0, \pi]$*, on a :* $\sin\frac{2\pi}{7} > 0$ *et* $\sin\frac{4\pi}{7} > 0$*. De plus* $\left|\sin\frac{8\pi}{7}\right| = \sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{2\pi}{7}$ *car* $\sin$ *est croissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*. Donc* $\mathrm{Im}\,\mathrm{X} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} > 0$*.*
2. *On applique le cours :* $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \dfrac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0$ *car* $\omega^7 = 1$*. Il vient alors que* $\mathrm{X} + \mathrm{Y} = -1$*.Par ailleurs*

$$\mathrm{XY} = \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + 3\omega^7 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{10} = \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + 3 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = 2.$$

En utilisant les relations entre les coefficients et les racines d'un trinôme du second degré, on obtient que X *et* Y *sont racines du trinôme* $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 2$*. On en déduit que, comme* $\mathrm{Im}\,\mathrm{X} > 0$*,* $\mathrm{X} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ *et que* $\mathrm{Y} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$*.*

3. *Remarquons que* $\operatorname{Re}(\omega^4) = \operatorname{Re}(\omega^3)$. *Donc :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} X &= \operatorname{Re}\left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\omega + \omega^2 + \omega^3\right) \\
&= \cos\frac{2\pi}{7} + \cos 2\frac{2\pi}{7} + \cos 3\frac{2\pi}{7} \\
&= \cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos^2\frac{2\pi}{7} - 1 + 4\cos^3\frac{2\pi}{7} - 3\cos\frac{2\pi}{7} \\
&= 4\cos^3\frac{2\pi}{7} + 2\cos^2\frac{2\pi}{7} - 2\cos\frac{2\pi}{7} - 1
\end{aligned}$$

4. *Comme* $\operatorname{Re}(X) = -1/2$, *l'égalité précédente devient :*

$$-\frac{1}{2} = 4\cos^3\frac{2\pi}{7} + 2\cos^2\frac{2\pi}{7} - 2\cos\frac{2\pi}{7} - 1$$

Soit :

$$8\cos^3\frac{2\pi}{7} + 4\cos^2\frac{2\pi}{7} - 4\cos\frac{2\pi}{7} - 1 = 0$$

et on prouve que $\cos\frac{2\pi}{7}$ *est une racine du polynôme.*

1.11.3 Application à la trigonométrie

Exercice 1.21 ♡

Pour $x \in \mathbb{R}$, *linéariser les expressions suivantes :*

1. $\sin^2 x$
2. $\cos^4 x$
3. $\sin^4 x$
4. $\sin^5 x$.
5. $\cos x \sin^2 x$
6. $\cos^2 x \sin^2 x$
7. $\cos a \cos b$
8. $\cos a \cos b \cos c$

Solution :

1. *Par la trigonométrie :* $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$
2. *On utilise les formules d'Euler et la formule du binôme :*

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)}.
\end{aligned}$$

3. *On procède comme avant. On trouve* $\boxed{\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)}$.
4. *De même, on obtient* $\boxed{\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x))}$.
5. *On calcule*

$$\begin{aligned}
\cos x \sin^2 x &= -\frac{1}{2^3}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2^3}\left(e^{i3x} + e^{-i3x} - e^{ix} - e^{-ix}\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{4}(\cos(3x) - \cos(x))}.
\end{aligned}$$

6. *De même :* $\cos^2 x \sin^2 x = \boxed{\frac{1}{8}(-\cos(4x) + 1)}$
7. *Par la trigonométrie ou en utilisant les formules d'Euler :* $\cos a \cos b = \boxed{\frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))}$.
8. *On utilise les formules d'Euler :*
   $\cos a \cos b \cos c = \boxed{\frac{1}{4}(\cos(a-b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a+b+c))}$.

Exercice 1.22 ♡

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, transformer :

1. $\cos(3x)$ *en un polynôme en* $\cos x$.
2. $\sin(3x)$ *en un polynôme en* $\sin x$.
3. $\cos(4x)$ *en un polynôme en* $\cos x$.

Solution :

1. *D'après la formule de Moivre et la formule du binôme :*

$$\begin{aligned}\cos(3x)+i\sin(3x) &= (\cos x+i\sin x)^3\\ &= \cos^3 x+3i\sin x\cos^2 x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x\end{aligned}$$

et il vient en identifiant les parties réelles et imaginaires : $\cos(3x)=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$ *mais* $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ *donc* $\boxed{\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x}$.

2. *Il vient aussi* $\sin(3x)=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$. *Comme* $\cos^2 x=1-\sin^2 x$*, on obtient :* $\boxed{\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x}$
3. *On procède de même que dans la première question et on trouve* $\boxed{\cos(4x)=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1}$.

Exercice 1.23 ♡ ***Équations trigonométriques***

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(2x)+\cos(x)=0$
2. $\sin x\cos x=1/4$
3. $\tan\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)$
4. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$
5. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$
6. $\sin x-1/\sin x=3/2.$
7. $\sin x+\sin 3x=0$
8. $3\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{6}$

Solution :

1. $\cos(2x)+\cos(x)=0 \iff \cos(2x)=-\cos(x) \iff \cos(2x)=\cos(x+\pi) \iff 2x=x+\pi\ [2\pi]$ ou $2x=-x-\pi\ [2\pi] \iff x=\pi\ [2\pi]$ ou $x=-\frac{\pi}{3}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$.
2. *D'après les formules de trigonométrie,* $\cos x\sin x=\sin(2x)/2$ *donc* $\cos x\sin x=1/4 \iff \sin(2x)=1/2 \iff 2x=\pi/6\ [2\pi]$ ou $2x=\pi-\pi/6\ [2\pi] \iff x=\pi/12\ [\pi]$ ou $x=5\pi/12\ [\pi]$.
3. $\tan\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(x+\frac{4\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{5}=x+\frac{4\pi}{5}\ [\pi] \iff 2x=\pi\ [\pi] \iff x=0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.
4. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1 \iff \frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{2} \iff \cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\cos\frac{\pi}{3} \iff \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\cos\frac{\pi}{3} \iff \frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\frac{\pi}{3}+x=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \iff x=0\ [2\pi]$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$
5. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) \iff \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right) \iff \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-x-\frac{\pi}{4}\right) \iff 2x-\frac{\pi}{3}=-x-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $2x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \iff x=\frac{\pi}{36}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x=\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$
6. *On suppose que* $x\neq 0\ [\pi]$ *On a :* $\sin x-1/\sin x=3/2 \iff \sin^2 x-1=3/2\sin x \iff \sin^2 x-3/2\sin x-1=0$. *On effectue le changement de variable* $X=\sin x$ *et on cherche les racines du trinôme* $X^2-3/2X-1=0$. *On trouve* 2 *et* $-1/2$. *Seule la deuxième racine amène des solutions pour notre équation. On résout alors* $\sin x=-1/2$ *et on trouve* $x=-\pi/6\ [2\pi]$ *et* $x=\pi/6+\pi\ [2\pi]=7\pi/6\ [2\pi]$.
7. *Cette équation se traite comme la première. On trouve* $x=0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$
8. *On multiplie les deux membres de l'équation par* $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ *et on effectue alors des calculs similaires à ceux de la troisième. On trouve* $x=\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ *ou* $x=-\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

Exercice 1.24 ♡♡ ***Équations trigonométriques***

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(2x)+\cos(x)=-1$
2. $\cos^4 x+\sin^4 x=1$
3. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=-1$

Solution :

1. *On utilise les formules de duplication :* $\cos(2x)+\cos(x)=-1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+\cos x=-1 \iff \cos x(2\cos x+1)=0 \iff \cos x=0$ ou $\cos x=-\frac{1}{2} \iff x=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $x=\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\ [2\pi]=\frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x=-\frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. *On utilise les linéarisations effectuées dans l'exercice 1.21 et on obtient :* $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 \iff \cos(4x) = 1 \iff 4x = 0\ [2\pi] \iff x = 0\,[\pi/2]$.
3. *On utilise les calculs de l'exercice 1.22. On sait que* $\cos(2x) = \cos^2 x - 1$ *et que* $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$*, donc* $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -1 \iff 2\cos^3 x + \cos^2 x - \cos x = 0 \iff \cos x\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0$. *Afin de résoudre* $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$*, on pose* $X = \cos x$ *et on cherche les racines de* $2X^2 + X - 1 = 0$ *qui sont* $1/2$ *et* -1*. Donc* $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ *si et seulement si* $\cos x = 1/2 \iff x = \pm\pi/3\ [2\pi]$ *ou* $\cos x = -1 \iff x = \pi\ [2\pi]$*. Finalement les solutions de l'équation initiale sont :* $x = \pi/2\ [\pi]$, $x = \pm\pi/3\ [2\pi]$ *et* $x = \pi\ [2\pi]$.

Exercice 1.25 ♡

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. *Montrer que :*

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

2. *En déduire :*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

3. *En déduire :*

$$\sum_{k=0}^{n} k \sin k\theta.$$

Solution :

1. *Comme* $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ *et en reconnaissant la somme des* $n+1$ *premiers termes d'une suite géométrique de raison* $e^{i\theta}$*, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1 - e^{(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = \boxed{e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

2. *Par ailleurs :*

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \boxed{\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \boxed{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

3. *Pour la dernière somme, il suffit de dériver l'égalité* $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$ *par rapport à* θ*. On trouve alors*

$$\sum_{k=0}^{n} k \sin k\theta = \frac{1}{4} \frac{(2n+1)\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Exercice 1.26 ♡

On pose

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad B = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad C = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

1. *En utilisant la trigonométrie, montrer que* A *vérifie une équation du second degré.*
2. *Exprimer* A , B , C *en utilisant des racines carrées.*

Solution :

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a la formule* $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$*. Appliquée à* $x = \pi/12$*, il vient que* $\sin^2(\pi/12) = (1 - \cos(\pi/6))/2$*. Donc* $\sin(\pi/12)$ *est une solution de* $X^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)/4 = 0$.

2. *On résout cette équation. Ses deux solutions sont* $X = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. *Comme* $\sin(\pi/12) > 0$, *il est clair que* $\boxed{\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$. *Pour calculer* $\cos(\pi/12)$, *on utilise alors la formule fondamentale de la trigonométrie et le fait que ce cosinus est positif. On trouve*

$$\cos(\pi/12) = \sqrt{1-\sin^2(\pi/12)} = \sqrt{1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}.$$

Enfin, d'après la définition de la fonction tangente, il vient que :

$$\tan(\pi/12) = \frac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} = \boxed{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}}.$$

Exercice 1.27 ♡♡

Calculer la somme

$$S = \sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$$

Solution : *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ *et donc, d'après les formules d'Euler :*

$$S = \sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{9}\right) = 2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\left(e^{\frac{2ik\pi}{9}} + e^{-\frac{2ik\pi}{9}}\right) = 2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} e^{\frac{2ik\pi}{9}}$$

la dernière égalité étant conséquence du fait que

$$e^{-\frac{i2\pi}{9}} = e^{\frac{i2\times8\times\pi}{9}},\ e^{-\frac{i2\times2\times\pi}{9}} = e^{\frac{i2\times7\pi}{9}},\ e^{-\frac{i2\times3\times\pi}{9}} = e^{\frac{i2\times6\pi}{9}} \quad \text{et} \quad e^{-\frac{i2\times4\times\pi}{9}} = e^{\frac{i2\times5\times\pi}{9}}.$$

(Placer les racines neuvièmes de l'unité sur un dessin !). On trouve alors par application du cours :

$$S = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{8} e^{\frac{2ik\pi}{9}} = \boxed{\frac{7}{4}}.$$

Exercice 1.28 ♡♡

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *calculer les sommes suivantes :*

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos kx$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kx$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}$ *(avec* $x \neq \pi/2\ [\pi]$*).*
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin kx}{\cos^k x}$ *(avec* $x \neq \pi/2\ [\pi]$*).*

Solution : *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Remarquons que d'après la formule du binôme de Newton et en factorisant par les angles moitiés :*

$$S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx} = \left(1+e^{ix}\right)^n = e^{i\frac{nx}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{\frac{-ix}{2}}\right)^n = 2^n\cos^n\frac{x}{2}e^{i\frac{nx}{2}}.$$

Mais $S_1 = \operatorname{Re}(S) = \boxed{2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}}$.

2. *Et* $S_2 = \operatorname{Im}(S) = \boxed{2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}}$.
3. *Calculons*

$$S' = \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\cos x}} & \text{si } x \neq 0\ [\pi] \\ n+1 & \text{si } x = 0\ [\pi] \end{cases}$$

car on a reconnu une somme géométrique de raison $\dfrac{e^{ix}}{\cos x}$. *Or cette quantité est égale à* 1 *si et seulement si* $x = 0\ [\pi]$. *Si* $x \neq 0\ [\pi]$ *alors*

$$\frac{1-\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\cos x}} = \frac{1}{\cos^n x}\,\frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}} = \frac{1}{\cos^n x}\,\frac{\left(\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}\right)\left(\cos x - e^{-ix}\right)}{\cos^2 x - \cos x\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)+1} =$$
$$\frac{1}{\cos^n x}\,\frac{\left(\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}\right)\left(\cos x - e^{-ix}\right)}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^n x}\left(\left(\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}\right) i \sin x\right) =$$
$$\frac{1}{\sin x \cos^n x}\left(\sin(n+1)x + i\left(\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x\right)\right)$$

Comme $S_3 = \mathrm{Re}\left(S'\right)$, *il vient que* $\boxed{S_3 = n+1}$ *si* $x = 0\,[\pi]$ *et que* $\boxed{S_3 = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x}}$ *sinon.*

4. *De même* $\boxed{S_4 = \mathrm{Im}\left(S'\right) = 0}$ *si* $x = 0\,[\pi]$ *et* $\boxed{S_4 = \dfrac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}}$ *sinon.*

Exercice 1.29 ♡♡

Calculer $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \cos^n\left(\frac{p\pi}{n}\right)$.

Solution : *On a*

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \cos^n\left(\frac{p\pi}{n}\right) = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left(\frac{e^{ip\pi/n}+e^{-ip\pi/n}}{2}\right)^n = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{e^{ip\pi}}{2^n}\left(1+e^{-2ip\pi/n}\right)^n$$
$$= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{(-1)^p}{2^n}\left(1+e^{-2ip\pi/n}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(1+e^{-2ip\pi/n}\right)^n$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{-2ipk\pi/n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{n-1} e^{-2ipk\pi/n}$$

Or $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} e^{-2ipk\pi/n} = 0$ *pour* $k = 1, 2, \dots, n-1$. *Restent* $k = 0$ *et* $k = n$ *pour lesquels* $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} e^{-2ipk\pi/n} = n$.
Donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \cos^n\left(\frac{p\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^n}\left(n\binom{n}{0} + n\binom{n}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

1.11.4 Application des nombres complexes à la géométrie

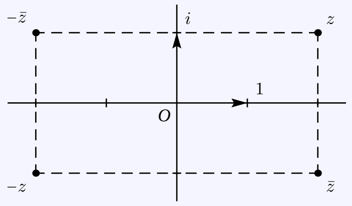
Exercice 1.30 ♡

Sot z *un nombre complexe non nul. Placer sur un dessin les points d'affixes respectives*

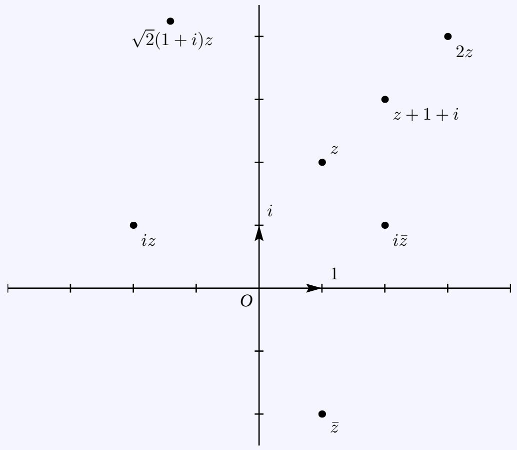
1. z, $-z$, $\overline{z}$ *et* $-\overline{z}$.
2. z, $2z$, iz, $i\overline{z}$ *et* $z+1+i$ *et* $\sqrt{2}(1+i)z$.
3. z, z^{-1}, $\overline{z}$ *et* z^3 *si* $|z| = 1$.

Solution : *Pour tout l'exercice, on appelle* M *le point d'affixe* z.

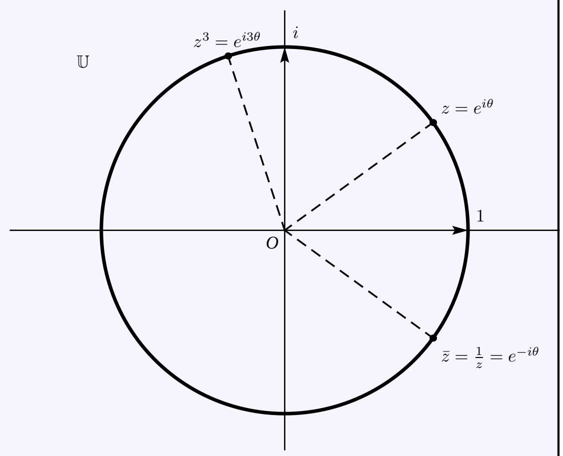
1. *On utilise que $\bar z$ est déduit de z par la symétrie d'axe les abscisses et que $-z$ est déduit de z par la symétrie de centre* O.



2. *Multiplier z par un réel non nul k revient à appliquer au point* M *l'homothétie de centre* O *et de rapport k. Multiplier z par i revient à appliquer à* M *la rotation de centre* O *et d'angle $\pi/2$. Ajouter au complexe z un complexe z_0 revient à appliquer à* M *une translation de vecteur d'affixe z_0. Comme $\sqrt{2}(1+i) = 2e^{i\pi/4}$, multiplier z par $\sqrt{2}(1+i)z$ revient à appliquer à z la similitude de centre* O*, de rapport* 2 *et d'angle $\pi/4$.*



3. *Si $z \in \mathbb{U}$ alors d'après le cours, $z^{-1} = \bar z$. Par ailleurs, $z = e^{i\theta}$ où θ est un argument de z. Donc $z^3 = e^{3i\theta}$ et on peut alors placer le point d'affixe z^3.*



Exercice 1.31 ♡

Déterminer et représenter les ensembles de nombres complexes :

1. $\mathrm{E}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar z = z\}$.
2. $\mathrm{E}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 4\}$.
3. $\mathrm{E}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$.
4. $\mathrm{E}_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1+2i| = 1\}$.
5. $\mathrm{E}_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = -1\}$
6. $\mathrm{E}_6 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \pi/4 \ [\pi]\right\}$
7. $\mathrm{E}_7 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = \pi/3 \ [2\pi]\right\}$.
8. $\mathrm{E}_8 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \pi/6 \ [\pi]\right\}$
9. $\mathrm{E}_9 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1+2i) = \pi/2 \ [2\pi]\right\}$

Solution : *Dans toute la solution, on appelle* M *le point d'affixe z.*

1. *Un complexe est égale à son conjugué si et seulement si il est réel donc* $\mathrm{E}_1 = \mathbb{R}$.
2. *On applique le cours :* E_2 *est le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* 4.
3. *Si* A *est le point d'affixe* -1 *et* B *celui d'affixe* -1 *alors* $|z-1| = |z+1|$ *si et seulement si* $d(\mathrm{M},\mathrm{A}) = d(\mathrm{M},\mathrm{B})$. *Donc* M *est un point de la médiatrice du segment* $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ *, c'est à dire de l'axe imaginaire, donc* $\mathrm{E}_2 = i\mathbb{R}$.
4. *D'après le cours* E_3 *est le cercle de centre le point d'affixe* $1-2i$ *et de rayon* 1.
5. *L'ensemble* E_5 *est constitué de la droite passant par le point d'affixe* $-i$ *et parallèle à l'axe réel.*
6. *L'ensemble* E_6 *est la bissectrice principale.*
7. *L'ensemble* E_7 *est la demi-droite d'extrémité l'origine et formant un angle de* $\pi/3$ *avec l'axe des abscisses.*
8. *L'ensemble* E_8 *est l'image par la translation de vecteur* $\overrightarrow{i}$ *de la droite passant par l'origine et le point d'affixe* $\left(\sqrt{3}+i\right)/2$ *angle de* $\pi/3$ *avec l'axe des abscisses.*
9. *Enfin l'ensemble* E_9 *est l'image par la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}\,(1-2i)$ *de la demi droite* $[\mathrm{O}y)$.

Exercice 1.32 ♡

Soient A(1+*i*) *et* B(4+3*i*).

1. *Trouver l'affixe du point* C *pour que le triangle* ABC *soit équilatéral direct.*
2. *Trouver l'affixe des points* D *et* E *pour que le quadrilatère* ABDE *soit un carré direct.*

Solution :

1. *Le triangle* ABC *est équilatéral direct si et seulement si* C *est déduit de* B *par une rotation de centre* A *et d'angle* P*i*/3 *donc on doit avoir* $Z_C = e^{i\pi/3}(z_B - z_A) + z_A$. *Après calcul, on trouve que l'affixe de* C *est* $\boxed{z_C = 5/2 - \sqrt{3} + \left(2 + 3/2\sqrt{3}\right) i}$. *Réciproquement, on vérifie que ce point convient.*
2. *Le quadrilatère* ABDE *est un carré direct si et seulement si on a en même temps :*
   – *le point* D *est l'image de* A *par une rotation d'angle* $-\pi/2$ *et de centre* B.
   – *le point* E *est l'image de* B *par une rotation d'angle* $\pi/2$ *et de centre* A.
   On trouve alors $z_D = -i(z_A - z_B) + z_B$ *c'est-à-dire* $\boxed{z_D = 2 + 6i}$ *et* $z_E = i(z_B - z_A) + z_A$ *c'est-à-dire* $\boxed{z_E = 3 - 2i}$.
   On vérifie réciproquement que ces deux points conviennent.

Exercice 1.33 ♡

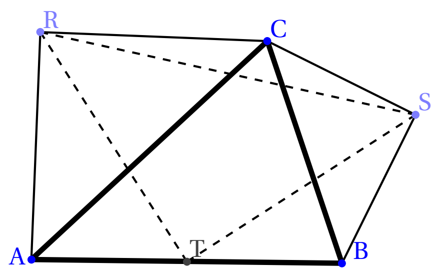
Calculer la longueur d'un côté d'un polygone régulier à n *sommets inscrit dans le cercle unité.*

Solution : *On calcule pour cela :*

$$|1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}| = \left| e^{\frac{i\pi}{n}} \left(e^{-\frac{i\pi}{n}} - e^{\frac{i\pi}{n}} \right) \right| = \boxed{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

Exercice 1.34 ♡

Soit ABC *un triangle direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles* ARC *et* BSC *isocèles et rectangles respectivement en* R *et* S. *Si* T *est le milieu de* [AB], *montrer que* RST *est rectangle et isocèle en* T.



Solution : *Quitte à effectuer une translation, une rotation et une homothétie, on peut supposer que l'affixe de* T *est* 0, *celle de* A *est* -1 *et celle de* B, 1. *On note* c, r, s *les affixes respectives de* C, R *et* S. *Comme* ARC *est isocèle et rectangle en* R, C *est déduit de* A *par une rotation de centre* C *et d'angle* $\pi/2$. *Donc* $c - r = i(-1-r)$. *De même,* B *est déduit de* S *par une rotation de centre* S *et d'angle* $\pi/2$, *donc* $1 - s = i(c - s)$. *On déduit de ces deux relations que*

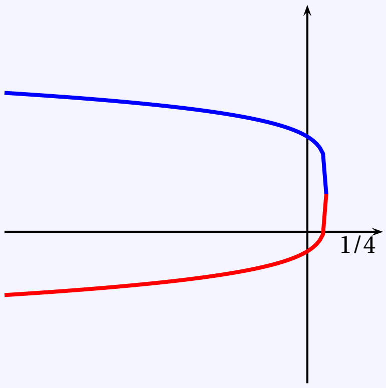
$$r = \frac{c+i}{1-i} \quad \text{et} \quad s = \frac{-1+ic}{i-1}.$$

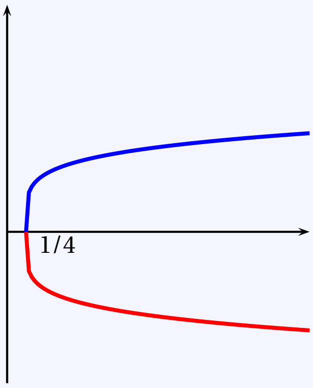
Il est alors clair que $is = r$ *donc* R *est l'image de* S *par une rotation de centre* T *et d'angle* $\pi/2$. *Autrement dit,* RST *est rectangle et isocèle en* T.

Exercice 1.35 ♡♡

Trouver tous les nombres complexes tel que les points M, N, P *d'affixes respectives* z, z^2 *et* z^4 *sont alignés.*

Solution : *Il est clair que* $z = 0$ *et* $z = 1$ *sont solutions du problème. On suppose dans la suite que* $z \neq 0$ *et* $z \neq 1$. *On utilise la condition d'alignement de trois points dans le plan complexes et on trouve que* M, N, P *sont alignés si et seulement si* $\left(z^4 - z^2\right)/\left(z - z^2\right) \in \mathbb{R}$ *(Remarquons que* $z - z^2 \neq 0$ *car* z *est différent de* 0 *et* 1*), c'est-à-dire si et seulement si il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $-z(z+1) = \alpha$. *Résolvons l'équation* $z^2 + z + \alpha = 0$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Son discriminant est* $\Delta = 1 - 4\alpha$. *Si* $\Delta \geqslant 0$, *c'est à dire si* $\alpha \leqslant 1/4$, *alors* $z = -1/2 \pm \sqrt{1/4 - \alpha}$. *Si* $\Delta < 0$, *c'est à dire si* $\alpha > 1/4$, *alors* $z = -1/2 \pm i\sqrt{-1/4 + \alpha}$.





– *En bleu* $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty, 1/4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & -1/2 + \sqrt{1/4-\alpha} \end{array} \right.$

– *En rouge* $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty, 1/4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & -1/2 - \sqrt{1/4-\alpha} \end{array} \right.$

– *En bleu* $g_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [1/4, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sqrt{-1/4+\alpha} \end{array} \right.$

– *En rouge* $g_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [1/4, +\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sqrt{-1/4+\alpha} \end{array} \right.$

Donc, en faisant varier α*, si* $\alpha \leqslant 1/4$*, on voit que tous les réels sont solutions de l'équation. Si* $\alpha > 1/4$*, alors tous les complexes de la forme* $-1/2 + ai$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *sont solutions de l'équation. On en déduit le lieu recherché :* M, N, P *sont alignés si et seulement si* M *est sur la droite réelle ou alors sur la droite passant par* $(-1/2, 0)$ *et parallèle à l'axe imaginaire.*

Exercice 1.36 ♡ *Construction à la règle et au compas du pentagone régulier*

1. (a) i. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^5 = 1 \quad (*)$.
   ii. *Posons* $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$*. Montrer que l'ensemble solution de l'équation* $(*)$ *est :* $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$.
   iii. *Représenter* $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ *dans le plan complexe.*
   iv. *Calculer :* $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
   (b) *On pose* $\alpha = \omega + \omega^4$ *et* $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
   i. *Déduire de 1(a)iv que* α *et* β *sont solutions de* $Z^2 + Z - 1 = 0 \quad (**)$.
   ii. *Exprimer alors* α *en fonction de* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *et* β *en fonction de* $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
   (c) *Résoudre l'équation* $(**)$ *et en déduire une valeur exacte de* $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
2. (a) *On désigne par* A_0, A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *les points d'affixe respective* 1, ω, ω^2, ω^3 *et* ω^4.
   i. *Par quelle transformation simple passe-t-on de* A_0 *à* A_1 *? puis de* A_1 *à* A_2 *? Généraliser ce résultat.*
   ii. *Quelle est l'abscisse du point* H *intersection de la droite* (A_1A_4) *avec l'axe des abscisses ?*
   (b) *Soit* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* Ω *d'affixe* $-\frac{1}{2}$ *et passant par le point* B *d'affixe* i*. On désigne par* M *et* N *les points où* $\mathscr{C}$ *rencontre l'axe des abscisses,* M *ayant une abscisse positive.*
   i. *Prouver que* M *a pour affixe* α *et que* N *a pour abscisse* β.
   ii. *Prouver que* H *est le milieu de* [OM].
   iii. *Déduire de ce qui précède la construction à la règle et au compas d'un pentagone dont on connaît le centre* O *et un sommet* A_0*. Effectuer cette construction en se plaçant dans un repère orthonormal direct* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *avec* $\vec{\imath} = \overrightarrow{OA_0}$.

Solution :

1. (a) i. *Les solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'équation* $z^5 = 1$ *sont les* 5 *racines cinquièmes de l'unité :* $e^{\frac{2ik\pi}{5}}, \quad k \in [\![0, 4]\!]$.
   ii. *Il est clair que* $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = e^{\frac{2i\pi}{5}}$*. Il est aussi clair que, pour tout* $k \in [\![0, 4]\!]$, $e^{\frac{2ik\pi}{5}} = \omega^k$.
   iii. *Voir 1.10 page 34.*
   iv. *On reconnaît une somme géométrique de raison* ω *donc :* $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \left(1 - w^5\right)/(1-\omega)$ *mais comme* $\omega^5 = 1$*, il vient :* $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
   (b) *Posons* $\alpha = \omega + \omega^4$ *et* $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
   i. *On a :* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ *et* $\omega^4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}}$*. Il est alors clair que* $\overline{w} = \omega^4$*. De même,* $\omega^2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}$ *et* $\omega^3 = e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{-4i\pi}{5}} = \overline{\omega^2}$.
   ii. *On a* $\alpha^2 + \alpha - 1 = \left(\omega + \omega^4\right)^2 + \left(\omega + \omega^4\right) - 1 = \omega^2 + 2\omega^5 + \omega^8 + \omega + \omega^4 - 1 = \omega^2 + 2 + \omega^3 + \omega + \omega^4 - 1 = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$*. Donc* α *est solution de* $Z^2 + Z - 1 = 0$*. On fait de même pour* β.

iii. *On a* $\alpha=\omega+\omega^4=\omega+\overline{\omega}=2\cos\frac{2\pi}{5}$ *et* $\beta=\omega^2+\omega^3=\omega^2+\overline{\omega^2}=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

(c) *Les racines de* Z^2+Z-1 *sont* $\left(-1-\sqrt{5}\right)/2$ *et* $\left(-1+\sqrt{5}\right)/2$. *Comme* $\frac{2\pi}{5}\in]0,\pi/2[$ *et que* $\frac{4\pi}{5}\in]\pi/2,\pi[$, *il vient :* $\cos\frac{2\pi}{5}=\left(-1+\sqrt{5}\right)/4$ *et* $\cos\frac{4\pi}{5}=\left(-1-\sqrt{5}\right)/4$.

2. (a) i. *On passe de* A_0 *à* A_1, *puis de* A_1 *à* A_2, *puis de* A_i *à* A_{i+1} *par une rotation de centre* O *et d'angle* $2\pi/5$.

ii. *L'abscisse du point* H *intersection de la droite* (A_1A_4) *est l'abscisse de* A_1 *qui vaut* $\cos\frac{2\pi}{5}=\left(-1+\sqrt{5}\right)/4$.

(b) i. *Par application du théorème de Pythagore dans le triangle* ΩOJ, *on obtient que le rayon du cercle est* $\sqrt{5}/2$. *Donc l'affixe de* M *est* $-1/2+\sqrt{5}/2=\alpha$ *et l'affixe de* N *est* $-1/2-\sqrt{5}/2=\beta$

ii. *L'affixe du milieu de* [OM] *est* $(0+\alpha)/2=(-1+\sqrt{5})/4$ *ce qui correspond à l'affixe de* H..

iii. *Pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas, on commence par tracer le cercle unité* $\mathscr{C}_0$ *de centre* O *et passant par* A_0. *On place ensuite le point* B *d'affixe* i *et le point* Ω *d'affixe* $-1/2$. *On trace le* $\mathscr{C}$ *et le milieu* Ω *passant par* B *ce qui nous permet de construire les points* M *et* N. *On lève les perpendiculaires à l'axe des abscisses passant par* M *et* N. *Ces perpendiculaires intersectent le cercle unité en les points* A_1, A_2, A_3 *et* A_4.

Exercice 1.37 ♡♡ ***Propriété de l'angle au centre***

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$, *on considère un cercle* $\mathscr{C}$ *de centre* Ω, *de rayon* $R>0$ *et trois points* $A,B,M\in\mathscr{C}$. *Prouver la* ***propriété de l'angle au centre*** *:*

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}}\right)=2\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\ [2\pi]$$

Solution : *Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que* $\Omega=O$. *En effectuant une homothétie de centre* O *et de rapport* $1/R$, *on peut supposer que* $R=1$ *et grâce à une rotation, on peut se ramener au cas où* M *est le point d'affixe* 1. *Ces transformations n'affecteront par le résultat car elles conservent les angles orientés. On note* a,b,m *les affixes respectives des points* A, B, M. *On sait que* $|a|=|b|=1$ *et que* $m=1$. *Soit* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *des arguments pour* a *et* b. *On sait que*

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\arg\frac{b}{a}=\arg e^{\beta-\alpha}=\beta-\alpha\ [2\pi]$$

et que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\arg\frac{b-1}{a-1}=\arg\frac{e^{i\beta}-1}{e^{i\alpha}-1}=\arg\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{\beta-\alpha}{2}\ [\pi]$$

par factorisation par les angles moitiés. L'argument n'est connu qu'à π *près car on ne connaît pas le signe de* $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)/\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. *On en déduit que* $2\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\beta-\alpha\ [2\pi]=\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ *et la propriété de l'angle au centre est prouvée.*

Exercice 1.38 ♡♡

Soit $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$. *Montrer que :*

$$\frac{z+1}{z-1}\in i\mathbb{R}.$$

On pourra prouver cette propriété par trois méthodes différentes :

1. *Une méthode algébrique utilisant les propriétés du groupe* $\mathbb{U}$.
2. *Une méthode utilisant la factorisation par l'angle moitié.*
3. *Une méthode géométrique.*

Solution :

Méthode algébrique : *Comme* $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$, *on a :* $z^{-1}=\bar{z}$ *et*

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{(z+1)\overline{(z-1)}}{|z-1|^2}=\frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}=-2i\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z-1|^2}\in i\mathbb{R}.$$

Avec les angles moitiés : *Comme* $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$, *il existe* $\theta\in]0,2\pi[$ *tel que :* $z=e^{i\theta}$. *Par factorisation par l'angle moitié :*

$$\frac{z+1}{z-1}=\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=i\cot\operatorname{an}\frac{\theta}{2}\in i\mathbb{R}.$$

Méthode géométrique : si A est le point du plan complexe d'affixe z, B celui d'affixe 1 et C celui d'affixe -1, ABC est un triangle inscrit dans le cercle unité et BC est un diamètre de ce cercle. Par application du théorème de la médiane, ABC est donc rectangle en A et $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. On en déduit que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 1.39 ♡♡

Déterminer les points M *du plan d'affixe* z *tels que :*

1. $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$.
2. $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.
3. $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$.

Solution : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Supposons que M est le point du plan complexe d'affixe z, A est celui d'affixe 1 et B est celui d'affixe -1. On a : $\text{MA} = |z-1|$, $\text{MB} = |z+1|$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{MB}}, \overrightarrow{\text{MA}}}\right) = \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$.

1. Supposons que : $\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$. Alors soit ce quotient est nul, dans quel cas $\text{M} = \text{B}$, soit $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{MB}}, \overrightarrow{\text{MA}}}\right) \equiv 0\ [\pi]$ et donc les points A, B, M sont alignés. La réciproque est évidente. Par conséquent : $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}\right\} = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$.
2. Supposons que : $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$. Alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{MB}}, \overrightarrow{\text{MA}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Le triangle MBC est donc rectangle en A et d'après le théorème de la médiane, M est un point de cercle de diamètre [A, B], c'est-à-dire un point du cercle unité différent de A. La réciproque est immédiate. Donc : $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}\right\} = \boxed{\mathbb{U} \setminus \{1\}}$.
3. Supposons enfin que : $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$. Alors : $|z-1| = |z+1|$, ce qui s'écrit aussi : $\text{AM} = \text{BM}$. Donc M est un point de la médiatrice du segment [A, B] qui est l'axe imaginaire. Par conséquent : $z \in i\mathbb{R}$. La réciproque est triviale et $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1\right\} = \boxed{i\mathbb{R}}$.

Exercice 1.40 ♡♡ **Une caractérisation des triangles équilatéraux**

Soient A, B *et* C *trois points du plan complexe d'affixes respectives* a, b *et* c. *Montrer l'équivalence des assertions suivantes :*

1. ABC *est un triangle équilatéral.*
2. j *ou* j^2 *est racine du polynôme* $\text{P} = a\text{X}^2 + b\text{X} + c$.

Solution : Rappelons que comme j est une racine troisième de l'unité, on a : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. De plus, $e^{i\pi/3} = e^{-i\pi}e^{4i\pi/3} = -j^2$ et $e^{-i\pi/3} = e^{-i\pi}e^{2i\pi/3} = -j$. On a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}
& \text{ABC est équilatéral} \\
\iff\ & \text{B est l'image de A par la rotation de centre C et d'angle } \pm\pi/3 \\
\iff\ & b-c = e^{i\pi/3}(a-c) \quad \text{ou} \quad b-c = e^{-i\pi/3}(a-c) \\
\iff\ & b-c = -j^2(a-c) \quad \text{ou} \quad b-c = -j(a-c) \\
\iff\ & j^2a + b - \left(1+j^2\right)c = 0 \quad \text{ou} \quad ja + b - \left(1+j\right)c = 0 \\
\iff\ & j^2a + b + jc = 0 \quad \text{ou} \quad ja + b + j^2c = 0 \\
\iff\ & aj^4 + bj^2 + c = 0 \quad \text{ou} \quad aj^2 + bj + c = 0 \\
\iff\ & j^2 \text{ est une racine de P} \quad \text{ou} \quad j \text{ est une racine de P}
\end{aligned}$$

Exercice 1.41 ♡♡

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *on considère un cercle de centre* O *sur lequel on place, dans le sens trigonométrique direct, 6 points distincts* A, B, C, D, E *et* F *de façon à ce que les triangles* OAB, OCD *et* OEF *soient équilatéraux. On note* M, N *et* P *les milieux respectifs de* [BC], [DE] *et* [FA]. *On veut montrer que* MNP *est équilatéral.*

1. *Effectuer un dessin à la règle et au compas.*
2. *On note* z, z' *et* z'' *les affixes respectives de* A, C *et* E. *Donner les affixes* z_B, z_D *et* z_F *des points* B, D *et* F *en fonction de* z, z' *et* z''.
3. *Donner les affixes* z_M, z_N *et* z_P *des points* M, N *et* P *en fonction de* z, z' *et* z''.
4. *Conclure (on pourra utiliser l'exercice 1.40).*

Solution :

1.
2. *Le triangle* OAB *est équilatéral. Par conséquent,* $\boxed{z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z}$. *De même, on montre que* $\boxed{z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} z'}$ *et* $\boxed{z_F = e^{i\frac{\pi}{3}} z''}$.
3. *Comme* M *est le milieu de* [BC], $z_M = \frac{z_B+z_C}{2} = \boxed{\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} z+z'}{2}}$. *De même, on montre que :* $z_N = \boxed{\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} z'+z''}{2}}$ *et que* $z_P = \boxed{\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} z''+z}{2}}$.
4. *On utilise le critère prouvé dans l'exercice 1.40. Pour montrer que* MNP *est équilatéral, il suffit de montrer que* $z_M + j z_N + j^2 z_P = 0$. *On a :*

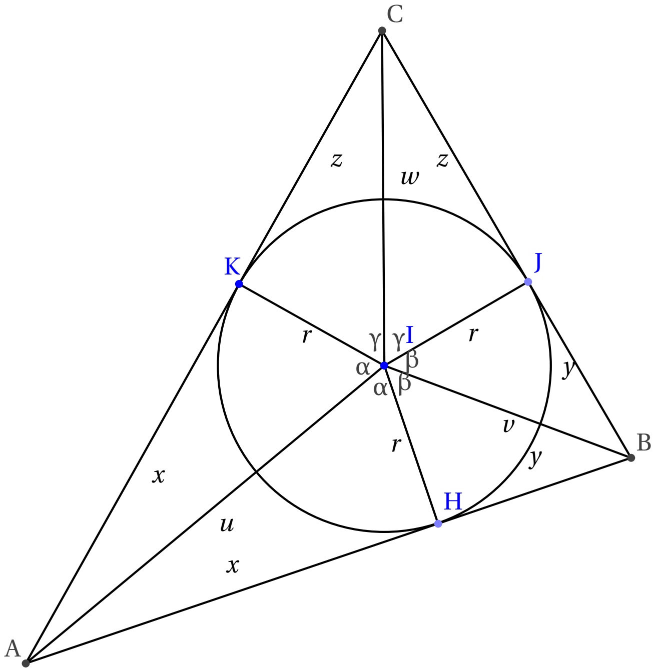
$$\begin{aligned} a_M + j z_N + j^2 z_P &= \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} z + z' + j\left(e^{i\frac{\pi}{3}} z' + z''\right) + j^2\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} z''+z}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + j^2\right)}_{\alpha} z + \underbrace{\left(1 + j e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}_{\beta} z'' + \underbrace{\left(j + j^2 e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}_{\gamma} z''\right) \end{aligned}$$

mais

- $j^2 = -\left(1+j\right) = -e^{i\frac{\pi}{3}}$ *donc* $\alpha = 0$.
- $j e^{i\frac{\pi}{3}} = j\left(1+j\right) = j + j^2 = -1$ *donc* $\beta = 0$.
- $j^2 e^{i\frac{\pi}{3}} = j^2\left(1+j\right) = j^2 + 1 = -j$ *donc* $\gamma = 0$.

ce qui prouve le résultat.

Exercice 1.42 ♡♡ **Formule de Heron**



Soit I *le centre du cercle inscrit au triangle* ABC. *Les longueurs des côtés sont* $a = y + z$, $b = z + x$ *et* $c = x + y$. *On appelle* s *le demi-périmètre* $x + y + z$. *Les angles en* I *vérifient* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

1. *Démontrer que* $r + ix = ue^{i\alpha}$.
2. *Calculer* $(r + ix)(r + iy)(r + iz)$.
3. *En prenant les parties imaginaires, démontrer que* $xyz = r^2(x + y + z)$.
4. *En déduire que* $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

5. Démontrer que l'aire du triangle ABC vaut
   $\mathscr{A} = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Formule de Heron)

Solution :

1. Dans le triangle AIH rectangle en H, $r = u\cos\alpha$ et $x = u\sin\alpha$, d'où $r + ix = u(\cos\alpha + i\sin\alpha) = ue^{i\alpha}$.
2. $(r+ix)(r+iy)(r+iz) = ue^{i\alpha}ve^{i\beta}we^{i\gamma} = uvwe^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = uvwe^{i\pi} = -uvw$.
3. En prenant les parties imaginaires, on a $0 = r^2z + r^2y + r^2x - xyz$, d'où le résultat.
4. On en déduit $r^2s = xyz$. Or $s = x + (y+z) = x + a$ d'où $x = s - a$. Donc $xyz = (s-a)(s-b)(s-c)$ et donc $r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$, d'où le résultat.
5. L'aire du triangle ABC égale l'aire de BIC + celle de CIA + celle de AIB à savoir $\frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2}$.
   Donc $\mathscr{A} = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c) = rs = s\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

1.11.5 Transformations du plan complexe

Exercice 1.43 ♡

Identifier les transformations complexes suivantes :

1. $f_1 : z \mapsto z + 1 + i$.
2. $f_2 : z \mapsto e^{i\pi/6}z$.
3. $f_3 : z \mapsto e^{i\pi/3}z + 1$.
4. $f_4 : z \mapsto 2z + 1 - i$.
5. $f_5 : z \mapsto -z + 2 - i$.
6. $f_6 : z \mapsto \bar{z}$.
7. $f_7 : z \mapsto (1+i)z + i$.
8. $f_8 : z \mapsto \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 1$.

Solution :

1. La transformation f_1 est la translation de vecteur d'affixe $1 + i$.
2. La transformation f_2 est la rotation d'angle $\pi/3$ et de centre O.
3. La transformation f_3 est une rotation. Son centre est le point d'affixe solution de l'équation $f(z) = z$, c'est à dire $z = (1 + i\sqrt{3})/2$. L'angle de la rotation est $\pi/3$.
4. La transformation f_4 est une homothétie de rapport 2. Pour trouver son centre, on résout l'équation $f(z) = z$ et on trouve $z = -1 + i$.
5. La transformation f_5 est une homothétie de rapport -1 et de centre $1 + i/2$.
6. La transformation f_6 est la symétrie d'axe (Ox).
7. Comme $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, la transformation f_7 est la composée de l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de centre -1 avec la rotation d'angle $\pi/4$ et de même centre.
8. Comme $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, la transformation f_8 est la composée de l'homothétie de rapport 2 et de centre $i\sqrt{3}/3$ avec la rotation d'angle $\pi/3$ et de même centre. $\pi/4$ et de même centre.

Exercice 1.44 ♡

Donner les applications qui représente dans le plan complexe les transformations suivantes :

1. La translation de vecteur d'affixe $-2 + i$.
2. La symétrie de centre i.
3. La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.
4. L'homothétie de rapport 3 et de centre $1 + 2i$.
5. La similitude de rapport 2, d'angle $\pi/3$ et de centre $1 + i$.

Solution :

1. $z \mapsto z - 2 + i$
2. On peut voir la symétrie de centre O comme l'homothétie de centre i et de rapport -1. Une telle transformation est représentée par $f : z \mapsto -z + b$ où $b \in \mathbb{C}$. Pour trouver b, on utilise que $f(i) = i$ et on trouve que $b = 2i$.

3. La transformation est représentée par une application de la forme : $f : z \mapsto e^{i\pi/6} z + b$ où $b \in \mathbb{C}$. Pour trouver b, on utilise que $f(1) = 1$ et on trouve $b = -\sqrt(3)/2 + 1 - i/2$.
4. La transformation est représentée par une application de la forme : $f : z \mapsto 3z + b$ où $b \in \mathbb{C}$. Pour trouver b, on utilise que $f(1+2i) = 1$ et on trouve $b = -2 - 4i$.
5. La transformation est représentée par une application de la forme : $f : z \mapsto 2e^{i\pi/3} z + b$ où $b \in \mathbb{C}$. En utilisant la même démarche que précédemment, on trouve que $b = \sqrt{3}(1-i)$.

Exercice 1.45 ♡

On considère :
- *le point* Ω *du plan complexe d'affixe* $1+2i$
- *l'homothétie* h *de centre* Ω *et de rapport* 2.
- *la rotation* r *de centre* Ω *et d'angle* $\pi/4$.
- *la transformation du plan complexe* $s = r \circ h$.

Donner l'écriture complexe de s.

Solution : La transformation s est une similitude de centre Ω, d'angle $\pi/4$ et de rapport 2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a donc $s(z) = 2e^{i\pi/4} z + b = \sqrt{2}(1+i)z + b$ où b est un complexe à déterminer. Comme $s(1+2i) = 1+2i$, il vient : $b = 1 + \sqrt{2} + i(2 - 3\sqrt{2})$. Donc : $\boxed{s : z \mapsto \sqrt{2}(1+i)z + 1 + \sqrt{2} + i\left(2 - 3\sqrt{2}\right)}$.

Exercice 1.46 ♡

Étudier la similitude s *qui envoie le point* A *d'affixe* i *sur le point* A′ *d'affixe* $1 + \sqrt{3}/2 + i/2$ *et le point* B *d'affixe* $1+i$ *sur le point* B′ *d'affixe* $1 + 3\sqrt{3} + 2i$.

Solution : Comme s est une similitude, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = az + b$. De $s(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$, on tire le système :

$$\begin{cases} ai + b & = 1 + \sqrt{3}/2 + i/2 \\ a(1+i) + b & = 1 + 3\sqrt{3} + 2i \end{cases}.$$

On en déduit que $a = 3/2\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 3e^{-i\pi/3}$ et que $b = 1/2\left(-1 + 3\sqrt{3} + i\left(1 + 3\sqrt{3}\right)\right)$. En résolvant l'équation $s(z) = z$, on trouve que le point fixe Ω de s a comme affixe $1 - i$. La similitude s est donc la composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport 3 avec la rotation de centre Ω et d'angle $-\pi/3$.

Exercice 1.47 ♡♡

Démontrer que :
1. *la composée de deux symétries centrales est une translation.*
2. *la composée d'une rotation et d'une translation est une rotation.*
3. *la composée de deux rotations est une rotation ou une translation.*

Solution :
1. La première symétrie centrale est représentée par une application de la forme $f_1 : z \mapsto -z + b_1$ et la seconde par une application de la forme $f_2 : z \mapsto -z + b_2$ où $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}$ alors $f_1 \circ f_2(z) = z + b_1 - b_2$ et on reconnaît que $f_1 - f_2$ est une translation de vecteur d'affixe $b_2 - b_1$.
2. La rotation est représentée par une application $r : z \mapsto e^{i\theta} z + b$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et où $b \in \mathbb{C}$. La translation est représentée par $t : z \mapsto z + a$ où $a \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $r \circ t(z) = e^{i\theta} z + e^{i\theta} a + b$ et on reconnait encore une rotation d'angle θ. De même, $t \circ r(z) = e^{i\theta} z + a + b$ qui est aussi une rotation d'angle θ.
3. On note $r : z \mapsto e^{i\theta} z + b$ et $r' : z \mapsto e^{i\theta'} z + b'$ les deux rotations avec $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $b, b' \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $r \circ r'(z) = e^{i(\theta+\theta')} z + \left(e^{i\theta} b' + b\right)$ et on reconnaît l'écriture d'une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Chapitre 2

Géométrie élémentaire du plan

J'étais incapable de relancer la balle par dessus le grillage ; elle partait toujours à environ un radian de la direction où elle aurait dû aller.
Richard Feynman - 1985.

Pour bien aborder ce chapitre

En plus de proposer quelques rudiments de géométrie plane, ce chapitre a deux vocations importantes :

1. la première est d'apprendre à calculer. On verra comment certains problèmes de géométrie se ramènent à effectuer des calculs qui peuvent s'avérer difficiles si on ne procède pas avec un minimum de méthode.

2. la seconde de donner des représentations concrètes pour le cours d'algèbre linéaire qui nous occupera en seconde période. On verra que l'ensemble des vecteurs du plan est muni d'une structure algébrique particulière appelée *espace vectoriel*. La bonne compréhension des notions et propriétés des chapitres 23 et 24 passe par une bonne représentation de ces notions dans le cas particulier du plan (et de l'espace).

Il est conseillé dans une première lecture de ne s'attacher qu'aux démonstrations marquées du signe ♡ .
Comme indiqué dans le programme, on suppose connues les notions suivantes :

- calcul vectoriel
- distance et norme euclidienne
- orthogonalité
- orientation
- angles et angles orientés

Ces différentes notions seront précisées dans les chapitres 23 et 27.

Après quelques rappels sur les repères cartésiens et les coordonnées polaires, on introduit deux outils fondamentaux en géométrie (plane) : le produit scalaire et le déterminant. Le premier permet de tester l'orthogonalité de deux vecteurs et le second leur colinéarité. On mettra en évidence leurs propriétés algébriques (bilinéarité, (anti)symétrie) et leurs propriétés géométriques (projection, calcul d'aire,...).

On s'intéressera ensuite aux droites et aux cercles du plan. On déterminera leurs équations cartésiennes (sous une forme plus générale que celle vue au lycée), paramétriques (qui correspond en fait à l'équation du mouvement d'un solide au cours du temps suivant la droite ou le cercle considéré) et polaires. On mettra en place des méthodes efficaces de calcul de la distance d'un point à une droite. Elles serviront dans de nombreuses situations.

2.1 Quelques notations et rappels

Dans tout le chapitre on notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan et $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

BIO 3 Euclide, né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie



On sait peu de choses au sujet d'Euclide.
Il parti en Égypte afin d'y enseigner les mathématiques et travailla au monseion[a] d'Alexandrie. Il mena de nombreux travaux de recherche. Il est l'auteur des ``*Éléments*´´. Ce texte, formé de treize livres, est une compilation du savoir mathématique de son époque. Il resta une référence pendant près de 2000 ans et contient, entre autre, les fondements de la géométrie du plan.
C'est dans les Éléments que pour la première fois un travail mathématique a été réalisé sur la base d'une démarche axiomatique.

a. Temple dédié aux muses rattaché à la bibliothèque

2.1.1 Addition vectorielle

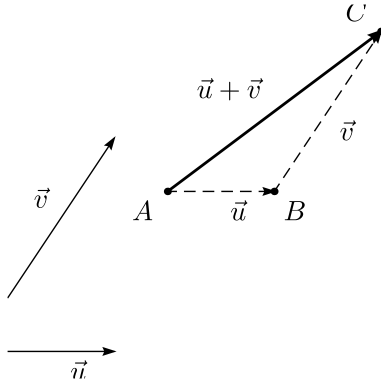


FIGURE 2.1 – Addition vectorielle

Rappelons que pour former la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$, il suffit de considérer trois points A, B, C de $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Le vecteur somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est alors donné par

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

L'addition vectorielle vérifie les propriétés suivantes :
– elle est *associative* : pour tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ dans $\mathscr{V}$, on a :

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).$$

– elle possède un *élément neutre* noté $\overrightarrow{0}$: pour tout $\overrightarrow{u}$ dans $\mathscr{V}$:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.$$

Remarquons que le vecteur nul est représentable, pour tout point A de $\mathscr{P}$ par le vecteur $\overrightarrow{AA}$.
– chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\mathscr{V}$ possède un *vecteur symétrique* $\overrightarrow{v}$ vérifiant :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

On notera $-\overrightarrow{u}$ le vecteur $\overrightarrow{v}$ symétrique de $\overrightarrow{u}$. Comme $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$, cette notation conduit à celle ci : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
– l'addition dans $\mathscr{V}$ est *commutative* : pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$,

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.$$

Pour résumer ces quatre propriétés, on dit que le couple $(\mathscr{V}, +)$ est un *groupe commutatif*.

2.1.2 Produit d'un vecteur et d'un réel

Á tout nombre réel λ et à tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathscr{V}$, on peut associer le vecteur $\lambda.\overrightarrow{u}$. Ce produit que l'on dit externe possède les propriétés suivantes :
– Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathscr{V}$, $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

– Pour tous réels λ, μ et tous vecteurs $\overrightarrow{u} \in \mathscr{V}$, $(\lambda.\mu) = \lambda(\mu\overrightarrow{u})$.
– Le produit par un scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle : pour tout réel λ et tout vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$, $\lambda\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.
– Le produit par un scalaire est distributif par rapport à l'addition des réels : pour tout réels λ, μ et tout $\overrightarrow{u}$ de $\mathscr{V}$, $(\lambda+\mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

On dira, pour résumer ces 8 propriétés de l'addition vectorielle et du produit externe, que le triplet $(\mathscr{V},+,.)$ est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

2.1.3 Vecteurs colinéaires, unitaires

DÉFINITION 2.1 ♡ **Vecteurs colinéaires**
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$ sont *colinéaires* si il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou un réel η tel que $\overrightarrow{v} = \eta\overrightarrow{u}$.

Remarque 2.1
Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan. Il est d'ailleurs le seul vecteur du plan à vérifier cette propriété (exercice !).

DÉFINITION 2.2 ♡ **Vecteur unitaire ou normé**
Un vecteur est dit *unitaire* ou *normé* si sa norme est 1.

2.1.4 Droites du plan

Notation 2.1
Soit A un point de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathscr{V}$. On note $A+\overrightarrow{u}$ l'unique point B de $\mathscr{P}$ donné par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

DÉFINITION 2.3 **Droite vectorielle**
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul du plan. On appelle *droite vectorielle dirigée par* $\overrightarrow{u}$ le sous-ensemble de $\mathscr{V}$, noté $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right)$, des vecteurs du plan colinéaires à $\overrightarrow{u}$.

$$\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right) = \left\{\lambda\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

DÉFINITION 2.4 **Droite affine**
Soit A un point du plan $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$. La *droite* D *passant par* A *et dirigée par* $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points du plan de la forme $A+\lambda\overrightarrow{u}$ où λ est réel.

$$D = \{A+\lambda\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}).$$

Un vecteur non nul de $\mathscr{V}$ est un *vecteur directeur* de la droite donnée par le couple $(A, \overrightarrow{u})$ si il est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Remarque 2.2 Remarquons que si une droite D est donnée par le couple $(A, \overrightarrow{u})$ et si M est un point du plan, alors on a :

$$M \in D \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : M = A+\lambda\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires.}$$

DÉFINITION 2.5 ♡ **Droites parallèles, orthogonales**
On dit que :
– deux droites sont *parallèles* si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
– deux droites sont *orthogonales* (ou *perpendiculaires*) si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

2.2 Modes de repérage dans le plan

2.2.1 Repères Cartésiens

DÉFINITION 2.6 ♡ **Base**
– Un couple de vecteur $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ de $\mathscr{V}$ est une *base* de $\mathscr{V}$ si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.
– Une base est dite *orthogonale* si les deux vecteurs la composant sont orthogonaux.
– Elle est dite *orthonormale* si elle est orthogonale et si les deux vecteurs la composant sont de plus unitaires.

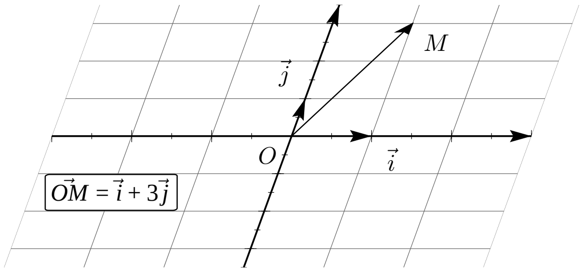


FIGURE 2.2 – Repère cartésien

Remarque 2.3 En vertu de la remarque 2.1 page 64, si $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base du plan, alors aucun des deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ n'est nul.

PROPOSITION 2.1 ♡ **Caractérisation des bases du plan**
Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathscr{V}$. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base du plan si et seulement si :

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = 0 \implies \alpha = \beta = 0}$$

Démonstration ♡

$\boxed{\Rightarrow}$ *Nous allons effectuer un raisonnement par contraposée (vous pouvez consulter la page 1128 si vous n'êtes pas familier avec ce type de raisonnement). Supposons que $(\vec{u}, \vec{v})$ ne soit pas une base du plan. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Donc il existe $\beta' \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \beta' \vec{v}$. On prouve ainsi l'existence de deux réels $\alpha = 1$ et $\beta = -\beta'$ non tous deux nuls tels que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = 0$ et l'implication directe est prouvée.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Effectuons à nouveau un raisonnement par contraposée. Supposons qu'il existe deux réels α et β non tous deux nuls tels que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = 0$.*

- *Si $\alpha \neq 0$, on obtient : $\vec{u} = -\beta/\alpha \vec{v}$ et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires. Ils ne peuvent donc pas former une base du plan.*
- *Si $\alpha = 0$ alors β est non nul et on a : $\beta \vec{v} = \vec{0}$, ce qui n'est possible que si $\vec{v} = 0$. D'après la remarque précédant la proposition, $(\vec{u}, \vec{v})$ ne forme là encore pas une base du plan.*

L'implication réciproque est ainsi prouvée.

DÉFINITION 2.7 ♡ **Repère Cartésien, Origine d'un repère, repère orthogonal, orthonormal**
Un *repère cartésien* $\mathscr{R}$ du plan $\mathscr{P}$ est donné par un triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$où O est un point de $\mathscr{P}$ et où $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme une base de $\mathscr{V}$.

- Le point O est l'*origine du repère*.
- Si les deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux, on dit que $\mathscr{R}$ est un *repère orthogonal*. Si ils sont de plus unitaires, le repère $\mathscr{R}$ est alors dit *orthonormal*.
- Les droites passant par O de vecteur directeur respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont appelés *axes du repère* $\mathscr{R}$ et sont notés (Ox) et (Oy).

DÉFINITION 2.8 ♡ **Repère orthonormal direct**
Un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$est dit *direct* si l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \vec{\jmath}})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

PROPOSITION 2.2 ♡ **Coordonnées cartésiennes d'un vecteur, d'un point**
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$un repère du plan $\mathscr{P}$.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{V}$ et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathscr{V}$. Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

  Ce couple (x, y) représente les *coordonnées (ou les composantes) du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$*. On notera cela sous une des formes suivantes :

$$\vec{u}(x, y), \quad \vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Soit M un point du plan $\mathscr{P}$ et $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$un repère $\mathscr{R}$ de $\mathscr{P}$. Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Ce couple (x,y) représente les *coordonnées du point* M *dans le repère* $\mathscr{R}$. De même que précédemment, on écrira :

$$\mathrm{M}(x;y),\quad \mathrm{M}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\quad \text{ou}\quad \mathrm{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Démonstration *Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathscr{V}$ et soient $\overrightarrow{u_1}$ le projeté de $\overrightarrow{u}$ sur $(\mathrm{O}x)$ parallèlement à $(\mathrm{O}y)$ et $\overrightarrow{u_2}$ le projeté de $\overrightarrow{u}$ sur $(\mathrm{O}y)$ parallèlement à $(\mathrm{O}x)$. On a : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$. Comme $\overrightarrow{u_1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{u_2}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\jmath}$, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{u_1}=x\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{u_2}=y\overrightarrow{\jmath}$. Par conséquent : $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath}$.*
Ce couple (x,y) est de plus unique : si (x',y') est un autre couple de réels tels que : $\overrightarrow{u}=x'\overrightarrow{\imath}+y'\overrightarrow{\jmath}$, on obtient, par soustraction : $\overrightarrow{0}=(x-x')\overrightarrow{\imath}+(y-y')\overrightarrow{\jmath}$, soit encore : $(x-x')\overrightarrow{\imath}=(y'-y)\overrightarrow{\jmath}$. Comme $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ ne sont pas colinéaires, cette égalité n'est possible que si $x=x'$ et $y=y'$.

Remarque 2.4

– Cette proposition permet d'identifier l'ensemble des points du plan avec l'ensemble $\mathbb{R}^2$. En effet, si un repère cartésien $\mathscr{R}$ est fixé dans $\mathscr{P}$, à tout point M de $\mathscr{P}$ correspond un unique couple de réels (x,y) : ses coordonnées. Réciproquement, à tout couple de réel (x,y) correspond un unique point M de $\mathscr{P}$ dont les coordonnées dans le repère considéré sont données par ce couple.
– De même, si une base $\mathscr{B}$ est fixée, on peut identifier l'ensemble des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$. Notons $\theta_{\mathscr{B}}$ l'application qui à un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathscr{V}$ lui associe ses coordonnées (x,y) dans $\mathscr{B}$:

$$\theta_{\mathscr{B}}:\begin{cases}\mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ \mathrm{M} & \longmapsto & (x,y)\end{cases}.$$

La proposition 2.2 dit que $\theta_{\mathscr{B}}$ est bijective. Cette identification « respecte » de plus l'addition et la multiplication par un scalaire. Ainsi, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont deux vecteurs du plan qui ont pour coordonnées respectives $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$ dans $\mathscr{B}$ alors

$$\theta_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{u}\right)=(x,y)\quad \text{et}\quad \theta_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{u}'\right)=(x',y') \tag{2.1}$$

et le vecteur

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}'=x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath}+x'\overrightarrow{\imath}+y'\overrightarrow{\jmath}=(x+x')\overrightarrow{\imath}+(y+y')\overrightarrow{\jmath}$$

a pour coordonnées $(x+x',y+y')$ ce qui s'écrit aussi

$$\theta_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}'\right)=(x+x',y+y') \tag{2.2}$$

En identifiant les relations 2.1 et 2.2, on obtient

$$\theta_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}'\right)=\theta_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{u}\right)+\theta_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{u}'\right)$$

On montrerait de plus facilement que, si λ est un réel, alors $\theta_{\mathscr{B}}\left(\lambda\overrightarrow{u}\right)=\lambda\cdot\theta_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{u}\right)$, ce qui n'est qu'une autre façon de dire que $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{vmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{vmatrix}$. Pour résumer ces deux égalités, on dit que $\theta_{\mathscr{B}}$ est une *application linéaire*. Une application entre deux espaces vectoriels qui est à la fois linéaire et bijective est appelée un *isomorphisme d'espaces vectoriels*.
– Si on connaît les coordonnées d'un point $\mathrm{A}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{A}}\\y_{\mathrm{A}}\end{pmatrix}$ et celles d'un point $\mathrm{B}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{B}}\\y_{\mathrm{B}}\end{pmatrix}$ dans un repère $(\mathrm{O},\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, on obtient celles $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Ainsi, $x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x_{\mathrm{B}}\overrightarrow{\imath}+y_{\mathrm{B}}\overrightarrow{\jmath}-x_{\mathrm{A}}\overrightarrow{\imath}-y_{\mathrm{A}}\overrightarrow{\jmath}=(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})\overrightarrow{\imath}+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})\overrightarrow{\jmath}$ et donc en identifiant : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}\\y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\end{pmatrix}$.

PROPOSITION 2.3 **Identification de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{V}$ avec $\mathbb{R}^2$**
En résumé :
– un repère $\mathscr{R}$ $(\mathrm{O},\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$étant fixé dans $\mathscr{P}$, l'application qui a un point de $\mathscr{P}$ associe ses coordonnées dans $\mathscr{R}$ est une bijection de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}^2$. Cette bijection permet d'identifier le plan et $\mathbb{R}^2$.
– une base $\mathscr{B}$ étant fixée dans $\mathscr{V}$, l'application $\theta_{\mathscr{B}}$ qui à un vecteur de $\mathscr{V}$ lui associe ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ est bijective et linéaire. Si on prend un peu d'avance sur le chapitre 23, on dit que $\theta_{\mathscr{B}}$ est un *isomorphisme d'espaces vectoriels*. Cet isomorphisme permet d'identifier $\mathscr{V}$ et $\mathbb{R}^2$.

BIO 4 René Descartes, né 31 mars 1596 à La Haye, mort à Stockholm le 11 février 1650



René Descartes est un philosophe, physicien et mathématicien français. La pensée de Descartes a eu des répercussions fondamentales sur la philosophie et la science moderne. Il est l'auteur du fameux ``*Discours de la méthode*´´. En tant que scientifique, les lignes suivantes, extraites de ce discours, devraient vous interpeller. La méthode fixe quatre principes pour la conduite de l'esprit humain : « Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute. Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres. Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. ». Bien que François Viète utilise déjà une notation semi-symbolique, René Descartes est le premier à utiliser une notation entièrement symbolique. Il est à l'initiative de l'introduction des lettres latines dans les notations mathématiques. Il propose d'utiliser les premières lettres de l'alphabet (a, b, c, ...) pour les paramètres et les dernières (x, y, z, ...) pour les inconnues. Nous utilisons toujours cette convention ! Descartes est aussi à l'origine de la notion de repère du plan et de ce qu'on appelle maintenant la géométrie analytique, ce qui nous intéresse ici. On raconte que c'est en observant une mouche qui se promenait sur les carreaux d'une fenêtre, qu'il aurait pensé à définir, à l'aide des carreaux, des coordonnées du plan. Descartes comprit le premier qu'on peut transformer un problème de géométrie en un problème algébrique. La géométrie de Descartes est publiée en français en 1637 et traduite en latin par Van Schooten en 1649, puis, dans une édition considérablement augmentée et commentée en deux volumes en 1659 et 1661. Cette seconde édition favorisera considérablement la propagation des idées de Descartes.

2.2.2 Changement de repère

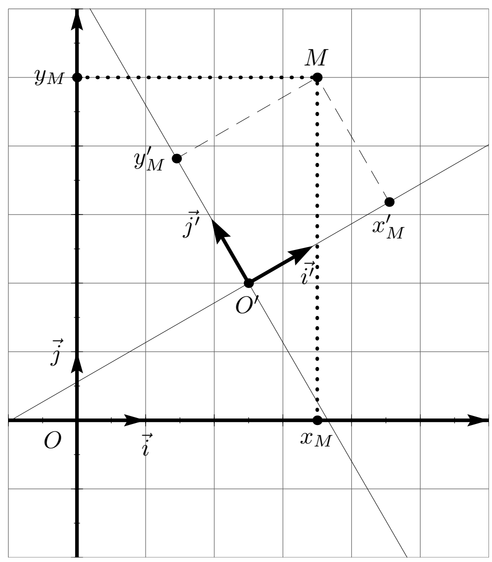


FIGURE 2.3 – Changement de repère

Un changement de repère consiste à changer simultanément l'origine O′ et la base $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j}')$ d'un repère cartésien $\mathscr{R}'$ $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$ en l'origine O et la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'un nouveau repère $\mathscr{R}$ $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit M un point du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées (x', y') dans l'ancien repère $\mathscr{R}'$ et de coordonnées (x, y) dans le nouveau repère $\mathscr{R}$. Cherchons à exprimer les nouvelles

coordonnées (x, y) en fonction des anciennes (x', y'). Notons $(x_{O'}, y_{O'})$ les coordonnées de O′ dans $\mathscr{R}$. On a

$$\begin{aligned} x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath}' &= \overrightarrow{O'M} \\ &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} \\ &= x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} - x_{O'}\overrightarrow{\imath} - y_{O'}\overrightarrow{\jmath} \\ &= (x - x_{O'})\overrightarrow{\imath} + (y - y_{O'})\overrightarrow{\jmath} \end{aligned}$$

Si (α, β), (γ, δ) désignent les coordonnées respectives de $\overrightarrow{\imath}'$ et $\overrightarrow{\jmath}'$ dans $\mathscr{R}$, on a aussi

$$\begin{aligned} x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath}' &= x'(\alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath}) + y'(\gamma\overrightarrow{\imath} + \delta\overrightarrow{\jmath}) \\ &= (\alpha x' + \gamma y')\overrightarrow{\imath} + (\beta x' + \delta y')\overrightarrow{\jmath} \end{aligned}$$

On obtient alors les relations recherchées

$$\begin{cases} x - x_{O'} = \alpha x' + \gamma y' \\ y - y_{O'} = \beta x' + \delta y' \end{cases}$$

PROPOSITION 2.4 ♡ **Changement de repère**
Soit M un point de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x', y') dans un premier repère $\mathscr{R}'$ et de coordonnées (x, y) dans un second repère $\mathscr{R}$. Soient $(x_{O'}, y_{O'})$ les coordonnées de O′ dans $\mathscr{R}$, (α, β), (γ, δ) les coordonnées respectives de $\overrightarrow{\imath}'$ et $\overrightarrow{\jmath}'$ dans $\mathscr{R}$. Les nouvelles coordonnées (x, y) de M en fonction des anciennes (x', y') sont données par les relations

$$\boxed{\begin{cases} x - x_{O'} &= \alpha x' + \gamma y' \\ y - y_{O'} &= \beta x' + \delta y' \end{cases}}$$

Remarque 2.5 Sous forme matricielle, cette relation s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 2.5 ♡ **Changement de repère entre deux repères orthonormaux directs**
Soient $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\mathscr{R}\left(O', \overrightarrow{\imath}', \overrightarrow{\jmath}'\right)$ deux repères orthonormaux directs. Notons $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}'}\right)$. Les nouvelles coordonnées $\left(x, y\right)$ d'un point M du plan $\mathscr{P}$ dans le repère $\mathscr{R}$ s'expriment en fonction des anciennes $\left(x', y'\right)$ dans le repère $\mathscr{R}'$ par

$$\boxed{\begin{cases} x - x_{O'} &= \cos\theta x' - \sin\theta y' \\ y - y_{O'} &= \sin\theta x' + \cos\theta y' \end{cases}}$$

où $\left(x_{O'}, y_{O'}\right)$ représente les coordonnées de O′ dans le repère $\mathscr{R}$.

Démonstration *Par projection sur les axes* $\left(O, \overrightarrow{\imath}\right)$ *et* $\left(O, \overrightarrow{\jmath}\right)$*, on obtient, pour les vecteurs* $\overrightarrow{\imath'}$ *et* $\overrightarrow{\jmath'}$ *les relations*

$$\begin{cases} \overrightarrow{\imath'} = \cos\theta\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\overrightarrow{\jmath} \\ \overrightarrow{\jmath'} = -\sin\theta\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\overrightarrow{\jmath} \end{cases}$$

Par application de la proposition précédente avec $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$, $\gamma = -\sin\theta$ *et* $\delta = \cos\theta$*, on obtient la formule de changement de base annoncée.*

Remarque 2.6 Sous forme matricielle, cette relation s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}$.

Équation cartésienne

DÉFINITION 2.9 ♡ **Équation cartésienne**
Soit $\mathscr{R}$ $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$un repère. Une équation $F(x, y) = 0$ est une *équation cartésienne* d'une partie $\mathscr{A}$ du plan si on a l'équivalence

$$M(x, y) \in \mathscr{A} \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Exemple 2.2 Un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan étant fixé, l'ensemble des points du plan d'équation cartésienne :
- $y - x - 1 = 0$ est la droite affine dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et passant par le point de coordonnées $(0, 1)$.
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est une équation du cercle de centre O et de rayon 1.

2.2.3 Repères polaires

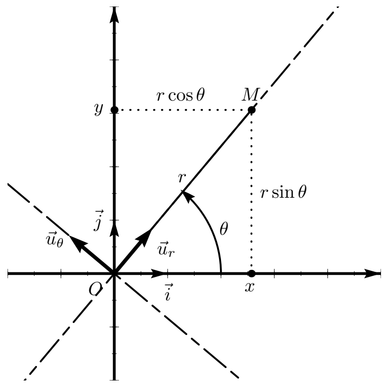


FIGURE 2.4 – Repères polaires

PROPOSITION 2.6 ♡ Repère polaire, pôle, axe polaire
Soit $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$un repère orthonormal direct. Soit θ un réel. Soit $\mathscr{R}(\theta)$ le repère $\left(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta)\right)$ image de $\mathscr{R}$ par une rotation de centre O et d'angle θ. Ce repère, qui est encore orthonormal direct, est le *repère polaire* attaché au réel θ. De plus

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath} \\ \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin\theta\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{\jmath} \end{cases}.$$

Le point O est appelé le *pôle* et la droite orientée $(O, \overrightarrow{\imath})$ est appelée l'*axe polaire* de ce repère.

Démonstration *Les rotations sont des transformations du plan qui conservent les mesures d'angles orientés et les longueurs. L'image d'un repère orthonormal direct par une rotation est donc encore bien un repère orthonormal direct. Les formules sont obtenues par projection des vecteurs $\overrightarrow{u(\theta)}$ et $\overrightarrow{v(\theta)}$ sur les axes de $\mathscr{R}$.*

Remarque 2.7 Si on considère un repère orthonormal direct $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, θ un réel, $\mathscr{R}(\theta)$ le repère polaire associé à θ : $\left(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta)\right)$ et si on identifie $\mathscr{V}$ à $\mathbb{C}$ via le repère $\mathscr{R}$, on a $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{u}(\theta)) = e^{i\theta}$ et $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{v}(\theta)) = ie^{i\theta}$.

Notation 2.3 Il est fréquent de rencontrer les notations $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ pour le couple $(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$.

DÉFINITION 2.10 ♡ Coordonnées polaires d'un point
On rapporte le plan $\mathscr{P}$ à un repère orthonormal direct $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On dit que $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ est un couple de *coordonnées polaires* pour le point $M(x, y)$ ø, $\mathscr{P}$ si et seulement si $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Remarque 2.8
- Si $M \in \mathscr{P}$ a pour affixe $z \neq 0$ alors un couple de coordonnées polaires pour M est donné par (r, θ) où θ est un argument de z et r est le module de z.
- Si M un point du plan distinct du pôle de coordonnées polaires (r_0, θ_0) alors les autres couples de coordonnées polaires pour M sont les couples (r, θ) vérifiant

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \theta \equiv \theta_0\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r = -r_0 \\ \theta \equiv \theta_0 + \pi\ [2\pi] \end{cases}.$$

- Les *coordonnées polaires de l'origine* sont données par n'importe quel couple $(0, \theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

PLAN 2.1 : Comment calculer les coordonnées polaires d'un point à partir de ses coordonnées cartésiennes

Soit $M \in \mathscr{P}$ *de coordonnées cartésiennes* (x, y) *dans un repère orthonormal direct* $\mathscr{R}$ *tel que* $x \neq 0$. *Un couple de coordonnées polaires pour* M *est donné par* (r, θ) *avec*

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad r = \frac{x}{\cos\theta}.$$

Équation polaire

DÉFINITION 2.11 ♡ **Équation polaire**
Soit $\mathscr{R}$ $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un repère orthonormal direct. Une équation $F(r,\theta) = 0$ est une *équation polaire* d'une partie $\mathscr{A}$ du plan lorsqu'un point M appartient à $\mathscr{A}$ si et seulement si l'un des couples de coordonnées polaires (r,θ) de M vérifie $F(r,\theta) = 0$.

Exemple 2.4 Un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan étant fixé, l'ensemble des points du plan d'équation polaire
- $\theta = 0$ est l'axe $(O, \vec{\imath})$ de $\mathscr{R}$.
- $r = 1$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

2.3 Produit scalaire

2.3.1 Définition

Notation 2.5 Si $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathscr{V}$, on note $\|\vec{u}\|$ sa norme. Si A et B sont deux points de $\mathscr{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, la norme de $\vec{u}$ est donnée par la longueur AB.

DÉFINITION 2.12 ♡ **Produit scalaire**
Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan $\mathscr{V}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ (on rencontrera aussi les notations $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$ ou encore $(\vec{u} \mid \vec{v})$) est défini, de manière géométrique, par :

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & \text{si les deux vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ \vec{u}.\vec{v} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2.9
– Le produit scalaire ne dépend pas de l'orientation choisie dans le plan.
– $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{u}\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}}\right) = \|\vec{u}\|^2$. En résumé, $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$.

PROPOSITION 2.7 ♡
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{V}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Démonstration ♡ *Si un des deux vecteurs* $\vec{u}$ *ou* $\vec{v}$ *est nul, le résultat est immédiat. Supposons que* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas nuls.*

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux alors* $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \pi/2\ [\pi]$ *et* $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 0$ *et* $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* $\vec{u}.\vec{v} = 0$ *alors* $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$. *Mais comme* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas nuls, on a nécessairement* $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$, *c'est à dire* $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \pi/2\ [\pi]$ *et* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *sont bien orthogonaux.*

2.3.2 Interprétation en terme de projection

DÉFINITION 2.13 **Mesure algébrique**
Soit D une droite de $\mathscr{P}$ orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$. Soient A et B deux points distincts de D. La mesure algébrique $\overline{AB}$ est l'unique réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u}$.

PROPOSITION 2.8 ♡ **Projection orthogonale**
Soit D une droite et soit A un point du plan $\mathscr{P}$. Il existe un unique point A' de D tel que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ soit orthogonal à la droite D. Ce point est appelé le *projeté orthogonal* de A sur D.

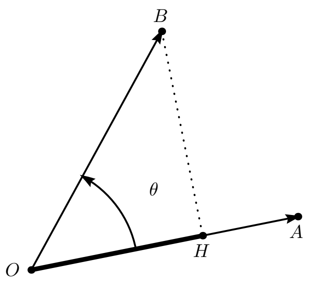


FIGURE 2.5 – Interprétation en terme de projection du produit scalaire : angle aigu

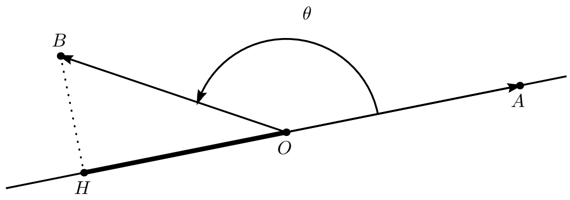


FIGURE 2.6 – angle obtus

Démonstration *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire directeur de* D. *Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire de $\mathscr{V}$ choisi en sorte que le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base orthonormale du plan. Considérons le repère orthonormal $\mathscr{R}(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où Ω est un point de* D. *Soient (x_A, y_A) les coordonnées de* A *dans ce repère. Un point* M *est élément de* D *si et seulement si dans $\mathscr{R}$, son ordonnée est nulle. Considérons donc* $M(x,0)$ *un point de* D. *On a $\overrightarrow{AM}\left(x - x_A, -y_A\right)$. Ce vecteur est orthogonal à* D *si et seulement si il est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire si et seulement si $x - x_A = 0$. On prouve ainsi à la fois l'existence et l'unicité de* A′.

Remarque 2.10 Soit $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal et A un point du plan de coordonnées (x, y) dans ce repère. La droite des abscisses est orientée par le vecteur $\overrightarrow{\imath}$. Si A_x est le projeté orthogonal de A sur (Ox) alors $\overline{OA_x} = x$.

PROPOSITION 2.9 ♡ **Interprétation du produit scalaire en terme de projection**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient O, A, B trois points de $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA). Choisissons pour cette droite l'orientation donnée par le vecteur $\overrightarrow{OA}$. On a alors

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overline{OA}.\overline{OH}}$$

Démonstration ♡ *Avec l'orientation choisie pour la droite* (OA), $\|\overrightarrow{u}\| = OA = \overline{OA}$. *Si $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est un angle aigu, alors $\|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \overline{OH}$ et si $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est un angle obtus alors $\|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = -OH$. Par conséquent, $\|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \overline{OH}$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \overline{OA}.\overline{OH}$.*

2.3.3 Propriétés du produit scalaire

PROPOSITION 2.10 ♡ **Symétrie du produit scalaire**
Le produit scalaire est *symétrique* : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{V}$ alors $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}}$.

Démonstration *Il suffit d'écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ et $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{u}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}})$ puis d'observer que $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = -(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}})$ et que la fonction cosinus est paire.*

PROPOSITION 2.11 ♡ **Bilinéarité du produit scalaire**
Le produit scalaire est *bilinéaire* : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ de $\mathscr{V}$ et pour tous réels λ_1, λ_2

$$\boxed{\overrightarrow{u}.(\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2}) = \lambda_1 \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{(\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{v} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{v}}$$

Démonstration *Supposons que $\overrightarrow{u} \neq 0$. Soient $\overrightarrow{\imath} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|u\|}$ et* O *un point de $\mathscr{P}$. Soit $\overrightarrow{\jmath}$ le vecteur image de $\overrightarrow{\imath}$ par la rotation de centre* O *et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le triplet $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ forme un repère orthonormal direct $\mathscr{R}$ du plan. Dans cette base, les coordonnées de*
– $\overrightarrow{u}$ *sont* $(x, 0)$ *avec* $x = \|\overrightarrow{u}\|$.
– $\overrightarrow{v_1}$ *sont* (x_1, y_1)
– $\overrightarrow{v_2}$ *sont* (x_2, y_2).
– $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2}$ *sont* $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$.

Par application de la proposition 2.9, il vient :

$$\vec{u}.(\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}) = x(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2), \quad \vec{u}.\vec{v_1} = x.x_1 \quad \text{et} \quad \vec{u}.\vec{v_2} = x.x_2$$

Ceci prouve que $\vec{u}.(\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}) = \lambda_1\vec{u}.\vec{v_1}+\lambda_2\vec{u}.\vec{v_2}$*. La seconde égalité se démontre de la même façon ou en utilisant la symétrie du produit scalaire et la première égalité.*

PROPOSITION 2.12 ♡♡♡ **Expression du produit scalaire dans une base orthonormale**
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormale et soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$ de coordonnées $\vec{u}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$ dans cette base. Alors

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'}$$

Démonstration ♡ *Comme* $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ *et* $\vec{v} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$*, par bilinéarité du produit scalaire, il vient*

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})\\ &= x\vec{\imath}.(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})+y\vec{\jmath}.(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})\\ &= x.x'\vec{\imath}.\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\vec{\jmath}\end{aligned}$$

Comme $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *sont orthogonaux, d'après la proposition 2.7, on a :* $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$*. Par ailleurs,* $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *étant unitaires, on a* $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|.\|\vec{\imath}\| = 1$ *et* $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\jmath}\|.\|\vec{\jmath}\| = 1$*. Il vient alors que* $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$*.*

COROLLAIRE 2.13 ♡ **Expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormale**
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormale. Soient $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\vec{u}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ dans cette base. Alors

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Si $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormal et que A et B sont deux points de $\mathscr{P}$ de coordonnées $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ dans ce repère alors

$$\boxed{AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

Démonstration *Ces formules sont immédiates. Pour la première, on a* $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2}$*. Pour la seconde, il suffit d'appliquer la première au vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *dont les coordonnées sont données par* (x_B-x_A, y_B-y_A)*.*

2.3.4 Interprétation en termes de nombres complexes

PROPOSITION 2.14 ♡
Un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ étant fixé, on peut identifier $\mathscr{V}$ et $\mathbb{C}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes respectives z et z', alors

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{Re}(\bar{z}.z').}$$

Démonstration *Exercice...*

2.4 Déterminant

2.4.1 Définition

DÉFINITION 2.14 ♡ **Déterminant**
Le *déterminant* de deux vecteurs du plan $\mathscr{V}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ est défini, de manière géométrique, par :

$$\boxed{\begin{cases}\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \text{ si les deux vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls}\\ \det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \text{ sinon.}\end{cases}}$$

Remarque 2.11
- Le déterminant dépend de l'orientation choisie dans le plan. Si on avait choisie l'orientation contraire, on aurait un déterminant de signe contraire.
- Pour tout $\vec{u} \in \mathscr{V}$, $\det\left(\vec{u}, \vec{u}\right) = 0$. En effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\det\left(\vec{u}, \vec{u}\right) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}\right) = 0$ et si $\vec{u} = 0$ le résultat est immédiat.

PROPOSITION 2.15 ♡
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0}$.

Démonstration ♡ *Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors la proposition est évidente. Supposons qu'aucun des deux vecteurs est nul.*
$\boxed{\Rightarrow}$ *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors* $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0\ [\pi]$ *et* $\sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0$. *Il vient alors que* $\det\left(\vec{u}, \vec{u}\right) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}\right) = 0$.
$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* $\det\left(\vec{u}, \vec{u}\right) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}\right) = 0$ *alors comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, cette égalité n'est possible que si* $\sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}\right) = 0$ *ce qui amène* $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0\ [\pi]$ *et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.*

Remarque 2.12 Un corollaire immédiat à cette proposition est que trois points du plan A,B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

2.4.2 Interprétation en terme d'aire

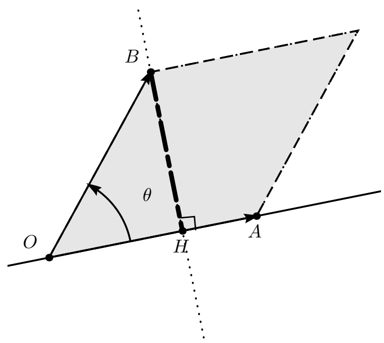


FIGURE 2.7 – Interprétation en terme d'aire du déterminant

PROPOSITION 2.16 ♡ **Interprétation du déterminant en terme de projection**
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient O, A, B trois points de $\mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA). Choisissons pour la droite (BH) l'orientation dans le sens directement orthogonale à $\overrightarrow{OA}$. On a alors :

$$\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = OA.\overline{HB}.}$$

La valeur absolue de ce déterminant correspond à l'aire du parallélogramme construit selon les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration ♡ *Il est clair que* $\|\vec{u}\| = OA$. *Compte tenu de l'orientation choisie pour* (HB)*, si* α *est la détermination de* $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ *appartenant à* $]-\pi, \pi]$ *alors*
- *si* α *est positif,* $\|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = HB$
- *si* α *est négatif,* $\|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -HB$.

Par conséquent $\|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \overline{HB}$ *et* $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = OA.\overline{HB}$.

2.4.3 Propriétés du déterminant

PROPOSITION 2.17 ♡ **Antisymétrie du déterminant**
Le déterminant est *antisymétrique* : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{V}$ alors $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})}$.

Démonstration *C'est une conséquence directe du fait que* $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\sin(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$.

PROPOSITION 2.18 ♡ **Bilinéarité du déterminant**
Le déterminant est *bilinéaire* : pour tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ de $\mathscr{V}$ et pour tous réels λ_1, λ_2, on a

$$\boxed{\det(\overrightarrow{u},\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2})=\lambda_1\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_1})+\lambda_2\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_2})}\quad \text{et}\quad \boxed{\det(\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v})=\lambda_1\det(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v})+\lambda_2\det(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v}).}$$

Démonstration *Supposons* $\overrightarrow{u}\neq 0$. *Soient* $\overrightarrow{\imath}=\frac{\overrightarrow{u}}{\|u\|}$ *et* O *un point de* $\mathscr{P}$. *Soit* $\overrightarrow{\jmath}$ *le vecteur image de* $\overrightarrow{\imath}$ *par la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$. *Le triplet* $(\mathrm{O},\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ *forme un repère orthonormal direct* $\mathscr{R}$ *du plan. Dans cette base, les coordonnées de :*
- $\overrightarrow{u}$ *sont* $(x,0)$ *avec* $x=\|\overrightarrow{u}\|$.
- $\overrightarrow{v_1}$ *sont* (x_1,y_1)
- $\overrightarrow{v_2}$ *sont* (x_2,y_2).
- $\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}$ *sont* $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)$.

Par application de la proposition 2.16 :

$$\det(\overrightarrow{u},\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2})=x(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2),\quad \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_1})=x.y_1\quad \text{et}\quad \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_2})=x.y_2.$$

Il vient alors $\det(\overrightarrow{u},\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2})=\lambda_1\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_1})+\lambda_2\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v_2})$. *La seconde égalité se démontre de la même façon ou en utilisant l'antisymétrie du déterminant et la première égalité.*

PROPOSITION 2.19 ♡♡♡ **Expression du déterminant dans une base orthonormale directe**
Soit $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ une base orthonormale directe et soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$ de coordonnées $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$ dans cette base. Alors

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=xy'-yx'$$

On notera $\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}$ le déterminant $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. On a donc

$$\boxed{\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y}$$

Démonstration ♡ *Comme* $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath}$ *et* $\overrightarrow{v}=x'\overrightarrow{\imath}+y'\overrightarrow{\jmath}$, *par bilinéarité du déterminant, on a*

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) &= \det(x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath},x'\overrightarrow{\imath}+y'\overrightarrow{\jmath})\\ &= x\det(\overrightarrow{\imath},x'\overrightarrow{\imath}+y'\overrightarrow{\jmath})+y\det(\overrightarrow{\jmath},x'\overrightarrow{\imath}+y'\overrightarrow{\jmath})\\ &= x.x'\det(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\imath})+xy'\det(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})+yx'\det(\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{\imath})+yy'\det(\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{\jmath}).\end{aligned}$$

Comme la base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ *est orthonormale et directe,* $\det(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})=1$ *et* $\det(\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{\imath})=-1$. *D'après la proposition 2.15,* $\det(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\imath})=\det(\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{\jmath})=0$. *On obtient alors* $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=xy'-yx'$.

2.4.4 Interprétation en terme de nombres complexes

PROPOSITION 2.20 ♡
Un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ étant fixé, on peut identifier $\mathscr{V}$ et $\mathbb{C}$. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour affixes respectives z et z', alors

$$\boxed{\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\operatorname{Im}(\bar{z}.z').}$$

Démonstration *Exercice...*

2.4.5 Application du déterminant : résolution d'un système linéaire de Cramer de deux équations à deux inconnues

Soit

$$(\mathscr{S}):\begin{cases}ax+by=\alpha\\ cx+dy=\beta\end{cases}$$

On appelle *déterminant de ce système* le réel $\delta=ad-bc$. Ce système linéaire est dit de Cramer si et seulement si son déterminant δ est non nul. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.21 ♡
Si $(\mathscr{S})$ est un système *de Cramer* alors il admet un et un seul couple solution (x, y) donné par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{ad - bc} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{ad - bc}$$

Démonstration

1. *Prouvons l'**unicité** du couple (x, y). Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux couples solutions de $(\mathscr{S})$. On vérifie facilement que le couple $(X, Y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ est solution du système*

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}.$$

Ceci prouve que dans le plan, identifié à $\mathbb{R}^2$ par le choix d'un repère orthonormal, les vecteurs (a, b) et (c, d) sont tous deux orthogonaux au vecteur (X, Y). Mais comme

$$\det((a, b), (c, d)) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \delta \neq 0,$$

les deux vecteurs (a, b) et (c, d) ne sont pas colinéaires. Le vecteur (X, Y) étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires ne peut être que nul donc $X = 0$ et $Y = 0$. Ceci prouve que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$ et donc l'unicité du couple solution.

2. *Pour prouver l'**existence** du couple (x, y), il suffit de vérifier que le couple donné dans l'énoncé de la proposition est bien solution de $(\mathscr{S})$, ce qui ne pose pas de difficulté.*

Remarque 2.13 Si le déterminant du système est nul alors ce système admet soit une infinité de solutions soit aucune.

2.5 Droites

2.5.1 Préambule : Lignes de niveau

DÉFINITION 2.15 ♡ **Ligne de niveau**
Soit α un réel. Une partie $\mathscr{A}$ du plan est une *ligne de niveau* α d'une fonction $F : \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ si $\mathscr{A}$ est solution de l'équation $F(M) = \alpha$.

$$M \in \mathscr{A} \Leftrightarrow F(M) = \alpha$$

2.5.2 Lignes de niveau de $M \mapsto \vec{u}.\overrightarrow{AM}$

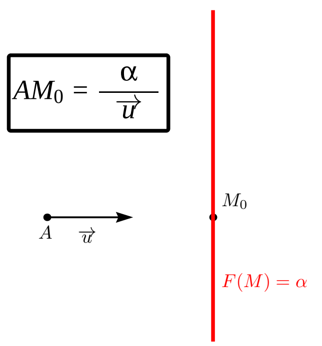


FIGURE 2.8 – Ligne de niveau de $M \mapsto \vec{u}.\overrightarrow{AM}$

PROPOSITION 2.22 ♡
Soient A un point de $\mathscr{P}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$, α un réel et $F : \begin{cases} \mathscr{P} & \longrightarrow & R \\ M & \longmapsto & \vec{u}.\overrightarrow{AM} \end{cases}$. La ligne de niveau α de $F : F(M) = \alpha$ est donnée par la droite dont la direction est orthogonale à $\vec{u}$ et qui passe par le point M_0 de $\mathscr{P}$ défini par $\boxed{\overrightarrow{AM_0} = \alpha.\frac{\vec{u}}{\|u\|^2}}$.

Démonstration *Posons* $\vec{U} = \vec{u}/\|\vec{u}\|$ *et considérons* $\vec{V}$ *un vecteur unitaire de* $\mathscr{V}$ *tel que* $(A, \vec{U}, \vec{V})$ *forme une repère orthonormale directe de* $\mathscr{V}$*. Soient* (x, y) *les coordonnées de* M *dans ce repère et* α *un réel. Comme* $\vec{u}\left(\|\vec{u}\|, 0\right)$ *et* $\overrightarrow{AM}\left(x, y\right)$*, on a :*

$$F(M) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}.\overrightarrow{AM} = \alpha \Longrightarrow x.\|\vec{u}\| = \alpha \Longrightarrow x = \frac{\alpha}{\|\vec{u}\|}$$

ce qui prouve que si M *est élément de la ligne de niveau* $F(M) = \alpha$ *alors* M *est élément de la droite orthogonale à* $\vec{u}$ *passant par le point* M_0 *tel que* $\overrightarrow{AM_0} = \alpha.\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
Réciproquement, si M *est élément de cette droite alors les coordoonées de* M *dans le repère* $(A, \vec{U}, \vec{V})$ *sont de la forme* $\left(\alpha/\|\vec{u}\|, y\right)$ *où* $y \in \mathbb{R}$ *et on vérifie facilement que* $F(M) = \vec{u}.\overrightarrow{AM} = \alpha$*. Donc* M *appartient à la ligne de niveau* $F(M) = \alpha$.

2.5.3 Lignes de niveau de $M \mapsto \det\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$

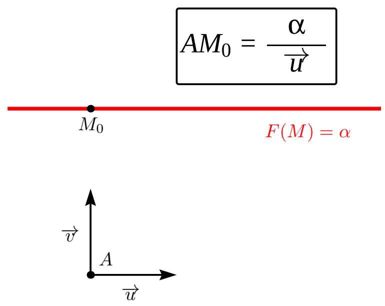


FIGURE 2.9 – Ligne de niveau de $M \mapsto \det(\vec{u}, \vec{AM})$

> PROPOSITION 2.23 ♡
> Soient A un point de $\mathscr{P}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$, α un réel et $G : \begin{cases} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \end{cases}$. La ligne de niveau α de $G : G(M) = \alpha$ est donnée par la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et qui passe par le point M_0 de $\mathscr{P}$ défini par $\boxed{\overrightarrow{AM_0} = \alpha\frac{\vec{v}}{\|u\|^2}}$ où $\vec{v}$ est le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}$ et de même norme.

Démonstration *Comme dans la démonstration de la proposition précédente, posons* $\vec{U} = \vec{u}/\|\vec{u}\|$ *et considérons* $\vec{V}$ *un vecteur unitaire de* $\mathscr{V}$ *tel que* $(A, \vec{U}, \vec{V})$ *forme une repère orthonormal direct de* $\mathscr{V}$*. Soient* (x, y) *les coordonnées de* M *dans ce repère. Soit* α *un réel. Comme* $\vec{u}\left(\|\vec{u}\|, 0\right)$ *et* $\overrightarrow{AM}\left(x, y\right)$*, on a :*

$$G(M) = \alpha \Longrightarrow \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \alpha \Longrightarrow y.\|\vec{u}\| = \alpha \Longrightarrow y = \frac{\alpha}{\|\vec{u}\|}$$

Donc si $M(x, y)$ *vérifie l'équation* $G(M) = \alpha$ *alors il est élément de la droite de vecteur directeur* $\vec{u}$ *passant par le point* M_0 *tel que* $\overrightarrow{AM_0} = \alpha.\frac{\vec{V}}{\|\vec{u}\|}$*. Réciproquement, si* M *est élément de cette droite, alors ses coordonnées dans le repère* $(A, \vec{U}, \vec{V})$ *sont de la forme* $\left(x, \alpha/\|\vec{u}\|\right)$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et on vérifie facilement que* M *est élément de la ligne de niveau* $G(M) = \alpha$ *car* $G(M) = \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \alpha$*. Par ailleurs, si* $\vec{v} = \|\vec{u}\|\vec{V}$*, on obtient bien* $\overrightarrow{AM_0} = \alpha.\frac{\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$ *et* $\vec{v}$ *est comme indiqué dans la proposition.*

2.5.4 Représentation paramétrique d'une droite

Cette représentation peut être utilisée quand **on connaît un point et un vecteur directeur** de la droite étudiée.

> PROPOSITION 2.24 ♡ **Représentation paramétrique d'une droite**
> Soit $\mathscr{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan passant par un point A de coordonnées (x_A, y_A) dans $\mathscr{R}$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha \\ \beta\end{vmatrix}$. D admet comme *représentation paramétrique* :
>
> $$\boxed{\begin{cases} x &= x_A + t\alpha \\ y &= y_A + t\beta \end{cases} ; t \in \mathbb{R}} \qquad (\star)$$

(Ce qui signifie que $M(x_M, y_M) \in D \Leftrightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x_M = x_A + \lambda_0 \alpha \\ y_M = y_A + \lambda_0 \beta \end{cases}$).

Démonstration *Si $M(x, y) \in D$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ et l'égalité des coordonnées de ces deux vecteurs se traduit par les égalités $(\star)$. Réciproquement, les égalités $(\star)$ impliquent l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ et le fait que le point $M \in D$.*

Exemple 2.6 Soit $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan. Déterminons une équation paramétrique de la droite D passant par le point : $A(1, -2)$ et dirigée par le vecteur : $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$.
Par application du théorème précédent, une équation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t\alpha \\ y = -2 + 5t\beta \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2.5.5 Équation cartésienne d'une droite

Cette représentation est aussi utilisable quand **on connaît un point et un vecteur directeur** de la droite en question. On se remémorera au préalable ce qu'est une équation cartésienne (voir la définition 2.9 page 68).

PROPOSITION 2.25 ♡♡♡ **Équation cartésienne d'une droite**

Soient $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal du plan, α, β, c trois réels tels que α et β ne sont pas tous deux nuls.

1. La droite D passant par le point A de coordonnées (x_A, y_A) dans $\mathscr{R}$ et dirigée par le vecteur non nul $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} -\beta \\ \alpha \end{vmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme
$$\boxed{\alpha x + \beta y + c = 0}.$$
2. Réciproquement, l'ensemble des points du plan d'équation $\alpha x + \beta y + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} -\beta \\ \alpha \end{vmatrix}$.
3. Deux telles équations représentent deux droites confondues si et seulement si elles sont proportionnelles.

Démonstration

1. *On pourrait démontrer cette égalité en éliminant le paramètre t dans l'équation paramétrique de D. Il est plus rapide de constater que*
$$\begin{aligned} M(x, y) \in D &\implies \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 \\ &\implies \begin{vmatrix} -\beta & x - x_A \\ \alpha & y - y_A \end{vmatrix} = 0 \\ &\implies -\big(\alpha(x - x_A)) + \beta(y - y_A)\big) = 0 \\ &\implies \alpha x + \beta y = -(\alpha x_A + \beta y_A) \end{aligned}$$
qui correspond à l'égalité recherchée avec $c = -(\alpha x_A + \beta y_A)$.
2. *Réciproquement, si $\alpha x + \beta y + c = 0$ est une équation cartésienne d'un sous ensemble $\mathscr{A}$ du plan et si $A(x_A, y_A)$ est élément de ce sous-ensemble alors ses coordonnées vérifient l'équation $\alpha x + \beta y + c = 0$ et, pour tout $M(x, y)$ de $\mathscr{A}$: $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) + c = 0$. Donc, pour tout point M de $\mathscr{A}$, $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$ où $\overrightarrow{u}(-\beta, \alpha)$. $\mathscr{A}$ est donc la ligne de niveau 0 de l'application G de la proposition 2.23. $\mathscr{A}$ est donc, d'après cette proposition, la droite orthogonale à $\overrightarrow{u}$ passant par A.*
3. *Considérons les deux équations cartésiennes*
$$(1) \quad \alpha_1 x + \beta_1 y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad (2) \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + c_2 = 0,$$
la première représente une droite D_1 et la seconde une droite D_2. Si ces deux équations sont proportionnelles, alors tout point M dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation (1) ($\Leftrightarrow M \in D_1$) vérifient aussi l'équation (2) et donc est aussi élément de D_2. Ceci prouve que $D_1 = D_2$. Réciproquement, si une droite D possède deux représentations cartésiennes (1) et (2) alors, $\overrightarrow{u_1}(-\beta_1, \alpha_1)$ et $\overrightarrow{u_2}(-\beta_2, \alpha_2)$ étant deux vecteurs directeurs de D, ils sont colinéaires et il existe donc $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha_2 = k\alpha_1$, $\beta_2 = k\beta_1$. Considérons un point $A(x_A, y_A)$ de D et étudions les égalités
$$\begin{cases} \alpha_1 x_A + \beta_1 y_A + c_1 = 0 \\ \alpha_2 x_A + \beta_2 y_A + c_2 = 0 \end{cases},$$
on montre que $c_2 = kc_1$ et donc que (1) et (2) sont proportionnelles.

Remarque 2.14 Une droite donnée dans un repère orthonormal possède une infinité d'équations cartésiennes proportionnelles.

Exemple 2.7 Soient $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan, D une droite passant pas le point $A(1,-1)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$. Calculons une équation cartésienne de D dans $\mathscr{R}$.
Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. On a :

$$M \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \iff \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y+1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x - y - 3 = 0$$

Une équation cartésienne de D est donc : $\boxed{2x - y - 3 = 0}$

2.5.6 Droite définie par deux points distincts

Cette méthode est à utiliser pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite **quand on connaît deux points de cette droite**. Soit D une droite passant par les points A et B de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère orthonormal direct du plan. On détermine une représentation paramétrique ou une équation cartésienne de D en remarquant que D admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur et en se ramenant à une des méthodes développées dans l'un des deux paragraphes précédents.

2.5.7 Droite définie par un point et un vecteur normal

DÉFINITION 2.16 ♡ **Vecteur normal**
Soit D une droite du plan et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de D. $\overrightarrow{n}$ est un *vecteur normal* à D.

La proposition qui suit permet de calculer l'équation cartésienne d'une droite **quand on connaît un point et un vecteur normal** de cette droite.

PROPOSITION 2.26 ♡
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, on considère une droite D d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + c = 0$. Alors le vecteur $\boxed{\overrightarrow{u}(-\beta, \alpha)}$ est un vecteur directeur de D et $\boxed{\overrightarrow{v}(\alpha, \beta)}$ est un vecteur normal à D.

Démonstration ♡ *Le fait que $\overrightarrow{u}(-\beta,\alpha)$ est un vecteur directeur de* D *a déjà été prouvé dans la proposition 2.25. Le vecteur $\overrightarrow{v}(\alpha,\beta)$ est par ailleurs clairement orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et est donc un vecteur normal à* D.

PROPOSITION 2.27 ♡ **Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal**
Un repère orthonormal étant fixé, la droite D passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha,\beta)$ a pour équation $\boxed{\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0}$.

Démonstration ♡ *Soit* $M(x,y)$ *un point du plan. Supposons que* $M \in D$ *alors* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$, *ce qui s'écrit aussi* $\alpha(x-x_A)+\beta(y-y_A) = 0$. *Réciproquement si* M *vérifie cette égalité alors le produit scalaire* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$ *est nul et les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{n}$ *sont orthogonaux. Le vecteur* $\overrightarrow{AM}$ *dirige donc la droite* D. A *étant un point de cette droite, ceci n'est possible que si* $M \in D$.

2.5.8 Distance d'un point à une droite

DÉFINITION 2.17 ♡ **Distance d'un point à une droite**
Soit D une droite et M un point du plan. On appelle *distance de* M *à* D et on note $d(M, D)$ la plus petite distance entre M et un point de D.

Remarque 2.15 Si H est le projeté orthogonal de M sur D et si N est un point de D alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 \geqslant MH^2$$

Le minimum de la distance entre M et un point de la droite existe, est atteint en H et vaut MH.

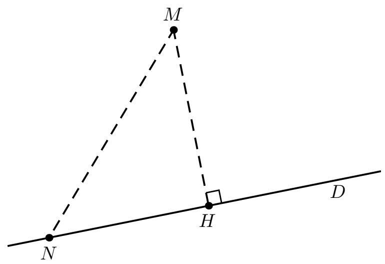


FIGURE 2.10 – Distance d'un point à une droite

PROPOSITION 2.28 ♡
Soit $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct du plan. Soit D une droite du plan :

- passant par un point $A(x_A, y_A)$
- de vecteur normal $\overrightarrow{n}$
- de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$
- et d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Soit $M(x_M, y_M)$ un point du plan, alors

$$d(M, D) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration ♡ *Soit* H *le projeté orthogonal de* M *sur* D.

- *Par application des formules de trigonométrie dans le triangle* AHM *rectangle en* H*, on a*

$$d(M, D) = HM = AM\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}}\right)\right| = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\right\| \|\overrightarrow{u}\| \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

- *Par ailleurs, toujours par utilisation de la trigonométrie dans le triangle* AHM*, on a aussi*

$$d(M, D) = HM = AM\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n}}\right)\right| = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\right\| \|\overrightarrow{n}\| \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n}}\right)\right|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

- *Enfin, prenant pour* $\overrightarrow{n}$ *le vecteur normal à* D *de coordonnées* (a, b)*, on a*

$$d(M, D) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_M + by_M - (ax_A + by_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

car $A \in D$ *et donc* $ax_A + by_A + c = 0$.

2.5.9 Équation normale d'une droite

DÉFINITION 2.18 ♡ **Équation normale d'une droite**
On dit que $\alpha x + \beta y = c$ est une *équation normale d'une droite* si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

PROPOSITION 2.29 ♡
Soit $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan. Pour toute droite D du plan, il existe des réels θ et p tel que $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ soit une équation normale de D dans $\mathscr{R}$.

Démonstration *Soit* $ax + by = c$ *une équation cartésienne de* D*. Alors*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

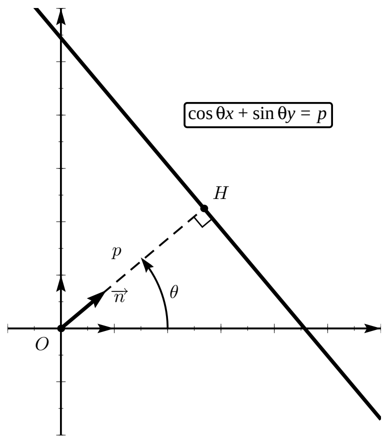


FIGURE 2.11 – Équation normale d'une droite

est une équation proportionnelle à notre première équation et est donc une autre représentation cartésienne de D *dans* $\mathscr{R}$*. Comme*

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

il existe (défini modulo 2π*)* $\theta\in\mathbb{R}$ *tel que*

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{ et }\ \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Posons $p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$*. Une équation de* D *est donc* $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ *et cette équation est, par construction, normale.*

Remarque 2.16

- Si $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ est une équation normale d'une droite D dans un repère orthonormal $\mathscr{R}$, la seule autre équation normale de D dans $\mathscr{R}$ est $x\cos(\theta+\pi)+y\sin(\theta+\pi)=-p$
- **Interprétation géométrique de** θ **et** p : Soit D une droite du plan rapporté à un repère orthonormal direct $\mathscr{R}$ $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On suppose que D ne passe pas par l'origine de ce repère. Soit H le projeté orthogonal de O sur D et soit $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ une équation normale de D. Le vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{vmatrix}$ est un vecteur normal à D. Par conséquent, il est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OH}$. Donc $\left(\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OH}}\right)=\theta\ [\pi]$. De plus,

$$d(O,D)=\frac{|0\times\cos\theta+0\times\sin\theta-p|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=|p|$$

  et donc $|p|=d(O,D)$.
- En corollaire à cette dernière remarque, si $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ est une équation normale de D et si M est un point du plan alors $d(M,D)=|x\cos\theta+y\sin\theta-p|$.

2.5.10 Équation polaire d'une droite

Dans tout ce paragraphe, on considère un repère orthonormal direct $\mathscr{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et un repère polaire $\mathscr{R}_\theta\left(O,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta)\right)$.

PROPOSITION 2.30 ♡ **Équation polaire d'une droite passant par le pôle**
Une droite D passant par le pôle O du repère polaire $\mathscr{R}_\theta$ a une équation polaire du type

$$\boxed{\theta=\theta_0\ [\pi]}$$

où θ_0 est un réel. Ceci signifie que si le point M est représenté par le couple de coordonnées (r_M,θ_M) dans $\mathscr{R}_\theta$ alors M est élément de D si et seulement si $\theta_M=\theta_0$.
Réciproquement, une telle équation est celle d'une droite passant par le pôle O de $\mathscr{R}_\theta$.

Démonstration *Soit* $\vec{u}$ *un vecteur directeur de* D*. Soit* θ_0 *une mesure de l'angle* $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$. M *est élément de* D *si et seulement si il existe* $\alpha\in\mathbb{R}$ *tel que* $\overrightarrow{OM}=t\vec{u}$*, c'est à dire si et seulement si* $(|t|,\theta_0)$ *ou* $(|t|,\theta_0+\pi)$ *forme un système de coordonnées polaires de* M*.*
L'équation $\theta=\theta_0\ [\pi]$ *définie donc bien une équation polaire passant par* O *et dirigée par* $\vec{u}$*.*

PROPOSITION 2.31 ♡ **Équation polaire d'une droite ne passant pas par le pôle**
Une droite D ne passant pas par le pôle O du repère polaire $\mathscr{R}_\theta$ admet une équation polaire du type

$$\boxed{r = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)}}$$

où $p = d(\mathrm{O}, \mathrm{D})$ et où $\theta_0 = \left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\mathrm{OH}}}\right)$ $[2\pi]$, H étant le projeté orthogonal de O sur D.
Réciproquement, une telle équation est celle d'une droite ne passant pas par le pôle O de $\mathscr{R}_\theta$.

Démonstration *On utilise une équation normale de la droite* D *et son interprétation géométrique. Comme la droite* D *ne passe pas par l'origine, elle admet une équation normale de la forme* $x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 = p$ *où* $\theta_0 \in \mathbb{R}$ *et où* $p \neq 0$*. Quitte à changer* θ_0 *en* $\theta_0 + \pi$*, on peut même supposer que* $p > 0$*. Si* (r, θ) *est un système de coordonnées polaires pour un point* M *du plan, alors les coordonnées de* M *sont données dans* $\mathscr{R}$ *par le couple* $(r\cos\theta, r\sin\theta)$*. Le point* M *appartient à* D *si et seulement si* $r(\cos\theta\cos\theta_0 + \beta\sin\theta\sin\theta_0) = p$*, c'est-à-dire si et seulement si* $r = \frac{p}{\cos(\theta-\theta_0)}$*.*

2.5.11 Intersection de deux droites, droites parallèles

Dans tout ce paragraphe, on considère un repère orthonormal $\mathscr{R}(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

PROPOSITION 2.32 ♡
Soient D et D′ deux droites d'équations respectives $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ dans $\mathscr{R}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(a', b') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- D et D′ sont parallèles si et seulement si les couples (a, b) et (a', b') sont proportionnels, c'est à dire si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ (Dans ce cas soit les deux droites sont confondues soit leur intersection est réduite à l'ensemble vide).
- Si D et D′ ne sont pas parallèles, elles ont un unique point d'intersection.

Démonstration ♡ *Les vecteurs* $\overrightarrow{u}(-b, a)$ *et* $\overrightarrow{u'}(-b', a')$ *sont, respectivement, des vecteurs directeurs de* D *et* D′*.* D *et* D′ *sont parallèles si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' + ab' = 0.$$

Cette dernière quantité étant égale à $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$*, la première partie de la proposition est démontrée.*

Si par ailleurs D *et* D′ *ne sont pas parallèles, alors* $ab' - ba' \neq 0$ *et, d'après la proposition 2.21 page 75, le système* $\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$ *possède une unique solution :*

$$\begin{cases} x &= \dfrac{b'c - bc'}{ab' - ba'} \\ y &= \dfrac{ac' - a'c}{ab' - ba'} \end{cases}.$$

2.6 Cercles

2.6.1 Définition

DÉFINITION 2.19 ♡ **Cercle**
Le *cercle de centre* Ω et de *rayon* $\mathrm{R} \geqslant 0$ est l'ensemble des points du plan situés à une distance R de Ω :

$$\left\{\mathrm{M} \in \mathscr{P} : \quad \left\|\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right\| = \mathrm{R}\right\}$$

Ce cercle sera noté $\mathscr{C}(\Omega, \mathrm{R})$.

2.6.2 Équation cartésienne d'un cercle

Dans tout ce paragraphe, on considère un repère orthonormal $\mathscr{R}(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

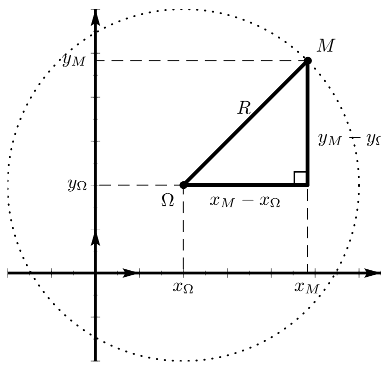


FIGURE 2.12 – Équation cartésienne d'un cercle

PROPOSITION 2.33 ♡♡♡ **Équation cartésienne d'un cercle**
Une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ et de rayon R >⩾ 0 est donnée par

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

ou sous forme développée

$$\boxed{x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0}$$

Réciproquement, si un sous-ensemble du plan satisfait une telle équation, alors ce sous-ensemble est le cercle de rayon R et de centre Ω.

Démonstration ♡ *Appelons* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* $\Omega\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ *et de rayon* $R>0$.
Supposons que $M(x,y)$ *est un point de* $\mathscr{C}$. *Alors* $\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|=R$ *et élevant au carré* $\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2=R^2$ *ce qui s'écrit* $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$.
Réciproquement, si les coordonnées de $M(x,y)$ *vérifient* $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ *alors* $\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2=R^2$ *et* $\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|=R$. *Par suite* $M\in\mathscr{C}$.

PROPOSITION 2.34
L'équation $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0$ représente :

1. L'ensemble vide si $\alpha^2+\beta^2-\gamma<0$.
2. Le cercle de centre $\Omega(\alpha,\beta)$ et de rayon $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$ si $\alpha^2+\beta^2-\gamma\geqslant 0$.

Démonstration *Remarquons que*

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\alpha^2-\beta^2+\gamma.$$

Si $\alpha^2+\beta^2-\gamma<0$, *cette équation cartésienne ne peut avoir de solution. Sinon, on applique la proposition précédente.*

2.6.3 Représentation paramétrique d'un cercle

PROPOSITION 2.35 ♡ **Représentation paramétrique d'un cercle**
Soit $\mathscr{R}(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal. Le cercle de centre $\Omega(\alpha,\beta)$ et de rayon $R>0$ admet comme représentation paramétrique

$$\boxed{\begin{cases}x&=\alpha+R\cos\theta\\ y&=\beta+R\sin\theta\end{cases},\quad \theta\in\mathbb{R}}$$

(Ce qui signifie que $M\in\mathscr{C}(\Omega,R)\Leftrightarrow\exists\,\theta_0\in\mathbb{R}\begin{cases}x_M&=\alpha+R\cos\theta_0\\ y_M&=\beta+R\sin\theta_0\end{cases}$).

Démonstration *Soit* $M(x_M,y_M)$ *tel qu'il existe un réel* θ_0 *vérifiant :*

$$\begin{cases}x_M=\alpha+R\cos\theta_0\\ y_M=\beta+R\sin\theta_0\end{cases}.$$

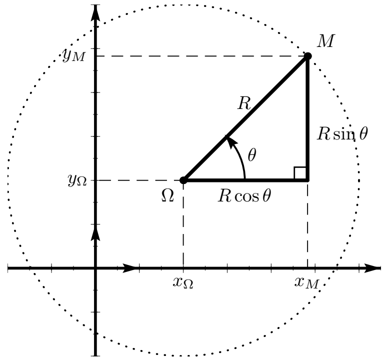


FIGURE 2.13 – Représentation paramétrique d'un cercle

On vérifie facilement que (x_M, y_M) *vérifie l'équation* $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.
Réciproquement, soit $M(x_M, y_M) \in \mathscr{C}(\Omega, R)$. *Les coordonnées de* M *vérifient* $(x_M-\alpha)^2+(y_M-\beta)^2 = R^2$. *Posons* $a = \frac{x-\alpha}{R}$ *et* $b = \frac{y-\beta}{R}$.
Comme $a^2 + b^2 = 1$*, il existe un réel* θ_0 *tel que* $a = \cos\theta_0$ *et* $b = \sin\theta_0$. *Donc*

$$\begin{cases} x_M = \alpha + R\cos\theta_0 \\ y_M = \beta + R\sin\theta_0 \end{cases}$$

2.6.4 Équation polaire d'un cercle passant par l'origine d'un repère

PROPOSITION 2.36 ♡ **Équation polaire d'un cercle passant par l'origine d'un repère**
Soit $\mathscr{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal. Soit $\Omega(\alpha, \beta)$. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω, passant par O et de rayon $R > 0$ admet comme équation polaire

$$\boxed{r = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\sin\theta}$$

ou, de manière équivalente

$$\boxed{r = 2R\cos(\theta - \theta_0)}$$

où (R, θ_0) est un système de coordonnées polaires pour Ω.
Réciproquement, toute équation de la forme $r = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\sin\theta$ est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(\alpha, \beta)$, passant par l'origine O de $\mathscr{R}$ et donc de rayon $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Démonstration *Soit* $\mathscr{C}$ *un cercle de centre* Ω*, passant par* O *et de rayon* $R > 0$. *Comme* O *est élément de* $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ *admet une équation cartésienne de la forme :* $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$. *Remplaçant* x *par* $r\cos\theta$ *et* y *par* $r\sin\theta$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 \\ \iff\ & r^2 - 2r(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) = 0 \\ \iff\ & \begin{cases} r = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\sin\theta \quad (1) \\ \text{ou} \\ r = 0 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

La seconde équation admet pour ensemble solution le singleton $\{O\}$. *La seconde peut être ainsi réduite : si* (R, θ_0) *est un système de coordonnées polaires pour* Ω, $r = 2R\cos(\theta - \theta_0)$ *est équivalente à* (1). *Comme le point* O *vérifie cette équation (pour* $\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$*), les deux conditions* (1) *et* (2) *se résument à* (1) $r = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\sin\theta$ *ou encore* $r = 2R\cos(\theta - \theta_0)$.
Réciproquement, si un ensemble du plan admet comme équation polaire $r = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\sin\theta$ *alors c'est le cercle de centre* $\Omega(\alpha, \beta)$ *et passant par* O.

2.6.5 Caractérisation d'un cercle par l'équation $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

PROPOSITION 2.37 ♡ **Caractérisation d'un cercle par l'équation** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
Soit $\mathscr{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0.$$

Alors $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre AB. Une équation de $\mathscr{C}$ est donnée par

$$\boxed{(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0}$$

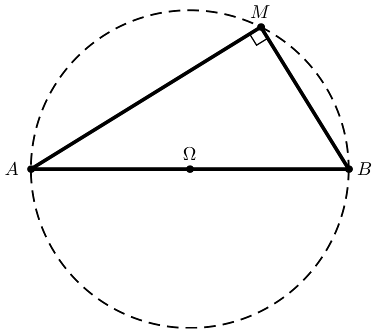


FIGURE 2.14 – Caractérisation d'un cercle par l'équation $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$

Démonstration *Soit* I *le milieu de* [A, B]. *Pour tout point* M *du plan :*

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \\ \Longrightarrow & \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = 0 \\ \Longrightarrow & \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}).\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA} = 0 \\ \Longrightarrow & MI^2 - IA^2 = 0 \\ \Longrightarrow & IM = IA \end{array}$$

car $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. *En résumé, si* M *est élément de* $\mathscr{C}$ *alors* IM = IA, *c'est à dire* M *appartient au cercle de diamètre* AB. *Réciproquement, si* M *est élément du cercle de diamètre* AB *alors* IM = IA *et remontant les implications précédentes, on montre que* $M \in \mathscr{C}$.

Remarque 2.17 La précédente proposition est une reformulation du **théorème de la médiane** vu au collège :« Un triangle est rectangle si et seulement si un de ses côté est un diamètre de son cercle circonscrit ».

2.6.6 Intersection d'un cercle et d'une droite

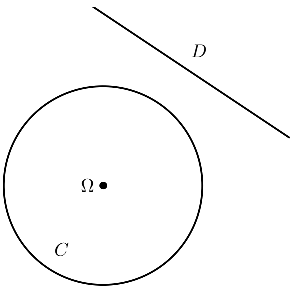


FIGURE 2.15 – $d(\Omega, D) > R$

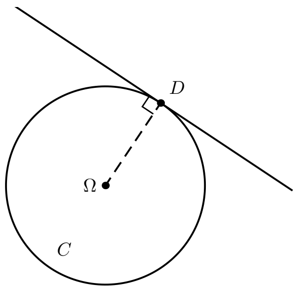


FIGURE 2.16 – $d(\Omega, D) = R$

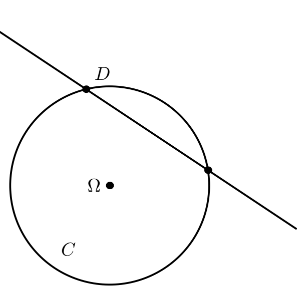


FIGURE 2.17 – $d(\Omega, D) < R$

PROPOSITION 2.38 ♡
Soient D une droite et $\mathscr{C}(\Omega, R)$ un cercle de rayon $R > 0$.

1. Si $d(\Omega, D) > R$ alors $D \cap \mathscr{C} = \varnothing$.
2. Si $d(\Omega, D) < R$ alors $D \cap \mathscr{C}$ est formée de deux points distincts.
3. Si $d(\Omega, D) = R$ alors $D \cap \mathscr{C}$ est constitué d'un unique point. Si M est ce point, on dit que D est *la tangente au cercle* $\mathscr{C}$ *au point* M. M est le projeté orthogonal de Ω sur D.

Démonstration *Soient* D *une droite et* $\mathscr{C}(\Omega, R)$ *un cercle de rayon* $R > 0$ *et de centre* Ω.

1. *Si* $d(\Omega, D) > R$, *il ne peut y avoir de point d'intersection entre* $\mathscr{C}$ *et* D.

2. *Si* $d = d(\Omega, \mathrm{D}) < \mathrm{R}$, *nommons* H *le projeté orthogonal de* Ω *sur* D. *Pour tout point* M *de* D, $\Omega\mathrm{M}^2 + \mathrm{HM}^2 = \Omega\mathrm{M}^2$, *soit* $d^2 + \mathrm{HM}^2 = \Omega\mathrm{M}^2$. M *est élément de* $\mathscr{C} \cap \mathrm{D}$ *seulement si on a à la fois* $\Omega\mathrm{M}^2 = \mathrm{R}^2$ *et* $\mathrm{HM}^2 = \Omega\mathrm{M}^2 - d^2$, *c'est à dire seulement si* $\mathrm{HM}^2 = \mathrm{R}^2 - d^2$. *Supposons que* $\overrightarrow{u}$ *oriente la droite* D, *il y a alors deux possibilités pour* M, *elles sont données par*

$$\overrightarrow{\mathrm{HM}} = \pm\sqrt{\mathrm{R}^2 - d^2}\,\overrightarrow{u}$$

Réciproquement, les deux points M *données par cette dernière égalité sont bien éléments de* $\mathscr{C} \cap \mathrm{D}$.

3. *Supposons enfin que* $d(\Omega, \mathrm{D}) = \mathrm{R}$. *Cette distance est celle entre* Ω *et* H, *le projeté orthogonal de* Ω *sur* D. H *est donc élément de* $\mathscr{C} \cap \mathrm{D}$ *et c'est le seul élément possible de cette intersection.*

PROPOSITION 2.39 ♡ **Équation cartésienne de la tangente à un cercle**

Soit $\mathscr{R}(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ et de rayon $\mathrm{R} > 0$. $\mathscr{C}$ admet comme équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

(avec $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - \mathrm{R}^2$). La tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne

$$\boxed{x_0 x + y_0 y - \alpha(x_0 + x) - \beta(y_0 + y) + \gamma = 0}$$

Démonstration *Un vecteur normal à la tangente à* $\mathscr{C}$ *en* M_0 *est donné par* $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}_0}\begin{vmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 - \beta \end{vmatrix}$. *Un point* $\mathrm{M}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ *est élément de cette tangente si et seulement si* $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}_0}.\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} = 0$. *On obtient ainsi une équation cartésienne de la tangente à* $\mathscr{C}$ *en* M_0 *:*

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0 \quad (*)$$

Soit en développant :

$$xx_0 + yy_0 - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

Comme $\mathrm{M}_0\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ *est élément de cette tangente,* $x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma = 0$ *et l'équation cartésienne de départ* $(*)$ *est équivalente à*

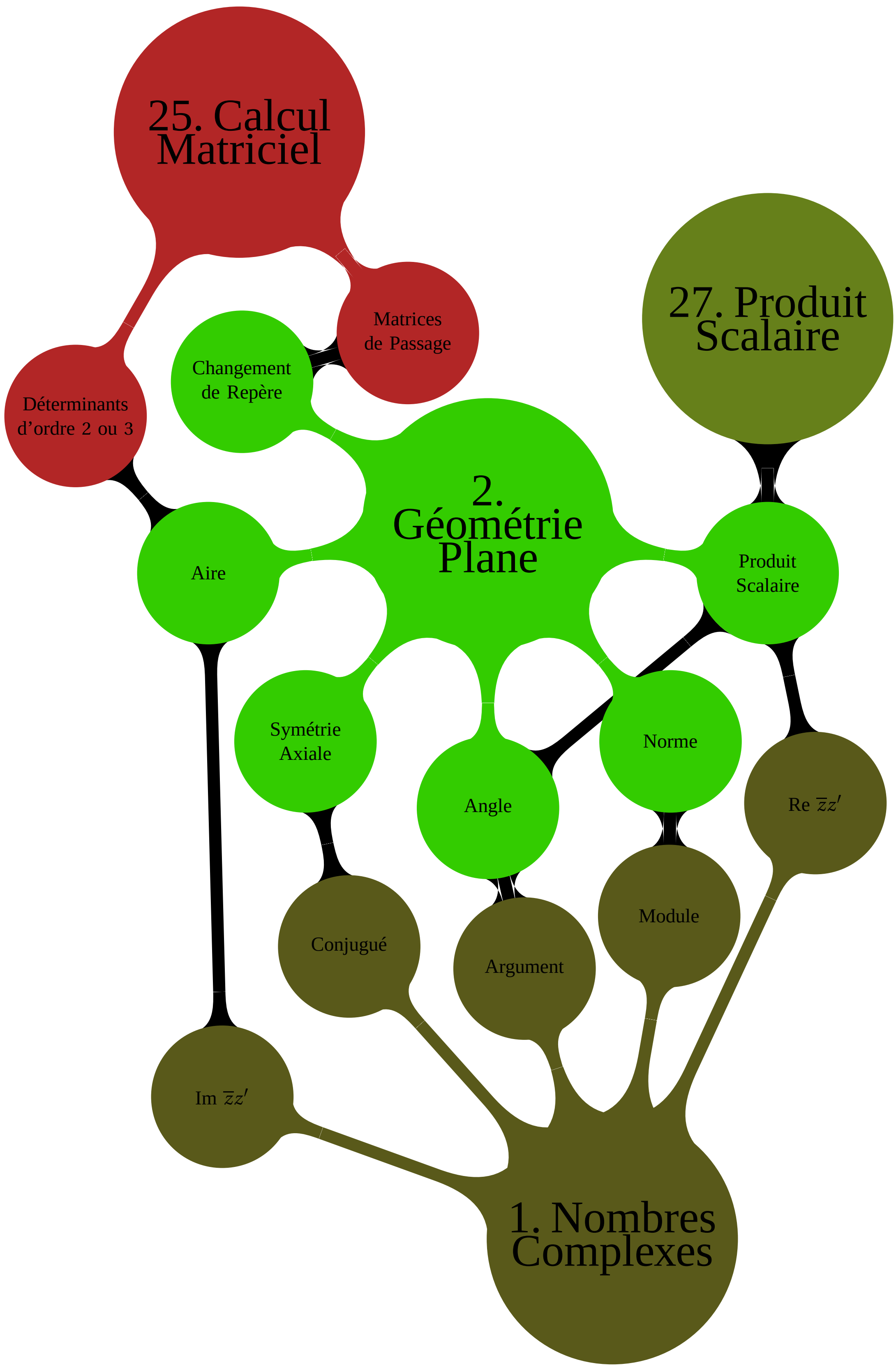
$$x_0 x + y_0 y - \alpha(x_0 + x) - \beta(y_0 + y) + \gamma = 0$$

En résumé

1. Il convient d'avoir bien compris :
   - l'utilité du produit scalaire
   - l'utilité du déterminant

   et les différentes méthodes pour les calculer.
2. Il faut savoir effectuer des changements de repère, vous en aurez un grand besoin en physique.
3. Il faut savoir calculer rapidement et sans hésitation :
   - l'équation cartésienne
   - l'équation paramétrée
   - l'équation polaire

   d'un cercle et d'une droite.
4. il faut aussi savoir calculer la distance d'un point à une droite et l'aire d'un parallélogramme dans le plan avec le déterminant.
5. Au terme de ce chapitre, vous devrez savoir organiser des calculs afin de pouvoir les effectuer dans des conditions optimales.


25. Calcul Matriciel
Matrices de Passage
Changement de Repère
Déterminants d'ordre 2 ou 3
27. Produit Scalaire
2. Géométrie Plane
Aire
Produit Scalaire
Symétrie Axiale
Angle
Norme
Re $\bar{z}z'$
Conjugué
Argument
Module
Im $\bar{z}z'$
1. Nombres Complexes

2.7 Exercices

⚠ *Attention 2.8* Penser à dessiner, cela aide souvent à résoudre un exercice.

2.7.1 Produit scalaire et déterminant

Exercice 2.1 ♡

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Développer :

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.
2. $\det(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v})$

Solution :

1. *Comme le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, on a, pour tous vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ du plan :* $\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = \langle \vec{a}+\vec{b} \mid \vec{a}-\vec{b}\rangle$ *donc*

$$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \langle 2\vec{u} \mid 2\vec{b}\rangle \\ &= 4\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle \end{aligned}$$

2. *De même, comme le déterminant est une forme bilinéaire anti-symétrique alternée, il vient :*

$$\det(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}) = 2\det(\vec{u}, \vec{v})$$

Exercice 2.2 ♡

Soient A, B *et* C *trois points du plan. Montrer que :*

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$$

1. *En raisonnant géométriquement.*
2. *En utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit scalaire*

Solution :

1. *Orientons le triangle* ABC *dans le sens direct. On peut choisir une détermination dans* $[0,\pi]$ *pour les trois angles* $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right)$. *Les trois déterminants sont alors positifs et sont de plus chacun égaux au double de l'aire du triangle* ABC, *ce qui prouve les égalités.*
2. *D'après la relation de Chasles et en utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit scalaire :*

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &= \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) + \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) \\ &= -\det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right). \end{aligned}$$

On prouve de même la dernière égalité.

Exercice 2.3 ♡

Dans le plan, on considère un parallélogramme ABCD. *On note* E *le pied de la perpendiculaire menée de* C *à* (AB). *On note* F *le pied de la perpendiculaire menée de* C *à* (BD). *Montrer que* $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}$.

Solution : *Faire un dessin ! Calculons*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BD}.(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}) - \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}) \\ &= \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} \\ &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Exercice 2.4 ♡♡

Soit ABCD *un parallélogramme. Montrer que*

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2.$$

Solution : *Soit* I *le milieu de* [AC] *et donc aussi le milieu de* [BD].

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}.\overrightarrow{\mathrm{DA}}\\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{AI}}+\overrightarrow{\mathrm{BI}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{BI}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{BI}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{CI}}+\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{CI}}+\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{DI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{DI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)\\ &= \mathrm{AI}^2+\mathrm{IB}^2+2\overrightarrow{\mathrm{AI}}.\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\mathrm{BI}^2+\mathrm{IC}^2+2\overrightarrow{\mathrm{BI}}.\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\mathrm{CI}^2+\mathrm{ID}^2+2\overrightarrow{\mathrm{CI}}.\overrightarrow{\mathrm{ID}}+\mathrm{DI}^2+\mathrm{IA}^2+2\overrightarrow{\mathrm{DI}}.\overrightarrow{\mathrm{IA}}\\ &= 4\mathrm{AI}^2+4\mathrm{BI}^2+2\overrightarrow{\mathrm{AI}}.\overrightarrow{\mathrm{IB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AI}}.\overrightarrow{\mathrm{ID}}+2\overrightarrow{\mathrm{BI}}.\overrightarrow{\mathrm{IC}}+2\overrightarrow{\mathrm{DI}}.\overrightarrow{\mathrm{IC}}\\ &= \mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2+2\overrightarrow{\mathrm{AI}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\overrightarrow{\mathrm{ID}}\right)+2\left(\overrightarrow{\mathrm{BI}}+\overrightarrow{\mathrm{DI}}\right).\overrightarrow{\mathrm{IC}}\\ &= \mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2\end{aligned}$$

2.7.2 Coordonnées cartésiennes dans le plan

Exercice 2.5 ♡

Calculer une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ *:*

1. *passant par* $\mathrm{A}(2,1)$ *et de vecteur normal* $\overrightarrow{n}=(1,-1)$.
2. *passant par* $\mathrm{A}(-1,0)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}=(1,-2)$.
3. *passant par* $\mathrm{A}(1,2)$ *et* $\mathrm{B}(-2,3)$.
4. *passant par l'origine et parallèle à la droite* $\mathscr{D}'$ $: x+y-1=0$.
5. *passant par* $\mathrm{A}(1,1)$ *et perpendiculaire à la droite* $\mathscr{D}'$ $:\begin{cases}x&=1+2t\\y&=-1+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.

Solution :

1. *Comme* $\mathscr{D}$ *admet* $\overrightarrow{n}$ *comme vecteur normal, une équation cartésienne de* $\mathscr{D}$ *est de la forme* $x-y+c=0$ *avec* $c\in\mathbb{R}$. *Comme* $\mathrm{A}\in\mathscr{D}$, *on a* $c=-1$ *et* $\mathscr{D}: x-y-1=0$. *Un vecteur directeur à* $\mathscr{D}$ *est celui de coordonnées* $(1,1)$ *donc une équation paramétrique de* $\mathscr{D}$ *est* $\mathscr{D}:\begin{cases}x&=2+t\\y&=1+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.
2. *Comme* $\mathscr{D}$ *est dirigée par* $\overrightarrow{u}$ *elle admet comme vecteur normal celui de coordonnées* $(-2,-1)$ *ou encore* $\overrightarrow{n}=(2,1)$. *Une équation de* $\mathscr{D}$ *est donc de la forme* $2x+y+c=0$ *où* $c\in\mathbb{R}$. *Comme* $\mathrm{A}\in\mathscr{D}$, *il vient que* $c=2$ *donc* $\mathscr{D}: 2x+y+2=0$. *Une équation paramétrique de* $\mathscr{D}$ *est* $\mathscr{D}:\begin{cases}x&=-1+t\\y&=-2t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.
3. *Comme* A *et* B *sont des points de* $\mathscr{D}$, *le vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,1)$ *dirige* $\mathscr{D}$ *et le vecteur* $\overrightarrow{n}=(1,3)$ *dirige* $\mathscr{D}$. *Une équation cartésienne de* $\mathscr{D}$ *est alors de la forme* $x+3y+c=0$ *avec* $c\in\mathbb{R}$. *Comme* $\mathrm{A}\in\mathscr{D}$, *on trouve que* $c=-7$ *et finalement* $\mathscr{D}: x+3y-7=0$. *On trouve par ailleurs qu'une équation paramétrique de* $\mathscr{D}$ *est* $\mathscr{D}:\begin{cases}x&=1-3t\\y&=2+t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.
4. *Comme* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *sont parallèles, le vecteur* $\overrightarrow{n}=(1,1)$ *normal à* $\mathscr{D}'$ *est aussi normal à* $\mathscr{D}$ *et donc une équation cartésienne de* $\mathscr{D}$ *est de la forme* $x+y+c=0$ *avec* $c\in\mathbb{R}$. *Comme* $\mathrm{O}\in\mathscr{D}$, $c=0$ *et* $\mathscr{D}: x+y=0$. *Un vecteur directeur à* $\mathscr{D}$ *est* $\overrightarrow{u}=(-1,1)$ *et une équation paramétrique de* $\mathscr{D}$ *est* $\mathscr{D}:\begin{cases}x&=-t\\y&=t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.
5. *Un vecteur directeur de* $\mathscr{D}'$ *est* $\overrightarrow{n}=(2,1)$ *qui est normal à* $\mathscr{D}$ *car les deux droites sont perpendiculaires. Une équation de* $\mathscr{D}$ *est donc de la forme* $2x+y+c=0$ *avec* $c\in\mathbb{R}$. *Comme* $\mathrm{A}\in\mathscr{D}$ *alors* $c=-3$ *et* $\mathscr{D}: 2x+y-3=0$. *Un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$ *est* $\overrightarrow{u}=(-1,2)$ *donc une équation paramétrique de* $\mathscr{D}$ *est* $\mathscr{D}:\begin{cases}x&=1-t\\y&=1+2t\end{cases};t\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.6 ♡

Calculer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ *d'équation paramétrique* $\begin{cases}x&=1-t\\y&=2-3t\end{cases}$.

Solution : *On pourrait lire sur l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$ les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Procédons autrement :*

$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2-3t \end{cases} \implies \begin{cases} t &= 1-x \\ t &= \dfrac{2-y}{3} \end{cases} \implies 1-x = \dfrac{2-y}{3} \implies -3x+y+1=0$$

et donc $\mathscr{D}: -3x+y+1=0$.

Exercice 2.7 ♡

On rapporte le plan à un repère orthonormal direct. On considère les points $A(-1,-1)$, $B(2,3)$ *et* $C(3,-3)$.

1. *Calculer l'aire du triangle* ABC.
2. *En déduire la distance de* A *à la droite* (BC).
3. *Former une équation de la droite* (AB).
4. *En déduire la longueur de la hauteur issue de* C *et retrouver l'aire du triangle* ABC.

Solution :

1. *L'aire de* ABC *est donnée par :* $\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|}{2} = \frac{22}{2} = \boxed{11}$.
2. *Soit* H *le projeté orthogonal de* A *sur* (BC). (AH) *est donc une hauteur de* ABC *et l'aire de* ABC *est aussi donnée par :* $\frac{BC\times AH}{2}$. *Comme* $BC=\sqrt{37}$, *on trouve :* $\boxed{AH = \dfrac{11\sqrt{37}}{74}}$.
3. *Le vecteur* $\overrightarrow{AB}(3,4)$ *dirige la droite* (AB). *Par conséquent, une équation de* (AB) *est* $\boxed{-4x+3y-1=0}$.
4. *La longueur de la hauteur issue de* C *est la distance de* C *à la droite* (AB). *Par conséquent :* $d(C,(AB)) = \dfrac{-4x_C+3y_C-1}{5} = \boxed{\dfrac{22}{5}}$. *L'aire du triangle* ABC *est alors donnée par :* $\dfrac{AB\times d(C,(AB))}{2} = \dfrac{5\times\dfrac{22}{5}}{2} = \boxed{11}$.

Exercice 2.8 ♡

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ *et* $B\begin{vmatrix}-2\\3\end{vmatrix}$.

1. *Écrire une équation cartésienne de la droite* (AB).
2. *Déterminer la distance du point* $C\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ *à la droite* (AB).
3. *Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal* H *de* C *sur* (AB).
4. *Retrouver la distance du point* C *à la droite* (AB) *en utilisant la question précédente.*

Solution :

1. *Soit* $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ *un point du plan. Il appartient à la droite* (AB) *si et seulement si* $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0$, *ce qui donne une équation cartésienne de la droite* (AB) : $\boxed{(AB): 5x+3y+1=0}$.
2. *Avec la formule du cours,* $d(C,(AB)) = \dfrac{|5+3+1|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{34}}$.
3. *Comme* $\overrightarrow{n}=(5,3)$ *est normal à* (AB), *il dirige* (CH) *et une équation paramétrique de* (CH) *est* $(CH): \begin{cases} x &= 1+5t \\ y &= 1+3t \end{cases}$.
   Les coordonnées de H *sont solutions du système :*

$$\begin{cases} x &= 1+5t \\ y &= 1+3t \\ 5x+3y+1 &= 0 \end{cases}.$$

   On trouve $t=-9/34$, $x=-11/34$ *et* $y=7/34$. *Donc* $H(-11/34, 7/34)$.
4. *Il suffit de calculer la norme de* $\overrightarrow{CH}=(45/34, 27/34)$, *on trouve* $\left\|\overrightarrow{CH}\right\| = \sqrt{81/34} = 9/\sqrt{34}$.

Exercice 2.9 ♡♡

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $\Omega\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$. *Parmi toutes les droites passant par* Ω, *déterminer celles qui sont à distance* 1 *du point* $A\begin{vmatrix}-1\\4\end{vmatrix}$.

Solution : *On peut décrire toutes les droites passant par* Ω *(sauf la droite verticale) à l'aide d'un seul paramètre, la pente* m. *L'équation cartésienne d'une telle droite* $\mathscr{D}_m$ *est donc* $(y-2)=m(x-1)$, *c'est-à-dire* $\boxed{\mathscr{D}_m\ : mx-y+(2-m)=0}$. *La distance du point* A *à la droite* $\mathscr{D}_m$ *est alors donnée par la formule :*

$$d(A,\mathscr{D}_m)=\frac{|-m-4+2-m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

Cette distance vaut 1 *si et seulement si* $4(m+1)^2=m^2+1$, *c'est-à-dire* $3m^2+8m+3=0$, *et on trouve les deux pentes solutions,* $m_1=\dfrac{-4+\sqrt7}{3}$ *et* $m_2=\dfrac{-4-\sqrt7}{3}$. *On vérifie ensuite que la droite verticale passant par* Ω *ne convient pas en écrivant son équation cartésienne* $x=1$ *et en calculant la distance de* A *à cette droite qui vaut* 2.

Exercice 2.10 ♡

Calculer la distance du point A *à la droite* $\mathscr{D}$ *dans les cas suivants :*

1. $A(0,0)$ *et* $\mathscr{D}$ *passe par* $B(5,3)$ *et est dirigée par* $\overrightarrow{u}(1,2)$.
2. $A(1,-1)$ *et* $\mathscr{D}$ *passe par* $B(-1,1)$ *et est perpendiculaire à* $\overrightarrow{n}(2,3)$.
3. $A(4,1)$ *et* $\mathscr{D}$ *est la droite d'équation cartésienne* $x+2y+3=0$.

Solution :

1. $d(A,\mathscr{D})=\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{u}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{7\sqrt5}{5}$
2. $d(A,\mathscr{D})=\dfrac{\left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$
3. $d(A,\mathscr{D})=\frac{|x_A+2y_A+3|}{\sqrt5}=\frac{9\sqrt5}{5}$

Exercice 2.11 ♡

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les 4 points $A(-1,3)$, $B(-6,-2)$, $C(2,-6)$ *et* $D(3,1)$.

1. *Montrer que* ABCD *est un trapèze.*
2. *Calculer les coordonnées de l'intersection de ses diagonales.*
3. *Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires.*
4. *Calculer l'aire de* ABCD.

Solution :

1. *Comme* $\overrightarrow{AD}=(4,-2)$ *et* $\overrightarrow{BC}=(8,-4)$ *il est clair que* $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$ *et que les droites* (AD) *et* (BC) *sont parallèles. Par suite,* ABCD *est un trapèze.*
2. *On calcule une équation cartésienne de* (AC). *Cette droite est dirigée par* $\overrightarrow{AC}=(3,-9)$ *ou encore par le vecteur* $\overrightarrow{u}=(1,-3)$. *Un vecteur normal à cette droite est donc* $\overrightarrow{n}=(3,1)$. *Une équation cartésienne de* (AC) *est donc de la forme* $3x+y+c=0$ *avec* $c\in\mathbb{R}$. *Comme* $A\in(AC)$, *il vient que* $c=0$. *Donc* $(AC):\ 3x+y=0$. *On montre de même que* $(BD):\ -x+3y=0$. *On remarque que ces deux droites passent par l'origine du repère donc leur point d'intersection est* O.
3. *Un vecteur normal à* (AC) *est* $\overrightarrow{n}=(3,1)$ *et un vecteur normal à* (BD) *est* $\overrightarrow{n}'=(-1,3)$. *Il est clair que* $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}'=0$ *et donc que les diagonales sont perpendiculaires.*
4. *On utilise la formule vue au collège. Si* $\mathscr{A}$ *désigne l'aire de* ABCD *alors* $\mathscr{A}=\left(\text{petite base}+\text{grande base}\right)\times\text{hauteur}/2$. *On sait que* petite base $=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=2\sqrt5$ *et* grande base $=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=4\sqrt5$. *De plus*

$$\text{hauteur}=d(A,(BC))=\frac{\left|\det \overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right|}{\|BC\|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-5&8\\-5&-4\end{matrix}\right\|}{4\sqrt5}=\frac{\left|-20\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\right|}{4\sqrt5}=\frac{60}{4\sqrt5}$$

et $\mathscr{A}=45$.

Exercice 2.12 ♡

On considère deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives :

$$\mathrm{D}:\ 3x+4y+3=0 \text{ et } \mathrm{D}':\ 12x-5y+4=0$$

.

1. *Montrer que ces deux droites sont sécantes.*
2. *Déterminer une équation de chacune de leurs bissectrices*[1]*.*

Solution :

1. *Un vecteur directeur de* D *est* $\overrightarrow{u}\,(-4,3)$ *et un vecteur directeur de* D′ *est* $\overrightarrow{u}'\,(5,-12)$. *Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ces deux droites ne sont pas parallèles.*
2. *Soit* $\mathrm{M}(x,y)$ *un point du plan. On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned}
&\text{M est un point d'une des bissectrices aux deux droites}\\
\iff\ & d(\mathrm{M},\mathscr{D}) = d(\mathrm{M},\mathscr{D}')\\
\iff\ & \frac{|3x+4y+3|}{5} = \frac{|12x-5y+4|}{13}\\
\iff\ & 13(3x+4y+3) = 5(12x-5y+4) \text{ ou } 13(3x+4y+3) = -5(12x-5y+4)\\
\iff\ & -21x+77y+19=0 \text{ ou } 99x+27y+59=0.
\end{aligned}$$

Donc les bissectrices ont pour équation $\boxed{-21x+77y+19=0}$ *et* $\boxed{99x+27y+59=0}$.

Exercice 2.13 ♡♡ **Bissectrices de deux droites**

On considère deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ non parallèles et d'équations normales respectives :

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 \text{ et } x\cos\theta' + y\sin\theta' - p' = 0$$

où $p, p' \in \mathbb{R}$ *et* $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \theta'\ [\pi]$.

1. *Déterminer une équation normale de chacune de leurs bissectrices*[2]*.*
2. *Montrer que si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ *sont des vecteurs unitaires qui dirigent les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ alors les vecteurs* $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u'}$ *et* $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u'}$ *dirige chacune de ces deux bissectrices.*
3. *Montrer que ces deux bissectrices sont perpendiculaires.*

Solution :

1. *Soit* $\mathrm{M}(x,y)$ *un point du plan. On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned}
&\text{M est un point d'une des bissectrices aux deux droites}\\
\iff & d(\mathrm{M},\mathscr{D}) = d(\mathrm{M},\mathscr{D}')\\
\iff & \frac{|x\cos\theta + y\sin\theta - p|}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{|x\cos\theta' + y\sin\theta' - p'|}{\cos^2\theta'+\sin^2\theta'}\\
\iff & |x\cos\theta + y\sin\theta - p| = |x\cos\theta' + y\sin\theta' - p'|\\
\iff & x\cos\theta + y\sin\theta - p = x\cos\theta' + y\sin\theta' - p' \quad\text{ou}\quad x\cos\theta + y\sin\theta - p = -\left(x\cos\theta' + y\sin\theta' - p'\right)\\
\iff & (\cos\theta-\cos\theta')\,x + (\sin\theta-\sin\theta')\,y = p-p' \quad\text{ou}\quad (\cos\theta+\cos\theta')\,x + (\sin\theta+\sin\theta')\,y = p+p'\\
\iff & -2\sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}\sin\tfrac{\theta-\theta'}{2}x + 2\cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}\sin\tfrac{\theta-\theta'}{2}y = p-p' \quad\text{ou}\quad 2\cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}\cos\tfrac{\theta-\theta'}{2}x + 2\sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}\cos\tfrac{\theta-\theta'}{2}y = p+p'\\
\iff & -\sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}x + \cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p-p')}{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}} \quad\text{ou}\quad \cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}x + \sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p+p')}{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}
\end{aligned}$$

ce qui est licite car $\theta\neq\theta'\ [\pi]$. *Les équations des deux bissectrices sont donc :*

$$\boxed{-\sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}x + \cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p-p')}{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}}} \quad \boxed{\cos\tfrac{\theta+\theta'}{2}x + \sin\tfrac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p+p')}{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}}$$

Ces deux équations sont de plus normales.

1. Rappelons qu'un point est sur une bissectrice de deux droites si et seulement si les distances de ce point à chacune des deux droites sont égales
2. Voir la note 1

2. *Comme* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{u}'$ *sont unitaires, on peut supposer que* $\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ *et que* $\overrightarrow{u}' = (\cos\theta', \sin\theta')$ *alors*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}' = (\cos\theta + \cos\theta', \sin\theta + \sin\theta') = 2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}\left(\cos\frac{\theta+\theta'}{2}, \sin\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

qui dirige clairement la première bissectrice. De même :

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}' = (\cos\theta - \cos\theta', \sin\theta - \sin\theta') = 2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\left(-\sin\frac{\theta+\theta'}{2}, \cos\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$$

qui dirige la deuxième.

3. *Comme* $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}').(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}'\|^2 = 0$, *les deux bissectrices sont perpendiculaires.*

Exercice 2.14 ♡♡

Dans le plan, on considère trois points A, B *et* C *non-alignés. Une droite* $\mathscr{D}$ *coupe les droites* (BC), (AC) *et* (AB) *en* A′, B′ *et* C′ *respectivement. Par* A′ *on mène les parallèles à* (AB) *et* (AC) *qui coupent respectivement aux points* E *et* F *la parallèle à* (BC) *menée par* A. *Montrer que les droites* (B′E) *et* (C′F) *sont parallèles.*

Indication 2.8 : *Le problème est indépendant du repère choisi, à vous donc de choisir un bon repère...*

Solution : *Faire un dessin !*

– ***Choix du repère :*** $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. *Dans ce repère,* $A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$. *Comme* B′ *est sur la droite* (AC), *il existe* $b \in \mathbb{R}$ *tel que* $B'\begin{vmatrix}0\\b\end{vmatrix}$. *De même, il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $C'\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$.
– ***Équation cartésienne de la droite*** $\mathscr{D} = (B'C')$ ***:*** *un point* $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ *est sur cette droite si et seulement si* $\det(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'C'}) = 0$, *c'est-à-dire* $\boxed{(B'C')\ : bx + cy - bc = 0}$.
– *On calcule de même l'équation de la droite* (BC) *et l'on trouve* $\boxed{(BC)\ : x + y - 1 = 0}$.
– ***Coordonnées de*** $A'\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$: *puisque* A′ *est sur la droite* (B′C′) *et sur* (BC), *ses coordonnées vérifient le système* $\begin{cases}x + y &= 1\\ bx + cy &= bc\end{cases}$. *On en tire* $\boxed{A'\begin{vmatrix}\frac{c(1-b)}{c-b}\\ \frac{b(1-c)}{b-c}\end{vmatrix}}$. *On remarque que le cas où* $b = c$ *correspond à une droite* $\mathscr{D}$ *parallèle à* (BC) *ce qui est exclu par l'énoncé.*
– ***Équation cartésienne de la droite*** $\mathscr{D}'$***, parallèle à*** (BC) ***passant par*** A ***:*** *on trouve* $\boxed{\mathscr{D}'\ : x + y = 0}$.
– ***Coordonnées de*** E ***:*** *il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $E = A' + \lambda\overrightarrow{AB}$, *c'est-à-dire* $\begin{cases}x &= \frac{c(1-b)}{c-b} + \lambda\\ y &= \frac{b(1-c)}{b-c}\end{cases}$. *Puisque* $E \in \mathscr{D}'$, $x + y = 0$ *et on en tire que* $\boxed{E\begin{vmatrix}\frac{b(1-c)}{c-b}\\ \frac{b(1-c)}{c-b}\end{vmatrix}}$.
– ***Coordonnées de*** F ***:*** *de la même façon, en écrivant* $F = A' + \lambda\overrightarrow{AC'}$, *on trouve que* $\boxed{F\begin{vmatrix}\frac{c(1-b)}{c-b}\\ -\frac{c(1-b)}{c-b}\end{vmatrix}}$.
– *Pour montrer que* (B′E) *et* (C′F) *sont parallèles, calculons* $\boxed{\overrightarrow{B'E}\begin{vmatrix}\frac{b(1-c)}{c-b}\\ \frac{b(b-1)}{c-b}\end{vmatrix}}$ *et* $\boxed{\overrightarrow{C'F}\begin{vmatrix}\frac{c(1-c)}{c-b}\\ -\frac{c(1-b)}{c-b}\end{vmatrix}}$. *Ensuite, calculons le déterminant* $\det(\overrightarrow{B'E}, \overrightarrow{C'F}) = \frac{1}{(c-b)^2}\left[-bc(1-c)(1-b) - bc(b-1)(1-c)\right] = 0$ *après simplifications. Le résultat est montré.*

Exercice 2.15 ♡♡

On considère un point $A_\lambda\left|\begin{matrix}\lambda\\0\end{matrix}\right.$ *de l'axe* (Ox) *et un point* $B_\lambda\left|\begin{matrix}0\\a-\lambda\end{matrix}\right.$ *de l'axe* (Oy).

1. *Écrire l'équation cartésienne de la médiatrice du segment* $[A_\lambda B_\lambda]$.
2. *Montrer que lorsque* λ *varie, cette médiatrice passe toujours par un point fixe.*

Solution :

1. *Soit* $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$. *Le point* M *appartient à la médiatrice de* $[A_\lambda, B_\lambda]$ *si et seulement si* $d(A_\lambda, M) = d(B_\lambda, M)$, *c'est-à-dire si et seulement si* $(x-\lambda)^2 + y^2 = x^2 + \left(y-a+\lambda\right)^2$. *Ceci amène l'équation cartésienne*

$$\boxed{\mathscr{D}_\lambda :\ 2\lambda x + 2(\lambda - a)y - 2\lambda a + a^2 = 0}$$

2. *On remarque que le point* $C\left|\begin{matrix}a/2\\a/2\end{matrix}\right.$ *appartient à toutes les droites* $\mathscr{D}_\lambda$.

Exercice 2.16 ♡♡

On considère dans le plan euclidien un triangle équilatéral (ABC). *On choisit un repère orthonormé d'origine le milieu de* $[AB]$, *avec le vecteur* $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ *dans lequel* $A\left|\begin{matrix}-a\\0\end{matrix}\right.$ *et* $B\left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.$ *avec* $a > 0$.

1. *Déterminer les coordonnées du point* C.
2. *Écrire les équations cartésiennes des droites* (AC) *et* (BC).
3. *Montrer que si* M *est un point intérieur au triangle, la somme des distances de* M *à chaque côté du triangle est constante.*
4. *Retrouver ce résultat en partitionnant le triangle* ABC *en trois triangles dont on déterminera les aires grâce au déterminant.*

Solution :

1. *Si* $C\left|\begin{matrix}0\\c\end{matrix}\right.$, *on calcule* $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = c^2 + a^2$ *qui doit valoir* $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 4a^2$ *d'où l'on tire* $c = \sqrt{3}a$ *et donc* $C\left|\begin{matrix}0\\\sqrt{3}a\end{matrix}\right.$.

2. *Soit* $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ *un point de la droite* (AC). *Il doit vérifier* $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0$, *d'où l'on tire*

$$\boxed{(AC)\ :\sqrt{3}ax - ay + \sqrt{3}a^2 = 0}$$

et de même

$$\boxed{(BC)\ :\sqrt{3}ax + ay - \sqrt{3}a^2 = 0}$$

3. *Soit un point* $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ *intérieur au triangle. La distance de* M *à la droite* (AB) *vaut* y $(y \geqslant 0)$. *Appliquons la formule du cours pour calculer la distance de* M *à la droite* (AC) *:*

$$d(M, AC) = \frac{|\sqrt{3}ax - ay + \sqrt{3}a^2|}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}{2}$$

On a utilisé que le point M *était à droite de la droite* (AC) *pour enlever la valeur absolue. De même,*

$$d(M, BC) = \frac{|\sqrt{3}ax + ay - \sqrt{3}a^2|}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{-\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}{2}$$

La somme des trois distances est constante et vaut $\sqrt{3}a$.

4. *Si* U, V *et* W *sont trois points du plan, on notera* $\mathscr{A}_{\text{UVW}}$ *l'aire du triangle* UVW. *On a :*

$$\begin{aligned} & d(\text{M},(\text{AB})) + d(\text{M},(\text{BC})) + d(\text{M},(\text{CA})) \\ = & \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{\text{AM}},\overrightarrow{\text{AB}}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|} + \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{\text{BM}},\overrightarrow{\text{BC}}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{\text{BC}}\right\|} + \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{\text{CM}},\overrightarrow{\text{CA}}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{\text{CA}}\right\|} \\ = & \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 \end{aligned}$$

où $\mathscr{A}_1$ *est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs* $\overrightarrow{\text{AM}}$ *et* $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\mathscr{A}_2$ *est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs* $\overrightarrow{\text{BM}}$ *et* $\overrightarrow{\text{BC}}$ *et* $\mathscr{A}_3$ *est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs* $\overrightarrow{\text{CM}}$ *et* $\overrightarrow{\text{CA}}$. *Mais* $\mathscr{A}_1 = 2\mathscr{A}_{\text{MAB}}$, $\mathscr{A}_2 = 2\mathscr{A}_{\text{MBC}}$ *et* $\mathscr{A}_3 = 2\mathscr{A}_{\text{MCA}}$. *Donc :*

$$d(\text{M},(\text{AB})) + d(\text{M},(\text{BC})) + d(\text{M},(\text{CA})) = 2\left(\mathscr{A}_{\text{MAB}} + \mathscr{A}_{\text{MBC}} + \mathscr{A}_{\text{MCA}}\right) = 2\mathscr{A}_{\text{ABC}}$$

ce qui prouve que la somme des trois longueurs est constante.

Exercice 2.17 ♡♡

Dans le plan, on considère un triangle (ABC) *et on note* I *le milieu du segment* [BC]. *Une droite passant par* I *coupe les droites* (AB) *en* D *et* (AC) *en* E. *Déterminer le lieu des points d'intersection des droites* (BE) *et* (CD).

Solution : *On se place dans le repère* $(\text{A},\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{AC}})$. *Danc ce repère*

1. *le point* I *a comme coordonnées* $\text{I}\begin{vmatrix}1/2\\1/2\end{vmatrix}$
2. *la droite passant par* D *admet comme équation cartésienne :* $(y-1/2) = \lambda(x-1/2)$ *avec* $\lambda \neq 0$ *(puisque cette droite n'est pas parallèle à* (AB) *ni à* (AC).
3. *les coordonnées des points* D *et* E *sont* $\text{D}\big|1/2-1/2\lambda$, $\text{E}\begin{vmatrix}0\\1/2-\lambda/2\end{vmatrix}$
4. *la droite* (BE) *admet comme équation cartésienne :* $(1-\lambda)x + 2y = 1-\lambda$
5. *la droite* (CD) *admet comme équation cartésienne :* $2\lambda x + (\lambda-1)y = \lambda - 1$.
6. *l'intersection de ces deux droites est formée du point :* $\text{M}\begin{vmatrix}\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\\ -\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\dfrac{2}{\lambda+1}\\ -1+\dfrac{2}{\lambda+1}\end{vmatrix}$ *(les deux droites ne sont pas parallèles lorsque* $\lambda \neq -1$*).*
7. *Le point* M *est sur la droite d'équation* $x + y = 0$. *L'application* $\lambda \mapsto \dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}$ *étant une bijection de* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *vers* $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, *on trouve tous les points de cette droite sauf ceux d'abscisse* 1 *et* −1.

Exercice 2.18 ♡♡

On considère dans le plan euclidien un triangle isocèle (ABC) *avec* AB = AC. *On considère un point* D *qui varie sur le segment* [AB] *et un point* E *sur le segment* [BC] *tels que* $\overline{\text{D}'\text{E}} = \dfrac{1}{2}\overline{\text{BC}}$ *où* D′ *est le projeté orthogonal de* D *sur* (BC). *Par le point* E, *on mène la perpendiculaire à la droite* (DE). *Montrer que cette droite passe par un point fixe* I.

Solution : *On choisit le repère orthonormé tel que* $\text{A}\begin{vmatrix}0\\a\end{vmatrix}$, $\text{B}\begin{vmatrix}-b\\0\end{vmatrix}$ *et* $\text{C}\begin{vmatrix}b\\0\end{vmatrix}$. *Notons* $\text{D}'\begin{vmatrix}\lambda\\0\end{vmatrix}$, *on a alors* $\text{E}\begin{vmatrix}\lambda+b\\0\end{vmatrix}$. *On détermine l'équation cartésienne de la droite* (AB) *:* $\boxed{ax - by + ab = 0}$, *les coordonnées du point* D *:* $\boxed{\text{D}\begin{vmatrix}\lambda\\ \dfrac{a\lambda+ab}{2}\end{vmatrix}}$ *puis l'équation cartésienne de la perpendiculaire en* E *:* $\boxed{-bx + \dfrac{a\lambda+ab}{b}y + b(\lambda+b) = 0}$. *On peut voir cette équation comme un polynôme en* λ *:*

$$\boxed{\lambda\left[b + \frac{ay}{b}\right] + \left[b(b-x) + ay\right] = 0}$$

Il suffit d'annuler le coefficient de λ et le coefficient constant pour voir que cette droite passe toujours par le point $\boxed{I\left|\begin{matrix}0\\-b^2/a\end{matrix}\right.}$.

Exercice 2.19 ♡♡

Dans le repère canonique du plan, on considère deux points sur les axes $A\left|\begin{matrix}\lambda\\0\end{matrix}\right.$ *et* $B\left|\begin{matrix}0\\a-\lambda\end{matrix}\right.$. *On note* C *le point tel que* (OACD) *soit un rectangle. On note* $\mathscr{D}_\lambda$ *la perpendiculaire à la droite* (AB) *passant par* C. *Montrer que la droite* $\mathscr{D}_\lambda$ *passe par un point fixe à déterminer lorsque* λ *varie.*

Solution : $C\left|\begin{matrix}\lambda\\a-\lambda\end{matrix}\right.$. *Pour obtenir l'équation cartésienne de* $\mathscr{D}_\lambda$, *on traduit* $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BA}=0$ *et l'on trouve*

$$\mathscr{D}_\lambda\ :\lambda x+(\lambda-a)y-2a\lambda+a^2=0$$

que l'on peut écrire comme un polynôme en λ *:*

$$\lambda(x+y-2a)+(-ay+a^2)=0.$$

En considérant le point $I\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ *avec* x *et* y *qui annulent les deux coefficients de ce polynôme, on trouve le point fixe* $\boxed{I\left|\begin{matrix}a\\a\end{matrix}\right.}$.

Exercice 2.20 ♡♡

Déterminer l'intersection des droites D_1 *et* D_2 *:*

$$D_1\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2t-1\\y&=&-t+2\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}\qquad D_2\left\{\begin{array}{rcl}x&=&t+2\\y&=&3t+1\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$$

Solution :

1. *On prend deux paramètres distincts* t *et* u *et on égale les abscisses et ordonnées pour obtenir le système :* $\left\{\begin{array}{rcl}2t-1&=&u+2\\-t+2&=&3u+1\end{array}\right.$ *d'où* $\left\{\begin{array}{rcl}2t-u&=&3\\-t-3u&=&-1\end{array}\right.$ *d'où* $-7u=1$ *et* $u=-\frac{1}{7}$. *On en déduit* $u=-\frac{1}{7}+2=\frac{13}{7}$ *et* $y=-\frac{3}{7}+1=\frac{4}{7}$.
2. $\vec{u}(2,-1)$ *est vecteur directeur de* D_1, *donc* $\vec{n}(1,2)$ *est vecteur normal de* D_1. *Donc une équation cartésienne de* D_1 *est* $x+2y=k$. k *est déterminé en écrivant que (pour* $t=0$*)* $M(-1,2)\in D_1$ *soit* $k=-1+2\times2=3$. *Maintenant on traduit : un point de* D_2 *vérifie cette équation de* D_1 *:* $t+2+2(3t+1)=3$ *soit* $t=-\frac{1}{7}$ *et on conclut comme ci-dessus.*
   Moralité : L'intersection de deux objets géométriques se traite bien lorsqu'un est défini en paramétrique et l'autre par équation cartésienne.

2.7.3 Géométrie du triangle

Exercice 2.21 ♡♡ **Centre du cercle circonscrit d'un triangle et médiatrices**

Soient A, B, C *trois points non alignés du plan* $\mathscr{P}$. *Montrer que les médiatrices du triangle* ABC *sont concourantes en un point* O *centre du cercle circonscrit au triangle :*

1. *En utilisant la définition et les propriétés de la médiatrice d'un segment.*
2. *En effectuant des calculs dans un repère bien choisi.*

Solution :

1. *La médiatrice du segment* [AB] *admet comme vecteur normal* $\overrightarrow{AB}$, *celle du segment* [AC] *admet comme vecteur normal* $\overrightarrow{AC}$. *Les points* ABC *étant non alignés, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc ces deux médiatrices ne peuvent être parallèles. Elles se coupent alors en un point qu'on notera* O. *On a :* OA = OB = OC. *On déduit de ces égalités que* O *est le centre du cercle circonscrit à* ABC *et que* O *est élément de la médiatrice de* [BC]. *Par conséquent, les trois médiatrices du triangles sont concourantes en* O.

2. *On peut aussi proposer la solution calculatoire suivante. On peut choisir un bon repère orthonormé dans lequel les coordonnées de* A, B *et* C *sont* $A\begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix} b \\ 0 \end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix} 0 \\ c \end{vmatrix}$. *Les milieux des côtés du triangle ont pour coordonnées,* $A'\begin{vmatrix} b/2 \\ c/2 \end{vmatrix}$, $B'\begin{vmatrix} a/2 \\ c/2 \end{vmatrix}$, $C'\begin{vmatrix} (a+b)/2 \\ 0 \end{vmatrix}$. *Les perpendiculaires issues respectivement de* C', B' *et* A' *ont pour équations cartésiennes :*

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad -ax+cy+\frac{a^2-c^2}{2} = 0, \quad -bx+cy+\frac{b^2-c^2}{2} = 0$$

et on vérifie qu'elles passent par le point $\boxed{I\begin{vmatrix} (a+b)/2 \\ c/2+ab/2c \end{vmatrix}}$.

Exercice 2.22 ♡♡ **Centre de gravité et médianes d'un triangle**

Soient A, B, C *trois points non alignés du plan* $\mathscr{P}$. *Soient* G *l'isobarycentre de* ABC.

1. *Soit* I *le milieu de* [BC]. *Montrer que* $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. *En déduire que* G *est élément de la médiane de* ABC *issue de* A.
2. *En déduire que les médianes du triangle* ABC *sont concourantes en* G.

Solution :

1. *Comme* G *est l'isobarycentre de* ABC, *on a :* $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. *Utilisant la relation de Chasles, on en tire :* $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ *c'est-à-dire :* $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{0}$ *d'où la relation annoncée. La médiane issue de* A *étant la droite* (AI), *il est alors clair que* G *est élément de cette médiane.*
2. *On démontrerait de même que, si* J *désigne le milieu de* [AC] *et* K *celui de* [AB] *:* $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ *et* $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$. *Le point* G *appartient donc à la médiane de* ABC *issue de* B *et celle issue de* C. *Les trois médianes de* ABC *sont donc concourantes en* G.

Exercice 2.23 ♡♡ **Centre du cercle inscrit à un triangles et bissectrices**

Soient A, B, C *trois points non alignés du plan* $\mathscr{P}$. *Montrer que les trois bissectrices intérieures du triangle* ABC *sont concourantes en un point* K *du plan et ce que ce point est centre du cercle inscrit à* ABC *(c'est à dire le cercle tangent aux trois côtés du triangle).*

Solution : *Notons* d_A, d_B *et* d_C *les bissectrices intérieures de* ABC *issues respectivement de* A, B *et* C. *Les points* A, B *et* C *n'étant pas alignés,* d_A *et* d_B *ne sont pas parallèles et se coupent en un point* K *du plan. Par définition d'une bissectrice, on a :* $d(K,(AB)) = d(K,(AC)) = d(K,(AB)) = d(K,(BC))$. *Par conséquent,* $d(K,(CA)) = d(K,(CB))$ *et* K *est élément de la bissectrice issue de* C. *On en déduit que les trois bissectrices intérieures de* ABC *sont concourantes en* K. *Notons* K_A, K_B, K_C *les projetés orthogonaux de* K *sur respectivement* (BC), (AC) *et* (AB), *on a :* $d(K,(AB)) = KK_C$, $d(K,(AC)) = KK_B$ *et* $d(K,(BC)) = KK_A$. *D'après ce qui a été fait précédemment, on peut affirmer que ces trois longueurs sont égales :* $KK_A = KK_B = KK_C$. *Le point* K *est donc le centre du cercle* $\mathscr{C}$ *circonscrit au triangle* $K_AK_BK_C$. *Il reste à montrer que les trois côtés du triangles* ABC *sont tangents à ce cercle. Comme* K_A *est le projeté orthogonal de* K *sur* (BC), *la droite* (BC) *est perpendiculaire à un rayon du cercle* $\mathscr{C}$ *et est donc tangente à* $\mathscr{C}$. *On fait de même avec les droites* (AC) *et* (AB) *et on montre que* $\mathscr{C}$ *est bien le cercle inscrit à* ABC.

Exercice 2.24 ♡♡ **Orthocentre d'un triangle**

Soient A, B, C *trois points non alignés du plan* $\mathscr{P}$.

1. *En exprimant chacun des vecteurs de l'expression ci dessous au moyen de vecteurs d'origine* A, *montrer que pour tout point* M *de* $\mathscr{P}$ *on a :*
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BM} = 0.$$
2. *Montrer que la hauteur issue de* A *dans le triangle* ABC *et celle issue de* B *ne sont pas parallèles. On notera* H *le point d'intersection.*
3. *Montrer que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0$. *En déduire que les hauteurs du triangle* ABC *sont concourantes. Le point de concours est l'orthocentre du triangle.*

Solution :

1. *Soit* M *un point du plan.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{AM}+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{AM}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{CA}\\ &= 0\end{aligned}$$

2. *La hauteur issue de* A *admet comme vecteur normal* $\overrightarrow{BC}$ *et celle issue de* B *le vecteur* $\overrightarrow{AC}$*. Les points* ABC *n'étant pas alignés ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et les deux hauteurs ne peuvent donc être parallèles. Elles sont donc sécantes en un point qu'on notera* H*.*
3. *Utilisant l'égalité établie dans la première question avec* M = H *et le fait que* H *est à l'intersection des hauteurs issues de* A *et de* B*, on obtient :* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0$*. On en déduit que* H *est élément de la hauteur issue de* C *et que les trois hauteurs de* ABC *sont concourantes en* H*.*

Exercice 2.25 ♡♡ **Droite d'Euler d'un triangle**

Dans un triangle ABC *non équilatéral et non aplati, on considère l'orthocentre* H*, le centre* O *du cercle circonscrit et le centre de gravité* G*.*

1. *Exprimer* $\overrightarrow{OG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{OA}$*,* $\overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OC}$*.*
2. *Soit* $\vec{v}=3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}$*. Montrer que* $\vec{v}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{AB}$*.*
3. *En déduire que* $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$*.*

La droite passant par ces trois points est appelé droite d'Euler du triangle ABC*.*

Solution :

1. *Comme* G *est l'isobarycentre de* A, B *et* C*, par la relation de Chasles, on obtient :* $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$*.*
2. *On appelle* I *le milieu de* [AB]*. Il vient :*

$$\begin{aligned}\vec{v}.\overrightarrow{AB} &= \left(3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{AB}\\ &= \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{AB}\\ &= \left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}\\ &= \underbrace{\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}}_{=0}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB} \text{ car } \overrightarrow{HC} \text{ dirige la hauteur issue de B}\\ &= \left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{AB}\\ &= 2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AB} \text{ car } \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}\\ &= 0 \text{ car } \overrightarrow{OI} \text{ dirige la médiatrice du segment [AB]}\end{aligned}$$

3. *En effectuant le même calcul, on pourrait montrer que* $\vec{v}.\overrightarrow{AC}=0$*. Par conséquent, le vecteur* $\vec{v}$ *est à la fois orthogonal à* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$*. Mais le triangle* ABC *n'étant pas plat, ceci n'est possible que si* $\vec{v}=\vec{0}$*, c'est-à-dire seulement si* $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$*. Le triangle n'étant pas équilatéral, on en déduit que les points* O*,* G *et* H *sont alignés. La droite portant ces trois points est appelée* **droite d'Euler** *du triangle* ABC*.*

Proposons une preuve calculatoire de cette propriété :

Dans un repère orthonormé adapté, les coordonnées de A*,* B *et* C *sont* $A\begin{vmatrix}a\\0\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}b\\0\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}0\\c\end{vmatrix}$*, le centre de gravité a pour coordonnées* $\boxed{G\begin{vmatrix}(a+b)/3\\c/3\end{vmatrix}}$*, les trois hauteurs ont pour équation cartésienne*

$$x=0,\quad -bx+cy+ab=0,\quad -ax+cy+ab=0$$

d'où le point d'intersection des hauteurs : $\boxed{H\begin{vmatrix}0\\-ab/c\end{vmatrix}}$*. Pour trouver le centre du cercle circonscrit, on peut chercher*

l'intersection des médiatrices ou résoudre $\|\overrightarrow{\Omega A}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega B}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega C}\|^2$ *ce qui donne* $\boxed{\Omega \begin{vmatrix} (a+b)/2 \\ c/2 + ab/2c \end{vmatrix}}$. *On calcule ensuite*

$$\det(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{H\Omega}) = \begin{vmatrix} (a+b)/3 & (a+b)/2 \\ c/3 + ab/c & c/2 + 3ab/2c \end{vmatrix} = 0$$

ce qui montre que ces trois points sont alignés.

Exercice 2.26 ♡♡ **Formules des sinus, d'Al-Kashi, de Heron**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC *non aplati de sens direct (c'est-à-dire qu'on passe du point* A *au point* B*, et du point* B *au point* C *en tournant dans le sens direct) . On note :* $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$, $\widehat{C} = \widehat{ACB}$ *et* $\mathscr{A}$ *l'aire de* ABC. *On note aussi* R *le rayon du cercle circonscrit à* ABC*,* r *le rayon du cercle inscrit à* ABC *et* $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ *le demi-périmètre de* ABC.

1. *Montrer que* $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 2\mathscr{A}$
2. *En déduire la* **formule des sinus** *:*

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathscr{A}} = 2\mathrm{R}.$$

3. *Prouver les* **formules d'Al-Kashi** *:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{B}$$

Ces formules généralisent la formule de Pythagore dans un triangle quelconque.

4. *Déduire des deux dernières questions la* **formule de Héron** *:*

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{abc}{4\mathrm{R}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp$$

Solution :

1. *Chacun des* 3 *déterminants est égal, le triangle étant direct, à* $2\mathscr{A}$.
2. *Par définition du déterminant et utilisant les égalités précédentes, on a :*

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \sin\widehat{A} = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \sin\widehat{B} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \sin\widehat{C} = 2\mathscr{A}$$

c'est-à-dire :

$$bc\sin\widehat{A} = ac\sin\widehat{B} = ab\sin\widehat{C} = 2\mathscr{A}.$$

En divisant ces dernières égalités par abc*, on obtient :*

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c} = \frac{2\mathscr{A}}{abc}.$$

Par ailleurs, si on note I *le milieu de* [BC] *et* O *le centre du cercle circonscrit à* ABC*, l'angle inscrit* $\widehat{BAC}$ *intercepte le même arc de cercle que l'angle au centre* $\widehat{BOC}$. *Par conséquent :* $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{A}$. *Par ailleurs, comme* $\mathrm{OB} = \mathrm{OC}$*, le triangle* BOC *est isocèle en* O *et* BIO *est rectangle en* I. *Dans ce dernier triangle, on peut écrire :* $\sin\widehat{BOI} = \frac{a}{2\mathrm{R}}$*, ce qui amène :* $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = 2\mathrm{R}$.

3. *On a :*

$$\begin{aligned} a^2 &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \\ &= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} \\ &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} \\ &= \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos\widehat{BAC} + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\widehat{A} + b^2 \end{aligned}$$

On obtient les deux formules suivantes par permutations des lettres a, b *et* c.

4. *Les deux premières égalités découlent directement des résultats établis dans la seconde question . Si* K *désigne le centre du cercle inscrit dans le triangle* ABC *et si* K_A, K_B, K_C *désignent respectivement l'intersection de ce cercle avec les côtés* [BC], [AC], [AB] *de* ABC *alors* KK_A, KK_B, KK_C *sont les hauteurs respectives des triangles* KBC, KAC *et* KAB *et ces hauteurs sont toutes de longueur* r. *Les aires de ces trois triangles sont donc respectivement* $\frac{ar}{2}$, $\frac{br}{2}$ *et* $\frac{cr}{2}$. *Comme ces trois aires partitionnent celle du triangle* ABC, *on a :* $\mathscr{A} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} = pr$. *Enfin, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\widehat{A}} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1-\cos\widehat{A}\right)\left(1+\cos\widehat{A}\right)} \\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)} \quad \text{par application des formules d'Al-Kashi} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\left(2bc-a^2+b^2+c^2\right)\left(2bc+a^2-b^2-c^2\right)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((b+c)+a)\,((b+c)-a)\,(a-(b-c))\,(a+(b-c))} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c)\,(a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\,\frac{a+b+c-2a}{2}\,\frac{a+b+c-2b}{2}\,\frac{a+b+c-2c}{2}} \\
&= \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}
\end{aligned}$$

Exercice 2.27 ♡♡

On considère un triangle (ABC). *On note* A′, B′, C′ *les symétriques respectifs des points* A, B, C *par rapport aux points* B, C, A. *Quel rapport y a-t-il entre les aires des triangles* (A′B′C′) *et* (ABC) *?*

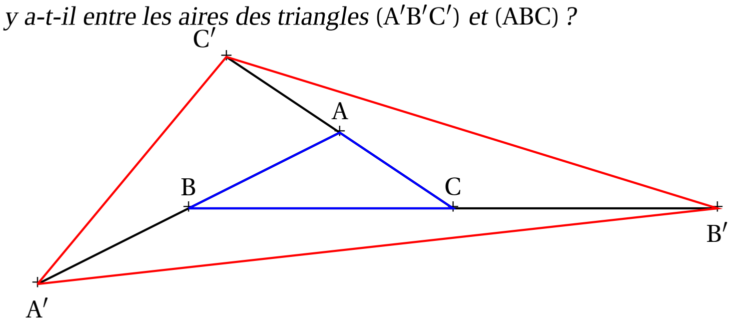


FIGURE 2.18 – Exercice 2.27

Solution : *L'aire d'un triangle* (ABC) *est la moitié de l'aire du parallélogramme* $\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. *En notant* $\mathscr{A}$ *le double de l'aire du triangle* ABC *et* $\mathscr{A}'$ *le double de celle de* A′B′C′, *on calcule en utilisant la relation de Chasles :*

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}' &= \det(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}) \\
&= \det(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC'}) \\
&= \det(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC},2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}) \\
&= \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+4\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})-2\det(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) \\
&= \mathscr{A}+4\mathscr{A}+2\mathscr{A}=7\mathscr{A}
\end{aligned}$$

L'aire du triangle (A′B′C′) *vaut donc* 7 *fois l'aire du triangle* (ABC).

2.7.4 Cercle

Exercice 2.28 ♡

Déterminer le centre et le rayon des cercles d'équations cartésiennes :

1. $x^2+y^2-4x+4y-1=0$

2. $x^2+y^2-6x+8y+24=0$

Solution :

1. $x^2+y^2-4x+4y-1=0 \iff (x-2)^2+\left(y+2\right)^2=9$. *Cette première équation est celle d'un cercle de centre* $(2,-2)$ *et de rayon* 3.
2. $x^2+y^2-6x+8y+24=0 \iff (x-3)^2+\left(y+4\right)^2=1$ *qui est l'équation d'un cercle de centre* $(3,-4)$ *et de rayon* 1.

Exercice 2.29 ♡

Soient $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* $\Omega(2;-1)$ *et de rayon* $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *et* $\mathscr{D}$ *la droite d'équation* $2x+y=0$. *Déterminer les droites qui sont tangentes à* $\mathscr{C}$ *et parallèles à* $\mathscr{D}$.

Solution : *Un droite* $\mathscr{D}'$ *parallèle à* $\mathscr{D}$ *a une équation cartésienne de la forme* $2x+y+c=0$ *avec* $c\in\mathbb{R}$. *Si de plus* $\mathscr{D}'$ *est tangente à* $\mathscr{C}$ *alors* $d\left(\omega,\mathscr{D}'\right)=\sqrt{5}/2$ *ce qui amène :* $|3+c|/\sqrt{5}=\sqrt{5}/2$ *et donc :* $c=1/2$ *ou* $c=11/2$. *La droite* $\mathscr{D}'$ *est donc celle d'équation cartésienne :* $\boxed{2x+y+1/2=0}$ *ou* $\boxed{2x+y+11/2=0}$. *Réciproquement, ces deux droites sont solutions du problème.*

Exercice 2.30 ♡♡

On considère le cercle d'équation

$$\mathscr{C}\ :x^2+y^2+x-3y-3=0$$

et le point $A\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$. *Une droite passant par* A *est tangente au cercle* $\mathscr{C}$ *au point* M. *Calculer la longueur* AM.

Solution : *Le cercle est de centre* $\Omega\begin{vmatrix}-1/2\\3/2\end{vmatrix}$ *et de rayon* R *où* $R^2=11/2$. *Puisque* $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{AM}=0$, *d'après le théorème de Pythagore,* $A\Omega^2=AM^2+R^2$. *On en tire* $AM=3$.

Exercice 2.31 ♡♡

On considère le cercle d'équation

$$\mathscr{C}:\ x^2+y^2+10x-2y+6=0$$

et la droite d'équation

$$\mathscr{D}:\ 2x+y-7=0$$

Écrire les équations cartésiennes des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ *et parallèles à la droite* $\mathscr{D}$.

Solution : *Le cercle est de centre* $\Omega\begin{vmatrix}-5\\1\end{vmatrix}$ *et de rayon* $R=2\sqrt{5}$. *Une droite parallèle à* $\mathscr{D}$ *a pour équation cartésienne*

$$\mathscr{D}_t\ :2x+y+t=0$$

Cette droite est tangente au cercle $\mathscr{C}$ *si et seulement si* $d(\Omega,\mathscr{D}_t)=R$, *c'est-à-dire si et seulement si* $|t-9|=10$. *On trouve deux valeurs de* t, $t_1=19$ *et* $t_2=-1$, *d'où les deux droites :*

$$2x+y+19=0 \text{ et } 2x+y-1=0$$

Exercice 2.32 ♡♡

On considère le cercle d'équation

$$\mathscr{C}:\ x^2+y^2+4x-6y-17=0$$

et la droite d'équation

$$\mathscr{D}:\ 5x+2y-13=0$$

Trouver l'équation cartésienne du diamètre de $\mathscr{C}$ *perpendiculaire à la droite* $\mathscr{D}$.

Solution : *Le cercle* $\mathscr{C}$ *a pour centre* $\Omega\begin{vmatrix}-2\\3\end{vmatrix}$ *et pour rayon* $R=\sqrt{30}$. *Le diamètre passe par* Ω *et celui recherché ne peut être verticale car il est perpendiculaire à* $\mathscr{D}$. *Il a donc pour équation cartésienne* $y-3=m(x+2)$, *c'est-à-dire*

$$\mathscr{D}_m\ : mx-y+(3+2m)=0$$

Un vecteur normal à $\mathscr{D}_m$ *est* $\overrightarrow{n_m}\begin{vmatrix}m\\-1\end{vmatrix}$ *et un vecteur normal à* $\mathscr{D}$ *est* $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix}5\\2\end{vmatrix}$. *Pour que les deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que* $\overrightarrow{n_m}.\overrightarrow{n}=0$, *c'est-à-dire* $m=2/5$. *On trouve donc l'équation du diamètre :*

$$\boxed{2x-5y+19=0}$$

Exercice 2.33 ♡♡

Tracer la courbe d'équation $y=-3+\sqrt{21-4x-x^2}$

Solution : *On doit avoir* $(y+3)^2=21-4x-x^2$, *c'est-à-dire*

$$(x+2)^2+(y+3)^2=25$$

On reconnaît un demi-cercle de centre $\Omega\begin{vmatrix}-2\\-3\end{vmatrix}$ *de rayon* $R=5$ *situé au dessus de la droite d'équation* $y=-3$.

Exercice 2.34 ♡♡

Déterminer les cercles de centre $\Omega\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$ *qui coupent la droite d'équation*

$$\mathscr{D}:\ 2x-5y+18=0$$

en deux points A, B *avec* $AB=6$.

Solution : *Il suffit de déterminer le rayon du cercle. En appelant* H *le projeté orthogonal de* Ω *sur* $\mathscr{D}$ *et en utilisant le théorème de Pythagore,*

$$R^2=\Omega H^2+(AB/2)^2$$

On calcule $\Omega H^2=29$, *puis* $R^2=38$. *L'équation du cercle est donc*

$$\boxed{(x-3)^2+(y+1)^2=38}$$

Exercice 2.35 ♡♡

Déterminer les équations de cercles tangents aux deux droites d'équation $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$ *et dont le centre se trouve sur la droite d'équation* $2x+y=0$.

Solution : *Si l'on note* $\Omega\begin{vmatrix}a\\-2a\end{vmatrix}$ *le centre du cercle, il faut que* $d(\Omega,\mathscr{D}_1)=d(\Omega,\mathscr{D}_\in)$, *ce qui donne* $10a+10=-10a+30$ *et l'on tire* $a=1$. *On trouve* $\Omega\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ *et le rayon du cercle vaut* 4.

Exercice 2.36 ♡♡

On considère le cercle d'équation

$$\mathscr{C}:\ x^2+y^2-6x+2y+5=0$$

Par le point $A\begin{vmatrix}4\\-4\end{vmatrix}$, *on mène deux tangentes au cercle. Calculer la distance* d *entre les points de tangence.*

Solution : Le cercle est de centre $\Omega\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$, de rayon $R = \sqrt{5}$. Une droite passant par A est d'équation $y + 4 = m(x - 4)$

$$\mathscr{D}_m \ : mx - y - 4(m+1) = 0$$

En écrivant que $d(\Omega, \mathscr{D}_m) = R$, on trouve une équation du second degré en m :

$$2m^2 - 3m - 2 = 0$$

dont les racines sont $m_1 = 2$ et $m_2 = -1/2$. Comme $m_1 m_2 = -1$, les deux tangentes sont orthogonales, et en appelant C et D les points de tangence, ΩCAD est un carré de diagonale $\boxed{d = \sqrt{10}}$.

Exercice 2.37 ♡♡

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, déterminer les droites passant par l'origine, orthogonales et tangentes à un cercle de centre $\Omega\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Solution : Les équations de deux droites passant par l'origine sont de la forme $y = mx$ et $y = m'x$. Pour que ces deux droites soient orthogonales, il faut que $1 + mm' = 0$, c'est-à-dire $m' = -1/m$ ($m = 0$ ou $m' = 0$ correspondrait aux deux axes qui ne sont pas solution du problème). Un cercle de centre Ω est tangent à ces deux droites si et seulement si $d^2(\Omega, \mathscr{D}_m) = d^2(\Omega, \mathscr{D}_{-1/m})$ ce qu'on traduit par $\dfrac{(2m-1)^2}{m^2+1} = \dfrac{(2+m)^2}{m^2+1}$, c'est-à-dire $3m^2 - 8m - 3 = 0$, trinôme qui possède les deux racines $m_1 = 3$ et $m_2 = -1/3$. Les deux droites solutions sont de pente 3 et $-1/3$.

Exercice 2.38 ♡♡

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère deux points $A\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$.

1. Écrire l'équation cartésienne de la droite (AB).
2. On considère le cercle d'équation :
$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 37 = 0$$
Déterminer la distance entre la droite (AB) et ce cercle.

Solution :

1. On trouve $\boxed{\mathscr{D} : \ x + y - 2 = 0}$.
2. L'équation cartésienne réduite du cercle est
$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$$
C'est donc le cercle de centre $\Omega\begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$ et de rayon 2. La distance du centre Ω à la droite (AB) est donnée par :
$$d(\Omega, \mathscr{D}) = \frac{|4+5-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$
La distance du cercle à la droite est donc
$$\boxed{d(\mathscr{D}, \mathscr{D}) = d(\Omega, \mathscr{D}) - R = \frac{7 - 2\sqrt{2}}{2} > 0}$$

Exercice 2.39 ♡♡

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, pour $\lambda > 0$, on note $\mathscr{C}_\lambda$ le cercle de centre $\begin{vmatrix} \lambda \\ 0 \end{vmatrix}$ tangent à l'axe (Oy) et Γ_λ le cercle de centre $\begin{vmatrix} \lambda \\ \lambda \end{vmatrix}$ tangent à l'axe (Ox). Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de ces cercles, puis le lieu de ces points lorsque λ varie.

Solution :

$$\mathscr{C}_\lambda \ : (x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$$

$$\Gamma_\lambda \ : (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2$$

Un point $P\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ *appartient à ces deux cercles si ses coordonnées vérifient les deux équations. En formant la différence des deux équations, on tire* $y = \lambda/2$. *En reportant dans la première équation, on trouve*

$$4x^2 - 8\lambda x + \lambda^2 = 0$$

d'où $x_1 = \dfrac{(2+\sqrt{3})\lambda}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{(2-\sqrt{3})\lambda}{2}$. *d'où* $P_\lambda \dfrac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{vmatrix}$ *et* $Q_\lambda \dfrac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \end{vmatrix}$. *Les points décrivent les droites d'équations* $y = (2+\sqrt{3})x$ *et* $y = (2-\sqrt{3})x$.

Exercice 2.40 ♡♡

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. *On considère le point* $A = (a, a)$ $(a > 0)$.

1. *On considère la famille des cercles* $\mathscr{C}_t$ *passant par* A *et* O. *On désigne par* t *l'abscisse du centre de* $\mathscr{C}_t$. *Former l'équation cartésienne de* $\mathscr{C}_t$.
2. *Le cercle* $\mathscr{C}_t$ *coupe la droite* (Ox) *en* O *et un second point* K_t. *Former l'équation cartésienne de la tangente* D_t *à* $\mathscr{C}_t$ *en* K_t.
3. *Déterminer en fonction de* t *l'équation cartésienne de la normale à* D_t *passant par* A *puis les coordonnées de la projection orthogonale* H_t *de* A *sur* D_t.
4. *Reconnaître l'ensemble des points* H_t *lorsque* t *varie.*

Solution :

1. *Comme* $d(C_t, 0) = d(C_t, A)$, *on trouve*

$$(\mathscr{C}_t : x^2 + y^2 - 2tx + 2(t-a)y = 0$$

On aurait pu partir également d'une équation cartésienne générale d'un cercle passant par O *:*

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = 0$$

et dire que le point A *appartenait à ce cercle.*

2. $K_t\begin{vmatrix} 2t \\ 0 \end{vmatrix}$, $C_t\begin{vmatrix} t \\ a-t \end{vmatrix}$, *d'où l'équation cartésienne de la tangente :* $\overrightarrow{C_tK_t} \cdot \overrightarrow{K_tM} = 0$ *:*

$$tX + (t-a)Y - 2t^2 = 0$$

3. *Le vecteur* $n_t\begin{vmatrix} t \\ t-a \end{vmatrix}$ *est orthogonal à la droite* $\mathscr{D}_t$. *On écrit*

$$\begin{vmatrix} X-a & t \\ Y-a & t-a \end{vmatrix} = 0 \implies (t-a)(X-a) - t(Y-a) = 0.$$

On trouve

$$H_t\begin{vmatrix} t+a \\ t \end{vmatrix}$$

4. *C'est la droite d'équation* $y = x - a$.

Exercice 2.41 ♡♡

On considère le point $B = (a, 0)$ *du plan et un cercle* $\mathscr{C}$ *passant par* B *de centre* $P = (x_0, y_0)$.

1. *Écrire l'équation de* $\mathscr{C}$.
2. *On considère une droite passant par* O *d'équation*

$$y = mx$$

Écrire une condition nécessaire et suffisante sur m *pour que cette droite soit tangente à* $\mathscr{C}$.

3. *Trouver l'ensemble des points* P *tels que les deux tangentes à* $\mathscr{C}$ *passant par l'origine soient orthogonales.*

Solution :

1.
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_0-a)^2+y_0^2$$

2. *Cette droite est tangente au cercle si et seulement si* $d(\mathrm{P},\mathscr{D})=\mathrm{R}$*, ce qui donne*
$$\frac{|y_0-mx_0|}{\sqrt{1+m^2}}=(x_0-a)^2+y_0^2$$
On trouve la condition
$$[a^2+y_0^2-2ax_0]m^2-2x^0y_0m+(x_0-a)^2=0$$

3. *Les deux pentes* m_1*,* m_2 *doivent vérifier* $m_1m_2=1$*, c'est à dire puisqu'elles sont racines d'une équation du second degré :*
$$\frac{(x_0-a)^2}{a^2+y_0^2-2am_0}=-1$$
Après développement, on trouve $x_0^2=y_0^2$ *d'où*
$$(x_0-2a)^2+y_0^2=2a^2$$
C'est le cercle de centre $(2a,0)$ *de rayon* $\sqrt{2}a$*.*

Exercice 2.42 ♡♡ **Droite de Simson d'un triangle**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}=(\mathrm{O},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$*, on considère un triangle* (ABC) *avec* $\mathrm{A}\begin{vmatrix}0\\a\end{vmatrix}$*,* $\mathrm{B}\begin{vmatrix}b\\0\end{vmatrix}$ *et* $\mathrm{C}\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$*,* $(a,b,c\neq 0$ *et* $b\neq c)$*.*

1. *Déterminer l'équation du cercle* $\mathscr{C}$ *circonscrit au triangle* (ABC)*.*
2. *Écrire l'équation cartésienne de la droite* (AB) *et donner un vecteur* $\overrightarrow{n_1}$ *normal à cette droite.*
3. *Écrire l'équation cartésienne de la droite* (AC) *et donner un vecteur* $\overrightarrow{n_2}$ *normal à cette droite.*
4. *On considère un point* $\mathrm{M}\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ *du plan. On note* A' *le projeté orthogonal du point* M *sur la droite* (BC)*,* B' *le projeté orthogonal de* M *sur la droite* (AC) *et* C' *le projeté orthogonal de* M *sur la droite* (AB)*. Trouver les coordonnées des points* A'*,* B'*,* C'*.*
5. *Montrer que les points* A'*,* B'*,* C' *sont alignés si et seulement si le point* M *se trouve sur le cercle* $\mathscr{C}$*. Dans ce cas, la droite portant les points* A'*,* B' *,* C' *et* M *est* ***la droite de Simson*** *du triangle* ABC*.*

Solution :

1. *L'équation d'un cercle est de la forme* $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$*. En traduisant que* $\mathrm{A}\begin{vmatrix}0\\a\end{vmatrix}$*,* $\mathrm{B}\begin{vmatrix}b\\0\end{vmatrix}$*,* $\mathrm{C}\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$ *sont sur le cercle, on trouve le système*
$$\begin{cases} a\beta+\gamma &= -a^2\\ b\alpha+\gamma &= -b^2\\ c\alpha+\gamma &= -c^2\end{cases}$$
En résolvant, on en tire α*,* β*,* γ *et l'équation du cercle :*
$$\boxed{\mathscr{C}\ : x^2+y^2-(b+c)x-\frac{a^2+bc}{a}y+bc=0}$$

2. *Si* $\mathrm{M}\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$*, en notant* A' *le projeté de* M_0 *sur* (BC)*, on a* $\boxed{\mathrm{A}'\begin{vmatrix}x_0\\0\end{vmatrix}}$*. La droite* (AC) *a pour équation cartésienne :*
$$(\mathrm{AC})\ : ax+cy-ac=0$$

et un vecteur normal à cette droite est $\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix}$. *La droite* (AB) *a pour équation cartésienne*

$$(\mathrm{AB})\ : ax + by - ab = 0$$

et un vecteur normal à cette droite est $\overrightarrow{n_2}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$.

3. *Par un calcul d'intersection* ($\mathrm{B}' = \mathrm{M}_0 + \lambda\overrightarrow{n_1}$) *et* $\mathrm{B}' \in (\mathrm{AC})$, *on trouve que* $\boxed{\mathrm{B}'\begin{vmatrix} \dfrac{c(cx_0 - ay_0 + a^2)}{a^2+c^2} \\ \dfrac{a(-cx_0 + ay_0 + c^2)}{a^2+c^2} \end{vmatrix}}$.

   De même, en notant C' *le projeté orthogonal de* M_0 *sur* (AB), *on trouve que* $\boxed{\mathrm{C}'\begin{vmatrix} \dfrac{b(bx_0 - ay_0 + a^2)}{a^2+c^2} \\ \dfrac{a(-bx_0 + ay_0 + b^2)}{a^2+b^2} \end{vmatrix}}$

4. *Les trois points* $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}'$ *sont alignés si et seulement si* $\det(\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'},\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}) = 0$, *c'est-à-dire si et seulement si après calculs :*

$$x_0^2 + y_0^2 - (b+c)x_0 - \frac{a^2+bc}{a}y_0 + bc = 0$$

   c'est-à-dire si et seulement si le point M *est sur le cercle circonscrit au triangle* (ABC).

Exercice 2.43 ♡♡

On considère deux cercles $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$. *Déterminer le lieu du milieu des points* $\mathrm{M} \in \mathscr{C}$ *et* $\mathrm{M}' \in \mathscr{C}'$ *tels que les tangentes aux cercles en* M *et* M' *soient orthogonales.*

Solution : *Considérons le repère d'origine le centre du premier cercle et tel que le centre du deuxième cercle soit* $\mathrm{M}\begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}$.

L'équation des deux cercles est alors :

$$\begin{cases} \mathscr{C} : & x^2 + y^2 = r^2 \\ \mathscr{C}' : & (x-a)^2 + y^2 = \mathrm{R}^2 \end{cases}$$

le point M *est d'affixe* $z = re^{i\theta}$ *et le point* M' *d'affixe* $z' = a + \mathrm{R}e^{i\theta'}$. *Les tangentes en* M *et* M' *sont dirigées par les vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{vmatrix}$ *et* $\overrightarrow{u'}\begin{vmatrix} -\sin\theta' \\ \cos\theta' \end{vmatrix}$. *Les tangentes sont orthogonales si et seulement si*

$$\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' = \sin(\theta+\theta') = 0$$

c'est-à-dire $\theta' = k\pi - \theta$. *Alors le milieu de* $[\mathrm{MM}']$ *a pour affixe :*

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{2}\left[a + re^{i\theta} + \mathrm{R}e^{i(k\pi-\theta)}\right] = \frac{a}{2} + \left[\frac{r + i\varepsilon\mathrm{R}}{2}\right]e^{i\theta} = \frac{a}{2} + \rho e^{i(\alpha+\theta)}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ *et*

$$\left(\frac{r+i\varepsilon\mathrm{R}}{2}\right) = \rho e^{i\alpha}$$

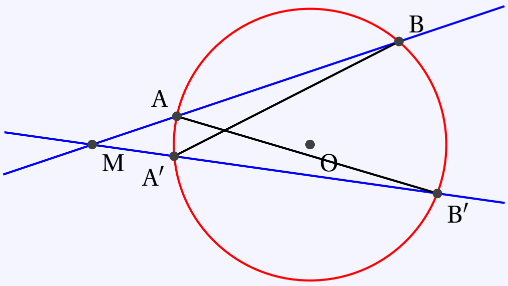
Lorsque θ *varie entre* 0 *et* 2π, *le point* P *décrit le cercle de centre* $\begin{vmatrix} a/2 \\ 0 \end{vmatrix}$ *(milieu des centres des deux cercles) et de rayon* $\rho = \dfrac{1}{2}\sqrt{r^2 + \mathrm{R}^2}$.

Exercice 2.44 ♡♡ **Puissance d'un point par rapport à un cercle**

Soit M *un point et* $\mathscr{C}$ *un cercle de centre* O. *Une droite* Δ *passant par* M *coupe* $\mathscr{C}$ *en deux points* A *et* B, *éventuellement confondus si* Δ *est tangente à* $\mathscr{C}$.

Démontrer que $\overline{\mathrm{MA}}.\overline{\mathrm{MB}}$ *ne dépend pas de la droite* Δ *choisie.*

Solution :



Soit I *le milieu de* [AB].

$$\begin{aligned}\overline{MA}.\overline{MB} &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\\ &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\\ &= MI^2+\overrightarrow{MI}.\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec 0}\right)+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}\\ &= MI^2-IA^2\end{aligned}$$

Maintenant, comme (OI) *est la médiatrice de* [AB], *on a :* $MI^2=MO^2+IO^2$ *et* $IA^2=OI^2+OA^2$. *D'où* $\overline{MA}.\overline{MB}=MO^2+IO^2-(OI^2+OA^2)=MO^2-R^2$.
Ce nombre s'appelle la puissance du point M *par rapport au cercle* $\mathscr{C}$.

Rappelons la méthode utilisée en classe de seconde :
Les triangles MBA′ *et* MAB′ *sont semblables. En effet ils ont l'angle* $\widehat{AMA'}$ *en commun. De plus les angles* $\widehat{MBA'}$ *et* $\widehat{MB'A}$ *sont inscrits dans le même cercle et interceptent le même arc* $\overset{\frown}{A'A}$. *Ils sont donc égaux.*
On en déduit :

$$\frac{MA'}{MA}=\frac{MB}{MB'}\qquad \text{d'où } MA.MB=MA'.MB'.$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut distinguer tous les cas de figure : M *à l'intérieur, à l'extérieur, sur le cercle* $\mathscr{C}$. *Triangles aplatis, etc.*

Exercice 2.45 ♡♡

On considère dans le plan euclidien un cercle de centre Ω *et de rayon* R. *Soit* M *un point du plan. On appelle* puissance *de* M *par rapport au cercle* C, *le réel*

$$\pi_C(M)=\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2-R^2$$

a. *On considère une droite passant par* M *et qui coupe le cercle* C *en deux points* A *et* B. *Montrer que*

$$\pi_C(M)=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

b. *On considère deux cercles non-concentriques* C *et* C′ *et l'on appelle* axe radical *l'ensemble des points* M *du plan vérifiant* $\pi_C(M)=\pi_{C}(M')$. *Montrer que cet ensemble est une droite orthogonale à la droite joignant les centres des cercles.*

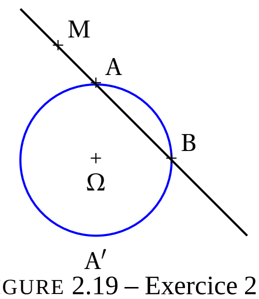


FIGURE 2.19 – Exercice 2.45

Solution :

a. *Introduisons le point* A′ *symétrique de* A *par rapport à* Ω. *En utilisant que* [AA′] *est un diamètre, donc que* $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA'}=0$, *calculons*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B})\\ &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}\\ &= (\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A'})\\ &= \|M\Omega\|^2+\overrightarrow{M\Omega}.(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega A'})+\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'}\\ &= \|M\Omega\|^2-R^2\\ &= \pi_C(M)\end{aligned}$$

b. *On se place dans un repère orthonormé dans lequel :*

$$(\mathrm{C}):\ x^2+y^2=\mathrm{R}^2 \quad (\mathrm{C}')\ :(x-d)^2+y^2=r^2$$

où $\Omega\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ *et* $\Omega'\begin{vmatrix}d\\0\end{vmatrix}$ *sont les centres des cercles de rayon* R *et* r. *On calcule*

$$\begin{aligned}\pi_{\mathrm{C}}(\mathrm{M})=\pi_{\mathrm{C}}(\mathrm{M}') &\Longleftrightarrow x^2+y^2-\mathrm{R}^2=(x-d)^2+y^2-r^2\\ &\Longleftrightarrow 2dx=\mathrm{R}^2+d^2-r^2\end{aligned}$$

On trouve l'équation d'une droite orthogonale à $(\Omega\Omega')$.

Exercice 2.46 ♡♡

Par le sommet A *d'un carré* ABCD, *on mène une droite qui rencontre la droite* (BC) *en* E *et la droite* (CD) *en* F. *Démontrer que la droite qui joint le point* F *au milieu* I *du segment* [BE] *est tangente au cercle inscrit au carré et rencontre la droite* (DE) *en un point* M *situé sur le cercle circonscrit au carré.*

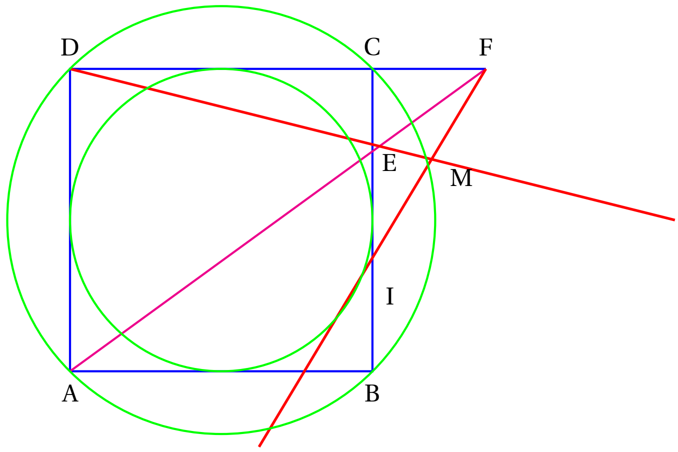


FIGURE 2.20 – Exercice 2.46

Solution : *On considère le repère orthonormé d'origine le centre du carré et d'axes parallèles aux axes du carré. Alors* $\mathrm{A}\begin{vmatrix}-a\\-a\end{vmatrix}$, $\mathrm{B}\begin{vmatrix}a\\-a\end{vmatrix}$, $\mathrm{C}\begin{vmatrix}a\\a\end{vmatrix}$, $\mathrm{D}\begin{vmatrix}-a\\a\end{vmatrix}$. *On considère la droite qui passe par* A, E, F. *En notant* m *sa pente, son équation cartésienne est* $y+a=m(x+a)$. *On en déduit les coordonnées de* $\boxed{\mathrm{E}\begin{vmatrix}a\\(2m-1)a\end{vmatrix}}$ *et* $\boxed{\mathrm{F}\begin{vmatrix}\frac{a(2-m)}{m}\\a\end{vmatrix}}$. *Puis les coordonnées de* $\boxed{\mathrm{I}\begin{vmatrix}a\\(m-1)a\end{vmatrix}}$.

Ensuite l'équation cartésienne de la droite (FI) *:*

$$\boxed{(\mathrm{FI})\ :m(m-2)x+2(1-m)y+a(m^2-2m+2)=0}$$

On calcule la distance de l'origine à cette droite :

$$d(\mathrm{O},(\mathrm{FI}))=\frac{a|m^2-2m+2|}{\sqrt{m^2(m-2)^2+4(m-1)^2}}$$

mais comme $(m^2-2m+2)^2=m^2(m-2)^2+4(1-m)^2=m^4-4m^3+8m^2-8m+4$, *on trouve que cette distance vaut* a *et par conséquent, la droite* (FI) *est bien tangente au cercle inscrit dans le carré. Cherchons ensuite les coordonnées du point* M. $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{DE}}\begin{vmatrix}2a\\2(m-1)a\end{vmatrix}}$, $\mathrm{M}=\mathrm{D}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ *d'où si* $\mathrm{M}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$,

$$\begin{cases}x &=(2\lambda-1)a\\ y &=[1+2(m-1)\lambda]\end{cases}$$

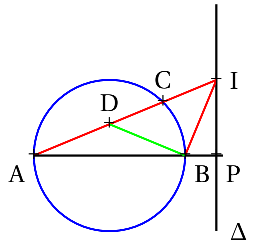
Comme $M \in (FI)$, *on tire* $\lambda = -\dfrac{m^2-2}{m^2-2m+2}$ *et ensuite*

$$\boxed{M \left| \begin{array}{l} -\dfrac{a(m^2-2)}{m^2-2m+2} \\ -\dfrac{a(m^2-4m+2)}{m^2-2m+2} \end{array} \right.}$$

On vérifie ensuite que $d(O,M)^2 = 2a^2$.

Exercice 2.47 ♡♡

On considère un cercle de centre O *et de rayon* 1. *On considère un diamètre* [AB] *de ce cercle et un point* C *sur le cercle différent de* A *et de* B *et non situé sur la médiatrice de* [AB]. *On appelle* D *le point de la droite* (AC) *qui se projette orthogonalement sur* (AB) *en* O. *La tangente au cercle au point* C *coupe la droite* (AB) *en un point* P. *Montrer que la droite* (AC), *la perpendiculaire à* [AB] *issue de* P *et la perpendiculaire à* (BD) *issue de* B *sont concourantes.*



Solution : *On considère un repère orthonormal direct centré en* O, *d'axe* (Ox) *parallèle à* [AB] *tel que* $A\left|\begin{array}{l}-1\\0\end{array}\right.$, $B\left|\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right.$. *Il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $C\left|\begin{array}{l}\cos\theta\\\sin\theta\end{array}\right.$. *Comme* C *n'est pas situé sur la médiatrice de* [AB], $\cos\theta \neq 0$. *On calcule une équation cartésienne de la droite* (AC) *dans ce repère et on trouve :*

$$\boxed{(AC)\ : \sin\theta x - (\cos\theta+1)y + \sin\theta = 0}$$

Puis on calcule les coordonnées de $\boxed{D\left|\begin{array}{c}0\\\tan\theta/2\end{array}\right.}$. *La tangente en* C *au cercle a pour équation cartésienne*

$$\boxed{T_\theta :\ \cos\theta x + \sin\theta y = 1}$$

et on trouve les coordonnées du point P : $\boxed{P\left|\begin{array}{c}1/\cos\theta\\0\end{array}\right.}$. *On note* I *l'intersection de la perpendiculaire à* (BD) *passant par* B *et de la perpendiculaire à* (AB) *passant par* P : $I = B + \lambda\vec{n}$ *où* $\vec{n}\left|\begin{array}{c}\tan\theta/2\\1\end{array}\right.$ *est orthogonal au vecteur* $\overrightarrow{BD}$. *En utilisant que* $x_I = 1/\cos\theta$, *on trouve que*

$$\boxed{I\left|\begin{array}{c}1/\cos\theta\\\tan\theta\end{array}\right.}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que ce point appartient à la droite (AC) *:*

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - (\cos\theta+1)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta = 0$$

Exercice 2.48 ♡♡

Soient [AB] *et* [PQ] *deux diamètres d'un cercle* $\mathscr{C}$. *Par le point* A *on mène la parallèle à* (PQ) *qui rencontre au point* C *le cercle et en* I *la droite joignant le point* Q *au symétrique* P′ *de* P *par rapport à* (AB). *Soit* H *le point de rencontre de la droite* (AQ) *et de la perpendiculaire à* (AB) *menée par le point* I. *Montrer que les points* P, C *et* H *sont alignés.*

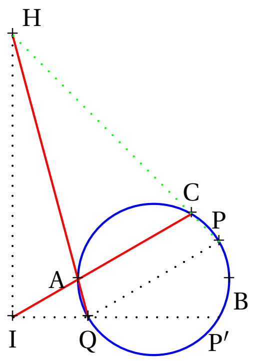


FIGURE 2.21 – Exercice 2.48

Solution : *On choisit un repère orthonormé en sorte que* $A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$, $P\left|\begin{matrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{matrix}\right.$, $Q\left|\begin{matrix}-\cos\theta\\-\sin\theta\end{matrix}\right.$, $P'\left|\begin{matrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{matrix}\right.$. *On cherche* C *sous la forme* $C = A + \lambda\overrightarrow{OP}\left|\begin{matrix}-1+\lambda\cos\theta\\\lambda\sin\theta\end{matrix}\right.$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Comme* $x_C^2 + y_C^2 = 1$, *on trouve* $\lambda = 2\cos\theta$ *et finalement* $\boxed{C\left|\begin{matrix}\cos(2\theta)\\\sin(2\theta)\end{matrix}\right.}$.
On cherche ensuite les coordonnées de $I = A + \lambda\overrightarrow{OP}$ *avec* $y_I = -\sin\theta$ *ce qui donne* $\lambda = -1$ *et* $\boxed{I\left|\begin{matrix}-(1+\cos\theta)\\-\sin\theta\end{matrix}\right.}$. *Cherchons ensuite les coordonnées de* $H = A + \lambda\overrightarrow{QA}$. *Puisque* $x_H = x_I$, *on trouve que* $\lambda = \dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$ *et ensuite* $\boxed{H\left|\begin{matrix}-(1+\cos\theta)\\\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{matrix}\right.}$.
Puisque

$$\overrightarrow{HQ}\left|\begin{matrix}\cos\theta(2\cos\theta+1)\\\sin\theta\cos\theta\dfrac{1-2\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{matrix}\right. \qquad \overrightarrow{HP}\left|\begin{matrix}2\cos\theta+1\\\sin\theta\dfrac{1-2\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{matrix}\right.$$

on voit que ces deux vecteurs sont colinéaires et donc les trois points P, Q, H *sont alignés.*

2.7.5 Coordonnées polaires

Exercice 2.49 ♡

Déterminer l'équation polaire d'un cercle $\mathscr{C}$ *de centre* (α,β) *et de rayon* $R > 0$.

Solution : *Une équation cartésienne de* $\mathscr{C}$ *est :* $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$, *ce qui donne, passant en coordonnées polaires* $\begin{cases}x = r\cos\theta\\ y = r\sin\theta\end{cases}$: $\boxed{r^2 - 2r(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) = R^2 - \alpha^2 - \beta^2}$.

Exercice 2.50 ♡

Déterminer une équation normale et une équation polaire des droites d'équation cartésienne :

1. $y = \sqrt{3}x$
2. $x + y + 2 = 0$
3. $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$

Solution :

1. *L'équation normale de la droite d'équation* $y = \sqrt{3}x$ *est* $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$. *Si* (r,θ) *est un couple de coordonnées polaires pour* (x,y), *on a :* $\begin{cases}x = r\cos\theta\\ y = r\sin\theta\end{cases}$ *et* $r\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}r\sin\theta = 0$, *ce qui amène :* $r\cos\frac{\pi}{3} + \theta = 0$ *c'est-à-dire* $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}\ [\pi]}$.
2. *De la même façon, l'équation normale de la droite d'équation* $x + y + 2 = 0$ *est* $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sqrt{2} = 0$, *ce qui s'écrit encore :* $x\cos\frac{\pi}{4} + y\sin\frac{\pi}{4} + \sqrt{2} = 0$. *On a donc :* $r\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = -\sqrt{2}$. *Une équation polaire de la droite est alors :* $r = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4} + \theta\right)}$, *c'est-à-dire :* $\boxed{r = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \theta\right)}}$

3. Par la même méthode, on trouve pour l'équation normale $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} = 0$ et pour l'équation polaire $\boxed{r = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}}$.

Exercice 2.51 ♡

Déterminer une équation normale et une équation polaire de la droite passant par $A(1,0)$ et $B(3,2)$.

Solution : Le vecteur $\overrightarrow{AB} = (2,2)$ dirige (AB) donc une équation cartésienne de (AB) est de la forme $x + y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. Comme A est élément de cette droite, $c = -1$ et $(AB) : x + y - 1 = 0$. Une équation normale de la droite est donc $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si (r,θ) est un couple de coordonnées polaires pour (x,y), on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}r\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire $r(\cos\pi/4\cos\theta + \sin\pi/4\sin\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $\boxed{r = \frac{\sqrt{2}}{2\cos(\theta-\pi/4)}}$

Exercice 2.52 ♡

Déterminer une équation polaire des cercles suivants donnés par leur équation cartésienne. En déduire leur centre et leur rayon :

1. $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$
2. $x^2 + y^2 - \sqrt{12}x + 2y = 0$

Solution :

1. En passant en coordonnées polaires, l'équation devient : $r^2 - 3r(\cos\theta + \sin\theta) = 0$ ce qui s'écrit aussi : $r = 3(\cos\theta + \sin\theta)$ ou $r = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$, c'est-à-dire : $\boxed{r = 3\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$. Son centre admet donc comme coordonnées polaires $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, c'est-à-dire comme coordonnées cartésiennes : $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et son rayon vaut : $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
2. De la même façon, on prouve que : $\boxed{r = 4\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}$ est une équation polaire du second cercle. Son rayon est donc 2 et son centre admet comme coordonnées polaires $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ c'est-à-dire comme coordonnées cartésiennes : $\left(\sqrt{3}, 1\right)$

Exercice 2.53 ♡♡

Dans le plan, on considère un cercle $\mathscr{C}$ et un point O de ce cercle. Déterminez l'ensemble des projections orthogonales du point O sur les tangentes au cercle $\mathscr{C}$.

Solution :

1. **Choix du repère.** Notons Ω le centre du cercle. Considérons le repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = \frac{O\Omega}{\|O\Omega\|}$. Dans ce repère, $\Omega\begin{vmatrix} R \\ 0 \end{vmatrix}$ et l'équation du cercle $\mathscr{C}$ s'écrit
$$(x-R)^2 + y^2 = R^2$$
2. Soit $\theta \in [0,2\pi]$ et $M_\theta\begin{vmatrix} a + R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{vmatrix}$ un point du cercle. L'équation cartésienne de la tangente au point M_θ au cercle s'écrit
$$(T_\theta) : \cos\theta(x-R) + \sin\theta\, y = R$$
Notons H_θ la projection orthogonale du point O sur la droite T_θ. Puisque le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix}$ dirige la normale en M_θ, $H_\theta = O + \lambda\overrightarrow{n}$. Comme le point H appartient à la droite T_θ, on trouve $\lambda = R(1+\cos\theta)$, on obtient les coordonnées polaires du point H_θ :
$$\rho = R(1+\cos\theta)$$
On reconnaît une cardioïde (voir la section 6.3.3 page 246).

2.7.6 Lignes de niveaux

Exercice 2.54 ♡♡

Soient deux points distincts du plan A *et* B *et soit* k *un réel. Étudier l'ensemble des points* M *du plan tels que* $MA^2 - MB^2 = k$.

Indication 2.8 : On pourra considérer I *le milieu de* [AB].

Solution : *On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned} & MA^2 - MB^2 = k \\ \iff & \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = k \\ \iff & -\overrightarrow{AB}.\left(2\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\overrightarrow{0} \text{ car I est le milieu de } [AB]}\right) = k \\ \iff & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = \frac{k}{2} \end{aligned}$$

et, appliquant le cours, M *est élément de la droite normale à* $\overrightarrow{AB}$ *passant par le point* P *tel que :* $\overrightarrow{IP} = \frac{\alpha \overrightarrow{AB}}{2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.

Exercice 2.55 ♡♡

Soient A *et* B *deux points du plan non nécessairement distincts et soit un réel* k. *Étudier l'ensemble* $\mathscr{C}_k$ *des points* M *du plan tels que*

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k.$$

Solution : *Si* A *et* B *sont confondus, alors l'égalité* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ *s'écrit* $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = k$ *et* $\mathscr{C}_k$ *est le cercle de rayon* $\sqrt{k}$ *et de centre* A *si* $k > 0$, $\mathscr{C}_k$ *est réduit au point* A *si* $k = 0$ *et* $\mathscr{C}_k = \varnothing$ *si* $k < 0$. *Supposons que* A *et* B *sont distincts. Soit* I *le milieu de* [AB]. *On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \\ \iff & \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = k \\ \iff & \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}.\left(\underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\overrightarrow{0} \text{ car I est le milieu de } [AB]}\right) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = k \\ \iff & \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 = k \\ \iff & \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 = k + \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, notant $R = k + \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2$, $\mathscr{C}_k$ *est le cercle de centre* I *et de rayon* $\sqrt{R}$ *si* $R > 0$, $\mathscr{C}_k = \{I\}$ *si* $R = 0$ *et* $\mathscr{C}_k = \varnothing$ *si* $R < 0$.

Exercice 2.56 ♡♡

Soient A *et* B *deux points distincts du plan,* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs distincts de plan. Déterminer les points* M *du plan tels que :*

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{v}.$$

Solution : *On a :*

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{v} \\ \iff & \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \cdot \overrightarrow{v} \\ \iff & \overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. *Appliquant le cours, l'ensemble des points* M *du plan vérifiant* $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{v}$ *est la droite de vecteur normal* $\overrightarrow{w}$ *passant par le point* P *tel que :* $\overrightarrow{AP} = \frac{\alpha \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}$.

Exercice 2.57 ♡♡

Soient A *et* B *deux points distincts du plan et* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur non nul. Déterminer les points* M *tels que*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{BM}=0.$$

Solution : *Notons* I *le milieu de* [AB].

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{BM}=0 \\ \iff \quad & \overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)+\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right)=0 \\ \iff \quad & \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{IM}=0 \text{ car I est le milieu de } [AB] \end{aligned}$$

Par conséquent l'ensemble recherché est la droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ *passant par* I. *Remarquons que cette exercice est un cas particulier du précédent dans le cas où* $\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{u}$.

Exercice 2.58 ♡♡

Soient A *et* B *deux points distincts du plan et* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur non nul. Déterminer les points* M *tels que*

$$\mathrm{d}et(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})+\mathrm{d}et(\overrightarrow{u},\overrightarrow{BM})=0.$$

Solution : *Notons* I *le milieu de* [AB].

$$\begin{aligned} & \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})+\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{BM})=0 \\ \iff \quad & \det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)+\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right)=0 \\ \iff \quad & \det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{IM}\right)=0 \text{ car I est le milieu de } [AB] \end{aligned}$$

et l'ensemble recherché est la droite dirigée par $\overrightarrow{u}$ *et passant par* I.

Chapitre 3

Géométrie élémentaire de l'espace

Pour bien aborder ce chapitre

De la même façon que dans le chapitre consacré à la géométrie plane 2, ce chapitre a pour vocations de vous familiariser avec le calcul algébrique et de vous donner des représentations pour les objets étudiés dans les chapitres 23 et 24 d'algèbre linéaire.
Là encore, on pourra passer dans une première lecture les démonstrations qui ne sont pas marquées par un ♡ et se focaliser sur les autres parties.

3.1 Préambule

Dans tout ce chapitre on notera $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

De la même façon que dans le plan, on peut additionner les vecteurs de l'espace ainsi que les multiplier par des scalaires réels. Pour résumer l'ensemble des propriétés de cette addition et de cette multiplication, qui sont les mêmes que pour les vecteurs du plan, on dit que le triplet $(\mathscr{V},+,.)$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3.1.1 Combinaisons linéaires de vecteurs, droites et plans dans l'espace

DÉFINITION 3.1 ♡ **Droite vectorielle, droite affine**

– Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace. On appelle *droite vectorielle engendrée (ou dirigée) par* $\overrightarrow{u}$ l'ensemble D des **vecteurs** de l'espaces colinéaires à $\overrightarrow{u}$:

$$\mathrm{D} = \left\{\overrightarrow{v} \in \mathscr{V} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}\right\}$$

– Soient A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace. La *droite affine passant par le point* A *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble $\mathscr{D}$ des **points** M de l'espace tel que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires :

$$\mathscr{D} = \left\{\mathrm{M} \in \mathscr{E} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda \overrightarrow{u}\right\}$$

Remarque 3.1 Se donnant deux points distincts A et B de l'espace, la droite de l'espace passant par les points A et B est la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

DÉFINITION 3.2 ♡ **Combinaison linéaire de deux vecteurs**
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. On dit que $\overrightarrow{w}$ est *combinaison linéaire* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si il existe deux réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{w}$.

DÉFINITION 3.3 ♡ **Plan Vectoriel, plan affine**

– Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** de l'espace $\mathscr{V}$. On appelle *plan vectoriel engendré (ou dirigé) par les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ l'ensemble, noté $\mathscr{P}$, des vecteurs de $\mathscr{V}$ qui sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\mathscr{P} = \left\{\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

– Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** de l'espace $\mathscr{V}$ et $A \in \mathscr{E}$ un point de l'espace. On appelle *plan affine engendré (ou dirigé) par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par* A l'ensemble, noté $\mathscr{P}$, des points M de $\mathscr{E}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\mathscr{P} = \left\{ M \in \mathscr{E} \mid \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \right\}.$$

Remarque 3.2

– Avec les notations précédentes : M est élément du plan affine passant par A et engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est élément du plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\mathscr{P}$.
– Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base de $\mathscr{P}$.
– Le triplet $(A, \vec{u}, \vec{v})$ forme un repère de $\mathscr{P}$.
– On peut aussi définir un plan affine $\mathscr{P}$ en se donnant trois points non alignés A, B et C de $\mathscr{E}$. On définit le plan affine passant par ces trois points comme étant le plan affine passant par A et engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

DÉFINITION 3.4 ♡ **Vecteur normal**
Un vecteur est dit *normal à un plan $\mathscr{P}$* si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

Remarque 3.3

– Se donner un plan vectoriel revient à se donner un vecteur normal à ce plan.
– Se donner un plan affine revient à se donner un vecteur normal à ce plan et un point de ce plan.

3.1.2 Vecteurs coplanaires, bases

DÉFINITION 3.5 ♡ **Vecteurs coplanaires**
Trois vecteurs non nuls sont *coplanaires* si l'un des trois est élément du plan engendré par les deux autres (ou ce qui est équivalent si l'un de trois est combinaison linéaire des deux autres).

Remarque 3.4 En prenant la négation de ce qui précède : trois vecteurs sont non coplanaires si et seulement si on ne peut écrire aucun des trois comme combinaison linéaire des deux autres (on dit qu'ils sont linéairement indépendants).

DÉFINITION 3.6 ♡ **Base de l'espace**
Un triplet de vecteurs de $\mathscr{V}$: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une *base* de $\mathscr{V}$ si il est formé de trois vecteurs non coplanaires.

PROPOSITION 3.1 ♡ **Coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace**
Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathscr{V}$. Tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathscr{V}$ s'exprime comme une combinaison linéaire unique des 3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathscr{V}, \quad \exists!(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

Le triplet (α,β,γ) est appelé *coordonnées* de $\vec{x}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On notera :

$$\vec{x}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right. \text{ ou } \vec{x}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \text{ ou aussi } \vec{x}(\alpha,\beta,\gamma)$$

Démonstration

– *Soit $\mathscr{P}$ le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit $\overrightarrow{m_0}$ le projeté du vecteur $\vec{m}$ sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\vec{w}$. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{m} = \overrightarrow{m_0} + \gamma\vec{w}$. Comme $\overrightarrow{m_0}$ est élément du plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{m_0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Donc $\vec{m} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.*
– *Ce triplet est unique : Si il existe un autre triplet $(\alpha',\beta',\gamma') \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $\vec{m} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}$ alors $(\alpha-\alpha')\vec{u} + (\beta-\beta')\vec{v} + (\gamma-\gamma')\vec{w} = \vec{0}$. Supposons qu'un des trois : $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ ne soit pas nul, par exemple $\alpha-\alpha'$, alors*

$$\vec{u} = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}\vec{v} + \frac{\gamma-\gamma'}{\alpha-\alpha'}\vec{w}$$

et $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et est donc élément du plan engendré par ces deux vecteurs, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ. Le triplet (α,β,γ) est donc unique.

DÉFINITION 3.7 ♡ **Base orthogonale, orthonormale**
Soit $\mathscr{B}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ une base de $\mathscr{V}$. Si les vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ sont deux à deux orthogonaux, on dit que la base $\mathscr{B}$ est *orthogonale*. Si ils sont de plus unitaires, on dit que $\mathscr{B}$ est *orthonormale*.

3.1.3 Orientation de l'espace, base orthonormale directe

Comme on l'a vu dans le chapitre 2, il est important, pour pouvoir définir certaines notions ou résoudre certains problèmes, de savoir orienter l'angle formé par deux vecteurs donnés. Dans le cas du plan, il est facile de fixer cette orientation. Il suffit de décider, entre le sens horaire et le sens trigonométrique, quel sera le sens positif. Dans le cas de l'espace, les choses sont plus compliquées. Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ de l'espace non colinéaires et nommons $\mathscr{P}$ le plan vectoriel qu'ils engendrent. Ce plan sépare l'espace en deux demi espaces $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. Supposons que chacune de ces deux parties contient un « observateur » du plan $\mathscr{P}$ nommé $\mathscr{O}_1$ pour $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{O}_2$ pour $\mathscr{E}_2$. Chacun de ces deux observateurs peut orienter le plan $\mathscr{P}$ mais le sens trigonométrique pour $\mathscr{O}_1$ correspond au sens horaire pour $\mathscr{O}_2$ et le sens horaire pour $\mathscr{O}_1$ correspond au sens trigonométrique pour $\mathscr{O}_2$. L'orientation d'un plan dans l'espace dépend donc de « la position d'où on l'observe ». Nous allons tout d'abord expliquer ce que signifie *orienter l'espace* puis nous en tirerons un procédé permettant d'*orienter les plans de l'espace*.

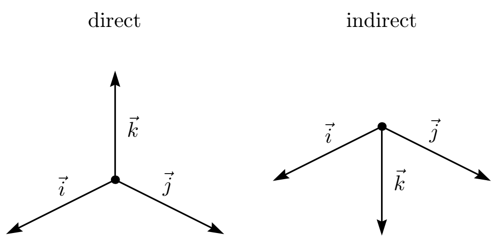


FIGURE 3.1 – Trièdre direct, trièdre indirect

Il existe plusieurs règles mnémotechniques pour fixer une orientation de l'espace. Parmi celles ci, donnons celle dite « du bonhomme d'ampère ».

Considérons $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ un repère orthonormal de l'espace. Soient I, J et K des points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{k}$. On considère un « observateur » placé les pieds en O, la tête en K et qui a le point I devant lui.

Par convention, on dit que :

- le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ est *direct* si l'observateur a le point J à sa gauche. On dit aussi que la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ est *directe*.
- le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ est *indirect* si l'observateur a le point J à sa droite. On dit aussi que la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ est *indirecte*.

Choisir une orientation de l'espace, c'est choisir de travailler avec les repères directs, ou avec les repères indirects. Si on fixe un repère dans l'espace, on choisit une orientation.

Remarque 3.5 Considérant une base de l'espace $\mathscr{B}$:
- Si on échange deux vecteurs de $\mathscr{B}$, on change l'orientation de $\mathscr{B}$.
- Si on échange un des vecteurs de $\mathscr{B}$ avec son opposé, on change l'orientation de $\mathscr{B}$.
- Si on effectue une permutation circulaire sur les éléments de $\mathscr{B}$ on ne change pas son orientation.

DÉFINITION 3.8 ♡ **Orientation d'un plan dans l'espace**
Étant donnés un plan $\mathscr{P}$ et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à ce plan, il existe une unique orientation du plan $\mathscr{P}$ telle que pour toute base orthonormale directe $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de ce plan, le triplet $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{n}\right)$ forme une base orthonormale directe de $\mathscr{E}$. On dit que le *plan $\mathscr{P}$ est orienté par $\overrightarrow{n}$*.

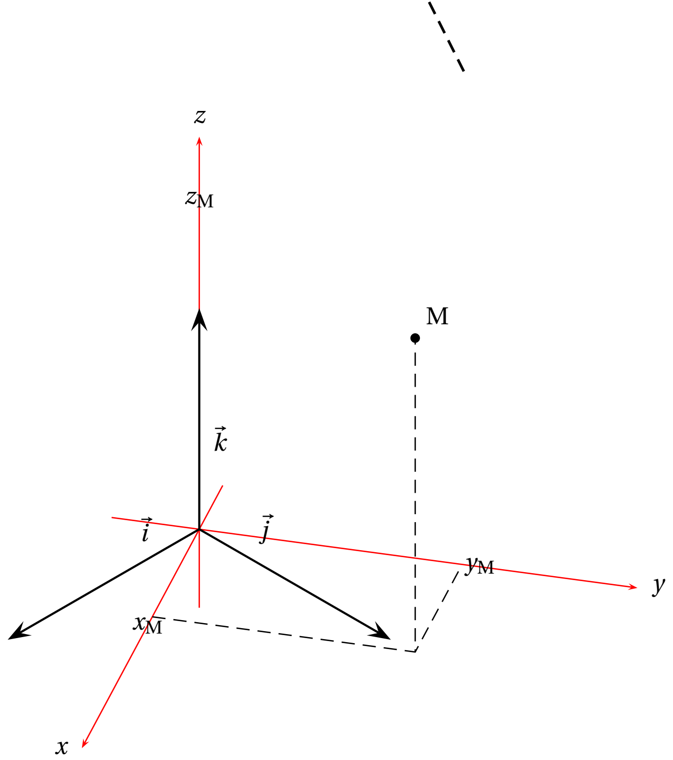


FIGURE 3.2 – Coordonnées cartésiennes

3.2 Mode de repérage dans l'espace

3.2.1 Coordonnées cartésiennes

Définitions

DÉFINITION 3.9 ♡ **Repère de l'espace**
On dit que le quadruplet $\mathscr{R}(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathscr{E} \times \mathscr{V}^3$ est un *repère de l'espace* $\mathscr{E}$ si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathscr{V}$. O est appelé origine du repère $\mathscr{R}$.

- Le repère $\mathscr{R}$ est dit *orthogonal* si et seulement si la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthogonale.
- Le repère $\mathscr{R}$ est dit *orthonormal* si et seulement si la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormale.

PROPOSITION 3.2 ♡ **Coordonnées d'un point dans un repère cartésien**
Soit $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère cartésien de l'espace. Soit $M \in \mathscr{E}$ un point de l'espace. Il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$. Ce triplet s'appelle les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$. On le note :

$$M \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \text{ ou } M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ ou aussi } M(\alpha, \beta, \gamma)$$

Démonstration *C'est une conséquence directe de la proposition 3.1*

Remarque 3.6 La donnée d'un repère $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$ permet de construire l'application :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ M & \longmapsto & \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

où (α, β, γ) sont les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$. Cette application est bijective et permet d'identifier $\mathscr{E}$ et $\mathbb{R}^3$. De même, on peut identifier $\mathscr{V}$ et $\mathbb{R}^3$.

Calcul algébrique avec les coordonnées

PROPOSITION 3.3 ♡ **Calculs avec les coordonnées**
Soit $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère cartésien de l'espace. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ des vecteurs de coordonnées, dans $\mathscr{R}$:

$$\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u'}\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix}$$

Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Les coordonnées du vecteur $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u'}$ sont :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u'}\begin{vmatrix}\alpha x + \beta x'\\ \alpha y + \alpha' y'\\ \alpha z + \alpha' z'\end{vmatrix}}$$

Démonstration ♡ *Par définition, on a :* $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ *et* $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$. *Par conséquent :*

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u'} = \left(\alpha x + \beta x'\right)\overrightarrow{i} + \left(\alpha y + \alpha' y'\right)\overrightarrow{j} + \left(\alpha z + \alpha' z'\right)\overrightarrow{k}$$

ce qui prouve le résultat.

Norme d'un vecteur, distance entre deux points dans un repère orthonormé

DÉFINITION 3.10 ♡ **Norme d'un vecteur**
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathscr{V}$ possédant $\overrightarrow{AB}$ comme représentant dans $\mathscr{V}$ où $A, B \in \mathscr{E}$. On appelle norme de $\overrightarrow{u}$ et on note $\|\overrightarrow{u}\|$ la longueur AB.

PROPOSITION 3.4 ♡ **Expression de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormal**
Soit $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère *orthonormal* de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $\overrightarrow{u}\,(x, y, z)$ dans la base associée à ce repère. On a :

$$\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Démonstration ♡ *Soit* $M \in \mathscr{E}$ *tel que* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. *Soient :*
- H *le projeté orthogonal de* M *sur le plan horizontal :* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
- I *le point de* (Ox) *donné par :* $\overrightarrow{OI} = x\overrightarrow{i}$.
- J *le point de* (Oy) *donné par :* $\overrightarrow{OI} = y\overrightarrow{j}$.

Par définition du projeté orthogonal, le triangle OMH *est rectangle en* H. *De plus, comme le repère* $\mathscr{R}$ *est orthonormal, le triangle* OIH *est rectangle en* I. *Par application du théorème de Pythagore dans ce triangle, on a*

$$OH^2 = OI^2 + IH^2.$$

Par application du même théorème dans le triangle OMH, *on a aussi*

$$OM^2 = OH^2 + HM^2.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} OM^2 &= OI^2 + IH^2 + HM^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 3.5 ♡
Soient $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère *orthonormal* de l'espace, $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$ des points de l'espace alors

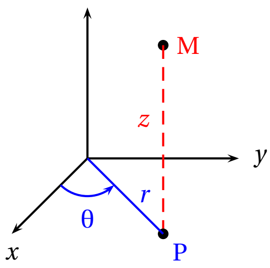
$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Démonstration ♡ *Les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *sont*

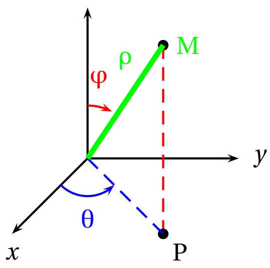
$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\\ z_B - z_A\end{vmatrix}$$

Si on applique à ce vecteur la formule précédente, on obtient le résultat escompté.

3.2.2 Coordonnées cylindriques et sphériques



(a) Coordonnées cylindriques



(b) Coordonnées sphériques

FIGURE 3.3 – Coordonnées cylindriques et sphériques

`Multimédia : Animation: on déplace un point dans l'espace et on représente géométriquement ses coordonnées cartésiennes et sphériques/cylindriques`

DÉFINITION 3.11 ♡ **Système de coordonnées cylindriques**
Soient :
- $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère *orthonormal* de l'espace
- $M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ un point de $\mathscr{E}$.
- P le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) muni du repère orthonormal $\mathscr{R}_0\left(P, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On appelle *système de coordonnées cylindriques* de M par rapport à $\mathscr{R}$ tout triplet de réels (r, θ, z) tel que

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}(\theta) + z\overrightarrow{k}$$

où :
– (r, θ) est un système de coordonnées polaires pour P relativement à $\mathscr{R}_0$.
- r est le réel positif tel que $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u}(\theta)$
- z est la cote de M dans $\mathscr{R}$.

PROPOSITION 3.6 ♡ **Lien entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes**
Soit $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace, M un point de l'espace de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans $\mathscr{R}$ et de coordonnées cylindriques par rapport à $\mathscr{R}$ (r, θ, z). On a :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Démonstration ♡ *Soit M un point de l'espace de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans $\mathscr{R}$. Soit P le projeté orthogonal de M sur le plan horizontal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et (ρ, θ) un système de coordonnées polaires pour P par rapport au repère orthonormal direct $\mathscr{R}_0\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Avec $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$, on a $\overrightarrow{OP} = \rho\overrightarrow{u}(\theta)$ et :*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ &= r\overrightarrow{u}(\theta) + z\overrightarrow{k} \\ &= r\cos\theta\,\overrightarrow{i} + r\sin\theta\,\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

DÉFINITION 3.12 ♡ **Système de coordonnées sphériques**
Soient $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère *orthonormal* de l'espace, M un point de l'espace et P son projeté orthogonal sur le plan horizontal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

On appelle *système de coordonnées sphériques* de M par rapport à $\mathscr{R}$ tout triplet de réels (r,θ,φ) tel que :

- $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.
- (ρ,θ) est un système de coordonnées polaires de P par rapport au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
- φ est **la** mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{k}, \overrightarrow{OM}}\right)$ élément de $[0,\pi]$.

φ est appelé la *colatitude* du point M et θ la *longitude*.

Remarque 3.7

– θ étant une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP}}\right)$, il est défini modulo 2π.
– L'angle $\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas orienté car on n'a pas choisi d'orientation du plan $(z\mathrm{OM})$. C'est pour cela que sa mesure est donnée modulo π.
– On utilise parfois la latitude : $\frac{\pi}{2} - \varphi$ à la place de la colatitude.

PROPOSITION 3.7 ♡ **Lien entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes**
Soient $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace, M un point de l'espace de coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans $\mathscr{R}$ et de coordonnées sphériques (r,θ,φ). On a :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

Démonstration ♡ *Soit* M *un point de l'espace de coordonnées cartésiennes* (x,y,z) *dans* $\mathscr{R}$ *et soit* P *le projeté orthogonal de* M *sur le plan horizontal* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. *Soit* (ρ,θ) *un système de coordonnées polaires pour* P *par rapport au repère orthonormal direct* $\mathscr{R}_0\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *et :* $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$. *On a :* $\overrightarrow{OP} = \rho\,\overrightarrow{u}(\theta)$ *et :*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= r\cos\varphi\,\overrightarrow{k} + r\sin\varphi\,\overrightarrow{u}(\theta) \\ &= r\cos\varphi\,\overrightarrow{k} + r\sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i} + r\sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 3.8 Si à la place de désigner la colatitude, φ désigne la latitude alors les formules précédentes deviennent :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}.$$

3.3 Produit scalaire

3.3.1 Définition

DÉFINITION 3.13 ♡ **Produit scalaire**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient O, A, B trois points de $\mathscr{E}$ tel que : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\mathscr{P}$ la plan contenant ces 3 points. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ leur produit scalaire dans le plan $\mathscr{P}$. En particulier, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, on a

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos\theta$$

où θ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ dans le plan $\mathscr{P}$.

Remarque 3.9

– Cette définition ne nécessite pas de définir une orientation dans la plan $\mathscr{P}$ et l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ ne doit pas nécessairement être orienté. En effet, si on change l'orientation du plan, l'angle θ est changé en son opposé ce qui laisse invariant son cosinus.
– $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$.

PROPOSITION 3.8 ♡
Deux vecteurs non nuls de $\mathscr{V}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Démonstration ♡ *C'est une conséquence de la même propriété mais dans le plan.*

3.3.2 Expression dans une base orthonormale

LEMME 3.9
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$ alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Démonstration *Soit $\mathscr{P}$ le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est élément de $\mathscr{P}$. Les propriétés du produit scalaire dans le plan permettent d'écrire*

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}.$$

Le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace coïncide avec celui dans le plan $\mathscr{P}$. On obtient donc la formule annoncée.

THÉORÈME 3.10 ♡♡♡ **Expression du produit scalaire dans une base orthonormale**
Soient $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace, (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{R}$. On a

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Démonstration ♡ *On a $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$ et $\|\overrightarrow{v}\|^2 = x'^2+y'^2+z'^2$. Par ailleurs*

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 &= (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2\\ &= x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2+z^2+2zz'+z'^2.\end{aligned}$$

Par application de la formule établie dans le lemme précédent, on obtient l'expression mentionnée pour le produit scalaire.

3.3.3 Propriétés du produit scalaire

PROPOSITION 3.11 ♡ **Symétrie du produit scalaire**
[] Le produit scalaire est *symétrique* : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{V}$ alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}}$$

Démonstration *C'est clair en passant en coordonnées. On peut aussi voir cette proposition comme une conséquence directe du fait que le produit scalaire dans le plan est symétrique, voir proposition 2.10 page 71.*

PROPOSITION 3.12 ♡ **Bilinéarité du produit scalaire**
Le produit scalaire est *bilinéaire*. Ce qui signifie que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ de $\mathscr{V}$ et pour tous réels λ_1, λ_2

$$\boxed{\overrightarrow{u}.(\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}) = \lambda_1\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{(\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{v}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{v}}$$

Démonstration *C'est clair en passant en coordonnées.*

PROPOSITION 3.13
Soit $\mathscr{B}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormale. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathscr{V}$ de coordonnées (x, y, z) dans $\mathscr{B}$. Alors

$$\boxed{x = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{i} \quad y = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j} \quad z = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{k}}$$

Démonstration *Laissée en exercice...*

3.4 Produit vectoriel

3.4.1 Définition du produit vectoriel

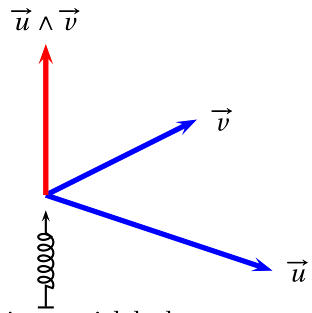


FIGURE 3.4 – Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace

DÉFINITION 3.14 ♡ **Produit vectoriel**
On suppose qu'on a choisi une orientation de l'espace. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace contenant ces deux vecteurs et $\vec{k}$ un vecteur normal **unitaire** à $\mathscr{P}$. Fixant $\vec{k}$, on fixe une orientation de $\mathscr{P}$. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$, donné par

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v})\,\vec{k}.$$

Remarque 3.10 **fondamentale** Il y a deux choix possibles pour un vecteur normal unitaire à $\mathscr{P}$: $\vec{k}$ ou $-\vec{k}$. Le produit vectoriel dépend donc à priori du choix fait au départ pour ce vecteur normal.
Notons $(\vec{u} \wedge_{\vec{k}} \vec{v})$ le produit vectoriel construit en ayant choisi le vecteur $\vec{k}$ et $(\vec{u} \wedge_{-\vec{k}} \vec{v})$ le produit vectoriel construit en ayant choisi le vecteur $-\vec{k}$. Notons aussi $\det_{\vec{k}}(\vec{u}, \vec{v})$ le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan $\mathscr{P}$ orienté par $\vec{k}$ et $\det_{-\vec{k}}(\vec{u}, \vec{v})$ le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan $\mathscr{P}$ orienté par $-\vec{k}$.
En choisissant le vecteur $-\vec{k}$ à la place du vecteur $\vec{k}$, on change l'orientation de $\mathscr{P}$, et donc le signe de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ainsi que le signe du déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$. Mais ce changement de signe est compensé par le changement du vecteur $\vec{k}$ en le vecteur $-\vec{k}$: $(\vec{u} \wedge_{\vec{k}} \vec{v}) = \det_{\vec{k}}(\vec{u}, \vec{v})\,\vec{k} = -\det_{-\vec{k}}(\vec{u}, \vec{v})(-\vec{k}) = (\vec{u} \wedge_{-\vec{k}} \vec{v})$.

COROLLAIRE 3.14 ♡ **Norme du produit vectoriel de deux vecteurs**
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{V}$:

$$\boxed{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = |\det(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right|}$$

Démonstration *En utilisant la définition du déterminant de deux vecteurs dans le plan et si $\vec{n}$ est un vecteur normal unitaire à un plan vectoriel contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on obtient :*

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \left\|\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\vec{n}\right\| = \left|\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right| \|\vec{n}\| = \left|\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right|.$$

Remarque 3.11
- $|\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})|$ ne dépend pas de l'orientation choisie pour le plan $\mathscr{P}$ contenant les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ est l'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

COROLLAIRE 3.15 ♡ **Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs via le produit vectoriel**
Deux vecteurs de $\mathscr{V}$ sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Démonstration *Considérons un plan $\mathscr{P}$ contenant ces deux vecteurs. Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant dans le plan $\mathscr{P}$ est nul.*

Remarque 3.12
- Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs orthogonaux (respectivement orthogonaux et unitaires) de $\mathscr{V}$. Alors $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{j})$ forme une base orthogonale (respectivement orthonormale) directe de l'espace.

– La droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

3.4.2 Interprétation géométrique du produit vectoriel

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de $\mathscr{V}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. On obtient $\overrightarrow{w}$ à partir de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en composant :

1. La *projection sur un plan $\mathscr{P}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$*. L'image de $\overrightarrow{v}$ par cette projection est un vecteur $\overrightarrow{v_1}$ de norme $\|\overrightarrow{v}\||\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|$. (Remarquons que cette dernière expression est indépendante de l'orientation de l'espace choisie).
2. La *rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan $\mathscr{P}$ orienté par le vecteur normal $\overrightarrow{u}$* qui transforme le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ en un vecteur $\overrightarrow{v_2}$ de même norme que $\overrightarrow{v_1}$ et directement orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
3. L'*homothétie de rapport* $\|\overrightarrow{u}\|$ qui transforme $\overrightarrow{v_2}$ en un vecteur $\overrightarrow{v_3}$ de norme $\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|$ directement orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. $\overrightarrow{v_3}$ est donc par définition égal à $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

3.4.3 Propriétés du produit vectoriel

PROPOSITION 3.16 ♡ **Le produit vectoriel est antisymétrique**
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont éléments de $\mathscr{V}$ alors

$$\boxed{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}$$

Démonstration *C'est une conséquence directe de l'antisymétrie du déterminant de deux vecteurs dans le plan.*

Interlude

Lors d'une première lecture, on pourra passer directement à la proposition 3.22 page 123. Ce qui suit permet de démontrer cette proposition mais n'est pas important pour la compréhension du chapitre.

DÉFINITION 3.15 **Application linéaire dans l'espace**
Soit $f : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$. On dit que f est *linéaire* si pour tout couple $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de $\mathscr{V}^2$ et tout réel λ,

$$f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) \quad \text{et} \quad f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u}).$$

PROPOSITION 3.17 **Caractérisation des applications linéaires**
Soit $f : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$. f est linéaire si et seulement si, pour tout couple $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de $\mathscr{V}^2$ et pour tout couple de réels (α,β)

$$\boxed{f(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + \beta f(\overrightarrow{v})}.$$

Démonstration *Laissée en exercice.*

PROPOSITION 3.18
Une application composée de deux applications linéaires est encore linéaire.

Démonstration *Laissée en exercice.*

DÉFINITION 3.16 **Application bilinéaire**
Une application $f : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}$ est dite *bilinéaire* si elle est linéaire en chacune de ses variables, ce qui signifie que pour tout vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$:

– si on fixe $\overrightarrow{u}$: $f(\overrightarrow{u},.) : \begin{cases} \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathscr{V} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \end{cases}$ est linéaire.

– si on fixe $\overrightarrow{v}$: $f(.,\overrightarrow{v}) : \begin{cases} \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathscr{V} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & f(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \end{cases}$ est linéaire.

Quelques exemples d'applications linéaires fort utiles pour ce qui vient...

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathscr{V}$. Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormale directe telle que $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires et telle que $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base du plan orthogonale à $\overrightarrow{u}$.

PROPOSITION 3.19
La projection orthogonale p sur le plan orthogonale à $\overrightarrow{u}$ est linéaire.

Démonstration *Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ alors $p(\overrightarrow{v})$ est le vecteur de coordonnées $(0, y, z)$ et $p(\overrightarrow{v'})$ est le vecteur de coordonnées $(0, y', z')$. Comme $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}'$ admet $(x+x', y+y', z+z')$ comme coordonnées, $p(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}')$ admet comme coordonnées $(0, y+y', z+z')$ qui sont aussi celles du vecteur $p(\overrightarrow{v}) + p(\overrightarrow{v}')$. Par conséquent, $p(\overrightarrow{v}) + p(\overrightarrow{v}') = p(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}')$.*
Soit λ un réel. Le vecteur $\lambda\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Les coordonnées de $p(\lambda\overrightarrow{v})$ sont donc $(0, \lambda y, \lambda z)$ qui sont exactement les coordonnées de $\lambda p(\overrightarrow{v})$. Donc $p(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda p(\overrightarrow{v})$.
On a prouvé que p est linéaire.

PROPOSITION 3.20
La rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan orienté $(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est linéaire.

Démonstration *Les vecteurs de ce plan sont ceux de coordonnées $(0, y, z)$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de ce plan. L'image par r de $\overrightarrow{v}$ est le vecteur de coordonnées $(0, -z, y)$. On prouve la linéarité de cette application en passant aux coordonnées, comme dans la proposition précédente.*

PROPOSITION 3.21
Soit k un réel non nul. L'homothétie h_k de rapport k, qui à un vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$ associe le vecteur $k\overrightarrow{v}$ est linéaire.

Démonstration *Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. On a*

$$h_k(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}) = k(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}) = k\overrightarrow{v} + k\overrightarrow{v'} = h_k(\overrightarrow{v}) + h_k(\overrightarrow{v'}).$$

Si λ est un réel, on a aussi

$$h_k(\lambda\overrightarrow{v}) = k(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda h_k(\overrightarrow{v})$$

ce qui prouve la linéarité de h.

Remarque 3.13
– En particulier l'homothétie h de rapport $k = \|\overrightarrow{u}\|$ est linéaire.
– Cette proposition est une reformulation du théorème de Thalès.

Ces trois exemples vont nous permettre de démontrer que le produit vectoriel est bilinéaire.

COROLLAIRE 3.22 ♡ **Le produit vectoriel est bilinéaire**
L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{V} \times \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathscr{V} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{cases}$$

est bilinéaire. Autrement dit, pour tout vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ de $\mathscr{V}$ et pour tout réels λ_1, λ_2

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge (\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}) = \lambda_1\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{(\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v}}.$$

Démonstration *Fixons $\overrightarrow{u}$ dans $\mathscr{V}$. L'application :*

$$\theta_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathscr{V} \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} \end{cases}$$

est linéaire comme composée des trois applications linéaires p, r et h. Pour montrer que φ est bilinéaire, il faut encore montrer que, pour $\overrightarrow{v}$ fixé dans $\mathscr{V}$ et pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u'}$ dans $\mathscr{V}$ et λ réel,

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v} \text{ et } (\lambda\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$$

Ces deux propriété découlent de l'antisymétrie du produit vectoriel et de la linéarité de $\theta_{-\overrightarrow{v}}$. Par exemple pour la première égalité, on procède ainsi

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}) \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}) = (-\overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}) = \theta_{-\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}) = \theta_{-\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u}) + \theta_{-\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u'}) = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v}$$

3.4.4 Expression dans une base orthonormale directe

THÉORÈME 3.23 ♡♡♡ **Expression du produit vectoriel dans une base orthonormale**

Soit $\mathscr{B}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormale directe. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de $\mathscr{V}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans $\mathscr{B}$. Les coordonnées (X, Y, Z) de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont données par :

$$X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \qquad X = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Autrement dit :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \begin{vmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{vmatrix}$$

Démonstration ♡ *On a :*

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}.$$

Utilisant la bilinéarité du produit vectoriel et les relations

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \quad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k} \quad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \quad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i} \quad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \quad \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

qui découlent du fait que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale directe, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right) \wedge \left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}.\right) \\
&= xx''\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} + xy'\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} + xz'\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} \\
&\quad + yx'\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} + yy'\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} + yz'\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} \\
&\quad + zx'\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} + zy'\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} + zz'\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} \\
&= xy'\overrightarrow{k} - xz'\overrightarrow{j} \\
&\quad - yx'\overrightarrow{k} + yz'\overrightarrow{i} \\
&\quad + zx'\overrightarrow{j} - zy'\overrightarrow{i} \\
&= (yz' - y'z)\overrightarrow{i} + (zx' - z'x)\overrightarrow{j} + (xy' - x'y)\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

3.5 Déterminant ou produit mixte

3.5.1 Définition

DÉFINITION 3.17 ♡ **Déterminant, produit mixte**

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathscr{V}$. On appelle *déterminant* ou *produit mixte* de ces trois vecteurs <u>le nombre réel</u>, noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ ou $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, et donné par :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$$

3.5.2 Expression dans une base orthonormale directe

THÉORÈME 3.24 ♡♡♡ **Expression du déterminant dans une base orthonormale directe**

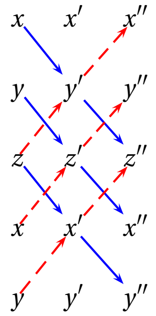
Soit $\mathscr{B}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormale directe de $\mathscr{V}$. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$ et soient (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') leurs coordonnées respectives dans cette base. Alors :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Démonstration ♡ *Il suffit de calculer le produit mixte de ces trois vecteurs en utilisant les formules vues pour calculer le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormale directe.*

Remarque 3.14

Le moyen mnémotechnique suivant, appelé *règle de Sarrus*, permet de calculer le déterminant de trois vecteurs assez facilement en additionnant les produits formés le long des flèches bleues et en soustrayant ceux formés le long des flèches rouges :



3.5.3 Propriétés du produit mixte

PROPOSITION 3.25 ♡ **Le produit mixte est antisymétrique**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$.

- On change le signe du produit mixte de trois vecteurs en permutant deux de ces trois vecteurs :

$$\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \quad (1)$$

$$\det(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \quad (2)$$

$$\det(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \quad (3)$$

- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = \det(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) \quad (4)$$

On résume ces trois propriétés en disant que le produit mixte est *antisymétrique*.

Démonstration ♡

- *Démontrons* (1) *:*

$$\begin{aligned}\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) &= (\vec{v}\wedge\vec{u}).\vec{w}\\ &= (-\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} \text{ par antisymétrie du produit vectoriel}\\ &= -(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}\\ &= -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\end{aligned}$$

- *Pour démontrer* (4)*, il faut se placer dans une base orthonormale directe de* $\mathscr{V}$ *et calculer, dans cette base, en utilisant la formule 3.24, les trois déterminants* $\det(\vec{v},\vec{w},\vec{u})$, $\det(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$, $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *et vérifier qu'ils sont égaux.*
- *Pour démontrer* (2)*, on peut remarquer que d'après* (4)*,* $\det(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = \det(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$ *et appliquer* (1).
- *Enfin d'après* (4) *et* (1)*,* $\det(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) = \det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

PROPOSITION 3.26 ♡ **Le produit mixte est alterné**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$. Si deux de ces trois vecteurs sont égaux alors le produit mixte de ces trois vecteurs $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est nul.

Démonstration ♡ *Partant de l'égalité* $\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$*, si* $\vec{u} = \vec{v}$*, on obtient* $\det(\vec{u},\vec{u},\vec{w}) = -\det(\vec{u},\vec{u},\vec{w})$ *ce qui amène* $\det(\vec{u},\vec{u},\vec{w}) = 0$.

DÉFINITION 3.18 **Application trilinéaire**

Une application $\varphi : \mathscr{V}^3 \to \mathbb{R}$ est dite *trilinéaire* si et seulement si :

- pour tout $(\vec{u},\vec{v})$ fixé dans $\mathscr{V}\times\mathscr{V}$, l'application : $\vec{w} \mapsto \varphi(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est linéaire.
- pour tout $(\vec{v},\vec{w})$ fixé dans $\mathscr{V}\times\mathscr{V}$, l'application : $\vec{u} \mapsto \varphi(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est linéaire.
- pour tout $(\vec{u},\vec{w})$ fixé dans $\mathscr{V}\times\mathscr{V}$, l'application : $\vec{v} \mapsto \varphi(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est linéaire.

PROPOSITION 3.27 ♡
Le produit mixte est trilinéaire.

Démonstration

- *Fixons $(\vec{u},\vec{v})$ dans $\mathscr{V}\times\mathscr{V}$ et montrons que l'application :* $\varphi : \vec{w}\mapsto \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *est linéaire. Soient* α, α' *deux scalaires et* $\vec{w}$, $\vec{w}'$ *deux vecteurs de* $\mathscr{V}$*. On a*

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha\vec{w}+\alpha'\vec{w}') &= \det(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}+\alpha'\vec{w}')\\ &= (\vec{u}\wedge\vec{v}).(\alpha\vec{w}+\alpha'\vec{w}')\\ &= \alpha(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}+\alpha'(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}' \text{ par linéarité du produit scalaire}\\ &= \alpha\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\alpha'\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}')\\ &= \alpha\varphi(\vec{w})+\alpha'\varphi(\vec{w}')\end{aligned}$$

- *Fixons maintenant* $(\vec{u},\vec{w})$ *dans* $\mathscr{V}\times\mathscr{V}$ *et montrons que l'application* $\varphi : \vec{v}\mapsto\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *est linéaire. Il suffit de remarquer que pour tout* $\vec{v}$ *dans* $\mathscr{V}$*, comme le produit mixte est antisymétrique,* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -\det(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$ *et que l'application* $\vec{v}\mapsto -\det(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$ *est, d'après le premier point, linéaire.*
- *On montre la linéarité de* $\vec{u}\mapsto\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *de la même façon.*

3.5.4 Interprétation géométrique

THÉORÈME 3.28 ♡ **Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul**
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$. Ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.

Démonstration ♡ *Si un des trois vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *est nul, le résultat est clair. On suppose donc désormais qu'aucun de ces trois vecteurs n'est nul.*

$\Rightarrow$ *Supposons que* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *sont coplanaires. Une des deux assertions suivantes est alors vraie :*

1. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires et on a donc* $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ *ce qui entraine que* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=0$.
2. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires et donc* $\vec{u}\wedge\vec{v}$ *est un vecteur orthogonal au plan engendré par* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*. Comme* $\vec{w}$ *est élément de ce plan,* $\vec{u}\wedge\vec{v}$ *est orthogonal à* $\vec{w}$ *et nécessairement :* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=0$

$\Leftarrow$ *Supposons que* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$*. Alors :*

1. *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires, il est clair que* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ *sont coplanaires...(ces trois vecteurs sont éléments du plan engendré par* $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$*.*
2. *sinon,* $\vec{u}\wedge\vec{v}$ *est un vecteur orthogonal au plan engendré par* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et comme* $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=0$*,* $\vec{w}$ *est aussi orthogonal à* $\vec{u}\wedge\vec{v}$ *et est donc nécessairement élément de ce plan.*

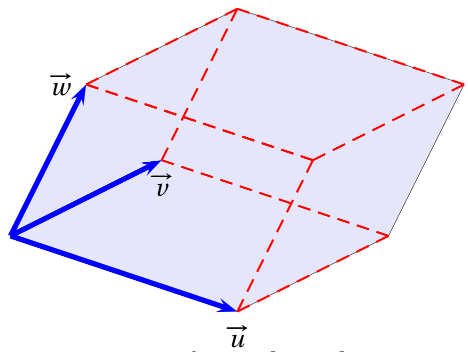


FIGURE 3.5 – Interprétation du produit mixte

THÉORÈME 3.29 ♡ **Interprétation du produit mixte en terme de volume**
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$. Notons $\mathcal{V}$ le volume du parallélépipède $\mathscr{P}$ construit à partir de ces 3 vecteurs. On a :

$$\boxed{\mathcal{V} = \left|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right|}$$

Démonstration ♡ *Si les trois vecteurs sont coplanaires, le résultat est évident. On suppose donc que ce n'est pas le cas. Soient* O, A, B *et* C *des points de l'espace tels que* $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ *et* $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$.

- *Soit* H *le projeté orthogonal de* C *sur la droite dirigée par* $\vec{u}\wedge\vec{v}$*.* OH *est la hauteur du parallélépipède* $\mathscr{P}$*.* OH *est donnée par :*

$$\mathrm{OC}\left|\cos(\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{w})\right| = \|\vec{w}\|\left|\cos(\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{w})\right|$$

- *Le parallélogramme formant la base de $\mathscr{P}$ est porté par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et son aire $\mathscr{A}$ est donnée par :*

$$\left|\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\right| = \|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|$$

Le volume $\mathscr{V}$ de $\mathscr{P}$ est donc donné par :

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \mathscr{A}\times \mathrm{OH}\\ &= \|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|\times\|\overrightarrow{w}\|\left|\cos\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\right|\\ &= \left|\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{w}\right|\\ &= \left|\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\right|\end{aligned}$$

3.6 Plans dans l'espace

3.6.1 Représentation paramétrique des plans

PROPOSITION 3.30 ♡♡♡ **Équation paramétrique d'un plan**
Soit $\mathscr{R}\left(\mathrm{O},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$. Soient : $\mathrm{A}\left(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A},z_\mathrm{A}\right)\in\mathscr{E}$, $\overrightarrow{u}\left(x_{\overrightarrow{u}},y_{\overrightarrow{u}},z_{\overrightarrow{u}}\right)$ et $\overrightarrow{v}\left(x_{\overrightarrow{v}},y_{\overrightarrow{v}},z_{\overrightarrow{v}}\right)$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient $\mathrm{M}\left(x,y,z\right)$ un point de l'espace et $\mathscr{P}$ le plan affine passant par A et engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a équivalence entre :

1. M est élément de $\mathscr{P}$
2. il existe $\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}$.
3. il existe $\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases}x=x_\mathrm{A}+\alpha x_{\overrightarrow{u}}+\beta x_{\overrightarrow{v}}\\ y=y_\mathrm{A}+\alpha y_{\overrightarrow{u}}+\beta y_{\overrightarrow{v}}\\ z=z_\mathrm{A}+\alpha z_{\overrightarrow{u}}+\beta z_{\overrightarrow{v}}\end{cases}$$

Le système

$$\boxed{\begin{cases}x=x_\mathrm{A}+\alpha x_{\overrightarrow{u}}+\beta x_{\overrightarrow{v}}\\ y=y_\mathrm{A}+\alpha y_{\overrightarrow{u}}+\beta y_{\overrightarrow{v}}\\ z=z_\mathrm{A}+\alpha z_{\overrightarrow{u}}+\beta z_{\overrightarrow{v}}\end{cases}}$$

est une *équation paramétrique* de $\mathscr{P}$.

Démonstration *Soit $\mathrm{M}\left(x,y,z\right)$ un point de l'espace. Supposons que M est élément du plan $\mathscr{P}$ alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Autrement dit, il existe des scalaires $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}$. En récrivant cette égalité avec des coordonnées, on obtient* $\begin{cases}x=x_\mathrm{A}+\alpha x_{\overrightarrow{u}}+\beta x_{\overrightarrow{v}}\\ y=y_\mathrm{A}+\alpha y_{\overrightarrow{u}}+\beta y_{\overrightarrow{v}}\\ z=z_\mathrm{A}+\alpha z_{\overrightarrow{u}}+\beta z_{\overrightarrow{v}}\end{cases}$.
Réciproquement, si les coordonnées du point $\mathrm{M}\left(x,y,z\right)$ vérifient le système précédentes, on montre que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}$ et donc que $\mathrm{M}\in\mathscr{P}$.

3.6.2 Représentation cartésienne

Pour tout ce paragraphe, on fixe un repère orthonormal direct $\mathscr{R}\left(\mathrm{O},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ de l'espace $\mathscr{E}$.

PROPOSITION 3.31 ♡
Soit $\mathscr{P}$ un plan affine de $\mathscr{E}$ Soit A un point de $\mathscr{P}$ et $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ un couple de vecteurs engendrant $\mathscr{P}$. On a équivalence entre :

1. le point M est élément de $\mathscr{P}$.
2. le produit mixte $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est nul.

Démonstration ♡ *Si $\mathrm{M}\in\mathscr{P}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires. On a alors nécessairement $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)=0$.*
Réciproquement, si $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)=0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires ce qui n'est possible que si le point M est dans le même plan que celui passant par A et engendré par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, c'est à dire $\mathscr{P}$ (car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires par hypothèse).

COROLLAIRE 3.32
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ trois points non alignés de l'espace $\mathscr{E}$. Alors $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$ est élément du plan affine $\mathscr{P}$ passant par A, B et C si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration *Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et d'exprimer le produit mixte avec les coordonnées de ces vecteurs.*

PROPOSITION 3.33 ♡♡♡ **Équation cartésienne d'un plan**

- Soit $\mathscr{P}$ un plan affine passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace $\mathscr{E}$ et admettant le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ comme vecteur normal alors une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est

$$\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$$

- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz = d$ où a, b, c, d sont des réels et où a, b, c ne sont pas tous nuls est un plan affine de vecteur normal $\boxed{\vec{n}(a, b, c)}$.

Démonstration

- M *est élément de $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et donc si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$. Exprimant cette dernière égalité avec les coordonnées des vecteurs considérés, on retrouve la formule proposée.*
- *Si $a \neq 0$, posons $A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$ sinon, si $b \neq 0$, posons $A\left(0, -\frac{d}{b}, 0\right)$ sinon on a forcément $c \neq 0$ et nous posons $A\left(0, 0, -\frac{d}{c}\right)$. Comme le point $M(x, y, z)$ vérifie l''équation $ax + by + cz = d$, on a $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ et donc* M *est un point du plan passant par* A *et de vecteur normal $\vec{n}$.*

DÉFINITION 3.19 ♡ **Équation normale d'un plan**
Soit $\mathscr{P}$ un plan affine d'équation $ax + by + cz = d$. Comme dit plus haut, le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Si ce vecteur est de plus unitaire, c'est à dire si

$$\|\vec{n}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

alors l'équation $ax + by + cz = d$ est appelée équation normale de $\mathscr{P}$.

Interprétation géométrique de l'équation normale

Soit $\mathscr{P}$ un plan et H le projeté orthogonal de l'origine O de $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{P}$. Posons : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$. Considérons les 3 angles non orientés :

$$\alpha = \left(\vec{i}, \vec{u}\right), \quad \beta = \left(\vec{j}, \vec{u}\right) \quad \text{et} \quad \gamma = \left(\vec{k}, \vec{u}\right)$$

On a donc

$$\cos\alpha = \vec{i}.\vec{u}, \quad \cos\beta = \vec{j}.\vec{u} \quad \text{et} \quad \cos\gamma = \vec{k}.\vec{u}$$

et $\vec{u}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Comme $\vec{u}$ est unitaire, on a aussi $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathscr{P} &\iff \overrightarrow{HM}.\vec{u} = 0 \\ &\iff \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH}\right).\vec{u} = 0 \\ &\iff \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} - h\vec{u}\right).\vec{u} = 0 \text{ où } h = \left\|\overrightarrow{OH}\right\| \\ &\iff \cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z = h. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité forme une équation normale de $\mathscr{P}$.

Position relative de deux plans

L'espace est ici encore rapporté à un repère orthonormal direct $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

DÉFINITION 3.20 ♡ **Plans parallèles**
Deux plans de l'espace sont *parallèles* si et seulement si ils admettent un vecteur normal non nul commun.

DÉFINITION 3.21 ♡ **Plans perpendiculaires**
Deux plans de l'espace sont *perpendiculaires* si et seulement si ils admettent des vecteurs normaux non nuls orthogonaux.

PROPOSITION 3.34 ♡ **Caractérisation de la perpendicularité ou du parallélisme de deux plans à partir de leurs équations cartésiennes respectives**
Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans d'équations cartésiennes respectives

$$ax+by+cz=d \quad \text{et} \quad a'x+b'y+c'z=d'.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n}\,(a,b,c)$ et $\overrightarrow{n}'\left(a',b',c'\right)$ sont donc, respectivement, des vecteurs normaux à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{P}'$.

1. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b \quad \text{et} \quad c' = \lambda c$$

2. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondues si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c \quad \text{et} \quad d' = \lambda d$$

3. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

Démonstration ♡

1. *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires ce qui est se traduit en termes de coordonnées par les* 3 *égalités ci dessus.*
2. *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondues si et seulement si, à la fois, ils sont parallèles et si ils ont un point commun* $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$. *D'après le point précédent, ceci est équivalent à*

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c \quad \text{et} \quad ax_A + by_A + cz_A - d = a'x_A + b'y_A + c'z_A - d' = 0$$

On obtient alors

$$(\lambda a - a)\, x_A + (\lambda b - b)\, y_A + (\lambda c - c)\, z_A - d + d' = 0$$

ou encore

$$(\lambda - 1)\left(ax_A + by_A + cz_A\right) - d + d' = 0$$

Et comme A *est élément de $\mathscr{P}$, on a aussi*

$$(\lambda - 1)\, d - d + d' = 0$$

Ce qui prouve que $d' = \lambda d$

3. *Les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si* $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 0$, *de quoi découle l'égalité à prouver quand on la transcrit en coordonnées.*

PROPOSITION 3.35 ♡
Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants alors leur intersection est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$.

Démonstration ♡ *Soit* A *un point de l'intersection des deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.*
Si le point M *est élément de $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ alors $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et à $\overrightarrow{n}'$. Par conséquent, $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ et* M *appartient à la droite passant par* A *dirigée par $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$.*
Réciproquement, supposons que M *appartient à la droite passant par* A *dirigée par $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et à $\overrightarrow{n}'$. Comme* A *est élément des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, nécessairement* M *est élément de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ et donc de $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$.*

3.6.3 Distance d'un point à un plan

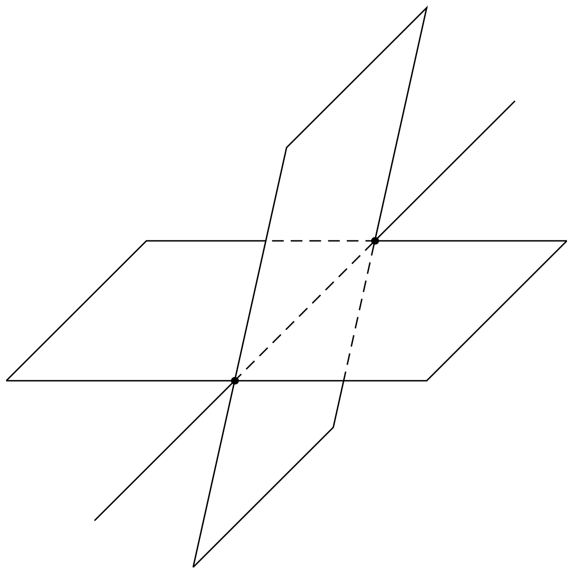


FIGURE 3.6 – Plans sécants dans l'espace

PROPOSITION 3.36 ♡ **Distance d'un point à un plan**
Soit $\mathscr{P}$ un plan affine de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Soit M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$. On appelle *distance du point* M *au plan* $\mathscr{P}$ la distance MH. On la note : $d(\mathrm{M},\mathscr{P})$. C'est la plus petite distance du point M à un point A de $\mathscr{P}$:

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}, \quad d(\mathrm{M},\mathscr{P}) = \mathrm{HM} \leqslant \mathrm{AM}.$$

Démonstration ♡ *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{P}$. *Le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle* AHM *permet d'écrire* $\mathrm{AH}^2 + \mathrm{HA}^2 = \mathrm{AM}^2$. *Comme* $\mathrm{HA}^2 \geqslant 0$, *on a* $\mathrm{MH}^2 \leqslant \mathrm{AM}^2$ *et donc* $\mathrm{MH} \leqslant \mathrm{MA}$.

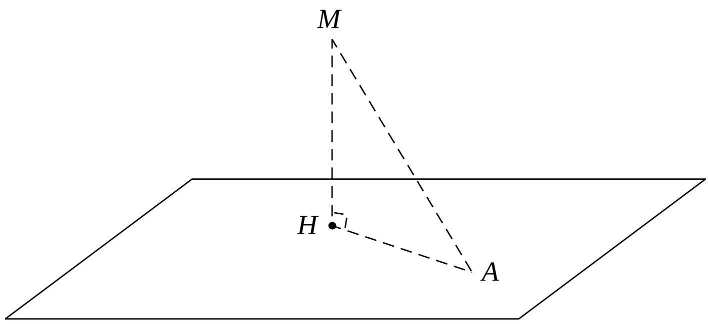


FIGURE 3.7 – Distance d'un point à un plan

Remarque 3.15 H est l'unique point de $\mathscr{P}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.

Deux méthodes de calcul de la distance d'un point à un plan

THÉORÈME 3.37 ♡ **Quand le plan est donné par un point et deux vecteurs directeurs**
Soit $\mathscr{P}$ un plan défini passant par un point A, engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Soit M un point de l'espace. On a

$$d(\mathrm{M},\mathscr{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right\|} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right\|}$$

Démonstration ♡♡ *Soit* H *le projeté orthogonal de* M *sur* $\mathscr{P}$. *Plaçons nous dans le plan défini par les points* A, H *et* M. *Soit* θ *une mesure de l'angle non orienté* $\left(\overrightarrow{n},\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)$. *On a* $\mathrm{MH}=\mathrm{AM}\cdot|\cos\theta|$.
Par ailleurs

$$\mathrm{MH}=\mathrm{AM}\cdot|\cos\theta|=\frac{\|\overrightarrow{n}\|\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\||\cos\theta|}{\|\overrightarrow{n}\|}=\frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

ce qui prouve la première formule. Pour la seconde, il suffit d'appliquer la première avec $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ *qui est bien un vecteur normal à* $\mathscr{P}$. *Enfin, par définition, on sait que* $\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$

THÉORÈME 3.38 ♡ **Quand le plan est donné par une équation cartésienne**
On rapporte le plan à un repère orthonormal $\mathscr{R}$. Soient $\mathscr{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $\mathrm{M}\left(x_{\mathrm{M}},y_{\mathrm{M}},z_{\mathrm{M}}\right)$ un point de l'espace. On a

$$d(\mathrm{M},\mathscr{P})=\frac{\left|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+cz_{\mathrm{M}}+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration ♡ *Au regard de l'équation cartésienne de* $\mathscr{P}$ *le vecteur* $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ *est normal pour* $\mathscr{P}$. *On considère un point* $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}},z_{\mathrm{A}}\right)\in\mathscr{P}$. *En utilisant la formule précédente, on obtient*

$$\begin{aligned}d(\mathrm{M},\mathscr{P}) &= \frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}\\ &= \frac{\left|a(x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}})+b\left(y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}\right)+c(z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}})\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ &= \frac{\left|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+cz_{\mathrm{M}}-\left(ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ &= \frac{\left|ax_{\mathrm{M}}+by_{\mathrm{M}}+cz_{\mathrm{M}}+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

car comme A *est élément de* $\mathscr{P}$, *on a* $ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}=-d$.

3.7 Droites dans l'espace

3.7.1 Représentation paramétrique

PROPOSITION 3.39 ♡♡♡ **Représentation paramétrique d'une droite**
Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormal de l'espace. Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par un point $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{A}},z_{\mathrm{A}}\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\left(x_{\overrightarrow{u}},y_{\overrightarrow{u}},z_{\overrightarrow{u}}\right)$. Une équation paramétrique de $\mathscr{D}$ est :

$$\begin{cases}x=x_{\mathrm{A}}+tx_{\overrightarrow{u}}\\ y=y_{\mathrm{A}}+ty_{\overrightarrow{u}}\\ z=z_{\mathrm{A}}+tz_{\overrightarrow{u}}\end{cases}$$

Démonstration *Il s'agit d'une traduction en termes de coordonnées de l'égalité* $\exists\lambda\in\mathbb{R}:\quad\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}$.

3.7.2 Représentation cartésienne

PROPOSITION 3.40 ♡♡♡ **Représentation cartésienne d'une droite**
Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormal de l'espace. On se donne des réels a,b,c,d et a',b',c',d' tels que les triplets (a,b,c) et $\left(a',b',c'\right)$ sont non nuls et non proportionnels. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système

$$(\star)\qquad\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$$

est une droite de vecteur directeur $\boxed{\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n}'}$ où $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{n}'\left(a',b',c'\right)$.
Réciproquement, toute droite admet au moins un système d'équations de ce type.

Démonstration *Les triplets* (a,b,c) *et* $\left(a',b',c'\right)$ *n'étant pas proportionnels, les vecteurs normaux au plan* $\mathscr{P}$ *d'équation* $ax+by+cz+d=0$ *et* $\mathscr{P}'$ *d'équation* $a'x+b'y+c'z+d'=0$ *ne sont pas colinéaires et ces deux plans ne sont pas parallèles. Leur intersection forme donc une droite affine d'après la proposition 3.35. Un système d'équations cartésiennes pour cette droite est donné par le système* $(\star)$.
Réciproquement, si $\mathscr{D}$ *est une droite affine dirigée par* $\overrightarrow{u}\in\mathscr{V}$ *et passant par* $\mathrm{A}\in\mathscr{V}$*, alors si on complète le vecteur* $\overrightarrow{v}$ *en un trièdre direct* $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)$ *de l'espace, il est clair que* $\mathscr{D}$ *est l'intersection des plans passant par* $\mathscr{P}\left(\mathrm{A},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ *et* $\mathscr{P}\left(\mathrm{A},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)$*. La droite* $\mathscr{D}$ *admet donc bien un système d'équations du type indiqué.*

3.7.3 Distance d'un point à une droite

PROPOSITION 3.41 ♡ **Distance d'un point à une droite**
Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace passant par le point P et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit A un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ (H est l'unique point de $\mathscr{D}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux). On appelle *distance de* A *à* $\mathscr{D}$ la distance AH. C'est la plus petite distance de A à un point de $\mathscr{D}$. Elle est notée $d(\mathrm{A},\mathscr{D})$.

Démonstration *Voir la preuve de la proposition 3.36.*

THÉORÈME 3.42 ♡
Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit M un point de l'espace. On a

$$d(\mathrm{M},\mathscr{D})=\frac{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

Démonstration ♡ *Soient* H *le projeté orthogonal de* M *sur la droite* $\mathscr{D}$*. Soit* θ *une mesure de l'angle non orienté* $\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$*. On a :* $\mathrm{AH}=\mathrm{AM}\,|\sin\theta|$*. Par ailleurs, on a*

$$\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\|=\|\overrightarrow{u}\|\left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\||\sin\theta|$$

d'où l'égalité.

3.7.4 Perpendiculaire commune à deux droites

DÉFINITION 3.22 ♡ **Droites orthogonales, droites perpendiculaires**
- Deux droites affines de l'espace sont *orthogonales* si et seulement si leurs vecteurs directeurs le sont.
- Deux droites affines de l'espace sont *perpendiculaires* si et seulement si elles sont à la fois sécantes et orthogonales.

Remarque 3.16 Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites parallèles, il existe une infinité de perpendiculaires commune à ces deux droites. Elle effet, elles sont contenues dans un même plan et il existe une infinité de droites perpendiculaires à ce plan.

PROPOSITION 3.43 ♡ **Perpendiculaire commune à deux droites**
Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à la fois à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$. Cette droite est appelée *perpendiculaire commune aux deux droites* $\mathscr{D}$ *et à* $\mathscr{D}'$. Si de plus $\mathscr{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{u}$ et si $\mathscr{D}'$ est dirigée par $\overrightarrow{u}'$ alors Δ est dirigée par $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'$.

Démonstration ♡
- Existence *Soient :*
  - $\overrightarrow{u}$ *un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$ *et* A *un point de* $\mathscr{D}$
  - $\overrightarrow{u}'$ *un vecteur directeur de* $\mathscr{D}'$ *et* A′ *un point de* $\mathscr{D}'$.

  Posons $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'$*. Comme les droites* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *ne sont pas parallèles, leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et donc* $\overrightarrow{w}$ *est non nul. Notons* $\mathscr{P}$ *le plan donné par le triplet* $\left(\mathrm{A},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)$ *et* $\mathscr{P}'$ *le plan donné par le triplet* $\left(\mathrm{A}',\overrightarrow{u}',\overrightarrow{w}\right)$*. Un vecteur normal à* $\mathscr{P}$ *est* $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}$ *et un vecteur normal à* $\mathscr{P}'$ *est* $\overrightarrow{n}'=\overrightarrow{u}'\wedge\overrightarrow{w}$*. Ces deux plans ne sont pas parallèles. En effet, si c'était le cas, alors* $\overrightarrow{n}$ *et* $\overrightarrow{n}'$ *seraient colinéaires. Il existerait donc des scalaires* α,β *non tous deux nuls tels que* $\alpha\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}+\beta\overrightarrow{u}'\wedge\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ *ce qui amènerait* $\left(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u}'\right)\wedge\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$*. Alors* $\overrightarrow{w}$ *serait élément du plan vectoriel engendré par* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ce qui n'est pas possible par définition de* $\overrightarrow{w}$*. L'intersection des plans* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *est donc une droite affine* Δ *qui est dirigée par* $\overrightarrow{w}$ *et donc perpendiculaire aux deux droites* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$.
- Unicité *Soit* Δ' *une droite affine perpendiculaire aux deux droites* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$*. Alors un vecteur directeur* $\overrightarrow{w}'$ *de* Δ' *est orthogonal à la fois à* $\overrightarrow{u}$ *et à* $\overrightarrow{u}'$*. Autrement dit* $\overrightarrow{w}'$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'$*. De plus,* Δ' *est incluse dans le plan affine* $\left(\mathrm{A},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)$ *ainsi que dans le plan* $\left(\mathrm{A}',\overrightarrow{u}',\overrightarrow{w}\right)$*. Par conséquent* $\Delta'=\delta$.

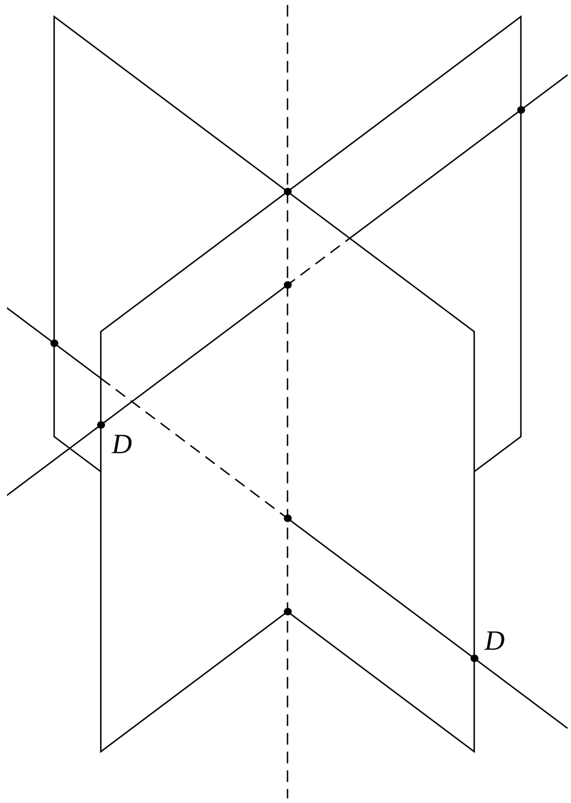


FIGURE 3.8 – Perpendiculaire commune à deux droites

PLAN 3.1 : Pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct, on considère deux droites non coplanaires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ telles que

- *$\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ et passe par le point* A
- *$\mathscr{D}'$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'$ et passe par le point* A′

Pour déterminer une équation cartésienne d'une perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$:

1. *On forme le vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$.*
2. *On forme une équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ du plan $\mathscr{P}$ passant par* A *et engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ce plan contient $\mathscr{D}$.*
3. *On forme une équation cartésienne $a'x+b'y+c'z+d'=0$ du plan $\mathscr{P}'$ passant par* A *et engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Ce plan contient $\mathscr{D}$.*
4. *L'intersection de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}'$ est une droite dirigée par $\overrightarrow{v}$. Par construction, cette droite est la perpendiculaire commune Δ à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$. Un système d'équations cartésiennes pour Δ est donc :*

$$\Delta : \begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}.$$

PROPOSITION 3.44 ♡ **Distance entre deux droites non parallèles**

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles. Soient Δ la perpendiculaire commune à ces deux droites, H le point d'intersection de Δ avec $\mathscr{D}$ et H′ le point d'intersection de Δ avec $\mathscr{D}'$. Pour tout points M de $\mathscr{D}$ et M′ de $\mathscr{D}'$, on a :

$$d(\mathrm{H},\mathrm{H}') \leqslant d(\mathrm{M},\mathrm{M}')$$

avec égalité si et seulement si H = M et H′ = M′. La distance $d(\mathrm{H},\mathrm{H}')$ est appelée *distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$* et se note $d(\mathscr{D},\mathscr{D}')$.

Démonstration ♡ *$\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ dirige $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{\mathrm{H'M'}}$ dirige $\mathscr{D}'$. Ces deux vecteurs sont donc orthogonaux à $\overrightarrow{\mathrm{HH'}}$. D'après le théorème de Pythagore, on a :*

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{MH}}+\overrightarrow{\mathrm{H'M'}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\mathrm{HM'}}\right\|^2.$$

Il vient alors $MM' \geqslant HH'$ *et on a égalité si et seulement si* $\left\|\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{H'M'}\right\| = 0$, *c'est à dire si et seulement si* $\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{H'M'} = \overrightarrow{0}$ *ce qui équivaut à* $H = M$ *et* $H' = M'$.

THÉORÈME 3.45 ♡ **Calcul de la distance entre deux droites non parallèles**
Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$, passant respectivement par les points M et M′. On a :

$$d\left(\mathscr{D},\mathscr{D}'\right) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}',\overrightarrow{MM'}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\right\|}$$

Démonstration ♡ *Soit* Δ *la perpendiculaire commune aux deux droites* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$. *Comme précédemment notons* H *le point formant l'intersection de* $\mathscr{D}$ *et* Δ, *ainsi que* H′ *le point formant l'intersection de* $\mathscr{D}'$ *et* Δ. *On a* $d\left(\mathscr{D},\mathscr{D}'\right) = HH' = \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|$. *Les vecteurs* $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'$ *et* $\overrightarrow{HH'}$ *sont colinéaires donc*

$$\left|\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\right).\overrightarrow{HH'}\right| = \left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\right\|\left\|\overrightarrow{HH'}\right\|.$$

Par conséquent

$$HH' = \frac{\left|\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\right).\overrightarrow{HH'}\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\right\|} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}',\overrightarrow{HH'}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\right\|}$$

On a de plus

$$\begin{aligned}
\left|\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}',\overrightarrow{MM'}\right)\right| &= \left|\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}',\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HH'}+\overrightarrow{H'M'}\right)\right| \\
&= \left|\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}',\overrightarrow{HH'}\right)\right| \text{ car } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{MH} \text{ ainsi que } \overrightarrow{u}' \text{ et } \overrightarrow{H'M'} \text{ sont colinéaires} \\
&= \left|\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\right).\overrightarrow{HH'}\right| \text{ par définition du produit mixte} \\
&= \left\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}'\right\|\left\|\overrightarrow{HH'}\right\| \text{ car les vecteurs } \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u}' \text{ et } \overrightarrow{HH'} \text{ sont colinéaires}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

3.8 Sphères

3.8.1 Généralités

DÉFINITION 3.23 ♡ **Sphère**
Soient A un point de l'espace et $R \in \mathbb{R}_+^*$ un réel positif non nul. On appelle sphère de rayon R et de centre A l'ensemble, noté $\mathscr{S}(A,R)$ des points de l'espace situés à une distance R de A :

$$\mathscr{S}(A,R) = \left\{M \in \mathscr{E} \mid AM = R\right\}$$

PROPOSITION 3.46 ♡
L'ensemble des points M de l'espace vérifiant

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$$

est la sphère de diamètre [AB].

Démonstration ♡ *Soit* I *le milieu de* [AB]. *Soit* $M \in \mathscr{E}$. *On a :*

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = 0 \Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0 \Longleftrightarrow IM = IA$$

PROPOSITION 3.47 ♡♡♡ **Équation cartésienne d'une sphère**
Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormal de l'espace. La sphère de centre $A(a,b,c)$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ admet comme équation cartésienne :

$$(x-a)^2 + \left(y-b\right)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$$

Démonstration *Il suffit d'écrire que :* $M\left(x,y,z\right) \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = R^2$.

3.8.2 Sphères et plans

PROPOSITION 3.48 **Position d'un plan par rapport à une sphère**
Soit $\mathscr{S}$ une sphère de centre A et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$. Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

- Si $d(A, \mathscr{P}) > R$ alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S} = \varnothing$.
- Si $d(A, \mathscr{P}) = R$ alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S} = \{H\}$.
- Si $d(A, \mathscr{P}) < R$ alors $\mathscr{P} \cap \mathscr{S}$ est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2(A, \mathscr{P})}$.

Dans le deuxième cas, on dit que $\mathscr{P}$ est le *plan tangent à la sphère* $\mathscr{S}$ au point H.

Démonstration *Soit* $M \in \mathscr{P}$. *Par application du théorème de Pythagore,* $d(A,M)^2 = d(A,H)^2 + d(H,M)^2 = d(A,\mathscr{P})^2 + d(H,M)^2$. *Par conséquent,* $M \in \mathscr{S}$ *si et seulement si* $R^2 = d(A,M)^2 = d(A,\mathscr{P})^2 + d(H,M)^2$.

3.8.3 Sphères et droite

Soit $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On étudie dans ce paragraphe l'intersection entre une sphère $\mathscr{S}$ et une droite $\mathscr{D}$. Afin de simplifier le problème, on peut supposer que $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{k}$, que O est le centre de $\mathscr{S}$. Une équation cartésienne de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}$ est alors : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ où $R \in \mathbb{R}_+^*$ est le rayon de $\mathscr{S}$.
$\mathscr{D}$ coupe le plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en le point $A(a, b, 0)$. Elle est donc paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = t \end{cases}.$$

PROPOSITION 3.49 **Position d'une droite par rapport à une sphère**
Posons $d = d(O, \mathscr{D})$. On a :

- Si $d > R$ alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{S}$ ont une intersection vide.
- Si $d = R$ alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{S}$ ont un point commun et un seul. On dit que la droite est *tangente à la sphère*.
- Si $d < R$ alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{S}$ ont exactement deux points en commun.

Démonstration *On a :* $M(x,y,z) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{S} \iff x = a, x = b, z = t$ et $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \iff x = a, x = b, z = t$ et $a^2 + b^2 + t^2 = R^2$. *Comme* $d = a^2 + b^2$, *on a :* $M(x,y,z) \in \mathscr{D} \iff t^2 = R^2 - d^2$.

En résumé

1. Il convient d'avoir bien compris :
   - l'utilité du produit scalaire
   - l'utilité du déterminant
   - l'utilité du produit mixte

   et les différentes techniques pour les calculer.
2. Il faut savoir calculer rapidement et sans hésitation
   - l'équation cartésienne et de l'équation paramétrée d'un plan
   - l'équation cartésienne et de l'équation paramétrée d'une droite
   - l'équation cartésienne d'une sphère
3. Il faut savoir retrouver rapidement aussi les formules de changements de coordonnées sphériques et cylindriques. Elles seront utilisées à la fois en mathématiques et en physique.
4. Les différentes formules pour calculer la distance d'un point à un plan, d'un point à une droite, entre deux droites, ou le volume d'un parallélépipède doivent être bien connues.

3.9 Exercices

3.9.1 Produits scalaire, vectoriel et mixte

Exercice 3.1 ♡♡

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Montrer que :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\,\vec{w}$$

Solution : *Considérons un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dans lequel les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(a,0,0)$, celles de $\vec{v}$ sont $(a',b',0)$ (il suffit pour cela que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ engendrent un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$) et celles de $\vec{w}$ sont (a'',b'',c''). On a alors :*

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \left(\begin{vmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} b'c'' \\ -a'c'' \\ a'b'' - b'a'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ aa''b' - aa'b'' \\ -aa'c'' \end{vmatrix}$$

et :

$$(\vec{u}.\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\,\vec{w} = aa'' \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ 0 \end{vmatrix} - aa' \begin{vmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ aa''b' - aa'b'' \\ -aa'c'' \end{vmatrix}$$

d'où l'égalité.

Exercice 3.2 ♡♡

Dans l'espace, on considère un vecteur $\vec{u}$ unitaire et une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. *Calculer $\alpha = \|\vec{u} \wedge \vec{i}\|^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{j}\|^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{k}\|^2$.*
2. *En déduire que l'une de ces trois normes est supérieure ou égale à $\sqrt{2/3}$.*

Solution :

1. *Notons $\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$. Alors $\vec{u} \wedge \vec{i} \begin{vmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{vmatrix}$, $\vec{u} \wedge \vec{j} \begin{vmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{vmatrix}$, $\vec{u} \wedge \vec{k} \begin{vmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{vmatrix}$. Par conséquent, $\alpha = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2$ puisque $\|u\|^2 = 1$.*
2. *Par l'absurde, si les trois normes étaient toutes strictement inférieures à $\sqrt{2/3}$, on aurait $2 = \alpha < 2/3 + 2/3 + 2/3 = 2$, ce qui est absurde.*

Exercice 3.3 ♡♡ **Identité de Jacobi**

On rapporte l'espace à une base orthonormale directe. Soient quatre vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ de l'espace.

1. *Montrer l'identité de Jacobi :*

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$$

2. *Montrer que*

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$$

3. *Montrer que*

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\,\vec{c} - \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\,\vec{d}$$

Solution :

1. *Utilisons la formule du double produit vectoriel :*

$$\begin{aligned} & \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) \\ = \; & (\vec{a}.\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\,\vec{c} + (\vec{b}.\vec{a})\,\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\,\vec{a} + (\vec{c}.\vec{b})\,\vec{a} - (\vec{c}.\vec{a})\,\vec{b} \\ = \; & \vec{0} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\langle \vec a \wedge \vec b \mid \vec c \wedge \vec d\rangle &= \det(\vec a,\vec b,\vec c\wedge\vec d) \text{ par définition du produit mixte}\\
&= \det(\vec b,\vec c\wedge\vec d,\vec a) \text{ car le déterminant est invariant par permutation circulaire}\\
&= \langle \vec b \wedge \left(\vec c\wedge\vec d\right) \mid \vec a\rangle\\
&= \langle\langle \vec b\mid\vec d\rangle\vec c - \langle\vec b\mid\vec c\rangle\vec d \mid \vec a\rangle \text{ d'après la formule du double produit vectoriel}\\
&= \langle\vec b\mid\vec d\rangle\langle\vec c\mid\vec a\rangle - \langle\vec b\mid\vec c\rangle\langle\vec d\mid\vec a\rangle \text{ par bilinéarité du produit scalaire}\\
&= \begin{vmatrix}\langle\vec a\mid\vec c\rangle & \langle\vec a\mid\vec d\rangle\\ \langle\vec b\mid\vec c\rangle & \langle\vec b\mid\vec d\rangle\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

3. *Utilisons à nouveau la formule du double produit vectoriel :*

$$\begin{aligned}
(\vec a\wedge\vec b)\wedge(\vec c\wedge\vec d) &= \left(\left(\vec a\wedge\vec b\right).\vec d\right)\vec c - \left(\left(\vec a\wedge\vec b\right).\vec c\right)\vec d\\
&= \det(\vec a,\vec b,\vec d)\vec c - \det(\vec a,\vec b,\vec c)\vec d
\end{aligned}$$

Exercice 3.4 ♡♡

On considère deux vecteurs $(\vec a,\vec b)$ *de l'espace. Résoudre l'équation vectorielle*

$$\vec x + \vec a\wedge\vec x = \vec b$$

Solution : *Soit* $\vec x$ *une solution. En prenant le produit scalaire avec* $\vec a$*, on trouve que*

$$\vec a.\vec x = \vec a.\vec b$$

En prenant le produit vectoriel avec $\vec a$*, et en utilisant la formule du double produit vectoriel, on obtient*

$$\vec a\wedge\vec x + (\vec a.\vec x)\vec a - \|\vec a\|^2\vec x = \vec a\wedge\vec b$$

d'où l'on tire (remplacer $\vec a\wedge\vec x$ *par* $\vec b-\vec x$ *et* $\vec a.\vec x$ *par* $\vec a.\vec b$*) que :*

$$\boxed{\vec x = \frac{1}{1+\|\vec a\|^2}\left[\vec b - \vec a\wedge\vec b + (\vec a.\vec b)\vec a\right]}$$

On vérifie réciproquement en utilisant la formule du double produit vectoriel que ce vecteur est solution.

Exercice 3.5 ♡♡♡

On considère deux vecteurs $\vec a$ *et* $\vec b$ *non-nuls et orthogonaux. Résoudre l'équation vectorielle :*

$$\begin{cases}\vec x\wedge\vec a &= \vec b\\ \vec b\wedge\vec x &= \vec a\end{cases}$$

Solution : *Soit* $\vec x$ *un vecteur solution. On calcule* $\vec b\wedge(\vec x\wedge\vec a) = \vec b\wedge\vec b = \vec 0$ *d'où en utilisant la formule du double produit vectoriel,* $(\vec b.\vec a)\vec x - (\vec b.\vec x)\vec a = \vec 0$*. Mais puisque* $\vec a.\vec b = 0$ *et que* $\vec a\neq\vec 0$*, on en tire que* $\boxed{\vec b.\vec x = 0}$*. De la même façon, en calculant* $\vec a\wedge(\vec b\wedge\vec x)$*, on trouve que* $\boxed{\vec a.\vec x = 0}$*. Puisque le vecteur* $\vec x$ *est orthogonal à* $\vec a$ *et à* $\vec b$*, il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$ *tel que* $\vec x = \lambda\vec a\wedge\vec b$*. Alors en calculant*

$$\lambda(\vec a\wedge\vec b)\wedge a = \lambda\|\vec a\|^2\vec b$$

on doit avoir $\lambda = \dfrac{1}{\|\vec a\|^2}$*. De même, en calculant*

$$\vec b\wedge(\lambda\vec a\wedge\vec b) = \lambda\|b\|^2\vec a$$

on doit avoir $\lambda = \dfrac{1}{\|\vec b\|^2}$*. Par conséquent,*

– *Si* $\|a\| \neq \|b\|$, $\mathscr{S} = \varnothing$.

– *Si* $\|a\| = \|b\|$, $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\right\}$.

où $\mathscr{S}$ *est l'ensemble solution du système étudié.*

Exercice 3.6 ♡♡

Soient quatre vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ *de l'espace. Montrer que*

$$(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}).(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}) \times \|c\|^2$$

Solution : *Calculons*

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}\right) \times \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) &= \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) \\
&= \det(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) \\
&= [\overrightarrow{c} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})].\overrightarrow{a} \\
&= [\|\overrightarrow{c}\|^2 \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c})\overrightarrow{c}].\overrightarrow{a} \\
&= \|\overrightarrow{c}\|^2 \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c})(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c})
\end{aligned}$$

Exercice 3.7 ♡♡

Soit $n \geqslant 3$ *et* n *vecteurs de l'espace* $\overrightarrow{a_i}$ *vérifiant* $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}$. *Montrer que*

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \overrightarrow{a_i} \wedge \overrightarrow{a_j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} \overrightarrow{a_i} \wedge \overrightarrow{a_j}$$

Solution : *Puisque la première somme vaut*

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} \overrightarrow{a_i} \wedge \overrightarrow{a_j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{j-1} \overrightarrow{a_i} \wedge \overrightarrow{a_j}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{a_i} \wedge \overrightarrow{a_n}$$

et que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{a_i} \wedge \overrightarrow{a_n} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{a_i}\right) \wedge \overrightarrow{a_n} = -\overrightarrow{a_n} \wedge \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$$

on en déduit le résultat.

3.9.2 Coordonnées cartésiennes dans l'espace

Exercice 3.8 ♡

Pour chacun des plans $\mathscr{P}$ *suivant calculer une équation cartésienne et une équation paramétrée :*

1. *Le plan* $\mathscr{P}$ *passant par* $A(1,0,1)$ *et de vecteur normal* $\overrightarrow{n} = (1,-1,2)$.
2. *Le plan* $\mathscr{P}$ *passant par* $A(0,1,1)$ *et engendré par* $\overrightarrow{u} = (1,-1,0)$ *et* $\overrightarrow{v} = (0,0,2)$.
3. *Le plan* $\mathscr{P}$ *passant par* $A(1,-1,0)$ *et parallèle au plan* $\mathscr{Q} : x - 2z + 1 = 0$.
4. *Le plan* $\mathscr{P}$ *passant par* $A(1,-1,1)$ *et perpendiculaire à la droite* $\mathscr{D} : \begin{cases} 2x - y + 1 &= 0 \\ x - y + z - 2 &= 0 \end{cases}$.
5. *Le plan* $\mathscr{P}$ *passant par les points* $A(1,0,1)$, $B(0,1,-1)$ *et* $C(2,1,0)$.
6. *Le plan* $\mathscr{P}$ *contenant les droites* $\mathscr{D} : \begin{cases} x - y + 1 &= 0 \\ y - z - 2 &= 0 \end{cases}$ *et* $\mathscr{D}' : \begin{cases} x &= -3 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 2 - 2t \end{cases}$.
7. *Le plan* $\mathscr{P}$ *passant par* $A(1,0,0)$ *et perpendiculaire aux plans* $\mathscr{Q} : x - 2y + z - 1 = 0$ *et* $\mathscr{Q}' : y - 2z + 1 = 0$.
8. *Le plan* $\mathscr{P}$ *passant par les points* $A(1,0,-2)$ *et* $B(0,-1,1)$ *et perpendiculaire au plan* $\mathscr{Q} : x - y + z = 1$.

Solution :

1. *Une équation de* $\mathscr{P}$ *est de la forme* $x-y+2z+d=0$ *avec* $d\in\mathbb{R}$*. Mais comme* $\mathrm{A}\in\mathscr{P}$*,* $d=-3$ *et donc* $\mathscr{P}$: $x-y+2z-3=0$*. Pour trouver une équation paramétrée de* $\mathscr{P}$*, il nous faut connaître deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *qui engendrent* $\mathscr{P}$*. Il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à* $\overrightarrow{n}$*. C'est le cas par exemple de* $\overrightarrow{u}=(1,1,0)$ *et* $\overrightarrow{v}=(2,0,-1)$*. Donc* $\mathscr{P}:\begin{cases}x&=1+s+2t\\y&=s\\z&=1-t\end{cases}$; $s,t\in\mathbb{R}$.
2. *Comme* $\mathscr{P}$ *est engendré par* $\overrightarrow{u}=(1,-1,0)$ *et* $\overrightarrow{v}=(0,0,2)$*, il admet* $\overrightarrow{n}'=(-2,-2,0)$ *ou encore* $\overrightarrow{n}=(1,1,0)$ *comme vecteur normal. Son équation cartésienne est donc de la forme* $x+y+d=0$ *avec* $d\in\mathbb{R}$*. Comme* $\mathrm{A}\in\mathscr{P}$*,* $d=-1$ *et* $\mathscr{P}:x+y-1=0$*. On trouve facilement une équation paramétrée* $\mathscr{P}:\begin{cases}x&=s\\y&=1-s\\z&=1+2t\end{cases}$; $s,t\in\mathbb{R}$.
3. *Comme le plan* $\mathscr{P}$ *est parallèle au plan* $\mathscr{Q}:x-2z+1=0$ *il admet* $\overrightarrow{n}=(1,0,-2)$ *comme vecteur normal. Son équation est donc de la forme* $x-2z+d=0$ *avec* $d\in\mathbb{R}$*. On utilise les coordonnées de* A *pour calculer* $d=-1$*. Donc* $\mathscr{P}:x-2z-1=0$*. Pour déterminer une équation paramétrique de* $\mathscr{P}$*, il nous faut connaître deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *engendrant* $\mathscr{P}$*. On peut procéder comme dans la première question. On peut aussi chercher ces vecteurs dans le plan vectoriel* $\mathrm{P}:x-2z=0$*. On choisit par exemple* $\overrightarrow{u}=(2,0,1)$ *et* $\overrightarrow{v}=(0,1,0)$*. Il vient alors* $\mathscr{P}$: $\begin{cases}x&=1+2t\\y&=-1+s\\z&=t\end{cases}$; $s,t\in\mathbb{R}$.
4. *Un vecteur directeur à* $\mathscr{D}$ *est donné par* $(2,-1,0)\wedge(1,-1,1)=(-1,-2,-1)$ *et ce vecteur est normal à* $\mathscr{P}$*. On termine alors comme dans la première question et une équation de* $\mathscr{P}$ *est* $x+2y+z=0$*. On cherche alors deux vecteur engendrant ce plan. On peut prendre* $\overrightarrow{u}=(1,0,-1)$ *et* $\overrightarrow{v}=(2,-1,0)$ *et une équation paramétrée de* $\mathscr{P}$ *est* $\begin{cases}x&=s+2t\\y&=-t\\z&=-s\end{cases}$; $s,t\in\mathbb{R}$.
5. *Les vecteurs* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,1,-2)$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,1,-1)$ *ne sont pas colinéaires et ils engendrent* $\mathscr{P}$*. Un vecteur normal au plan est donc* $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,-3,-2)$*. On termine alors comme dans la première question et on a* $\mathscr{P}$: $x-3y-2z+1=0$*. Une équation paramétrée est* $\mathscr{P}:\begin{cases}x&=1-s+t\\y&=s+t\\z&=1-2s-t\end{cases}$; $s,t\in\mathbb{R}$.
6. *Comme le système :*
$$\begin{cases}x-y+1&=0\\y-z-2&=0\\x&=-3+t\\y&=2-t\\z&=2-2t\end{cases}$$
admet $(-1,0,-2)$ *comme solution, les deux droites sont sécantes en le point* $\mathrm{A}(-1,0,-2)$ *et elles définissent bien un plan. Un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$ *est* $\overrightarrow{u}=(1,-1,0)\wedge(0,1,-1)=(1,1,1)$*. On lit sur l'équation paramétrée de* $\mathscr{D}'$ *un vecteur directeur de* $\mathscr{D}'$ *qui est* $\overrightarrow{v}=(1,-1,-2)$*. Donc un vecteur normal à* $\mathscr{P}$ *est* $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=(-1,3,-2)$ *et en utilisant les coordonnées de* A*, on trouve que* $\mathscr{P}:-x+3y-2z-5=0$*. Comme les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *engendrent* $\mathscr{P}$*, on a* $\mathscr{P}:\begin{cases}x&=-1+s+t\\y&=s-t\\z&=-2+s-2t\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$
7. *Les plans* $\mathscr{Q}:x-2y+z-1=0$ *et* $\mathscr{Q}':y-2z+1=0$ *ne sont pas parallèles et s'intersectent suivant la droite* $\mathscr{D}:\begin{cases}x-2y+z-1&=0\\y-2z+1&=0\end{cases}$*. Cette droite est encore perpendiculaire à* $\mathscr{P}$ *et un vecteur directeur pour cette droite donné par* $(1,-2,1)\wedge(0,1,-2)=(0,2,1)$ *est normal à* $\mathscr{P}$*. On en déduit que* $\mathscr{P}:2y+z=0$*. Par ailleurs, tout vecteur normal à* $\mathscr{Q}$ *ou à* $\mathscr{Q}'$ *est élément du plan vectoriel associé à* $\mathscr{P}$ *donc* $\mathscr{P}$ *est le plan passant par* A *et engendré par* $(1,-2,1)$ *et* $(0,1,-2)$*. On en déduit une équation paramétré :* $\mathscr{P}:\begin{cases}x&=1+s\\y&=-2s+t\\z&=s-2t\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

8. *Le vecteur* $\vec{n} = (1,-1,1)$ *normal à* $\mathscr{Q}$: $x - y + z = 1$ *est élément du plan vectoriel associé à* $\mathscr{P}$. *Le vecteur* $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,3)$ *est aussi élément de ce plan vectoriel et donc* $\mathscr{P}$ *est le plan passant par* A *et engendré par* $\vec{n}$ *et* $\overrightarrow{AB}$. *En particulier,* $\vec{n} \wedge \overrightarrow{AB} = (-2,-4,-2)$ *est normal à* $\mathscr{P}$. *Une équation cartésienne de* $\mathscr{P}$ *est donc* $x+2y+z+ = 0$.

   Une équation paramétrée est $\mathscr{P} : \begin{cases} x &= 1+s-t \\ y &= -s-t \\ z &= -2+s+3t \end{cases} \quad ; \ t \in \mathbb{R}.$

Exercice 3.9 ♡

On considère la droite $\mathscr{D}$ *passant par* $A = (1,-2,0)$ *et dirigée par* $\vec{u} = (1,1,-1)$. *Soit* $B = (0,1,-2)$ *un point de l'espace.*

1. *Déterminer les coordonnées du point* H*, projeté orthogonal de* B *sur* $\mathscr{D}$.
2. *Calculer de deux manières différentes la distance de* B *à la droite* $\mathscr{D}$.

Solution :

1. *L'équation paramétrique de* $\mathscr{D}$ *est :* $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -2+t \ ; \\ z &= -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$. *De plus, une équation du plan normal à* $\vec{u}$ *passant par* B *est :* $x + y - z - 3 = 0$. *Le point* H *forme l'intersection de ce plan et de la droite* $\mathscr{D}$ *et ses coordonnées satisfont le système :*

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = -t \\ x+y-z-3 = 0 \end{cases}.$$

   Par conséquent $\boxed{H(7/3,-2/3,-4/3)}$.

2. *La distance de* B *à la droite* $\mathscr{D}$ *est donnée par* $\left\|\overrightarrow{BH}\right\| = \boxed{\sqrt{\frac{26}{3}}}$. *On a aussi :* $d(B,\mathscr{D}) = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} = \boxed{\sqrt{\frac{26}{3}}}$.

Exercice 3.10 ♡

On considère les plans $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *d'équations respectives* $x - y + z + 1 = 0$ *et* $2x + y - z - 1 = 0$.

1. *Vérifier que ces deux plans ne sont pas parallèles.*
2. *Déterminer une paramétrisation de leur intersection* $\mathscr{D}$.
3. *Donner une équation cartésienne du plan* $\mathscr{Q}$ *passant par* $A = (1,1,0)$ *et perpendiculaire aux deux plans* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$.

Solution :

1. *Un vecteur normal à* $\mathscr{P}$ *est* $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ *et un vecteur normal à* $\mathscr{P}'$ *est* $\vec{n'}\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$. *Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles. Leur intersection est alors une droite* $\mathscr{D}$.
2. $\mathscr{D}$ *est dirigée par le vecteur*

$$\vec{n} \wedge \vec{n'} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

   ou encore par le vecteur $\vec{u} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$. *Un point de* $\mathscr{D}$ *est :* $M\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$. *On l'obtient à partir du système* $\begin{cases} x-y+z+1 &= 0 \\ 2x+y-z-1 &= 0 \end{cases}$ *en fixant* $y = 0$ *et en résolvant le système à deux équations et deux inconnues ainsi obtenu. Une paramétrisation de* $\mathscr{D}$ *est alors :* $\boxed{\begin{cases} x &= 0 \\ y &= t \\ z &= -1+t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$.
3. *Le plan* $\mathscr{Q}$ *passant par* $A = (1,1,0)$ *et perpendiculaire aux deux plans* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *admet* $\vec{u}$ *comme vecteur normal. Son équation est donc de la forme :* $y + z + c = 0$. *Comme* $A \in \mathscr{Q}$, $c = -1$ *et une équation de* $\mathscr{Q}$ *est* $\boxed{y+z-1=0}$.

Exercice 3.11 ♡♡

On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ d'équations respectives $3x-4y+1=0$ et $2x-3y+6z-1=0$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

Solution : *Soit* $M(x,y,z)$. *On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned}
& d(M,\mathscr{P}) = d(M,\mathscr{Q}) \\
\iff & \frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|2x-3y+6z-1|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} \\
\iff & 7|3x-4y+1| = 5|2x-3y+6z-1| \\
\iff & 7(3x-4y+1) = 5(2x-3y+6z-1) \quad \text{ou} \quad 7(3x-4y+1) = -5(2x-3y+6z-1) \\
\iff & 11x-13y-30z+2=0 \quad \text{ou} \quad 31x-43y+30z=0
\end{aligned}$$

Le lieu des points équidistants de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est donc la réunion des plans d'équations $11x-13y-30z+12=0$ et $31x-43y+30z+2=0$. Ces deux plans sont appelés plans médiateurs *de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.*

Exercice 3.12 ♡

Calculer :

1. *La distance du point $A(1,2,1)$ au plan $\mathscr{P}: x-2y+3z=1$.*
2. *La distance du point $B(1,2,-1)$ à la droite $\mathscr{D}$ paramétrée par $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-t \\ z=2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.*
3. *La distance du point $C(1,0,2)$ à la droite Δ définie par $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$*
4. *Déterminer la distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives : $\begin{cases} -x+y-z=1 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x-2y+3z=0 \end{cases}$*

Solution :

1. $d(A,\mathscr{P}) = \dfrac{|1\times 1-2\times 1+3\times 1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{14}}}$
2. *Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est :* $\vec{u}\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ *et un point de $\mathscr{D}$ est :* $M\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$. *Par conséquent :* $d(B,\mathscr{D}) = \dfrac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{BM}\|}{\|\vec{u}\|} = \boxed{\sqrt{\dfrac{5}{7}}}$.
3. *Un vecteur directeur de Δ est :* $\vec{u} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ *et un point de Δ est :* $M\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix}$. *Par conséquent :* $d(C,\mathscr{D}) = \dfrac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{CM}\|}{\|\vec{u}\|} = \boxed{\sqrt{\dfrac{27}{2}}}$.
4. *Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est* $\vec{u} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ *et un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ est* $\vec{u'} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{vmatrix}$ *ou mieux :* $\vec{u'} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$. *Un point de $\mathscr{D}$ est* $M\begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$ *et un point de $\mathscr{D}'$ est* $M'\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, *par conséquent, comme* $\vec{u}\wedge\vec{u'} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$:
$d(\mathscr{D},\mathscr{D}') = \dfrac{\left|\det\left(\vec{u},\vec{u'},\overrightarrow{MM'}\right)\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{u'}\|} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$.

Exercice 3.13 ♡

On considère le plan $\mathscr{P}$ représenté paramétriquement par :

$$\begin{cases} x &= 2+\lambda-\mu \\ y &= 3-\lambda+2\mu \\ z &= 1+2\lambda+\mu \end{cases} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

1. *Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.*
2. *Déterminer la distance du point* $A\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ *au plan $\mathscr{P}$.*
3. *Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point* A *et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.*

Solution :

1. *Le plan passe par le point* $\Omega\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix}$ *et est dirigé par les vecteurs* $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\-1\\2\end{vmatrix}$, $\vec{v}\begin{vmatrix}-1\\2\\1\end{vmatrix}$. *Le vecteur* $\vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v}\begin{vmatrix}-5\\-3\\1\end{vmatrix}$ *est normal au plan. L'équation cartésienne est donc de la forme* $-5x-3y+z+c=0$. *Puisque* $\Omega\in\mathscr{P}$, *on trouve que* $c=18$, *et donc*
$$\boxed{\mathscr{P}:\ -5x-3y+z+18=0}$$
2. *Utilisons la formule du cours :*
$$d(A,\mathscr{P}) = \frac{|-5-3+1+18|}{\sqrt{5^2+3^2+1^2}} = \frac{11}{\sqrt{35}}$$
3. *La droite est dirigée par le vecteur* $\vec{n}$ *d'où une équation paramétrique :*
$$\begin{cases} x &= 1-5\lambda \\ y &= 1-3\lambda \\ z &= 1+\lambda \end{cases}$$
En éliminant le paramètre, on obtient une équation cartésienne :
$$\begin{cases} x+5z-2 &= 0 \\ y+3z-4 &= 0 \end{cases}$$

Exercice 3.14 ♡

On considère la droite d'équation :
$$\begin{cases} x+y-z+1 &= 0 \\ 2x-y+z-2 &= 0 \end{cases}$$
Déterminer la distance du point $\Omega\begin{vmatrix}1\\2\\1\end{vmatrix}$ *à cette droite.*

Solution : *Le vecteur* $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\1\\-1\end{vmatrix}$ *est normal au plan* $\mathscr{P}_1$, *le vecteur* $\vec{v}\begin{vmatrix}2\\-1\\1\end{vmatrix}$ *est normal au plan* $\mathscr{P}_2$. *Puisque* $\mathscr{D}=\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$, *le vecteur* $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{vmatrix}0\\-3\\-3\end{vmatrix}$ *dirige la droite* $\mathscr{D}$. *On peut également prendre comme vecteur directeur le vecteur* $\vec{n}\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$ *qui lui est proportionnel. Cherchons un point* A *de la droite* $\mathscr{D}$. *En choisissant* $z=0$, *on trouve par exemple* $A\begin{vmatrix}1/3\\-4/3\\0\end{vmatrix}$. *Et alors :*
$$d(\Omega,\mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{A\Omega}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$$

Exercice 3.15 ♡♡

Soit $a\in\mathbb{R}$ *et le point* $A\begin{vmatrix}1\\1\\a\end{vmatrix}$. *On considère les quatre plans d'équations :*
$$P_1\ : x+y-1=0,\ P_2:\ y+z-1=0,\ P_3:\ x+z-1=0,\ P_4:\ x-y+z=0$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que les projections orthogonales de A sur les quatre plans soient 4 points coplanaires.

Solution : *Un vecteur normal au plan* (P_1) *est* $\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix}$. *En notant* $A_1\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ *le projeté orthogonal de* A *sur le plan* P_1*, il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$ *tel que* $A_1 = A+\lambda\overrightarrow{n}$ *:*

$$\begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= 1+\lambda \\ z &= a \end{cases}$$

Comme $A_1\in P_1$*, on a* $(1+\lambda)+(1+\lambda)-1=0$ *d'où l'on tire* $\lambda=-1/2$ *et* $A_1\begin{vmatrix}1/2\\1/2\\a\end{vmatrix}$. *Par la même méthode, on trouve* $A_2\begin{vmatrix}1\\1-a/2\\a/2\end{vmatrix}$, $A_3\begin{vmatrix}1-a/2\\1\\a/2\end{vmatrix}$ *et* $A_4\begin{vmatrix}1-a/3\\1+a/3\\2a/3\end{vmatrix}$. *Les quatre points sont coplanaires si et seulement si* $\det(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4})=0$, *ou encore (pour simplifier les calculs),* $\det(2\overrightarrow{A_1A_2},2\overrightarrow{A_1A_3},6\overrightarrow{A_1A_4})=0$. *En développant, on trouve que* $2a(a+1)=0$, *c'est-à-dire* $\boxed{a=0 \text{ ou } a=-1}$.

Exercice 3.16 ♡

On considère les deux droites de $\mathscr{E}_3$ *d'équations cartésiennes :*

$$\mathscr{D}:\begin{cases} x=2z+1 \\ y=z-1\end{cases}$$

$$\mathscr{D}':\begin{cases} x=z+2 \\ y=3z-3\end{cases}$$

Montrer qu'elles sont coplanaires et former une équation cartésienne de leur plan.

Solution : *Soit* $M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$. *Alors* $M\in\mathscr{D}\cap\mathscr{D}'$ *ssi* $x=3$, $y=0, z=1$. *Donc les deux droites sont concourantes et par conséquent coplanaires. On trouve le plan d'équation*

$$2x+y-5z-1=0$$

Exercice 3.17 ♡♡♡ **Faisceau de plans**

Soit $\mathscr{D}$ *une droite d'équations cartésiennes :*

$$\mathscr{D}\ :\begin{cases} ax+by+cz+d &=0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &=0\end{cases}.$$

On appelle faisceau de plans issu de $\mathscr{D}$ *l'ensemble des plans de l'espace contenant* $\mathscr{D}$.
Montrer qu'un plan $\mathscr{P}$ *est élément du faisceau issu de* $\mathscr{D}$ *si et seulement si il a une équation cartésienne de la forme :*

$$\mathscr{P}\ :\alpha\big(ax+by+cz+d\big)+\beta\big(a'x+b'y+c'z+d'\big)=0$$

où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *sont deux réels non tous deux nuls.*

Solution : *Posons* $\overrightarrow{n}=\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ *et* $\overrightarrow{n}'=\begin{vmatrix}a'\\b'\\c'\end{vmatrix}$. *Un vecteur directeur à* $\mathscr{D}$ *est* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n}'$. *Notons* $\mathscr{V}$ *la plan vectoriel engendré par* $\overrightarrow{n}$ *et* $\overrightarrow{n}'$. *Tout vecteur de ce plan est orthogonal à tout vecteur directeur de* $\mathscr{D}$. *Réciproquement, tout vecteur orthogonal à un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$ *est élément de* $\mathscr{V}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que $\mathscr{P}$ est élément du faisceau issu de $\mathscr{D}$. Un vecteur $\overrightarrow{N}$ normal à $\mathscr{P}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et est donc élément du plan vectoriel $\mathscr{V}$. Par conséquent, il existe $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls tels que $\overrightarrow{N} = \alpha\overrightarrow{n} + \beta\overrightarrow{n}'$. Une équation de $\mathscr{P}$ est alors de la forme $\alpha(ax+by+cz)+\beta(a'x+b'y+c'z)+D=0$ où $D\in\mathbb{R}$. Considérons un point $M\in\mathscr{D}$. Comme les coordonnées de M vérifient à la fois les équations de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$, on obtient : $D=\alpha d+\beta d'$. On a ainsi prouvé qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est de la forme proposée.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, supposons que $\mathscr{P}$ ait une équation cartésienne de la forme : $\mathscr{P}\ :\ \alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$. Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\alpha\overrightarrow{n}+\beta\overrightarrow{n}'$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ car élément de $\mathscr{V}$. La droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont donc parallèles. On considère alors un point M de $\mathscr{D}$. Comme les coordonnées de M vérifient les équations de $\mathscr{D}$, elles vérifient l'équation de $\mathscr{P}$ et donc $M\in\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ contient alors nécessairement la droite $\mathscr{D}$.*

Exercice 3.18 ♡♡

Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par les points $A=(1,1,1)$ et $B=(2,1,0)$ et tel que la droite

$$\mathscr{D}:\begin{cases} x+2y+z-2 \\ x+y-z+3=0\end{cases}$$

soit parallèle à $\mathscr{P}$.

Indication 3.0 : Utiliser la notion de faisceau de plans développée dans l'exercice 3.17 page 143

Solution : *Une équation paramétrique de (AB) est* $\begin{cases} x &= 1+t\\ y &= 1\\ z &= 1-t\end{cases}$. *On en tire une équation cartésienne de (AB) :*

$$\begin{cases} y-1 &= 0\\ x+z-2 &= 0\end{cases}$$

Le plan $\mathscr{P}$ doit appartenir au faisceau issu de (AB) :

$$\mathscr{P}: x+\lambda y+z-(2+\lambda)=0$$

On trouve un vecteur directeur de $\mathscr{D}$:

$$\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix}-3\\2\\-1\end{vmatrix}.$$

Comme $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ doit appartenir au plan vectoriel d'équation $x+\lambda y+z=0$ ce qui implique que $\lambda=2$ d'où

$$\boxed{\mathscr{P}: x+2y+z-4=0}$$

Exercice 3.19 ♡♡

On considère les droites

$$\mathscr{D}:\begin{cases} x=z-1\\ y=2z+1\end{cases}$$

$$\mathscr{D}':\begin{cases} y=2x+1\\ z=2x-1\end{cases}$$

Montrer qu'il existe un unique couple de plans $(\mathscr{P},\mathscr{P}')$ tels que

$$\mathscr{D}\subset\mathscr{P},\quad \mathscr{D}'\subset\mathscr{P}'\quad \mathscr{P}//\mathscr{P}'$$

Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Indication 3.0 : On pourra utiliser la notion de faisceau de plans développée dans l'exercice 3.17 page 143

Solution : *Supposons qu'il existe deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ appartient au faisceau de plan issu de $\mathscr{D}$ et comme $\mathscr{D}'\subset\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}'$ appartient au faisceau de plan issu de $\mathscr{D}'$. Il existe alors $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$ tels que :*

$$\mathscr{P}:(x-z+1)+\theta(y-2z-1)=0$$

$$\mathscr{P}':(y-2x-1)+\theta'(z-2x+1)=0$$

On écrit l'équation cartésienne des plans vectoriels associés :

$$\mathrm{P} : x + \theta y - (1+2\theta)z = 0$$

$$\mathrm{P}' : -2(1+\theta')x + y + \theta' z = 0$$

Ces deux plans sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\begin{vmatrix} 1 \\ \theta \\ -(1+2\theta) \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} -2(1+\theta') \\ 1 \\ \theta' \end{vmatrix}$ *sont colinéaires. En utilisant le produit vectoriel, la condition de parallélisme s'écrit donc :*

$$\begin{cases} \theta\theta' + 2\theta + 1 & = 0 \\ 2(1+2\theta)\left(1+\theta'\right) - \theta' & = 0 \\ 1 + 2\theta\left(1+\theta'\right) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \theta\theta' + 2\theta + 1 & = 0 \\ 4\theta\theta' + 4\theta + \theta' + 2 & = 0 \\ 2\theta\theta' + 2\theta + 1 & = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première et la troisième équation, on trouve $\theta\theta' = 0$. *Mais* $\theta = 0$ *est impossible d'après la première équation, donc* $\theta' = 0$. *Il vient alors* $\theta = -1/2$. *On trouve finalement :*

$$\boxed{\mathscr{P} : 2x - y + 3 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathscr{P}' : -2x + y - 1 = 0}$$

Réciproquement, on vérifie que les plans $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *donnés par ces deux équations cartésiennes sont solutions du problème.*

Exercice 3.20 ♡♡

Trouver l'équation cartésienne des plans contenant la droite $\mathscr{D}$ *dirigée par* $\overrightarrow{u} = (-1,0,2)$ *passant par* $\mathrm{A} = (2,3,-1)$ *et qui se situe à distance* 1 *du point* $\mathrm{B} = (0,1,0)$.

Indication 3.0 : On pourra utiliser la notion de faisceau de plans développée dans l'exercice 3.17 page 143

Solution : *Une équation cartésienne de* $\mathscr{D}$ *est donnée par :*

$$\mathscr{D} : \begin{cases} 2x + z - 3 = 0 \\ \quad y - 3 = 0 \end{cases}$$

Si un tel plan $\mathscr{P}$ *existe alors c'est un plan du faisceau issu de* $\mathscr{D}$ *et il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\mathscr{P} : 2x + \lambda y + z - 3(1+\lambda) = 0$$

et alors

$$d(\mathrm{A},\mathscr{P}) = 1 \implies \lambda = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{3}$$

On en tire deux plans $\mathscr{P}$ *possibles. On vérifie réciproquement que ces deux plans sont solutions du problème.*

Exercice 3.21 ♡♡

On considère dans l'espace muni d'un repère $\mathscr{R}$*, les deux droites d'équations :*

$$\mathscr{D} \begin{cases} x - z - a & = 0 \\ y + 3z + 1 & = 0 \end{cases} \quad \mathscr{D}' \begin{cases} x + 2y + z - 2b & = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 & = 0 \end{cases}$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Montrer qu'elles ne sont pas parallèles.*
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* (a,b) *pour que les deux droites soient sécantes. Former alors l'équation cartésienne de leur plan.*

Solution :

1. *On trouve un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$ *:* $\overrightarrow{d} = (1,-3,1)$ *et de* $\mathscr{D}'$ *:* $\overrightarrow{d'} = (1,1,-3)$. *Ils ne sont pas colinéaires et donc les droites ne sont pas parallèles.*
2. *On détermine un point A de* $\mathscr{D}$ *. On suppose que* $x = a$ *et on reporte dans le système définissant* $\mathscr{D}$*. Il vient* $\begin{cases} z & = 0 \\ y + 3z + 1 & = 0 \end{cases}$ *et donc* $\mathrm{A}(a,-1,0)$. *On fait de même pour* $\mathscr{D}'$*. On suppose que* $y = b$ *et on reporte dans le*

système définissant $\mathscr{D}'$. Il vient $\begin{cases} x+z &= 0 \\ 3x+3b+2z-7 &= 0 \end{cases}$ *donc* $A'(7-3b, b, 3b-7) \in \mathscr{D}'$. *De plus* $A \neq A'$. *Les deux droites sont sécantes si et seulement si* $\det\left(\vec{d}, \vec{d}\,', \overrightarrow{AA'}\right) = 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $-8a-8b+32=0$ *ce qui s'écrit aussi* $\boxed{a+b=4}$. *On pourrait aussi procéder ainsi. Les deux droites sont concourantes si et seulement si le système de* 4 *équations à* 3 *inconnues est compatible. On écrit :*

$$\begin{cases} x \quad\quad -z = a \\ y+3z = -1 \\ x+2y+z = 2b \\ 3x+3y+2z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad -z = a \\ y+3z = -1 \\ 2y+2z = 2b-a & L_3-L_1 \\ 3y+5z = 7-3a & L_4-3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad -z = a \\ y+3z = -1 \\ -2z = b-\frac{a}{2}+1 & \frac{L_3}{2}-L_2 \\ -4z = 10-3a & L_4-3L_2 \end{cases}.$$

Donc le système est compatible si et seulement si $2\left(b-\frac{a}{2}+1\right) = 10-3a$ *c'est-à-dire si et seulement si* $\boxed{a+b=4}$.
On calcule facilement que l'équation du plan alors formé par les deux droites est $\boxed{2x+y+2-2a+1=0}$.

Exercice 3.22 ♡

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A\begin{vmatrix}3\\0\\-1\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}2\\1\\-1\end{vmatrix}$ *et* $D\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$. *Calculer la distance entre les droites* (AB) *et* (CD).

Solution : *La distance est donnée par*

$$d = \frac{\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC})\right|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}\|}$$

Après calculs, on trouve que $\boxed{d = \dfrac{2}{\sqrt{3}\sqrt{7}}}$.

Exercice 3.23 ♡♡

On considère dans $\mathscr{E}_3$ *la droite*

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = az+p \\ y = bz+q \end{cases}$$

et les points $A\begin{vmatrix}0\\0\\h\end{vmatrix}$, $A' = \begin{vmatrix}0\\0\\-h\end{vmatrix}$. *On suppose que* $A \notin \mathscr{D}$ *et que* $A' \notin \mathscr{D}$.

1. *Donner une équation cartésienne du plan* $\mathscr{P}$ *(respectivement* $\mathscr{P}'$*) passant par le point* A *(resp* A'*) contenant la droite* $\mathscr{D}$.
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* a, b, p, q, h *pour que* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *soient perpendiculaires.*

Indication 3.0 : On pourra utiliser la notion de faisceau de plans développée dans l'exercice 3.17 *page 143*

Solution :

1. *Le plan* $\mathscr{P}$ *appartient au faisceau de plans issu de la droite* $\mathscr{D}$. *Son équation cartésienne est de la forme*

$$(\mathscr{P}) : \theta(x-az-p) + (y-bz+q) = 0$$

(s'il est différent du plan d'équation $x = az+p$*). Il contient le point* A *si et seulement si*

$$\theta = -\frac{bh+q}{ah+p}$$

(On suppose que $ah+p \neq 0$. *Comme* $A \notin \mathscr{P}$, *si* $ah+p=0$, *le plan cherché serait le plan d'équation* $x-az-p=0$*).*
On trouve alors l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ *:*

$$-(bh+q)x + (ah+p)y + (aq-bp)z + h(bp-aq) = 0$$

En utilisant la même technique, on trouve une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ *:*

$$-(bh-q)x + (ah-p)y + (bp-aq)z + h(bp-aq) = 0$$

2. *Les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si*

$$(bh+q)(bh-q)+(ah+p)(ah-p)-(aq-bp)^2=0$$

c'est-à-dire

$$h^2(a^2+b^2)=p^2(b^2+1)+q^2(a^2+1)-2abpq.$$

Exercice 3.24 ♡♡

Dans l'espace euclidien $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$*, rapporté à un repère orthonormé direct, on considère deux droites* $\mathscr{D}_1$ *et* $\mathscr{D}_2$ *d'équation cartésienne*

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} x-z+1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

1. *Trouvez une équation cartésienne de la perpendiculaire commune* Δ *à* $\mathscr{D}_1$ *et* $\mathscr{D}_2$*.*
2. *Déterminez la distance entre les droites* $\mathscr{D}_1$ *et* $\mathscr{D}_2$ *par deux méthodes différentes :*
   (a) *la première utilisant le cours.*
   (b) *la seconde utilisant le plan* $\mathscr{P}$ *contenant la droite* $\mathscr{D}_2$ *et parallèle à la droite* $\mathscr{D}_1$

Solution :

1. *Le vecteur* $\overrightarrow{d_1}\begin{vmatrix}1\\5\\2\end{vmatrix}$ *dirige la droite* $\mathscr{D}_1$ *et le vecteur* $\overrightarrow{d_2}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ *dirige la droite* $\mathscr{D}_2$*. Par conséquent, le vecteur* $\overrightarrow{d_1}\wedge\overrightarrow{d_2}\begin{vmatrix}3\\1\\-4\end{vmatrix}$

   dirige la perpendiculaire commune Δ*. Écrivons une équation du plan* $\mathscr{P}_1$ *contenant la droite* $\mathscr{D}_1$ *et orthogonal à* $\mathscr{D}_2$*. En fixant* $z=0$ *dans l'équation cartésienne de* $\mathscr{D}_1$*, on trouve qu'un point de* D_1 *est* $\mathrm{A}_1(-1/2,-7/2,0)$*. Le plan* $\mathscr{P}_1$ *passe par* A_1 *et admet* $\overrightarrow{n}_1=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{d_1}=2\begin{vmatrix}11\\-5\\7\end{vmatrix}$ *comme vecteur normal. On a donc :* $\mathscr{P}_1 : \quad 11x-5y+7z-12=0.$

   De même, on détermine une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ *contenant* $\mathscr{D}_2$ *et orthogonal à* $\mathscr{D}_1$*. En fixant* $z=0$ *dans l'équation cartésienne de* $\mathscr{D}_2$*, on trouve qu'un point de* D_2 *est* $\mathrm{A}_2(-1,-1,0)$*. Le vecteur* $\overrightarrow{n}_2=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{d}_2=\begin{vmatrix}5\\-7\\2\end{vmatrix}$

   est normal à $\mathscr{P}_2$ *donc* $\mathrm{P}_2 : \quad 5x-7y+2z-2=0.$
   On en tire une équation cartésienne de Δ *:*

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} 11x-5y+7z-12=0 \\ 5x-7y+2z-2=0 \end{cases}}$$

2. (a) *D'après le cours*

$$d(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)=\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{d}_2}\wedge\overrightarrow{d_2}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{vmatrix}1&1&1/2\\5&1&5/2\\2&1&0\end{vmatrix}=\boxed{\frac{4}{\sqrt{26}}}$$

   (b) *Pour calculer* $d(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)$*, considérons le plan* $\mathscr{P}$ *contenant la droite* $\mathscr{D}_2$ *et parallèle à la droite* $\mathscr{D}_1$*. Un vecteur normal à ce plan est* $\overrightarrow{d_1}\wedge\overrightarrow{d_2}$ *et comme* $\mathrm{A}_2\in\mathscr{P}$*, une équation cartésienne de* $\mathscr{P}$ *est* $3x+y-4z+4=0$*.*
   La distance entre $\mathscr{D}_1$ *et* $\mathscr{D}_2$ *est la distance entre un point quelconque de* $\mathscr{D}_1$ *et le plan* $\mathscr{P}$*. On trouve*

$$d(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)=d(\mathrm{A}_1,\mathrm{P})=\frac{|3\times(-1/2)-7/2+4|}{\sqrt{26}}=\boxed{\frac{4}{\sqrt{26}}}.$$

3.9.3 Sphères

Exercice 3.25 ♡

Calculer la distance entre la droite

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+z=1 \end{cases}$$

et la sphère

$$\mathscr{S} : \ x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z=-5$$

Solution : *En faisant apparaître des carrés, on montre que*

$$\mathscr{S} \ : \quad (x-3)^2+\left(y+1\right)^2+(z-2)^2=9$$

donc le centre de la sphère est $\Omega\,(3,-1,2)$ *et son rayon vaut* $\mathrm{R}=3$*. Si on fixe* $z=0$ *dans l'équation de* $\mathscr{D}$*, on trouve qu'un point de* $\mathscr{D}$ *est* $\mathrm{A}\,(1,1,0)$*. Un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$ *est* $\overrightarrow{u}$ *de coordonnées*

$$\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1\\0\\1\end{vmatrix}.$$

Alors

$$d(\Omega,\mathscr{D})=\frac{\|\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}=\sqrt{12} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\,(\mathscr{S},\mathscr{D})=\boxed{\sqrt{12}-3}.$$

Exercice 3.26 ♡

1. *Montrer que* $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ *est l'équation d'une sphère* $\mathscr{S}$ *dont on déterminera le centre et le rayon.*
2. *Étudier l'intersection de* $\mathscr{S}$ *avec le plan* $\mathscr{P}$ *d'équation* $x+y+z-1=0$*. On précisera les éléments géométriques de cette intersection.*

Solution :

1. *L'équation* $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ *s'écrit aussi :* $(x-1)^2+\left(y-2\right)^2+(z-3)^2=3^2$*. On reconnaît l'équation d'une sphère de centre* $\boxed{\Omega\,(1,2,3)}$ *et de rayon* $\boxed{3}$*.*
2. *On applique le cours :* $d\,(\Omega,\mathscr{P})=\dfrac{\left|x_\omega+y_\Omega+z_\Omega-1\right|}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}<3$*.* $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}$ *est donc un cercle. Déterminons son centre et son rayon. Soit* A *un point de ce cercle et* B *le projeté orthogonal de* Ω *sur* $\mathscr{P}$*. Le triangle* $\Omega\mathrm{AB}$ *est rectangle en* B*,* OA *est un rayon de la sphère* $\mathscr{S}$ *donc* $\mathrm{OA}=3$ *et de plus :* $\mathrm{OB}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$*. En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle, on trouve* $\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$*. Par conséquent, le rayon du cercle intersection de* $\mathscr{S}$ *avec le plan* $\mathscr{P}$ *vaut* $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$*. Il reste à déterminer les coordonnées du point* B *qui est aussi le centre de ce cercle. La droite* $(\Omega\mathrm{B})$ *est perpendiculaire à* $\mathscr{P}$ *et est donc dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ *qui est normal à* $\mathscr{P}$*. Cette droite est donc paramétrée par :* $\begin{cases}x &=1+t\\ y &=2+t\ ,\\ z &=3+t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$*. Les coordonnées de* B *sont solutions du système :* $\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\\ z=3+t\\ x+y+z-1=0\end{cases}$ *et donc* $\boxed{\mathrm{B}\begin{vmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\end{vmatrix}}$*.*

Exercice 3.27 ♡

Soit une droite $\mathscr{D}$ *de l'espace et* A, B *deux points distincts tels que les droites* (AB) *et* $\mathscr{D}$ *soient orthogonales et non-coplanaires. Déterminer le lieu des centres des sphères passant par* A *et* B *et tangentes à* $\mathscr{D}$*.*

Solution : *Dans un bon repère, on a :*

$$\mathrm{A}\begin{vmatrix}-a\\0\\0\end{vmatrix}, \quad \mathrm{B}\begin{vmatrix}a\\0\\0\end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}:\begin{cases}z=h\\x=0\end{cases}.$$

Comme $\Omega A = \Omega B$, Ω *est dans le plan médiateur de* $[AB]$, $\Omega\begin{vmatrix}0\\y\\z\end{vmatrix}$. *On traduit que* $\mathscr{D}$ *est tangente à la sphère par* $d(\Omega,\mathscr{D} = R = \|A\Omega\|$. *On trouve alors* $2hz = -y^2 - h^2 + a^2$, *c'est une parabole dans le plan médiateur de* $[AB]$.

Exercice 3.28 ♡

On muni l'espace d'un repère orthonormal $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. *On considère la sphère* $\mathscr{S}$ *d'équation :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 11 = 0$$

ainsi que le plan $\mathscr{P}$ *d'équation :*

$$3x - 4z + 19 = 0.$$

1. *Donner le centre* Ω *et le rayon* R *de* $\mathscr{S}$.
2. *Déterminer l'intersection de* $\mathscr{P}$ *et de* $\mathscr{S}$.
3. *Donner une représentation paramétrique de la droite* Δ *perpendiculaire à* $\mathscr{P}$ *qui passe par* Ω.
4. *Trouver les coordonnées des points* M *et* N *de* $\mathscr{S}$ *respectivement le plus proche et le plus éloigné de* $\mathscr{P}$ *en précisant les distances correspondantes (ces points sont sur* Δ*).*

Solution :

1. *On a :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 11 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + \left(y+2\right)^2 + (z+3)^2 = 25$$

Par conséquent $\mathscr{S}$ *est la sphère de centre* $\boxed{\Omega(1,-2,-3)}$ *et de rayon* $\boxed{R=5}$.

2. *Appliquant le cours :*

$$d(\Omega,\mathscr{P}) = \frac{|3\times 1 + 4\times 3 + 19|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{34}{5} > 5$$

L'intersection de $\mathscr{P}$ *et de* $\mathscr{S}$ *est donc vide.*

3. *Un vecteur directeur à* Δ *est un vecteur normal à* $\mathscr{P}$. *Par conséquent le vecteur* $\vec{n}\begin{vmatrix}3\\0\\-4\end{vmatrix}$ *dirige* Δ. *Une équation paramétrique de* Δ *est donc :*

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = -3 - 4t \end{cases}}$$

4. *Les points de* $\mathscr{S}$ *à distance maximale et minimale de* $\mathscr{P}$ *sont les solutions du système :*

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \left(y+2\right)^2 + (z+3)^2 = 25 \\ x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

et sont donc : $\boxed{M\begin{vmatrix}-2\\-2\\1\end{vmatrix}}$ *et* $\boxed{N\begin{vmatrix}4\\-2\\-7\end{vmatrix}}$. *Par suite :*

$$d(M,\mathscr{P}) = \frac{|3\times -2 - 4\times -2 + 19|}{5} = \boxed{\frac{21}{5}} \quad \text{et} \quad d(N,\mathscr{P}) = \frac{|3\times 4 - 4\times -2 + 19|}{5} = \boxed{\frac{39}{5}}$$

Le point le plus près de $\mathscr{P}$ *est donc* M *et le plus loin est* N.

Exercice 3.29 ♡

Montrer qu'il existe une et une seule sphère, dont on déterminera le rayon et le centre, intersectant les plans $x = 1$ *et* $z = -1$ *suivant les cercles d'équations cartésiennes :*

$$\mathscr{C}_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 2y + z^2 + 6z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{C}_2 : \begin{cases} z = -1 \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \end{cases}.$$

Solution : *On a :*

$$y^2-2y+z^2+6z+2=(y-1)^2+(z+3)^2-8 \quad \text{et} \quad x^2-4x+y^2-2y=(x-2)^2+(y-1)^2-5$$

donc $\mathscr{C}_1$ *est le cercle de centre* $\Omega_1\,(1,1,-3)$ *et de rayon* $2\sqrt{2}$, $\mathscr{C}_2$ *est le cercle de centre* $\Omega_2\,(2,1,-1)$ *et de rayon* $\sqrt{5}$. *Le centre* Ω *de la sphère* $\mathscr{S}$ *se trouve à l'intersection de la droite perpendiculaire au plan* $x=1$ *et passant par* Ω_1 *et de la droite perpendiculaire au plan* $z=-1$ *et passant par* Ω_2, *donc* $\Omega\,(2,1,-3)$. *Calculons maintenant son rayon. Le point* $\mathrm{A}\,(0,0,-1)$ *est élément de* $\mathscr{C}_2$ *et donc de* $\mathscr{S}$. *Calculons* $\left\|\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega}\right\|=\sqrt{9}=3$ *et le rayon de* $\mathscr{S}$ *est* 3.

Exercice 3.30 ♡♡

Montrer qu'il existe une et une seule sphère $\mathscr{S}$ *tangente en* $\mathrm{A}\,(1,2,1)$ *à la droite* $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x+y-2z &= 1 \\ 2x-y-3z &= -3 \end{cases}$ *et tangente en* $\mathrm{A}'\,(1,-1-2)$ *à la droite* $\mathscr{D}'$: $\begin{cases} 2x+y+2z &= -3 \\ x-y-z &= 4 \end{cases}$. *On déterminera son centre et son rayon.*

Solution : *Supposons qu'une telle sphère* $\mathscr{S}$ *existe. Notons* $\Omega\left(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega\right)$ *son centre. En utilisant les équations cartésiennes de* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$, *on calcule* $\overrightarrow{u}=(-5,-1,-3)$ *un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$ *et* $\overrightarrow{u}'=(1,4,-3)$ *un vecteur directeur de* $\mathscr{D}'$. *Comme les deux droites sont tangentes à la sphère, on doit avoir* $\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}\cdot\overrightarrow{u}=0$ *et* $\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}'}\cdot\overrightarrow{u'}=0$ *ce qui amène les deux équations :* $5x_\Omega+y_\Omega+3z_\Omega=10$ *et* $x_\Omega+4y_\Omega-3z_\Omega=3$. *Comme* $\mathrm{A},\mathrm{A}'\in\mathscr{S}$, *on doit aussi avoir* $\left\|\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}\right\|=\left\|\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}'}\right\|$ *ce qui amène l'équation :* $y_\Omega+z_\Omega=0$. *On résout alors le système :*

$$\begin{cases} 5x_\Omega+y_\Omega+3z_\Omega &= 10 \\ x_\Omega+4y_\Omega-3z_\Omega &= 3 \\ y_\Omega+z_\Omega &= 0 \end{cases}$$

et on trouve $\Omega\,(76/37,5/37,-5/37)$. *On en déduit que le rayon de* $\mathscr{S}$ *est* $\frac{3}{37}\sqrt{894}$. *Réciproquement, on vérifie que cette sphère convient.*

Chapitre 4

Fonctions usuelles

Pour bien aborder ce chapitre

Our federal income tax law defines the tax y to be paid in terms of the income x ; it does so in a clumsy enough way by pasting several linear functions together, each valid in another interval or bracket of income. An archeologist who, five thousand years from now, shall unearth some of our income tax returns together with relics of engineering works and mathematical books, will probably date them a couple of centuries earlier, certainly before Galileo and Vieta.

Weyl, Hermann ; The mathematical way of thinking

L'objet de ce chapitre est d'introduire les différentes fonctions utilisées de manière usuelles en classe prépa. Aux fonctions logarithme, exponentielle et trigonométriques connues depuis le lycée s'ajouteront les fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque, les fonctions puissances ainsi que les réciproques des fonctions trigonométriques. Nous introduirons aussi une nouvelle famille de fonctions : les fonctions hyperboliques (qui sont à l'hyperbole équilatère ce que les fonctions trigonométriques sont au cercle unité) ainsi que leurs réciproques.

Nous utiliserons à plusieurs reprises dans ce chapitre des théorèmes qui ne seront énoncés et démontrés que beaucoup plus tard dans l'année. Parmi ces théorèmes, notons les trois suivants :

THÉORÈME 4.1 ♡ **Théorème de la bijection**

Soit I un intervalle et soit une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On note $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. On suppose que la fonction f est

- (H1) continue sur I.
- (H2) strictement monotone sur I.

alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et sa bijection réciproque f^{-1} est une fonction *continue* et strictement monotone sur J de même sens que f.

THÉORÈME 4.2 ♡ **Dérivation de la bijection réciproque**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$. On suppose que :

- (H1) f est strictement monotone sur l'intervalle I.
- (H2) f est dérivable sur I.
- (H3) $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \neq 0$

alors f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et son application réciproque, f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

THÉORÈME 4.3 ♡ **La dérivée d'une fonction est identiquement nulle sur un intervalle et seulement si cette fonction est constante sur cet intervalle**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$. On suppose que :

(H1) f est dérivable sur un intervalle I.

alors la fonction f est constante si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) = 0$.

On retrouvera le premier théorème et sa démonstration en 11.52 page 439 et le second en 12.7 page 474. Le troisième sera établi en 12.13 page 478.

`Multimédia : Traceur de courbe réciproque: on donne le graphe d'une fonction. On pointe sur un point du graphe et on obtient son symétrique par rapport à la bissectrice principal On affiche le vecteur tangent en ce point au graphe initial et on obtient le vecteur tangent au graphe de la réciproque correspondant. En cliquant sur un bouton, on affiche le graphe entier de la réciproque.`

4.1 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

4.1.1 Logarithme népérien

Nous verrons au chapitre 13 dans le théorème 13.30 page 531 que toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ possède une primitive sur cet intervalle (voir 13.30). La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ admet donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourrait montrer, mais c'est difficile, que l'on ne peut exprimer cette primitive avec des fonctions usuelles (fonctions polynomiales, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques). Il faut donc introduire une nouvelle fonction.

DÉFINITION 4.1 ♡ **Logarithme népérien**

On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

$$\ln : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{array} \right.$$

Remarque 4.1 $ln(1) = 0$

THÉORÈME 4.4 ♡ **Propriétés de la fonction** ln

- La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x}}$.
- La fonction ln est même $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui signifie qu'elle est dérivable et que toutes ses dérivées sont dérivables.
- La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

Démonstration *Les primitives d'une fonction sont, par définition, dérivables. La fonction* ln *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*. Une fonction est continue là où elle est dérivable (voir la proposition 12.2 page 471). Donc* ln *est dérivable et par suite continue sur* $\mathbb{R}_+^*$*. Sa dérivée, qui est la fonction* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ *est* $\mathscr{C}^\infty$ *donc il en est de même de* ln*. Comme la dérivée* f *de* ln *est une fonction strictement positive,* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$*. Enfin, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = -1/x^2$ *est strictement négative sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc* ln *est concave. Vous pouvez consulter le paragraphe 12.5 page 481 qui traite de ce sujet.*

COROLLAIRE 4.5

Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable. La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée, pour tout $x \in \mathrm{I}$: $\boxed{(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème de composition des fonctions dérivables.*

PROPOSITION 4.6 ♡ **Propriétés algébriques du logarithme**
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$

1. $\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$
2. $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x}$
3. $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y}$
4. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x}$

Démonstration ♡

1. *La méthode pour prouver cette égalité est classique, il faut la retenir. Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$ et notons θ_y la fonction*

$$\theta_y : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(xy) - \ln x - \ln y \end{cases}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et différence de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta_y'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

D'après le théorème 4.3, θ_y est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta_y(x) = c$. Déterminons cette constante. $c = \theta_y(1) = \ln y - \ln 1 - \ln y = 0$. Ce qui prouve que, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\theta_p(x) = \ln(xy) - \ln x + \ln y = 0$.

2. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par application de la proposition précédente, on a les égalités*

$$0 = \ln 1 = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln\left(x.\frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{x}.$$

desquelles découlent le résultat.

3. *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, par application des deux dernières égalités*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x.\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

4. *Par récurrence.*

PROPOSITION 4.7 ♡ **Limites aux bornes du domaine de définition**

$$\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty \quad \text{et} \quad \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Démonstration ♡

– *La fonction ln est strictement croissante et $\ln 1 = 0$, donc $\ln 2 > 0$. D'après la dernière égalité de la proposition précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\ln(2^n) = n \ln 2$. On en déduit que $\ln(2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La fonction $\ln$ n'est donc pas majorée. Comme elle est strictement croissante, on peut affirmer, par application du théorème de la limite monotone 11.25, que $\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.*
– *Par application du théorème d'opérations sur les limites et par utilisation de la limite précédente,*

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty.$$

DÉFINITION 4.2 **Nombre de Néper**
On appelle *nombre de Néper* l'unique réel e vérifiant $\ln e = 1$.

Démonstration *L'existence du nombre de Néper est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires qui sera vu dans le chapitre 12. L'unicité est une conséquence directe de la stricte monotonie de* $\ln$.

PROPOSITION 4.8 ♡ **Limites usuelles pour** $\ln$

- « $\ln x$ est négligeable devant x quand x tend vers $+\infty$ » : $\boxed{\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.
- « $\ln x$ est négligeable devant $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 » : $\boxed{x \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}$.

Démonstration

– *Pour tout* $t \geqslant 1$*, on a* $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$*. Fixons* $x \geqslant 1$*. Il vient que* $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ *ce qui s'écrit aussi* $\ln x \leqslant 2\left(\sqrt{x}-1\right) \leqslant 2\sqrt{x}$*. Divisant cette inégalité par* x*, on obtient* $0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$ *ce qui amène, par application du théorème des gendarmes 11.19,* $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

– *Par ailleurs :* $X\ln X \overset{x=1/X}{=\!=\!=} -\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$.

PROPOSITION 4.9 ♡ **Limites usuelles pour** $\ln$

- « La fonction ln est dérivable en 1 et $\ln' 1 = 1$ » $\boxed{\frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1}$.
- Cette limite s'écrit aussi sous la forme $\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}$.

Démonstration

– *Le taux d'accroissement de* $\ln$ *en* 1 *est donné par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad \Delta(x) = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1}.$$

Comme $\ln$ *est dérivable en* $x=1$ *et que* $\ln' 1 = \frac{1}{1} = 1$*, on a bien* $\lim_{x\to 0} \Delta(x) = 1$.

– *La seconde égalité se prouve grâce à un changement de variable :* $\frac{\ln(x)}{x-1} \overset{X=x-1}{=\!=\!=} \frac{\ln(1+X)}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1$

PROPOSITION 4.10 ♡ **Inégalité de convexité**

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x}$$

Démonstration ♡ *Il suffit d'étudier le signe de la fonction* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) - x \end{array} \right.$

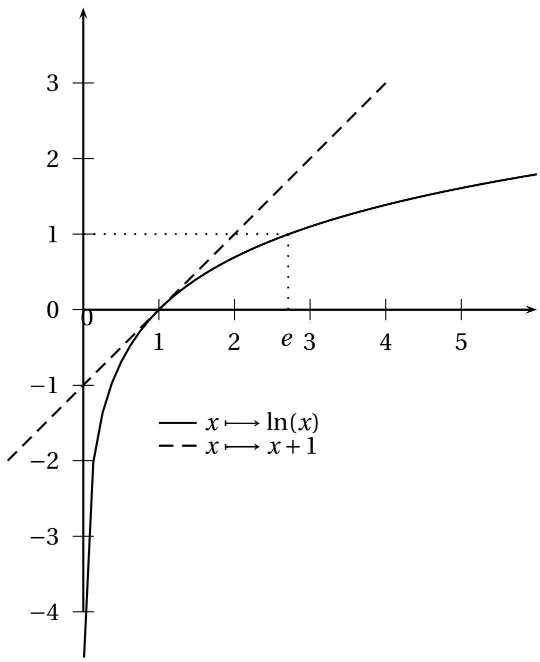


FIGURE 4.1 – Logarithme néperien

Remarque 4.2 La tangente en $(e,1)$ passe par l'origine du repère.

4.1.2 Exponentielle népérienne

PROPOSITION 4.11 ♡ **Exponentielle népérienne**
La fonction ln définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée *fonction exponentielle népérienne* et est notée exp.

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto & \exp y \end{array} \right.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \boxed{\exp(\ln x) = x}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\ln(\exp y) = y}$$

La fonction exp
- est strictement croissante et strictement positive.
- est continue $\mathbb{R}$.
- est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$.
- est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
exp	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration ♡ *Posons $f = \ln$. La fonction f est :*

(H1) *dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*

(H2) *de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$*

(H3) *donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$*

Par application du théorème de la bijection 4.2, on peut affirmer que f est bijective et que sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus si $y_0 \in \mathbb{R}$

$$f'^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(y_0)}} = f^{-1}(y_0)$$

Notons exp *la fonction f^{-1}, nous venons de montrer que $\exp'(y_0) = \exp(y_0)$. Il est alors clair que* exp *est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, on a $\exp x \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$ et comme $\ln x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$, on a $\exp x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.*

Remarque 4.3 $\exp 0 = 1$ et $\exp 1 = e$

PROPOSITION 4.12 ♡ **Propriétés algébriques de la fonction exponentielle**
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

1. $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$
2. $\boxed{\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}}$
3. $\boxed{\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}}$
4. $\boxed{\exp(nx) = (\exp(x))^n}$

Démonstration ♡ *Démontrons la première affirmation. Les autres se prouvent de même. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Comme* exp *est la bijection réciproque de* ln*, il existe $x', y' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\ln(x') = x$ et $\ln(y') = y$. On peut alors écrire*

$$\exp(x+y) = \exp(\ln x' + \ln y') = \exp(\ln(x'y')) = x'y' = \exp(x)\exp(y').$$

Notation 4.1 D'après la formule 4, $\exp(n) = \exp(1.n) = e^n$, on conviendra de noter pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = exp(x)$.

PROPOSITION 4.13 **1**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\exp x \geqslant 1 + x}$$

Démonstration ♡ *Il suffit d'étudier le signe de la fonction*

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp x - (x+1) \end{cases}$$

PROPOSITION 4.14 ♡ **Limites usuelles pour** exp

- « $\exp x$ est prépondérant devant x quand x tend vers $+\infty$ » : $\boxed{\dfrac{\exp x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$.
- « $\exp x$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers $-\infty$ » : $\boxed{x \exp x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0}$.
- « $\exp x$ est dérivable en $x=0$ de dérivée égale à 1 » : $\boxed{\dfrac{\exp x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}$.

Démonstration ♡

– *Comme* $\frac{\exp x}{x} \overset{x=\ln X}{=\!=} \frac{X}{\ln X} = \frac{1}{\frac{\ln X}{X}}$, *il vient* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = +\infty$.

– *La seconde limite se démontre de la même façon.*

– *Écrivons le taux d'accroissement* Δ *de* exp *en* 0. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$

$$\Delta(x) = \frac{\exp x - \exp 0}{x - 0} = \frac{\exp x - 1}{x}.$$

Comme exp *est dérivable en* 0 *et que* $exp'(0) = \exp(0) = 1$, $\Delta(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *et la dernière limite est prouvée.*

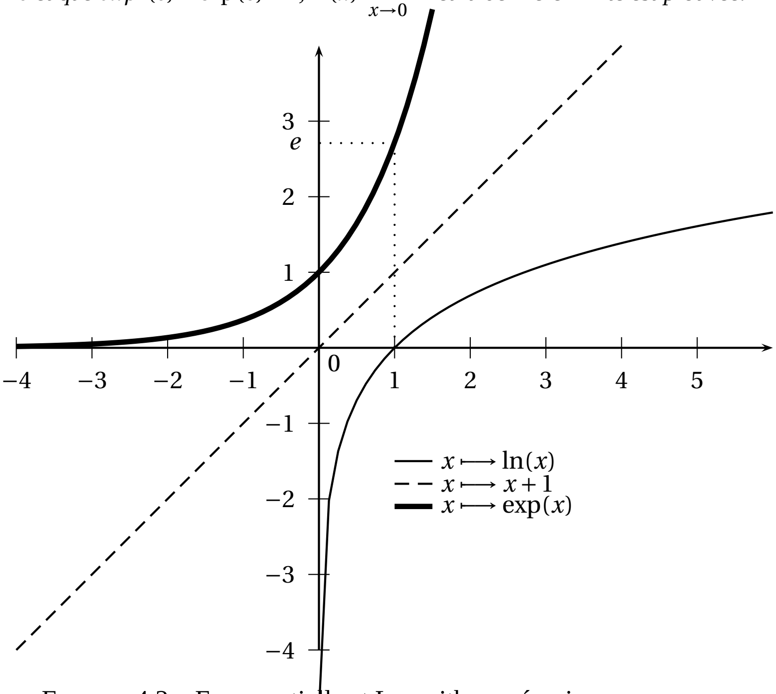


FIGURE 4.2 – Exponentielle et Logarithme néperien

4.1.3 Logarithme de base quelconque

DÉFINITION 4.3 **Logarithme de base** a
Soit a un réel strictement positif et différent de 1 : $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle *logarithme de base* a l'application notée $\log_a$ définie par

$$\log_a x : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{cases}$$

Remarque 4.4

– Si $a = 10$, on obtient le *logarithme décimal* qu'on note log.
– Si $a = e$, $\log_a = \ln$.
– $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$.

PROPOSITION 4.15
Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$..

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$
3. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a x^n = n \log_a x$

Démonstration *Ces différentes égalités se démontrent en revenant à la définition de* $\log_a$ *et en utilisant les propriétés du logarithme néperien.*

PROPOSITION 4.16
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

– Si $a \in]1; +\infty[$, $\log_a$ est strictement croissante et concave.
– Si $a \in]0; 1[$, $\log_a$ est strictement décroissante et convexe.

Démonstration *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. *La fonction* $\log_a$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *comme quotient de fonctions* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a'(x) = 1/(x \ln a)$ et $\log_a''(x) = -1/\left(x^2 \ln a\right)$.
– *Si* $a \in]1; +\infty[$, *alors* $\ln a > 0$, $\log_a'$ *est donc strictement positive et* $\log_a''$ *est strictement négative. Donc* $\log_a$ *est strictement croissante et concave.*
– *Si* $a \in]0; 1[$, *alors* $\ln a < 0$, $\log_a'$ *est donc strictement négative et* $\log_a''$ *est strictement positive. Donc* $\log_a$ *est strictement décroissante et convexe.*

4.1.4 Exponentielle de base a

PROPOSITION 4.17 **Exponentielle de base a**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction $\log_a$ définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *exponentielle de base a* et on note $\exp_a$, la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ comme application réciproque de $\log_a$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exp_a(\ln_a x) = x$$
$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \ln_a\left(\exp_a y\right) = y$$

De plus, $\exp_a'$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a'(x) = \ln a \exp_a(x)$$

Démonstration *Soit* $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. *Posons* $f = \log_a$. *La fonction* f

- (H1) *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- (H2) *possède une dérivée sur* $\mathbb{R}_+^*$ *strictement positive si* $a \in]1; +\infty[$ *et strictement négative si* $a \in]0; 1[$
- (H3) *et est donc strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *si* $a \in]1; +\infty[$ *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *si* $a \in]0; 1[$.

Par application du théorème de la bijection 4.2, on peut affirmer que f *possède une bijection réciproque* f^{-1} *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$. *De plus si* $y_0 \in \mathbb{R}$

$$f'^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\ln a f^{-1}(y_0)}} = \ln a f^{-1}(y_0).$$

Notant $\exp_a$ *la fonction* f^{-1}, *on vient de montrer que :* $\exp_a'(y_0) = \ln a \exp_a(y_0)$. *Il est alors clair que* $\exp_a$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 4.18
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(y) = \exp(y \ln(a))}.$$

Démonstration *Soit* $y \in \mathbb{R}$. *Posons* $x = \exp_a(y)$. *On a* $\log_a(x) = y$ *ou encore* $\dfrac{\ln x}{\ln a} = y$ *ce qui donne* $\ln x = y \ln a$ *et en passant à l'exponentielle* $x = \exp\left(y \ln a\right)$. *On a bien prouvé que* $\exp_a(y) = \exp(y \ln(a))$

PROPOSITION 4.19
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1. $\exp_a 0 = 1$ et $\exp_a 1 = a$
2. $\exp_a (x+y) = \exp_a (x) \exp_a (y)$
3. $\exp_a (x-y) = \dfrac{\exp_a (x)}{\exp_a (y)}$
4. $\exp_a (nx) = \left(\exp_a x\right)^n$
5. $\exp_a x \exp_b x = \exp_{ab} x$
6. $\dfrac{\exp_a x}{\exp_b x} = \exp_{\frac{a}{b}} x$

Démonstration *Il suffit d'appliquer la formule précédente et les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.*

Notation 4.2 S'inspirant de la dernière égalité de la propriété précédente, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et si $x \in \mathbb{R}$, on notera

$$a^x = \exp_a (x) = \exp(x \ln a).$$

Remarque 4.5
– On retrouve la notation précédente $\exp x = e^x$.
– Remarquons aussi que $1^x = \exp(x \ln 1) = 1$.

Avec ces notations, la propriété précédente devient :

PROPOSITION 4.20 ♡
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1. $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
2. $a^{x+y} = a^x a^y$
3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
4. $a^{nx} = (a^x)^n$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

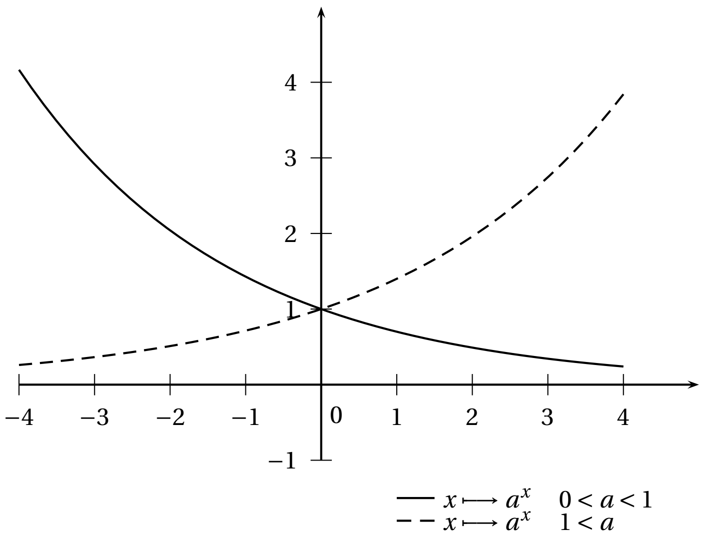


FIGURE 4.3 – Exponentielles de base a

4.1.5 Fonctions puissances

DÉFINITION 4.4 ♡ **Fonction puissance**
Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle *fonction puissance d'exposant a* la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a = \exp(a \ln x) \end{array} \right.$$

Remarque 4.6
– φ_0 est la fonction constante égale à 1.
– $\varphi_1 = \mathrm{I}d$. algébriques

PROPOSITION 4.21 ♡ **Propriétés algébriques des fonctions puissances**
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

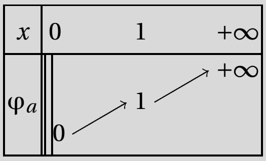
1. $x^{a+b} = x^a x^b$
2. $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$
3. $(xy)^a = x^a y^a$
4. $(x^a)^b = x^{ab}$
5. $x^0 = 1$
6. $1^a = 1$
7. $\ln(x^a) = a \ln x$

Démonstration *C'est une conséquence directe de la définition et des propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.*

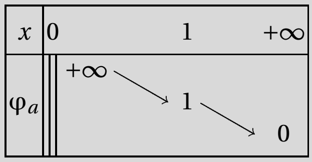
PROPOSITION 4.22 ♡
Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^a \end{array} \right.$ est

– continue $\mathbb{R}_+^*$.
– dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_a'(x) = a x^{a-1}$.
– de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus,
– si $a > 0$, φ_a est croissante, $\varphi_a(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ et $\varphi_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.



– Si $a = 0$, $\varphi_a : x \to x^0 = 1$ est constante.
– Si $a < 0$, φ_a est décroissante, $\varphi_a(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et $\varphi_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.



– Si $a > 1$ ou si $a < 0$, φ_a est convexe et si $0 < a < 1$, φ_a est concave.

Démonstration *φ_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. De plus, par application du théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\varphi_a'(x) = \frac{a}{x} \exp(a \ln x) = a x^{-1} x^a = a x^{a-1}.$$

Compte tenu du signe de cette dérivée, qui est donné par celui de a, on en déduit les variations de φ_a. Calculons la limite de φ_a en $+\infty$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^a = \exp(a \ln x)$. De plus : $\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
– *Si $a > 0$, $a \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et par composition de limite : $x^a = \exp(a \ln x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.*
– *Si $a = 0$, $0 = a \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et : $x^a = x^0 = 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.*
– *Si $a < 0$, $a \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et par composition de limite : $x^a = \exp(a \ln x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.*
La limite en 0 se calcule de même.

Remarque 4.7
– Si $a > 0$, on peut prolonger φ_a par continuité en 0 en posant $\varphi_a(0) = 0$.
– Si $a > 1$, φ_a est même dérivable en 0 : $\varphi_a'(0) = 0$.
– Si $0 < a < 1$, $\varphi_a'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ et le graphe de φ_a possède une tangente verticale à l'origine.

⚠ *Attention 4.3* Pour dériver une fonction de la forme $w(x) = u(x)^{v(x)}$ (là où elle est définie et dérivable...), il faut au préalable la mettre sous la forme $w(x) = \ exp(v(x)\ln(u(x)))$ puis utiliser la formule de dérivation des fonctions composées. A titre d'exercice, on montrera que :

$$w'(x) = w(x)\left(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

4.1.6 Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles

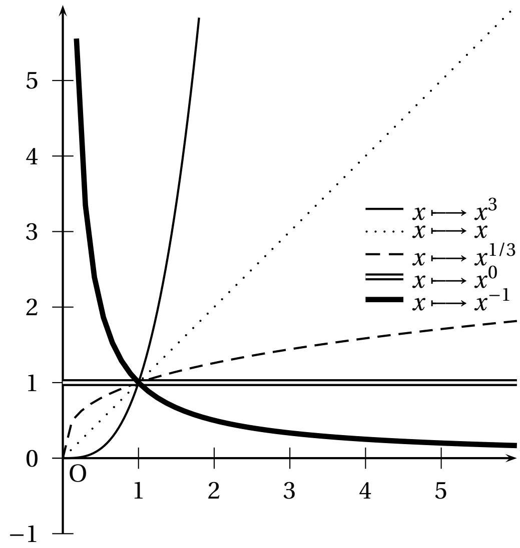


FIGURE 4.4 – Fonctions puissances

PROPOSITION 4.23 ♡♡♡
Pour tout $\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$\boxed{\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} \qquad \boxed{x^\beta \, |\ln x|^\gamma \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

Démonstration *Comme* $\beta, \gamma > 0$ *:*

$$\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\gamma}}}\right)^\gamma = \left(\frac{\gamma}{\beta} \frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\gamma}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\gamma}}}\right)^\gamma \underset{X = x^{\frac{\beta}{\gamma}}}{=\!=} \left(\frac{\gamma}{\beta} \frac{\ln(X)}{X}\right)^\gamma \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$$

par composition de limite et par utilisation de la limite usuelle $\frac{\ln X}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$*. La seconde limite se prouve de même.*

COROLLAIRE 4.24 ♡♡♡
Pour tout $\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$\boxed{\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty} \qquad \boxed{|x|^\beta e^{\alpha x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0}$$

Démonstration *La démonstration est identique à la précédente.*

4.2 Fonctions circulaires réciproques

4.2.1 Rappels succincts sur les fonctions trigonométriques

Effectuons un rappel sur les fonctions trigonométriques.

PROPOSITION 4.25 ♡ **Fonction sinus**
La fonction *sinus*, notée sin est :
- définie sur $\mathbb{R}$.
- à valeurs dans $[-1, 1]$.
- impaire.
- 2π-périodique.

– continue sur $\mathbb{R}$.
– dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin' x = \cos x$$

– de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, la restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est strictement croissante.

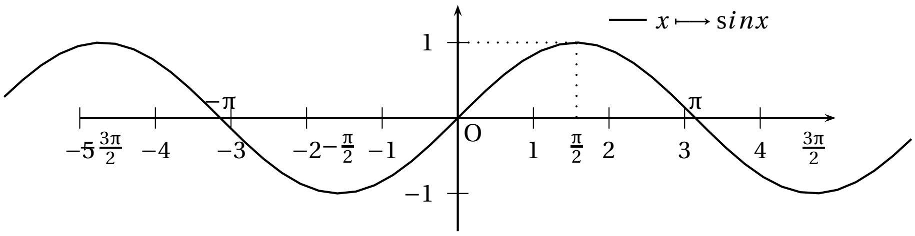


FIGURE 4.5 – Fonction sinus

PROPOSITION 4.26 ♡ **Fonction cosinus**
La fonction *cosinus*, notée cos est :
– définie sur $\mathbb{R}$.
– à valeurs dans $[-1,1]$.
– paire.
– 2π-périodique.
– continue sur $\mathbb{R}$.
– dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos' x = -\sin x$$

– de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, la restriction de la fonction cosinus à $[0,\pi]$ est strictement décroissante.

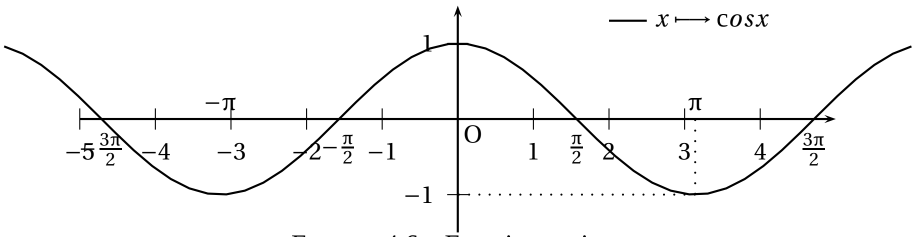


FIGURE 4.6 – Fonction cosinus

PROPOSITION 4.27 ♡ **Fonction tangente**
La fonction *tangente*, notée tan, et donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

est :
– définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
– à valeurs dans $\mathbb{R}$.
– impaire.
– π-périodique.
– continue $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
– dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

– de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

De plus, la restriction de la fonction tangente à $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est strictement croissante.

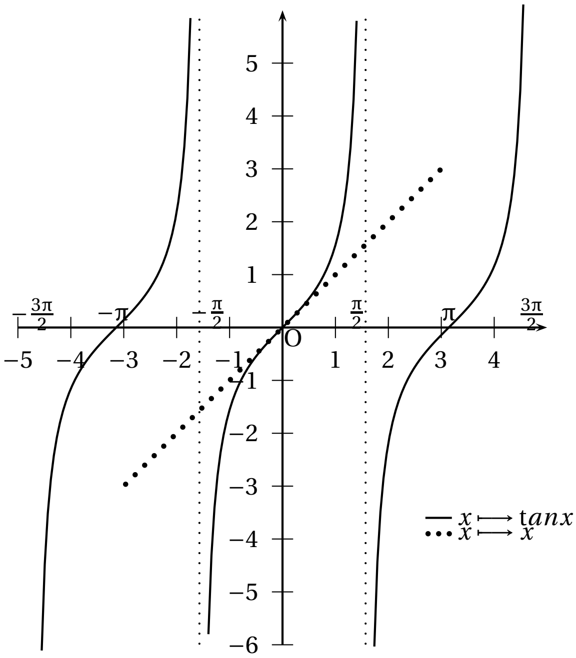


FIGURE 4.7 – Fonction tangente

Remarque 4.8 On prouve la dérivabilité des fonctions trigonométriques dans l'exercice 4.13 page 185.

4.2.2 Fonction Arcsinus

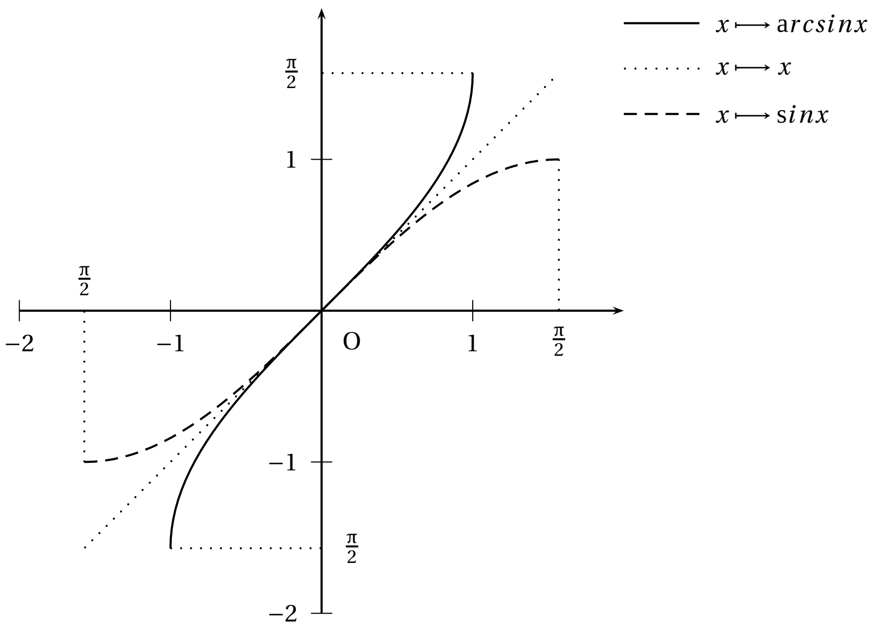


FIGURE 4.8 – Fonctions sinus et arcsinus

PROPOSITION 4.28 ♡ **Fonction arcsinus**

La fonction sinus est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$. La bijection réciproque est appelée *fonction arcsinus* et est notée arcsin

$$\arcsin : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & \longmapsto & \arcsin y \end{array} \right. .$$

$$\forall y \in [-1,1], \qquad \sin(\arcsin y) = y$$
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \arcsin(\sin x) = x$$

De plus, la fonction arcsin
– est strictement croissante sur $[-1,1]$.
– est impaire.
– est continue sur $[-1,1]$.
– est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

– de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
– réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$

y	-1		0		1
$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\Vert$	$+$	1	$+$	$\Vert$
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Démonstration ♡ *La fonction sinus, sur l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *est*

(H1) *continue*

(H2) *strictement croissante.*

Par application du théorème de la bijection 11.52, on peut affirmer que la fonction sinus, restreinte à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *définie une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1;1]$. *La bijection réciproque, nommée* arcsin, *est définie sur* $[-1;1]$ *et à valeurs dans* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. *Posons* $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *La fonction sinus est de plus*

(H1) *strictement monotone sur* I

(H2) *dérivable sur* I.

(H3) *et vérifie* $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \sin'(x) = \cos x \neq 0$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la bijection réciproque 4.2 et affirmer que arcsin *est dérivable sur* $\mathrm{J} = \sin \mathrm{I} =]-1,1[$. *Pour tout* $y \in \mathrm{J}$, *on a*

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Mais

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1-y^2}$$

car la fonction cosinus est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et donc* $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. *On vérifie sans peine les propriétés restantes.*

4.2.3 Fonction Arccosinus

PROPOSITION 4.29 ♡ **Fonction arccosinus**
La fonction cosinus est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Sa bijection réciproque est appelée *fonction arccosinus* et est notée arccos :

$$\arccos : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ y & \longmapsto & \arccos y \end{cases}$$

$$\forall y \in [-1,1], \qquad \cos(\arccos y) = y$$
$$\forall x \in [0,\pi], \qquad \arccos(\cos x) = x$$

De plus arccos :
– est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

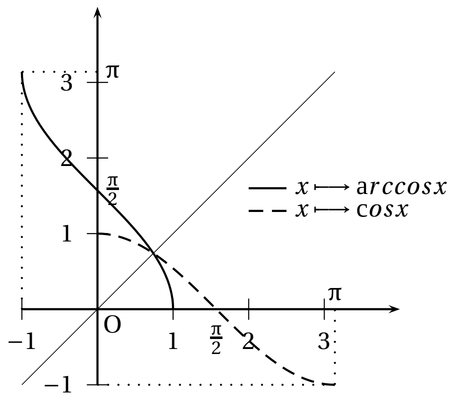


FIGURE 4.9 – Fonctions cosinus et arccosinus

– est continue sur $[-1,1]$.
– est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos' y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

– est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
– réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$

y	-1		0		1
$-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\Vert$	$-$	-1	$-$	$\Vert$
arccos	$-\pi$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Démonstration ♡ *La fonction cosinus, sur l'intervalle $[0,\pi]$ est*

(H1) *continue.*

(H2) *strictement décroissante.*

Par application du théorème de la bijection 11.52, on peut affirmer que la fonction cosinus, restreinte à l'intervalle $[0,\pi]$, définie une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque, nommée arccos*, est définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[0,\pi]$. La fonction cosinus est de plus, avec $I =]0,\pi[$:*

(H1) *strictement monotone sur* I

(H2) *dérivable sur* I.

(H3) *et vérifie* $\forall x \in I, \quad \cos'(x) = -\sin x \neq 0$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la bijection réciproque 4.2. La fonction arccos *est dérivable sur $J = \cos I =]-1,1[$ et pour tout $y \in J$, on a*

$$\arccos' y = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = \frac{1}{-\sin(\arccos y)}$$

Mais

$$\sin(\arccos y) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos y)} = \sqrt{1-y^2}$$

car la fonction sinus est positive sur $]0,\pi[$. Donc $\arccos' y = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$*. On vérifie sans peine les propriétés restantes.*

PROPOSITION 4.30 **Les graphes des fonctions arcsinus et arccosinus sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \pi/4$**

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration ♡ *La preuve est laissée en exercice. Il suffit de dériver la fonction* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos x + \arcsin x \end{array} \right.$ *et d'appliquer le théorème 4.3.*

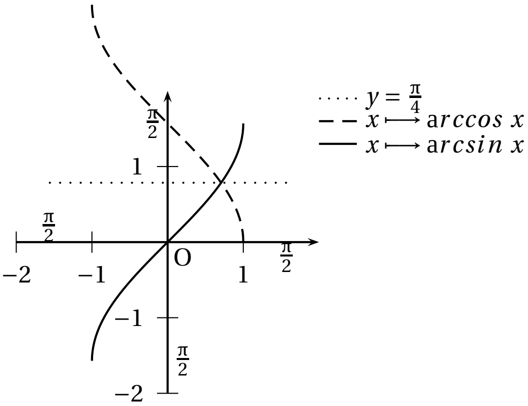


FIGURE 4.10 – Symétrie des graphes des fonctions arcsinus et arccosinus par rapport à la droite $y = \frac{\pi}{4}$

4.2.4 Fonction Arctangente

PROPOSITION 4.31 ♡ **Fonction arctangente**

La fonction tangente est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée *fonction arctangente* et est notée arctan :

$$\arctan : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y & \longmapsto & \arctan y \end{array} \right.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \tan\left(\arctan y\right) = y$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \arctan(\tan x) = x$$

La fonction arctan
- est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- est impaire.
- est continue sur $\mathbb{R}$.
- est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan' y = \frac{1}{1+y^2}}$$

- est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

y	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{1+y^2}$		+	1	+	
arctan	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

Démonstration ♡ *La fonction tangente est*

(H1) *strictement monotone sur* I

(H2) *dérivable sur* I.

(H3) *et vérifie* $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la bijection réciproque 4.2. On en déduit que tan *est bijective et que sa bijection réciproque* arctan *est dérivable sur* $\mathrm{J} = \tan(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$. *Pour tout* $y \in \mathrm{J}$

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan'\left(\arctan y\right)} = \frac{1}{1+\tan^2\left(\arctan y\right)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

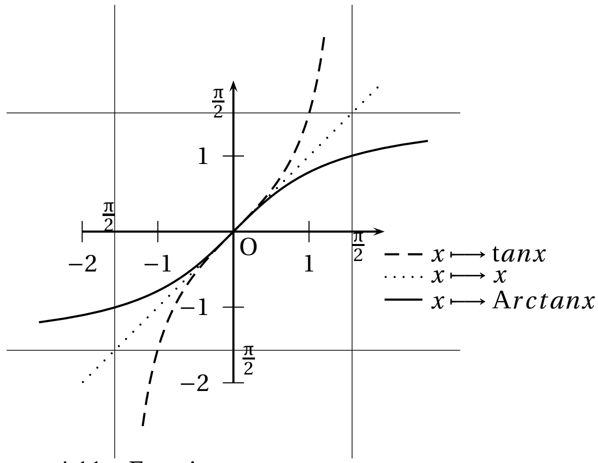


FIGURE 4.11 – Fonctions tangentes et arctangentes

On vérifie sans peine les propriétés restantes.

PROPOSITION 4.32 ♡
Pour tout $x \in \mathrm{R}^*$:

♡ **4.1**

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration ♡ *La preuve est laissée en exercice. Il suffit, là encore, de dériver la fonction* $\theta : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ *sur les intervalles* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathbb{R}_-^*$ *puis d'appliquer le théorème 4.3.*

4.3 Fonctions hyperboliques

4.3.1 Définitions et premières propriétés

Sinus et Cosinus hyperboliques

DÉFINITION 4.5 ♡♡ **Sinus et Cosinus hyperboliques**
Les fonctions *sinus hyperbolique* sh et *cosinus hyperbolique* ch sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Remarque 4.9 Toute fonction $f : \mathrm{I} \subset \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

En effet, $x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ est paire , $x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ est impaire. Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle dans cette décomposition.

PROPOSITION 4.33 ♡
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x = e^x$
2. $\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = e^{-x}$
3. $\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$

Démonstration *Calculs immédiats.*

PROPOSITION 4.34 ♡

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x}.$$

Démonstration *Calculs immédiats.*

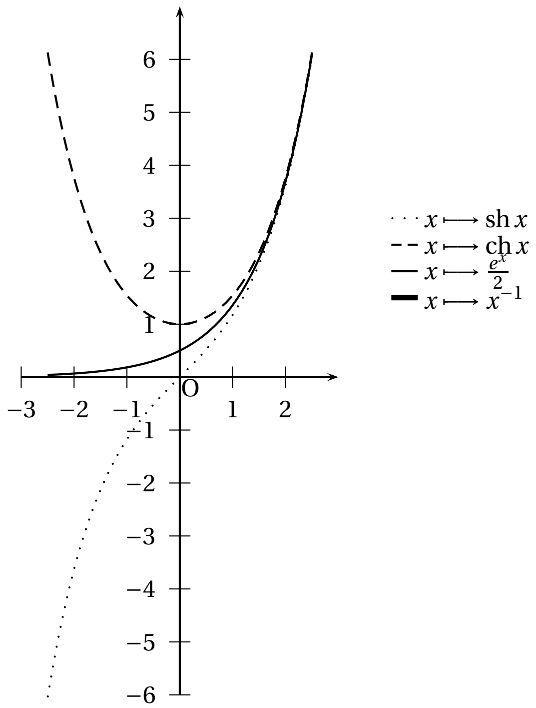


FIGURE 4.12 – Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

PROPOSITION 4.35 ♡

– La fonction sh est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 0.
– La fonction ch est paire, strictement positive sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch} x$		+	1	+	
sh	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh} x$		−	0	+	
ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Démonstration

- *Les fonctions* ch *et* sh *sont de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *comme combinaison linéaire de fonctions* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*. Appliquant les théorèmes de dérivation, on vérifie sans peine les formules annoncées pour leurs dérivées respectives.*
- sh *et* ch *sont respectivement impaire et paire par construction.*
- ch *est une fonction strictement positive sur* $\mathbb{R}$ *car la fonction exponentielle est strictement positive sur* $\mathbb{R}$*. Par conséquent,* sh *a une dérivée strictement positive sur* $\mathbb{R}$ *et est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*.*
- *Par application des propriétés sur les limites d'après les limites de la fonction exponentielle à ses bornes, on vérifie sans peine les limites annoncées.*
- *Évaluant* sh *en* 0*, on vérifie immédiatement qu'elle s'annule en* 0*. Comme elle est strictement croissante et continue, on en déduit qu'elle est strictement négative sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et strictement positive sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*
- *La fonction dérivée de* ch *sur* $\mathbb{R}$ *étant* sh*, on déduit de cette dernière propriété que* ch *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

Tangente hyperbolique

DÉFINITION 4.6 ♡ **Tangente hyperbolique**
La fonction *tangente hyperbolique*, notée th, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{th}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\end{array}\right.$$

Remarque 4.10 La fonction th est bien définie car la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

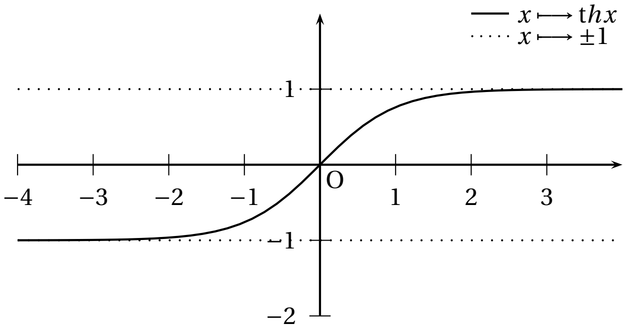


FIGURE 4.13 – Fonction tangente hyperbolique

PROPOSITION 4.36 ♡
La fonction th est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathrm{th}'\,x = 1 - \mathrm{th}^2\,x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}}$$

Par conséquent, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0. Elle admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ et en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'\,x$		$+$	1	$+$	
th	-1	↗	0	↗	$+1$

Démonstration ♡ th *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *comme quotient de fonctions de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, son dénominateur ne s'annulant jamais. Appliquant les formules de dérivation d'un quotient, si* $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{th}'\,x = \frac{\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^2\,x} = 1 - \mathrm{th}^2\,x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}$$

L'imparité est facile à prouver. Pour les limites aux bornes du domaine, par factorisation et utilisation des limites usuelles, on obtient

$$\mathrm{th}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x}\,\frac{1 - \frac{e^{-x}}{e^x}}{1 + \frac{e^{-x}}{e^x}} = \frac{1 - \frac{e^{-x}}{e^x}}{1 + \frac{e^{-x}}{e^x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

$$\mathrm{th}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\,\frac{\frac{e^x}{e^{-x}} - 1}{\frac{e^x}{e^{-x}} + 1} = \frac{\frac{e^x}{e^{-x}} - 1}{\frac{e^x}{e^{-x}} + 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$$

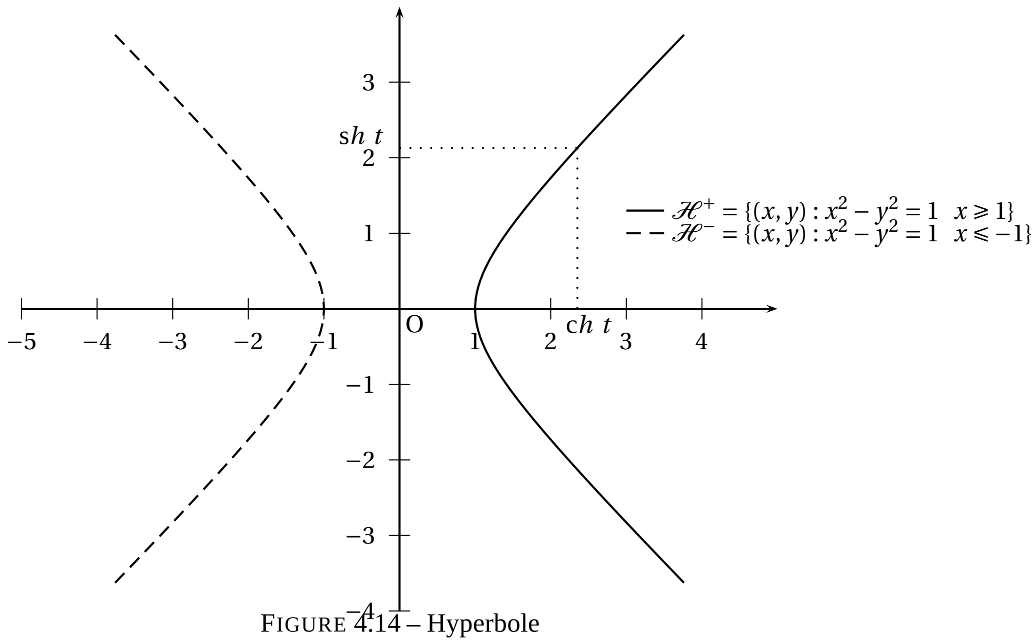


FIGURE 4.14 – Hyperbole

4.3.2 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

Tout comme les fonctions cosinus et sinus permettent de paramétrer le cercle unité, les fonctions ch et sh donnent une paramétrisation de l'hyperbole équilatère de sommets $(1,0)$ et $(-1,0)$. Le formulaire de trigonométrie hyperbolique ressemble fort au formulaire de trigonométrie classique. On le trouvera dans l'annexe E paragraphe E.2.
Donnons à titre d'exemples les formules d'addition.

PROPOSITION 4.37 ♡ **Formules d'addition pour les fonctions hyperboliques**
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y \\ \operatorname{ch}(x-y) &= \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y \\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y \\ \operatorname{sh}(x-y) &= \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y - \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(x+y) &= \frac{\operatorname{th}x + \operatorname{th}y}{1 + \operatorname{th}x \operatorname{th}y} \\ \operatorname{th}(x-y) &= \frac{\operatorname{th}x - \operatorname{th}y}{1 - \operatorname{th}x \operatorname{th}y} \end{aligned}$$

4.3.3 Fonctions hyperboliques inverses

Fonction argument sinus hyperbolique argsh

PROPOSITION 4.38 ♡ **Fonction argument sinus hyperbolique**
La fonction sinus hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée *fonction argument sinus hyperbolique* et notée argsh :

$$\operatorname{argsh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{argsh} y \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \quad & \operatorname{sh}\left(\operatorname{argsh} y\right) = y \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad & \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = x \end{aligned}$$

La fonction argsh
- est impaire.
- est continue sur $\mathbb{R}$.
- est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}}$$

– est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
– réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
– est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$		$+$	1	$+$	
argsh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration ♡ *La fonction sinus hyperbolique, sur l'intervalle* $\mathbb{R}$

(H1) *est strictement monotone*

(H2) *est dérivable*

(H3) *et vérifie :* $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\, x \neq 0$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la bijection réciproque 4.2 et affirmer que sh *est bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Sa bijection réciproque* argsh *est de plus dérivable sur* $\mathrm{sh}\,\mathbb{R} = \mathbb{R}$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{argsh}'\, y = \frac{1}{\mathrm{sh}'\left(\mathrm{argsh}\, y\right)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\mathrm{argsh}\, y\right)}$$

Mais

$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{argsh}\, y\right) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\left(\mathrm{argch}\, y\right)} = \sqrt{1+y^2}$$

car la fonction cosinus hyperbolique est positive sur $\mathbb{R}$*. Donc* $\mathrm{argsh}'\, y = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$*. On vérifie sans peine les propriétés restantes.*

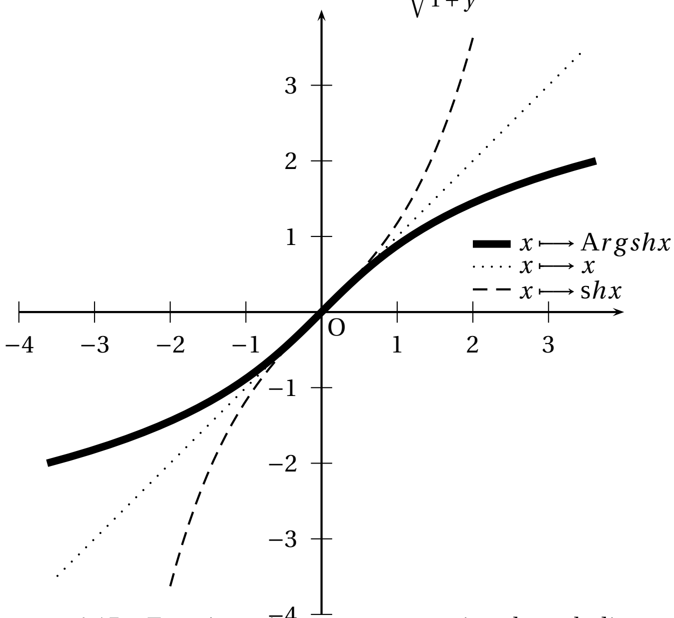


FIGURE 4.15 – Fonctions sinus et argument sinus hyperboliques

Expression logarithmique :
On résout l'équation $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ soit $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. En posant $\mathrm{T} = e^x$, on résout $\mathrm{T}^2 - 2y\mathrm{T} - 1 = 0$. On a deux racines $\mathrm{T}_1 = y + \sqrt{1+y^2}$ et $\mathrm{T}_2 = y - \sqrt{1+y^2}$ dont une seule est positive. D'où $x = \ln \mathrm{T}_1 = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.
Donc $\mathrm{argsh}\, y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

Vérification : Lorsqu'on dérive $f(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ on obtient $f'(y) = \dfrac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}}{1+\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}}{1+\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.
Comme $f(0) = 0$, on a bien $f(y) = \mathrm{argsh}\, y$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Fonction Argument cosinus hyperbolique argch

PROPOSITION 4.39 ♡ **Fonction argument cosinus hyperbolique**

La fonction cosinus hyperbolique, restreinte à $\mathbb{R}_+$, définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $[1,+\infty[$. L'application réciproque est appelée *argument cosinus hyperbolique* et est notée argch.

$$\operatorname{argch}: \begin{cases} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{argch} y \end{cases}$$

$$\forall y \in [1,+\infty[, \qquad \operatorname{ch}\left(\operatorname{argch} y\right) = y$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = x$$

La fonction argch

- est continue sur $[1,+\infty[$.
- est dérivable sur $]1,+\infty[$ et :

$$\boxed{\forall y \in\,]1,+\infty[, \quad \operatorname{argch}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}}$$

- est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
- réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.

y	1 $\qquad$ $+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$	$\Vert$ $\quad$ +
argch	0 $\nearrow$ $+\infty$

Démonstration ♡ *La fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle* $\mathbb{R}_+$, *est*

(H1) *continue.*

(H2) *strictement croissante.*

Par application du théorème de la bijection 4.1, on peut affirmer que la fonction cosinus hyperbolique définie une bijection de $I = \mathbb{R}_+$ *sur son image* $J = [1,+\infty[$. *La bijection réciproque, nommée* argch, *est définie sur* $J = [1,+\infty[$ *et à valeurs dans* $I = \mathbb{R}_+$. *La fonction cosinus hyperbolique est de plus*

(H1) *strictement monotone sur* I

(H2) *dérivable sur* I.

(H3) *et vérifie :* $\forall x \in I, \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x \neq 0$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la fonction réciproque 4.2 et affirmer que argsh *est dérivable sur* J. *De plus, pour tout* $y \in J$

$$\operatorname{argch}' y = \frac{1}{\operatorname{ch}'\left(\operatorname{argsh} y\right)} = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\operatorname{argch} y\right)}.$$

Mais

$$\operatorname{sh}\left(\operatorname{argsh} y\right) = \sqrt{\operatorname{ch}^2\left(\operatorname{argch} y\right) - 1} = \sqrt{y^2-1}$$

car la fonction sinus hyperbolique est positive sur $\mathbb{R}_+$. *Donc* $\operatorname{argch}' y = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. *On vérifie sans peine les propriétés restantes.*

Expression logarithmique :

Soit $x \geqslant 0$. On résout l'équation $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour $y \geqslant 1$, soit $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$. En posant $T = e^x$, on résout $T^2 - 2yT + 1 = 0$. On a deux racines $T_1 = y + \sqrt{y^2-1}$ et $T_2 = y - \sqrt{y^2-1}$ dont une seule est supérieure ou égale à 1 (leur produit égale 1). D'où $x = \ln T_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$.

Donc $\operatorname{argch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$.

Vérification : Lorsqu'on dérive pour $y > 1$, $f(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$ on obtient $f'(y) = \dfrac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{1 + \sqrt{y^2-1}} = \dfrac{\frac{\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{1 + \sqrt{y^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. Comme $f(1) = 0$, on a bien $f(y) = \operatorname{argch} y$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

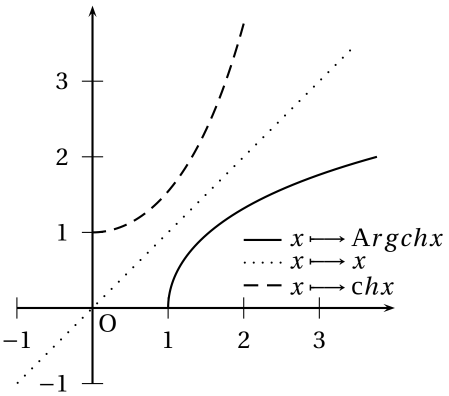


FIGURE 4.16 – Fonctions cosinus et argument cosinus hyperboliques

Fonction Argument tangente hyperbolique argth

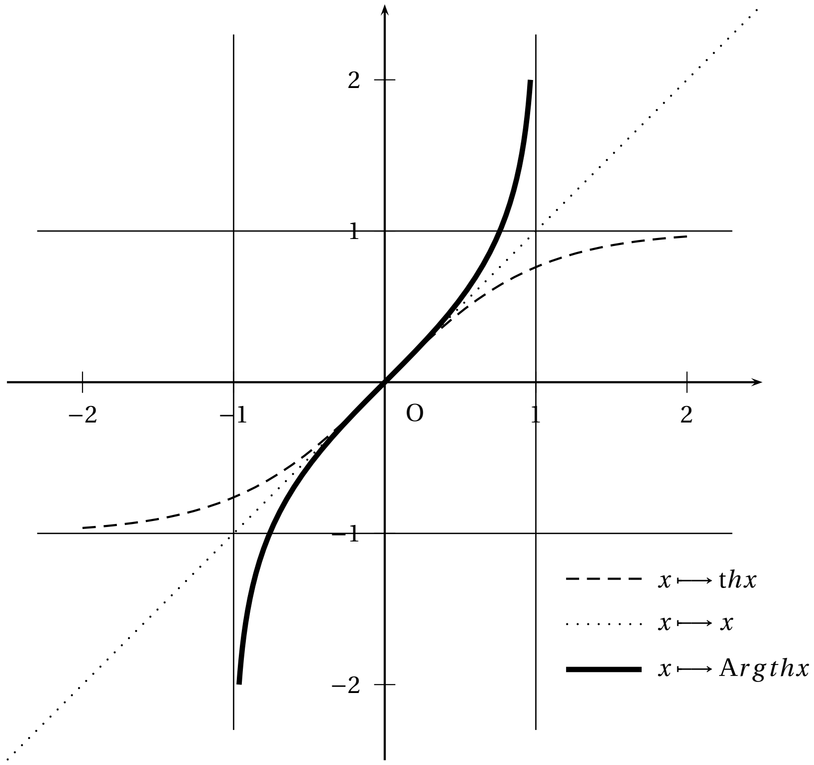


FIGURE 4.17 – Fonctions tangente et argument tangente hyperboliques

PROPOSITION 4.40 ♡ **Fonction argument tangente hyperbolique**

La fonction tangente hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]-1,1[$. L'application réciproque est appelée *Argument tangente hyperbolique* et est notée argth.

$$\operatorname{argth} : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{argth} y \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \forall y \in]-1,1[, \qquad & \operatorname{th}\big(\operatorname{argth} y\big) = y \\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \operatorname{argth}(\operatorname{th} x) = x \end{aligned}$$

La fonction argth

– est impaire.
– est strictement croissante sur $]-1,1[$.
– est continue sur $]-1,1[$.

– est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \operatorname{argth}' y = \frac{1}{1-y^2}$$

– réalise une bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
– est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

x	-1	0	1
$\frac{1}{1-y^2}$	$+$	1	$+$
argth	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Démonstration ♡ *La fonction tangente hyperbolique, sur l'intervalle* $I = \mathbb{R}$

(H1) *est strictement monotone sur* I

(H2) *est dérivable sur* I.

(H3) *et vérifie* $\forall x \in I, \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \neq 0$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la fonction réciproque 4.2 et affirmer que argth *est dérivable sur* $J = \operatorname{th}(\mathbb{R})$. *De plus, pour tout* $y \in J$

$$\operatorname{argth}' y = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth} y)} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{argth} y)} = \frac{1}{1-y^2}.$$

On vérifie sans peine les propriétés restantes.

Expression logarithmique :
On résout l'équation $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ pour $|y| < 1$, soit $e^{2x}(1-y) = 1+y$, soit $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ et $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.
Donc $\operatorname{argth} y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Vérification : Lorsqu'on dérive pour $y > 1$, $f(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ on obtient bien $f'(y) = \frac{1}{1-y^2}$. Comme $f(0) = 0$, on a bien $f(y) = \operatorname{argth} y$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

4.4 Deux exemples

DÉFINITION 4.7 ♡ **Asymptotes**
Soit $f : [c,+\infty] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une courbe $y = g(x)$ est *asymptote* à la courbe $y = f(x)$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$g(x) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

En particulier, une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f si et seulement si :

$$f(x) - [ax+b] \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

PLAN 4.1 : Méthode pratique de recherche d'asymptotes

1. *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$, *la droite horizontale* $y = l$ *est asymptote. On lit sur le tableau de variations la position de la courbe par rapport à l'asymptote.*
2. *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty$, *on calcul la limite de* $f(x)/x$ *en* $+\infty$.
3. *Si cette limite existe et est égal à un réel* $a \neq 0$, *on calcule* $f(x) - ax$ *et on cherche la limite de* $f(x) - ax$ *en* $+\infty$. *Si* $f(x) - ax \to b \in \mathbb{R}$, *la droite* $y = ax + b$ *est asymptote. On détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de* $f(x) - [ax+b]$ *au voisinage de* $+\infty$.
4. *Si* $\frac{f(x)}{x} \to \infty$, *on dit qu'on a une branche parabolique de direction* $(0y)$. *Si* $\frac{f(x)}{x} \to 0$, *une branche parabolique de direction* $(0x)$.
5. *Si* $f(x)/x^2$ *admet une limite finie* a *non nulle et que ce n'est pas le cas de* $f(x)/x$, *on peut rechercher des paraboles asymptotes.*

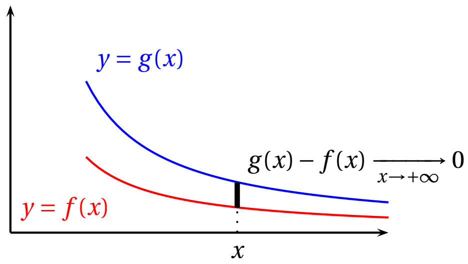


FIGURE 4.18 – Courbes asymptotes lorsque $x \to +\infty$

PLAN 4.2 : Plan d'étude d'une fonction

1. *Trouver le domaine de définition.*
2. *Calculer la dérivée (factoriser) et étudier son signe.*
3. *Tableau de variations. On précise les valeurs* exactes *remarquables, les limites et les prolongements éventuels (on étudie alors la dérivabilité de la fonction prolongée).*
4. *Recherche d'éventuelles asymptotes.*
5. *Tracé approximatif de la courbe $y = f(x)$: on représente les asymptotes éventuelles, les tangentes horizontales*

Remarque 4.11 La représentation de valeurs particulières numériques obtenues à l'aide de la calculatrice ne présente en général aucun intérêt !

Exercice 4.1

Étudier la fonction définie par $f(x) = x^{x+1}$.

Solution :

1. *Comme :*
$$f(x) = x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x}.$$
f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f'(x) = \dfrac{x\ln x + x + 1}{x} x^{x+1}$ donc f est du signe de $x\ln x + x + 1$. Introduisons la fonction : $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x + x + 1 \end{cases}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $g'(x) = \ln x + 2$. On en déduit les variations de g et le signe de f'.*

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 1	↘	$g\left(e^{-2}\right)$	↗	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	$f'\left(e^{-2}\right)$	$+$	

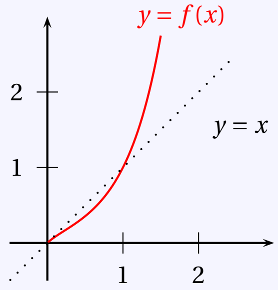
Remarquons que $g(-2) > 0$ et en utilisant les limites usuelles, on obtient : $g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.
3. *Le tableau de variation de f est donc :*

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖ 1	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

les limites étant obtenues en utilisant les limites usuelles et par opération sur les limites.
4. *Le graphe de f admet une branche infinie quand $x \to +\infty$. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$:*
$$\frac{x^{x+1}}{x} = x^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Le graphe de f n'admet donc pas d'asymptote quand $x \to +\infty$. On a affaire à une branche parabolique de direction Oy.

5. On en déduit le graphe de f :



Exercice 4.2

Étudier la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solution :

1. Nous déduisons du tableau de signe

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

que f est définie sur $I =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.

2. f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ car la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x un élément de cet ensemble. On trouve :

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}(x+1)^2}.$$

f' est donc du signe de $x^2 + x - 1$. Les racines de ce trinômes sont $\alpha = \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ et $\beta = \left(-1-\sqrt{5}\right)/2$. Seul α est dans le domaine de définition de f. Pour les limites, on remarque que :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$$

et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par limites usuelles, il est clair que $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. On en déduit de la tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Le graphe de f admet une branche infinie quand $x \to \pm\infty$ et quand $x \to -1^-$.

En $\pm\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

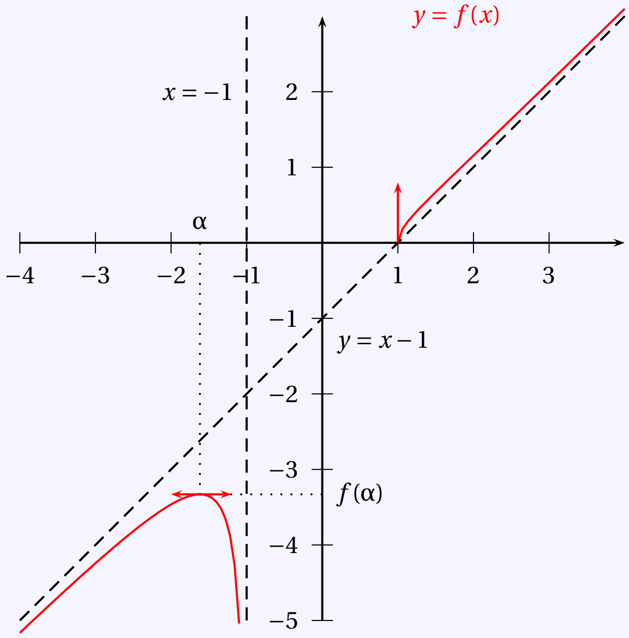
et par multiplication par les quantités conjuguées,

$$f(x) - x = x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right) = x\frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = \frac{\frac{-2x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = \frac{\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} + 1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -1$$

La droite d'équation $\boxed{y = x-1}$ *est donc asymptote à la courbe au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$.

$\boxed{\text{En } -1^-}$ *On a une asymptote verticale au voisinage de* -1 *d'équation* $x=-1$.

4 *On en déduit le graphe de* f *:*



4.5 Fonction exponentielle complexe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On s'intéresse ici à une fonction f définie sur I et à valeurs complexes $f : \mathrm{I} \in \mathbb{C}$. Pour tout $t \in \mathrm{I}$, une telle fonction s'écrit sous la forme : $f(t) = x(t) + i\,y(t)$. avec $x, y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Les fonctions x et y sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f.

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est dérivable en t_0 si et seulement si x et y le sont. Dans ce cas, on définit $f'(t_0)$ par :

$$f'(t_0) = x'(t_0) + i\,y'(t_0).$$

PROPOSITION 4.41

Soit φ une fonction définie et dérivable de I dans $\mathbb{C}$. la fonction f définie sur I par

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = e^{\varphi(t)}$$

est dérivable sur I et

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f'(t) = \varphi'(t) e^{\varphi(t)}.$$

Démonstration *Soit* $t \in \mathrm{I}$. *Si* φ_1 *est la partie réelle de* φ *et si* φ_2 *est la partie imaginaire de* φ, *on peut écrire* $f(t)$ *sous la forme :*

$$f(t) = e^{\varphi(t)} = e^{\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)} = e^{\varphi_1(t)} e^{i\varphi_2(t)} = e^{\varphi_1(t)}\left(\cos\left(\varphi_2(t)\right) + i\sin\left(\varphi_2(t)\right)\right).$$

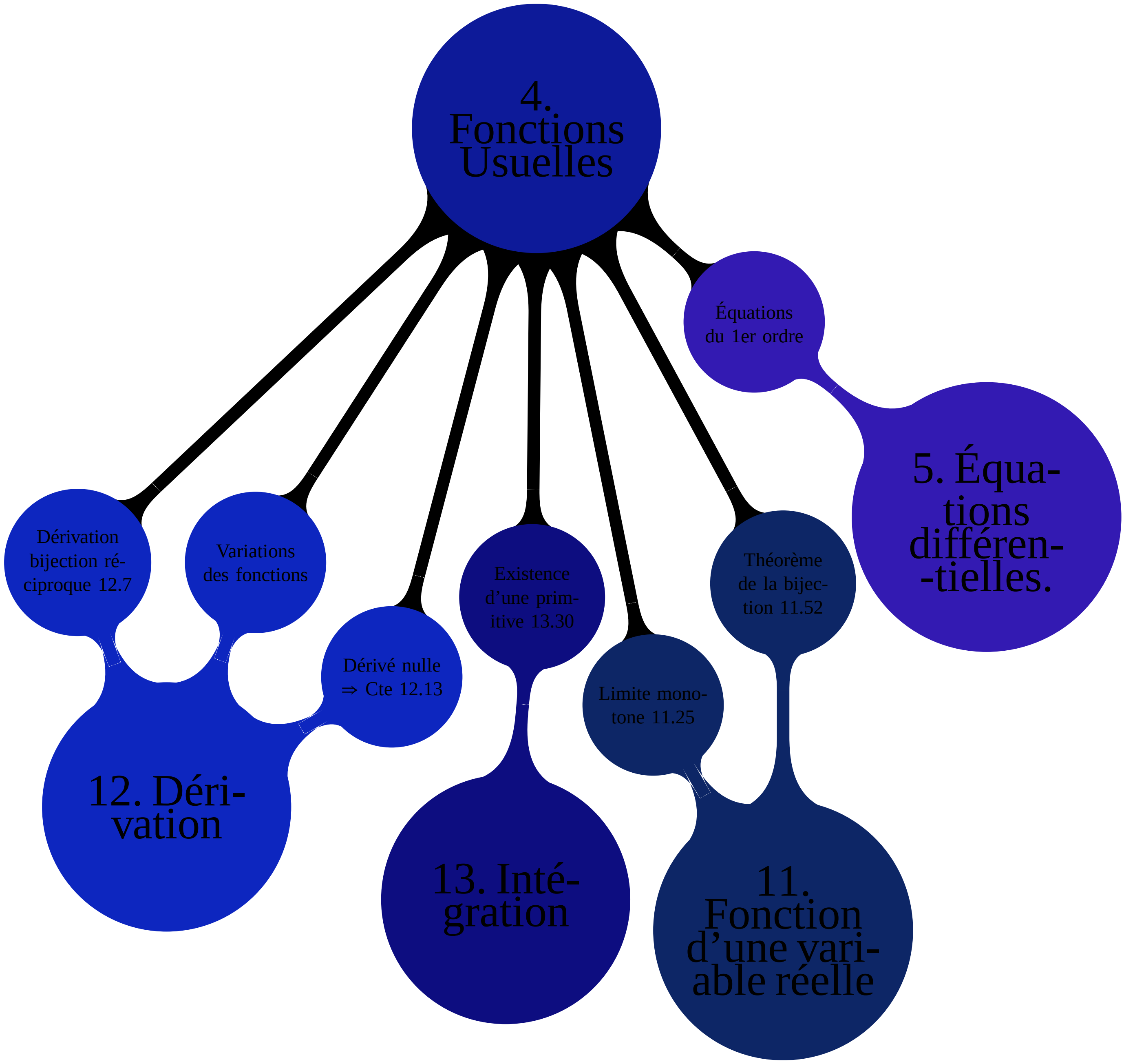
Par application de la définition, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \varphi_1'(t)\, e^{\varphi_1(t)}\left(\cos\left(\varphi_2(t)\right) + i\sin\left(\varphi_2(t)\right)\right) + e^{\varphi_1(t)}\left(-\varphi_2'(t)\sin\left(\varphi_2(t)\right) + i\varphi_2'(t)\cos\left(\varphi_2(t)\right)\right)\\
&= \varphi_1'(t)\, e^{\varphi_1(t)}\left(\cos\left(\varphi_2(t)\right) + i\sin\left(\varphi_2(t)\right)\right) + i\varphi_2'(t)\, e^{\varphi_1(t)}\left(i\sin\left(\varphi_2(t)\right) + \cos\left(\varphi_2(t)\right)\right)\\
&= \left(\varphi_1'(t) + i\varphi_1'(t)\right) e^{\varphi_1(t)}\left(\cos\left(\varphi_2(t)\right) + i\sin\left(\varphi_2(t)\right)\right)\\
&= \varphi'(t) e^{\varphi(t)}
\end{aligned}$$

Remarque 4.12 On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = ae^{at}$.

En résumé

Il est opportun de lire les paragraphes C.1 et C.2 de l'annexe C qui contiennent des méthodes pour construire des inégalités et dans lesquels sont promulgués quelques conseils pour le calcul des dérivées. Au terme de ce chapitre, le formulaire sur les dérivées des fonctions usuelles E.3 et celui sur les limites usuelles E.6 devront être parfaitement connus. Vous devrez par ailleurs être totalement familier avec ces nouvelles fonctions que vous serez amené à manipuler quotidiennement en sup et en spé.
Il conviendra de retenir parfaitement les graphes et l'expression des dérivées des fonctions introduites dans ce chapitre.



4.6 Exercices

4.6.1 Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances

Exercice 4.3 ♡♡ ***Inégalité de convexité***

1. *Montrer que :*

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

2. *En déduire que :*

$$\forall n > 1, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Solution :

1. *Il suffit, pour montrer cette inégalité, d'étudier les variations de* $\theta : \begin{cases}]-1,+\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x)-x \end{cases}$.
2. *Soit* $n > 1$. *Appliquant l'inégalité précédente avec* $x = \frac{1}{n}$, *on a :* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ *ce qui amène :* $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1$ *et, la fonction exponentielle étant strictement croissante :* $e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant e$. *Par conséquent :* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$. *De même, comme* $n > 1$, $-\frac{1}{n} > -1$ *et on peut appliquer la première question avec* $x = -\frac{1}{n}$, *on obtient :* $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$. *Multipliant les deux membres de cette inégalité par* $-n$, *on a :* $-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \geqslant 1$ *et donc, passant comme précédemment à l'exponentielle :* $e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 4.4 ♡

Posons, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$a = \exp\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$$

Simplifier a^b.

Solution : *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Remarquons que* $b = \dfrac{1}{x^2}\ln(x)$ *donc*

$$\begin{aligned} a^b &= \left(e^{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}\ln(x)} \\ &= e^{\frac{x^2}{x^2}\ln(x)} \\ &= \exp(\ln x) \\ &= x \end{aligned}$$

Exercice 4.5 ♡♡ ***Des équations***

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé leur domaine de validité :

1. $\ln(x-1) = \ln(3x-5)$
2. $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$
3. $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$
4. $e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0.$
5. $8^{6x} - 3.8^{3x} - 4 = 0.$
6. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
7. $2^{x^3} = 3^{x^2}$
8. $\log_a x = \log_x a$ *où* $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
9. $\log_3 x - \log_2 x = 1.$
10. $2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \ldots + 3^{x+n}$ *où* $n \in \mathbb{N}$

Solution :

1. *domaine de validité :* $\left]\frac{5}{3}, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} & \ln(x-1) = \ln(3x-5) \\ \Longrightarrow\ & x-1 = 3x-5 \\ \Longrightarrow\ & x = 2 \end{aligned}$$

Réciproquement $\boxed{2}$ *est solution de cette équation.*

2. *domaine de validité :* $\left]\frac{3}{2},6\right[$.

$$\begin{aligned}
& \ln\left(\sqrt{2x-3}\right)=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x\\
\Longrightarrow\quad & \ln\left(\sqrt{2x-3}\right)=\ln\left(\frac{6-x}{\sqrt{x}}\right)\\
\Longrightarrow\quad & \sqrt{2x-3}=\frac{6-x}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2x-3}=\frac{6-x}{\sqrt{x}}\\
\Longrightarrow\quad & x(2x-3)=(6-x)^2\\
\Longrightarrow\quad & x(x+8)=0\\
\Longrightarrow\quad & x=0 \quad \text{ou} \quad x=-8
\end{aligned}$$

Aucun de ces nombres n'est admissible, il n'y a pas de solution.

3.

$$\begin{aligned}
& 2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)\\
\Longrightarrow\quad & \ln\left(\frac{2x(x+4)}{x^2}\right)=0\\
\Longrightarrow\quad & \frac{2x(x+4)}{x^2}=1\\
\Longrightarrow\quad & x^2+9x-36=0\\
\Longrightarrow\quad & x=3 \quad \text{ou} \quad x=-12
\end{aligned}$$

Mais -12 *ne vérifie pas l'équation. On vérifie par contre que* 3 *la vérifie. et l'unique solution de l'équation est* $\boxed{3}$.

4. *On a :*

$$\begin{aligned}
& e^{4x}-3e^{2x}-4=0\\
\Longrightarrow\quad & \begin{cases} X=e^{2x}\\ X^2-3X-4=0\end{cases}\\
\Longrightarrow\quad & \begin{cases} X=e^{2x}\\ X=4 \quad \text{ou} \quad X=-1\end{cases}\\
\Longrightarrow\quad & e^{2x}=4 \qquad \text{(On ne peut avoir } e^{2x}=-1\text{ !)}\\
\Longrightarrow\quad & x=\ln 2
\end{aligned}$$

Réciproquement, on montre que $\boxed{\ln 2}$ *est bien solution de l'équation.*

5. *Cette équation est valide sur* $\mathbb{R}$. *On a la série d'implications :*

$$\begin{aligned}
& 8^{6x}-3.8^{3x}-4=0\\
\Longrightarrow\quad & \begin{cases} X^2-3X-4=0\\ X=8^{3x}\end{cases}\\
\Longrightarrow\quad & \begin{cases} X=1 \quad \text{ou} \quad X=4\\ X=8^{3x}\end{cases}\\
\Longrightarrow\quad & 8^{3x}=1 \quad \text{ou} \quad 8^{3x}=4\\
\Longrightarrow\quad & x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que $\boxed{0 \quad \text{et} \quad \frac{2}{9}}$ *sont bien solutions de l'équation.*

6.

$$\begin{aligned}
& x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \\
\Longrightarrow\quad & \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x} \\
\Longrightarrow\quad & \sqrt{x}\ln x - \frac{x}{2}\ln x = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\ln x = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \sqrt{x} = 0 \quad \text{ou} \quad 1-\frac{\sqrt{x}}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \ln x = 0 \\
\Longrightarrow\quad & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 1
\end{aligned}$$

Réciproquement, seuls $\boxed{1 \quad \text{et} \quad 4}$ *sont solutions de l'équation.*

7.

$$\begin{aligned}
& 2^{x^3} = 3^{x^2} \\
\Longrightarrow\quad & x^3\ln 2 = x^2\ln 3 \\
\Longrightarrow\quad & x^2(x\ln 2 - \ln 3) = 0 \\
\Longrightarrow\quad & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Réciproquement, ces deux nombres sont solutions donc les solutions de l'équation sont : $\boxed{0 \quad \text{et} \quad \log_2 3}$.

8.

$$\begin{aligned}
& \log_a x = \log_x a \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln a}{\ln x} \\
\Longrightarrow\quad & \ln^2 x - \ln^2 a = 0 \\
\Longrightarrow\quad & (\ln x - \ln a)(\ln x + \ln a) = 0 \\
\Longrightarrow\quad & x = a \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Réciproquement, les nombres $\boxed{a \quad \text{et} \quad \frac{1}{a}}$ *sont bien solutions de l'équation.*

9.

$$\begin{aligned}
& \log_3 x - \log_2 x = 1 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\ln x}{\ln 3} - \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3\ln 2}\ln x = 1 \\
\Longrightarrow\quad & x = \exp\left(\frac{\ln 3\ln 2}{\ln\frac{2}{3}}\right)
\end{aligned}$$

Réciproquement $\boxed{\exp\left(\frac{\ln 3\ln 2}{\ln\frac{2}{3}}\right)}$ *est solution de l'équation.*

10. *On reconnaît des sommes géométriques :*

$$\begin{aligned}
& 2^x + 2^{x+1} + \ldots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \ldots + 3^{x+n} \\
\Longrightarrow\quad & 2^x\left(1+2+\ldots+2^n\right) = 3^x\left(1+3+\ldots+3^n\right) \\
\Longrightarrow\quad & \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{\frac{1-2^{n+1}}{1-2}}{\frac{1-3^{n+1}}{1-3}} \\
\Longrightarrow\quad & \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2\frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1} \\
\Longrightarrow\quad & x = \frac{\ln\left(2\frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}\right)}{\ln\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que : $\boxed{\dfrac{\ln\left(2\dfrac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}\right)}{\ln\frac{2}{3}}}$ *est bien solution de l'équation.*

Exercice 4.6 ♡♡ **Des inéquations**

Résoudre les inéquations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

1. $\ln\left(x^2-2x\right) > \ln(4x-5)$
2. $e^{x^2} > (e^x)^4 \times e.$
3. $a^{x^2} < (\sqrt{a})^{7x-3}$ où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$

Solution :

1. *On vérifie que l'inéquation n'est valide que si* $x > 2$.

$$\begin{aligned} & \ln\left(x^2-2x\right) > \ln(4x-5) \\ \Longrightarrow\quad & x^2-2x > 4x-5 \quad \text{car ln est croissante} \\ \Longrightarrow\quad & x^2-6x+5 > 0 \\ \Longrightarrow\quad & x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]5, +\infty\right[\end{aligned}$$

Compte tenu du domaine de validité de l'inéquation, $\ln\left(x^2-2x\right) > \ln(4x-5)$ *seulement si* $x > 5$. *Réciproquement, on montre que si* $\boxed{x > 5}$ *alors l'inéquation est vérifiée.*

2. *L'inéquation est valide sur* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & e^{x^2} > \left(e^x\right)^4 \times e \\ \Longleftrightarrow\quad & e^{x^2-1} > e^{4x} \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2-1 > 4x \quad \text{car exp est croissante} \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2-4x-1 > 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x \in \left]-\infty, 2-\sqrt{5}\right[\cup \left]2+\sqrt{5}, +\infty\right[\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $\boxed{\left]-\infty, 2-\sqrt{5}\right[\cup \left]2+\sqrt{5}, +\infty\right[}$

3. *L'inéquation est valide sur* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & a^{x^2} < (\sqrt{a})^{7x-3} \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 \ln a < \frac{7x-3}{2} \ln a \quad \text{car ln est croissante} \end{aligned}$$

Lorsque $\ln a > 0$ *c'est-à-dire lorsque* $a > 1$,

$$\begin{aligned} & a^{x^2} < (\sqrt{a})^{7x-3} \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 < \frac{7x-3}{2} \quad \text{car } a \neq 1 \text{ donc } \ln a \neq 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x^2-7x+3 < 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x \in \left]\frac{1}{2}, 3\right[\end{aligned}$$

L'inégalité est vraie si et seulement si $\boxed{x \in \left]\frac{1}{2}, 3\right[}$.

Lorsque $\ln a < 0$ *c'est-à-dire lorsque* $0 < a < 1$,

$$\begin{aligned} & a^{x^2} > (\sqrt{a})^{7x-3} \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 > \frac{7x-3}{2} \\ \Longleftrightarrow\quad & 2x^2-7x+3 > 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]3, +\infty\right[\end{aligned}$$

L'inégalité est vraie si et seulement si $\boxed{x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]3, +\infty\right[}$.

Exercice 4.7 ♡♡ **Des limites**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{3^x}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{3^x}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}-x$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$ *où* $1<a<b$.
11. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Solution :

1. $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ *mais* $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *donc* $x^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = \boxed{1}$.
2. $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}$ *mais* $\sqrt{x}\ln x = x^{\frac{1}{2}}\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ *donc* $x^{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^0 = \boxed{1}$.
3. $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ *mais* $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ *donc* $x^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{0}$.
4. $\frac{e^x+2}{e^x+1} = \frac{1+2e^{-x}}{1+e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$.
5. $\frac{xe^x}{3^x} x\left(\frac{e}{3}\right)^x = xe^{x\ln\frac{e}{3}}$ *donc* $\frac{xe^x}{3^x} \overset{X=x\ln\frac{e}{3}}{=\!=\!=} \frac{X}{\ln\frac{e}{3}}e^X \xrightarrow[X\to-\infty]{} \boxed{0}$
6. *De la même façon, toujours parce que* $e<3$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{3^x} = \boxed{-\infty}$.
7. $x^2e^{-x}-x = x^2e^{-x}\left(1-\frac{e^x}{x}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \boxed{+\infty}$
8. $x^x = e^{x\ln x}$ *mais* $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{}$ *donc* $x^x \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^0 = \boxed{1}$.
9. $\frac{(x^x)^x}{x^{x^x}} = \frac{e^{x\ln(x^x)}}{e^{x^x\ln x}} = e^{(x^2-x^x)\ln x} = e^{(x^{2-x}-1)x^x\ln x}$ *mais* $x^{2-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *donc :* $x^{2-x}-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$. *Comme* $x^x\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, *par opérations sur les limites,* $\left(x^{2-x}-1\right)x^x\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ *et donc :* $\frac{(x^x)^x}{x^{x^x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$.
10. $\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = \frac{e^{b^x\ln a}}{e^{a^x\ln b}} = e^{a^x\ln b - b^x\ln a} = e^{b^x\ln b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x - \frac{\ln a}{\ln b}\right)}$ *mais* $b^x\ln b \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $\frac{\ln a}{\ln b} > 0$ *donc* $\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{+\infty}$.
11. $\sqrt{x}\ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = 2x^{\frac{1}{2}}\ln x - x^{\frac{1}{2}}\ln(1+x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{0}$
12. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x}} = e^{\frac{1}{x}(\ln\ln x - \ln x)}$ *mais* $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $\frac{\ln(\ln x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *donc* $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = \boxed{1}$.
13. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$ *mais* $e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \overset{X=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} \xrightarrow[X\to 0]{} e^1 = \boxed{e}$.

Exercice 4.8 ♡♡

Soit un entier $n>1$. *On considère l'équation*

$$x^{x^n} = n \tag{4.1}$$

1. *Montrer qu'il existe une unique solution à cette équation.*
2. *Déterminer cette unique solution.*

Solution :

1. *Étudions à* n *fixé la fonction définie par*

$$f(x) = x^{x^n} - n = e^{x^n\ln x}$$

Elle est définie sur $]0,+\infty[$, dérivable sur cet intervalle et $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$f'(x) = x^{n-1} e^{x^n \ln x} [n \ln x + 1]$$

La dérivée s'annule en un seul point $x_0 = e^{-1/n} < 1$. On en déduit en écrivant le tableau de variations de f que f présente un minimum en x_0 avec $f(x_0) = e^{-1/(en)} - n$. Par conséquent, puisque $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+\to 1]{} -n < n$, et que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty\to+]{} \infty$, la fonction ne s'annule qu'une fois en un point $x_1 > x_0$.

2. Puisque $f(n^{1/n}) = 0$, en en déduit que la seule solution de l'équation vaut $n^{1/n}$.

Exercice 4.9 ♡♡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égale à la partie entière de $1 + \log n$.

Solution : Supposons que l'écriture de n en base 10 compte $m+1$ chiffres $a_m, \dots, a_0 \in [\![0,9]\!]$ avec $a_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}$. On a alors : $n = \sum_{k=0}^m a_k 10^k$ et

$$\begin{aligned} \log n &= \log\left(\sum_{k=0}^m a_k 10^k\right) \\ &= \frac{\ln 10^m \left(a_m + a_{m-1}10^{-1} + \ldots + a_0 10^{-m}\right)}{\ln 10} \\ &= m + \frac{\ln\left(a_m + a_{m-1}10^{-1} + \ldots + a_0 10^{-m}\right)}{\ln 10} \end{aligned}$$

Mais $1 \leqslant a_m + a_{m-1}10^{-1} + \ldots + a_0 10^{-m} \leqslant 10$ et

$$0 \leqslant \frac{\ln\left(a_m + a_{m-1}10^{-1} + \ldots + a_0 10^{-m}\right)}{\ln 10} < 1.$$

Donc $\boxed{\mathrm{E}\left(1 + \log n\right) = m + 1}$ et le résultat est prouvé.

Exercice 4.10 ♡♡

Étudier la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solution :

1. Nous déduisons du tableau de signe

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ $-$ 0 $+$
$x+1$	$-$ 0 $+$ $+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$ ‖ $-$ 0 $+$

que f est définie sur $\mathrm{I} =]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$.

2. f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ car la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x un élément de cet ensemble. On trouve :

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,(x+1)^2}.$$

f' est donc du signe de $x^2 + x - 1$. Les racines de ce trinômes sont $\alpha = \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ et $\beta = \left(-1-\sqrt{5}\right)/2$. Seul α est dans le domaine de définition de f. Pour les limites, on remarque que :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$$

et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par limites usuelles, il est clair que $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. On en déduit

de la tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

3 *Le graphe de f admet une branche infinie quand $x \to \pm\infty$ et quand $x \to -1^-$.*

En $\pm\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

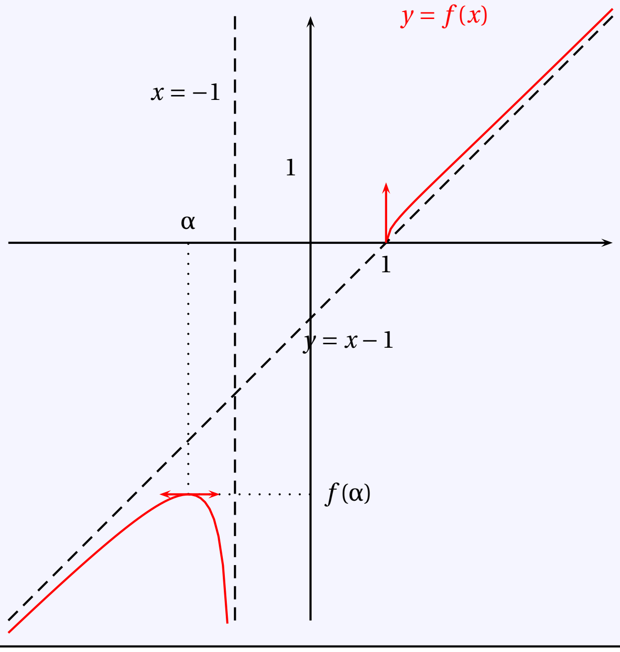
et par multiplication par les quantités conjuguées,

$$f(x) - x = x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right) = x\frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = \frac{\frac{-2x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = \frac{\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} + 1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -1$$

La droite d'équation $\boxed{y = x - 1}$ *est donc asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.*

En -1^- *On a une asymptote verticale au voisinage de -1 d'équation $x = -1$.*

4 *On en déduit le graphe de f :*



4.6.2 Fonctions circulaires

Exercice 4.11 ♡

Prouver que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin x \leqslant x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$

Solution :

1. *Il suffit d'étudier les variations de la fonction* $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x - x \end{cases}$.
2. *On prouve d'abord l'inégalité sur $\mathbb{R}_+$. Pour ce faire, on étudie les variations de* $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \end{cases}$

et on utilise l'inégalité prouvée dans la question 1. On montre alors que l'inégalité reste vraie sur $\mathbb{R}_-$ en utilisant la parité de f_2.

Exercice 4.12 ♡

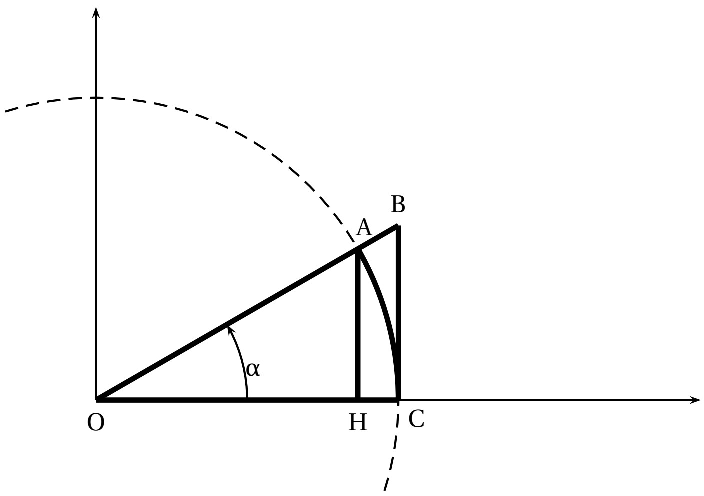
Démontrer que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 + \dfrac{\tan x}{x} > 2$.

Solution : *Soit* $\Phi(x) = \cos x \sin^2 x + x \sin x - 2x^2 \cos x$, *on a*

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= -\sin^3 x + 2\cos^2 x \sin x + \sin x + x\cos x - 4x\cos x + 2x^2 \sin x \\
&= 2\cos^2 x \sin x - \sin^3 x + \sin x + 3x\cos x + 2x^2 \sin x. \\
\Phi''(x) &= 2\cos^3 x - 4\sin x \cos x \sin x - 3\sin^2 x \cos x + \cos x - 3\cos x + 3x\sin x + 4x\sin x + 2x^2\cos x \\
&= 2\cos^3 x - 7\sin^2 x\cos x - 2\cos x + 7x\sin x + 2x^2\cos x \\
&= 2\cos x(\cos^2 x - 1) + 2x^2\cos x + 7\sin x(x - \sin x\cos x) \\
&= 2\cos x(\cos^2 x - (1-x^2)) + 7x\sin x\left(1 - \frac{\sin 2x}{2x}\right)
\end{aligned}$$

Or sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$, *d'oú* $\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)^2 \leqslant \cos^2 x$, *soit* $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{4} \leqslant \cos^2 x$, *soit* $0 \leqslant \dfrac{x^4}{4} \leqslant \cos^2 x - (1-x^2)$.
On a donc $\Phi''(x) > 0$. Φ' *est strictement croissante sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, *comme* $\Phi'(0) = 0$, Φ' *est à valeurs positives, donc* Φ *est strictement croissante sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, *comme* $\Phi(0) = 0$, Φ *est à valeurs positives.*
Donc $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \sin^2 x + x\sin x > 2x^2 \cos x$, *d'oú le résultat en divisant par* $x^2 \cos x$.

Exercice 4.13 ♡♡



On a tracé le cercle le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct. L'angle α *est mesuré en radians. Les triangles* OAH *et* OBC *sont rectangles respectivement en* H *et* C. *On rappelle que l'aire du secteur angulaire* OAC *est* $\alpha/2$.

1. *Calculer l'aire du triangle* OAC. *En déduire que :* $\forall \alpha \in]0, \pi/2]$, $\quad 0 < \sin\alpha < \alpha$.
2. *Montrer que pour* $\alpha \in]0, \pi/2]$, *on a* $1 > \cos^2\alpha > 1 - \alpha^2$. *En déduire que* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \cos\alpha = 1$.
3. *Calculer l'aire du triangle* OBC. *En déduire les inégalités :* $\forall \alpha \in]0, \pi/2]$, $\quad \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.
4. *Déduire des questions précédentes que* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ *et que* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$. *On prouve ainsi que* sin *et* tan *sont dérivables en* 0. *Expliquer pourquoi.*
5. *Pour* $\alpha \in [0, \pi/2]$, *Établir les inégalités :*

$$0 \leqslant \cos^2\alpha \leqslant \cos\alpha, \quad 0 \leqslant 1 - \cos\alpha \leqslant \sin^2\alpha \quad \text{et} \quad 0 \leqslant 1 - \cos\alpha \leqslant \alpha^2.$$

6. *En déduire* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1 - \cos\alpha}{\alpha}$.
7. *En déduire* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(\alpha + h) - \cos\alpha}{h}$ *et* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(\alpha + h) - \cos\alpha}{h}$. *Quelle propriété importante de* cos *et* sin *vient-on de prouver ?*

Solution :

1. *L'aire du triangle* OAH *est donnée par* $\frac{OC\times AH}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}$. *Si* $\alpha \in]0,\pi/2]$ *alors le triangle* OAH *n'est pas plat et son aire est* >0 *donc* $\sin\alpha > 0$. *Par ailleurs, le triangle* OAH *est inclus dans le secteur angulaire* OAC *et donc* $\frac{\sin\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$ *ce qui prouve la seconde inégalité.*
2. *Soit* $\alpha \in]0,\pi/2]$. *On utilise la question précédente. De* $0 < \sin\alpha < \alpha$, *on tire* $0 < \sin^2\alpha < \alpha^2$ *car la fonction* $x \mapsto x^2$ *est croissante sur* $\mathbb{R}_+$. *Donc* $1 > 1-\sin^2\alpha > 1-\alpha^2$ *ce qui donne finalement* $1 \geqslant \cos^2\alpha > 1-\alpha^2$. *Si* $\alpha \to 1$, *on en déduit grâce au théorème des gendarmes que* $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$.
3. *L'aire du triangle* OBC *est* $\frac{OC\times BC}{2} = \frac{\tan\alpha}{2}$. *Comme le triangle* AHC *est strictement inclus dans le secteur* OAC *et que ce secteur est strictement inclus dans le triangle* OBC, *on en déduit que* $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.
4. *Soit* $\alpha \in]0,\pi/2]$. *On déduit de l'inégalité de la question* 1. *que* $0 < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$. *De même, de* $\tan\alpha > \alpha$, *on tire* $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$ *et donc* $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha \xrightarrow[\alpha\to 0^+]{} 1$. *Par le théorème des gendarmes, on en déduit que* $\lim_{\alpha\to 0^+}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$. *En* 0^-, *on trouve la même limite par parité. La seconde limite est alors évidente. On reconnaît que* $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ *est le taux d'accroissement de* sin *en* 0. *Il admet alors une limite quand* $\alpha \to 0$ *et* sin *est dérivable en* 0 *de dérivée égale à* 1. *Idem pour* tan.
5. *On sait que* $0 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ *donc en multipliant par* $\cos\alpha$ *qui est positif, on obtient la première inégalité. On en déduit que* $1 \geqslant 1-\cos^2\alpha \geqslant 1-\cos\alpha$ *et donc la seconde inégalité. La dernière en découle en utilisant que* $\sin\alpha < \alpha$.
6. *On divise la dernière inégalité par* $\alpha \in]0,\pi/2]$ *:*
$$0 \leqslant \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} \leqslant \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha \xrightarrow[\alpha\to 0^+]{} 0$$
donc $\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = 0$. *Par parité, il s'ensuit que* $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = 0$.
7. *Grâce aux formules d'addition et aux questions précédentes :*
$$\frac{\cos(\alpha+h)-\cos\alpha}{h} = \cos\alpha\frac{\cos h - 1}{h} - \sin\alpha\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\sin\alpha$$
On reconnaît dans la premier terme de la ligne précédente le taux d'accroissement de cos *en* α. *On a prouvé qu'il tend vers* $\sin\alpha$ *quand* $h\to 0$. *Donc* cos *est dérivable en* α *de dérivée* $-\sin\alpha$. *On procède de même pour* sin.

Exercice 4.14 ♡♡

Calculer :

1. $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4}))$
2. $\arccos(\cos(\frac{2009\pi}{3}))$

Solution :

1. *Comme* $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, *il faut déterminer le réel* $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *tel que* $\sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. *Mais* $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *donc :* $\boxed{\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}}$.
2. *On a :* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, *donc il faut déterminer le réel* $x \in [0,\pi]$ *tel que* $\cos x = \cos(\frac{2009\pi}{3})$. *Mais* $2009 = 3\times 670 - 1$ *donc* $2009\pi = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. *Mais* $\cos -\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}$ *donc :* $\boxed{\arccos(\cos(\frac{2009\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}}$.

Exercice 4.15 ♡♡ **Formule de Machin**

1. *Montrer que* $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right)$, *exprimer* $\tan(4x)$ *en fonction de* $\tan x$.
3. *En déduire la formule de Machin :*
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Solution :

1. *Notons* $\alpha = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$. *En utilisant les formules d'additions pour la tangente :*
$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1.$$
De plus $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, *donc nécessairement* $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. *Soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right)$. *Toujours par application des formules d'additions, on montre que :*

$$\tan(4x) = \frac{4\tan(x) - 4(\tan(x))^3}{1 - 6(\tan(x))^2 + (\tan(x))^4}$$

3. *Par application de cette dernière formule, on trouve que :* $\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{120}{119}$. *Donc, une fois encore grâce aux formules d'additions, si on note* $\beta = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$, *on trouve :*

$$\tan\beta = \frac{\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) - \tan\left(\arctan\frac{1}{239}\right)}{1 + \tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right)\tan\left(\arctan\frac{1}{239}\right)} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = 1$$

et donc comme dans la première question, on montre que $\beta = \frac{\pi}{4}$, *ce qui démontre la formule de Machin.*

Exercice 4.16 ♡

1. *Soit* $x \in [-1,1]$. *Simplifier :*
   (a) $\cos(\arcsin x)$
   (b) $\sin(\arccos x)$.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Simplifier :*
   (a) $\cos(3\arctan x)$
   (b) $\cos^2(\frac{1}{2}\arctan x)$.

Solution :

1. *Soit* $x \in [-1,1]$.
   (a) $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *donc* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \boxed{\sqrt{1-x^2}}$
   (b) $\arccos x \in [0,\pi]$ *donc* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \boxed{\sqrt{1-x^2}}$.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Remarquons que, pour tout* $X \in]-\pi/2, \pi/2[$, *comme* $1 + \tan^2 X = 1/\cos^2 X$, *il vient* $\cos X = 1/\sqrt{1+\tan^2 X}$ *et donc* $\cos\arctan x = 1/(\sqrt{1+x^2})$ *car* $\arctan x \in]-\pi/2, \pi/2[$.
   (a) *On utilise les techniques de l'annexe B.3, il vient* $\cos(3X) = 4\cos^3 X - 3\cos X$ *et donc :*

$$\begin{aligned}\cos(3\arctan x) &= 4\cos^3\arctan x - 3\cos\arctan x\\ &= \frac{4}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} - \frac{3}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}\\ &= \boxed{\frac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}}\end{aligned}$$

   (b) *Comme* $\cos^2 X = 1/2(\cos(2x)+1)$ *:*

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) &= \frac{1}{2}(\cos\arctan x + 1)\\ &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Exercice 4.17 ♡♡

Résoudre l'équation $\arcsin x = 2\arctan x$.

Solution : *Pour tout* $X \in]-\pi/2, \pi/2[$, *comme* $1 + \tan^2 X = 1/\cos^2 X$, *il vient* $\cos X = 1/\sqrt{1+\tan^2 X}$. *Donc* $\cos\arctan x = 1/(\sqrt{1+x^2})$ *car* $\arctan x \in]-\pi/2, \pi/2[$ *et comme* $\sin X = \pm\sqrt{1-\cos^2 X}$, *on a aussi* $\sin\arctan x = x/\sqrt{1+x^2}$. *On a alors :*

$$\begin{aligned} & \arcsin x = 2\arctan x\\ \Longrightarrow\quad & x = \sin(2\arctan x)\\ \Longrightarrow\quad & x = 2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x)\\ \Longrightarrow\quad & x = \frac{2x}{1+x^2}\\ \Longrightarrow\quad & x^3 - x = 0\\ \Longrightarrow\quad & x = -1, \quad x = 0 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que ces 3 nombres sont solutions de l'équation.

Exercice 4.18 ♡

– *Montrer que :* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

– *Montrer que :* $\forall x \in [-1,1]$ *:* $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Solution : *La même méthode s'applique dans les deux questions.*

1. *Soit* $\theta_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \end{cases}$. θ_1 *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $\theta_1' = 0$. *Par conséquent, il existe des réels* c_1 *et* c_2 *tels que* $\theta_{1|\mathbb{R}_-^*} = c_1$ *et* $\theta_{1|\mathbb{R}_+^*} = c_2$. *En prenant la limite de* θ_1 *quand* x *tend vers* $-\infty$ *et* $+\infty$ *on montre que* $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ *et* $c_2 = \frac{\pi}{2}$.
2. *Soit* $\theta_2 : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) + \arccos(x) \end{cases}$. θ_2 *est dérivable sur* $[-1,1]$ *et* $\theta_2' = 0$. θ_2 *est donc constante sur* $[-1,1]$ *et évaluant l'expression en* $x = 0$, *on montre que cette constante vaut* $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4.19 ♡♡

Étudier la fonction f *donnée par :*

$$f : x \mapsto \cos^3 x + \sin^3 x.$$

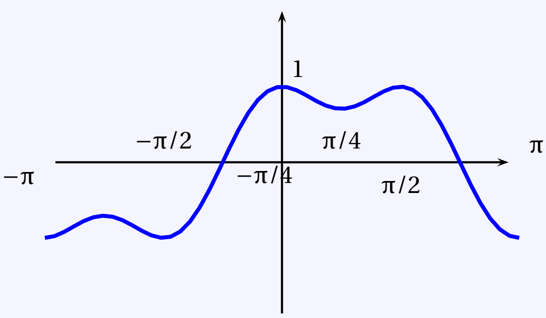
Solution : *Étudions* $f : x \mapsto \cos^3 x + \sin^3 x$. f *est définie sur* $\mathbb{R}$ *mais est* 2π*-périodiques. On peut donc restreindre le domaine d'étude à* $I = [-\pi, \pi]$. *Si* $x \in I$, $f'(x) = 3\cos x \sin x (\sin x - \cos x)$. *Résolvons l'inéquation :* $\sin x - \cos x \geqslant 0$ *pour* $x \in I$ *afin de connaître le signe de* f *sur* I *:*

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x \geqslant 0 \\ \iff & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \leqslant 0 \\ \iff & \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0 \\ \iff & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$\cos x$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$		$-$	
$\sin x - \cos x$		$+$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	-1

ainsi que le graphe :



Exercice 4.20 ♡♡♡

Étudier la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

Solution :

1. *Pour que la racine soit définie, il faut que* $x \in [-1,1]$.
2. $\arcsin$ *est définie sur* $[-1,1]$. *Étudions donc* $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ *sur* $[-1,1]$. *C'est une fonction impaire. Il suffit de faire l'étude sur* $[0,1]$. φ *est dérivable sur* $[0,1[$ *et* $\forall x \in [0,1[$,
$$\varphi'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$
On écrit le tableau de variations de φ *et on voit que*
$$\forall x \in [-1,1], \quad \varphi(x) \in [-1,1]$$
avec $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$.
Par conséquent, $D_f = [-1,1]$.
3. f *est impaire. On fait l'étude sur* $[0,1]$.
4. φ *est dérivable sur* $]-1,1[$. *Comme* $\arcsin$ *est dérivable sur* $]-1,1[$, *à valeurs dans* $[-1,1]$ *et* $\varphi(\theta) = 1$ *si et seulement si* $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *On en déduit que* f *est dérivable sur* $I_1 = [0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ *et sur* $I_2 =]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$.
5. $\forall x \in I_1 \cup I_2$, *on calcule*
$$f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{|2x^2-1|\sqrt{1-x^2}}$$
Par conséquent, $\forall x \in I_1$, $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ *et* $\forall x \in I_2$, $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. *Donc il existe* $C_1 \in \mathbb{R}$ *tel que*
$$\forall x \in I_1, \quad f(x) = 2\arcsin x + C_1$$
et $\exists C_2 \in \mathbb{R}$ *tel que*
$$\forall x \in I_2, \quad f(x) = -2\arcsin x + C_2$$
On détermine $C_1 = 0$ *et* $C_2 = \pi$ *en prenant les valeurs particulières* $x = 0$ *et* $x = 1$.
7. *En conclusion :*
$$f(x) = \begin{cases} 2\arcsin x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \\ -2\arcsin x - \pi & \text{si } x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \end{cases}$$

Montrons en utilisant la trigonométrie que

$$\forall x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}], \quad \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\arcsin x$$

Soit $x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. *Posons*

$$y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

$\exists! \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ *tel que*

$$x = \sin\theta$$

Alors

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta|\cos\theta| = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

Or comme $2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$y = \arcsin(\sin(2\theta)) = 2\theta = 2\arcsin x$$

Exercice 4.21 ♡♡

Étudier

$$f(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

Solution : *Considérons la fonction* $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$. *Elle est définie sur* $[0,+\infty[$ *et dérivable sur* $]0,+\infty[$, *et*

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

En traçant le tableau de variations de φ, *on voit que* φ *est à valeurs dans* $[0,\frac{1}{2}]$. *Comme* arccos *est définie et dérivable sur* $[0,\frac{1}{2}]$, f *est définie continue sur* $D_f = [0,+\infty[$ *et dérivable sur* $]0,+\infty[$, *et*

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x}{(1+x)^2}}} \times \varphi'(x) = \frac{(x-1)}{2\sqrt{x}\sqrt{x^2+x+1}(x+1)}$$

Par conséquent, f *est décroissante sur* $[0,1]$, *croissante sur* $[1,+\infty[$ *et* $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f(1) = \frac{\pi}{3}$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.
Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, f *n'est pas dérivable en* 0 *(demi-tangente verticale).*

Exercice 4.22 ♡♡

Étudier

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Solution : *Posons* $\varphi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

D'après le tableau de variations de φ, φ *est à valeurs dans* $]-1,1[$. *Comme* arcsin *est définie et dérivable sur* $]-1,1[$, f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} \times \varphi'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \arctan'(x)$$

Par conséquent, $\exists C \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x + C$$

En prenant $x = 0$, *on trouve que* $C = 0$.
Montrons par la trigonométrie que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arctan x$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\exists! \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *tel que*

$$x = \tan\theta$$

Alors $\arctan x = \arctan\tan\theta = \theta$ *(car* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
D'autre part,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \tan\theta|\cos\theta| = \tan\theta\cos\theta = \sin\theta$$

(le cosinus est positif sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Alors

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \arcsin\sin\theta = \theta$$

car $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *et on a bien le résultat.*

Exercice 4.23 ♡♡

Étudiez la fonction f *définie par :*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2\arctan x$$

Solution : *La fonction f est définie pour $x \not\in \{-1,+1\}$ donc* $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$. *Comme la fonction f est impaire, on fait l'étude sur les intervalles* $I_1 = [0,1[$ *et* $I_2 =]1,+\infty[$. *Calculons sa dérivée :*

$$\forall x \in I_1 \cup I_2, \quad f'(x) = \frac{2x^2+2}{x^4+2x^2+1} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

Par conséquent, $\exists C_1 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in I_1$, $f(x) = C_1$ *et* $\exists C_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in I_2$, $f(x) = C_2$. *En faisant* $x = 0$ *et* $x \to +\infty$, *on trouve que* $C_1 = 0$ *et* $C_2 = -\pi$.
Montrons par la trigonométrie que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\arctan x$$

Soit $x \in]-1,1[$. $\exists! \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ *tel que* $x = \tan\theta$. *Alors*

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\tan 2\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan(2\theta)$$

Or $2\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *donc*

$$\arctan\frac{2x}{1-x^2} = 2\theta = 2\arctan x$$

Exercice 4.24 ♡♡

Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \quad \arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$$

Retrouver ensuite ce résultat par la trigonométrie
Indication 4.3 : On pourra poser $x = \sin^2 u$

Solution : *Soit* $f(x) = \arcsin\sqrt{x} - \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$. *$f$ est bien définie sur* $[0,1]$ *car* $-1 \leqslant 2x-1 \leqslant 1$. *Elle est dérivable sur* $]0,1[$ *et*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} = 0$$

Cette fonction est donc constante sur l'intervalle $[0,1]$. *En faisant* $x = 0$, *on trouve que* $f(0) = \frac{\pi}{4}$.
On retrouve ce résultat car on peut poser $x = \sin^2 u$ *lorsque* $x \in [0,1]$, *avec* $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. *Alors*

$$\arcsin(2x-1) = \arcsin(-\cos 2u) = -\arcsin(\cos 2u) = \arccos(\cos 2u) - \frac{\pi}{2} = 2u - \frac{\pi}{2}$$

et $\arcsin\sqrt{x} = \arcsin\sin u = u$.

Exercice 4.25 ♡♡

Étudier la fonction

$$f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\arctan x$$

Solution :

1. *Puisque* $\arccos$ *est définie sur* $[-1,1]$, *il faut que* $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$, *ce qui est toujours vérifié car* $\forall x \in \mathbb{R}$, $1-x^2 \leqslant 1+x^2$ *et* $1-x^2 \geqslant -(1+x^2)$. *Donc* $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$. *Il n'y a pas de parité.*
2. *Puisque* $\arccos$ *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et que* $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| = 1 \iff x = 0$, *$f$ est dérivable sur* $I_1 =]-\infty,0[$ *et sur* $I_2 =]0,+\infty[$ *comme composée de fonctions dérivables. Et* $\forall x \in I_1 \cup I_2$ *:*

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\frac{-2}{(1+x^2)^2}(2x) - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2sg(x)}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2}$$

Par conséquent, puisque $f' = 0$ *sur* I_2, $\exists C_2 \in \mathbb{R}$, *tel que* $\forall x \in I_1$, $f(x) = C_2$ *et en faisant* $x \to +\infty$, $C_2 = 0$. *Sur* I_1, $f'(x) = -\frac{4}{1+x^2}$ *et donc* $\exists C_1 \in \mathbb{R}$, *tel que* $\forall x \in I_1$, $f(x) = 4\arctan x + C_1$. *En faisant* $x \to -\infty$, *on trouve que* $C_1 = 2\pi$.

3. *Montrons par la trigonométrie que*

$$\forall x \geqslant 0, \quad \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan x$$

Soit $x \geqslant 0$*. Il existe un unique* $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $x = \tan\theta/2$*. Alors* $2\arctan x = \theta$ *et*

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \arccos(\cos\theta) = \theta(\theta \in [0,\pi])$$

Exercice 4.26 ♡♡

Étudier la fonction

$$f(x) = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solution : *On détermine* $\mathrm{D}_f =]-1,1[$*,* f *est impaire et dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\forall x \in]-1,1[$*,*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} \times \frac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R}$*, tel que* $\forall x \in]-1,1[$*,* $f(x) = \mathrm{C}$*. Comme* $f(0) = 0$*, on a montré que* $\forall x \in]-1,1[$*,*

$$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

On retrouve ce résultat par la trigonométrie. Soit $x \in]-1,1[$*. Alors* $\exists! \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $x = \sin\theta$*. Alors*

$$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arctan\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \arctan\theta = \theta$$

Exercice 4.27 ♡♡

Étudier

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$$

Solution : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^\star$*,* f *est impaire. On fait l'étude sur* $[0,+\infty[$*.* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et* $\forall x \in]0,+\infty[$ *:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2x^2+2-2\sqrt{x^2+1}} \times \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2(x^2+1)(\sqrt{x^2+1}-1)} \\ &= \frac{1}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2}\arctan'(x) \end{aligned}$$

Donc il existe $\mathrm{C}_1 \in \mathbb{R}$ *telle que* $\forall x \in]0,+\infty[$*,*

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C}_1$$

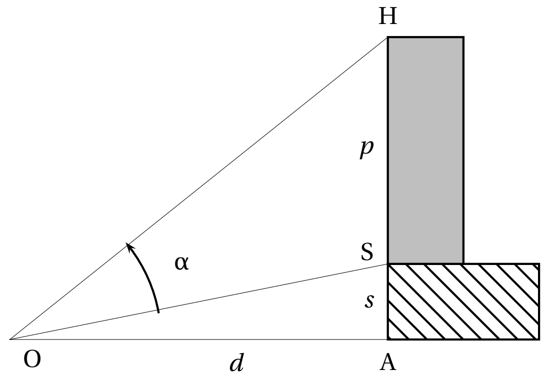
En prenant la limite lorsque $x \to +\infty$*, on trouve* $\mathrm{C}_1 = 0$*. De même, on montre que* $\forall x \in]-\infty, 0[$*,*

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan x$$

On retrouve ce résultat par la trigonométrie en posant $x = \tan\theta$*.*

Exercice 4.28 ♡♡

Une statue de hauteur p est placée sur un piédestal de hauteur s. Un observateur se trouve à une distance d de la statue (sa taille est négligeable). Trouver la distance d pour que l'observateur voie la statue sous un angle α maximal.



Solution : *Notons θ l'angle $\widehat{AOH}$ et φ l'angle $\widehat{AOS}$. Alors*

$$\alpha = \theta - \varphi$$

Or $\tan\theta = \dfrac{p+s}{d}$ *et* $\tan\varphi = \dfrac{s}{d}$ *par conséquent, puisque* $\alpha, \theta, \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\alpha = \arctan\frac{p+s}{d} - \arctan\frac{s}{d}$$

En posant $A = p+s$ *et* $B = s$, *étudions la fonction*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\frac{A}{x} - \arctan\frac{B}{x} \end{array} \right.$$

Elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ *et*

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{(B-A)(x^2-AB)}{(x^2+B^2)(x^2+A^2)}$$

et donc f' s'annule en $x_0 = \sqrt{AB}$ (car $A > B$, puisque $s > 0$). On voit sur le tableau de variations de f que x_0 correspond à un minimum de f et donc la distance d sous laquelle on voit la statue sous un angle minimal est :

$$d_0 = \sqrt{(p+s)s}$$

Cet angle vaut alors

$$\alpha_0 = f(d_0) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{p+s}{s}}\right) - \frac{\pi}{2}$$

(on a utilisé la formule $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ *lorsque* $x > 0$*).*

4.6.3 Fonctions hyperboliques

Exercice 4.29 ♡

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \operatorname{sh} x \geqslant x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$

Solution : *Il suffit d'étudier les fonctions* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sh} x - x \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \frac{x^2}{2} - \operatorname{ch} x \end{array} \right.$ *et de montrer qu'elles sont positives sur le domaine d'étude.*

Exercice 4.30 ♡

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$.

Solution : *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$:*

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \left(e^x\right)^n = e^{nx} = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$$

Exercice 4.31 ♡

Simplifier, quand là où elles sont définies, les expressions suivantes :

1. $\operatorname{ch}\left(\operatorname{argsh} x\right)$
2. $\operatorname{th}\left(\operatorname{argsh} x\right)$
3. $\operatorname{sh}\left(2\operatorname{argsh} x\right)$
4. $\operatorname{sh}\left(\operatorname{argch} x\right)$
5. $\operatorname{th}\left(\operatorname{argch} x\right)$
6. $\operatorname{ch}\left(\operatorname{argth} x\right)$

Solution :

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}$ et :*

$$\operatorname{ch}\left(\operatorname{argsh} x\right) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\left(\operatorname{argsh} x\right)} = \boxed{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$:*

$$\operatorname{th}\left(\operatorname{argsh} x\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(\operatorname{argsh} x\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{argsh} x\right)} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

3. *Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'additions,*

$$\operatorname{sh}\left(2\operatorname{argsh} x\right) = 2\operatorname{ch}\left(\operatorname{argsh} x\right)\operatorname{sh}\left(\operatorname{argsh} x\right) = \boxed{2x\sqrt{1+x^2}}.$$

4. *Soit $x \in [1,+\infty[$. Comme sh est positive sur $[1,+\infty[$, $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$ et*

$$\operatorname{sh}\left(\operatorname{argch} x\right) = \sqrt{\operatorname{ch}^2\left(\operatorname{argch} x\right)-1} = \boxed{\sqrt{x^2-1}}.$$

5. *Soit $x \in [1,+\infty[$.*

$$\operatorname{th}\left(\operatorname{argch} x\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(\operatorname{argch} x\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{argch} x\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}.$$

6. *Soit $x \in \mathbb{R}$. De : $1-\operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, on déduit, ch étant positive sur $\mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$. Par suite :*

$$\operatorname{ch}\left(\operatorname{argth} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\left(\operatorname{argth} x\right)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Exercice 4.32 ♡♡

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb) \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb).$$

Solution : *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a*

$$\mathrm{C}_n + \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{ch}(a+kb)+\operatorname{sh}(a+kb)) = \sum_{k=0}^{n} e^{a+kb} = e^a \sum_{k=0}^{n} \left(e^b\right)^k = \begin{cases} e^a \dfrac{1-e^{(n+1)b}}{1-e^b} & \text{si } b \neq 0 \\ (n+1)\, e^a & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

De même :

$$\mathrm{C}_n - \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{ch}(a+kb)-\operatorname{sh}(a+kb)) = \sum_{k=0}^{n} e^{-(a+kb)} = e^{-a} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-b}\right)^k = \begin{cases} e^{-a} \dfrac{1-e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}} & \text{si } b \neq 0 \\ (n+1)\, e^{-a} & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$C_n = \begin{cases} e^{-a}\dfrac{1}{2}\left(e^a\dfrac{1-e^{(n+1)b}}{1-e^b}+\dfrac{1-e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}}\right) & \text{si } b\neq 0\\ (n+1)\operatorname{ch} a & \text{si } b=0\end{cases}$$

et

$$S_n = \begin{cases} e^{-a}\dfrac{1}{2}\left(e^a\dfrac{1-e^{(n+1)b}}{1-e^b}-\dfrac{1-e^{-(n+1)b}}{1-e^{-b}}\right) & \text{si } b\neq 0\\ (n+1)\operatorname{sh} a & \text{si } b=0\end{cases}.$$

Exercice 4.33 ♡♡

Montrer que $\forall x\neq 0$,

$$\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x}-\frac{1}{\operatorname{th} x}$$

Calculer alors la somme

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$$

Solution : *En utilisant les formules d'addition pour la tangente hyperbolique :*

$$\frac{2}{\operatorname{th} 2x}-\frac{1}{\operatorname{th} x}=\frac{2}{\frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}}-\frac{1}{\operatorname{th} x}=\frac{1+\operatorname{th}^2 x-1}{\operatorname{th} x}=\operatorname{th} x.$$

En remplaçant dans la somme, on trouve

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}2^k\left(\frac{2}{\operatorname{th} 2^{k+1}x}-\frac{2}{\operatorname{th} 2^k x}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th} 2^{k+1}x}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{\operatorname{th} 2^k x}=\boxed{\frac{2^n}{\operatorname{th} 2^n x}-\frac{1}{\operatorname{th} x}}$$

Exercice 4.34 ♡♡

Montrez que

$$\forall x\geqslant 0,\quad \arctan(\operatorname{sh} x)=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Retrouver ensuite ce résultat par la trigonométrie.

Solution : *Considérons la fonction* $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x)=\arctan(\operatorname{sh} x)-\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ *et* $\forall x>0$,

$$f'(x)=\frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}=0$$

Comme $f(0)=0$, *on trouve que* $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)=0$.
Par la trigonométrie : soit un réel $x\geqslant 0$. *Comme* $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\in]0,1[$, *il existe* $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}[$ *tel que*

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x}=\cos\theta$$

Alors

$$\operatorname{sh} x=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\tan\theta$$

et alors

$$\arctan(\operatorname{sh} x)=\arctan(\tan\theta)=\theta$$

Et d'autre part, on a bien

$$\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)=\arccos(\cos\theta)=\theta(\theta\in[0,\pi])$$

Exercice 4.35 ♡♡

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation

$$\operatorname{ch} x + \cos a = 2 \operatorname{sh} x + \sin a$$

Solution : *En passant aux exponentielles et en notant* $X = e^x$, X *doit vérifier l'équation du second degré :*

$$X^2 + 2(\sin a - \cos a)X - 3 = 0$$

Le discriminant réduit vaut $\Delta' = (\sin a - \cos a)^2 + 3 > 0$. *Puisque* $X > 0$, *il faut que*

$$X = \sqrt{(\sin a - \cos a)^2 + 3} - (\sin a - \cos a)$$

On a bien $X > 0$ *car* $\sqrt{(\sin a - \cos a)^2 + 3} > |sin a - \cos a|$. *Alors*

$$\boxed{x = \ln\left(\sqrt{4 - \sin 2a} - 2 + \sin 2a\right)}$$

Exercice 4.36 ♡♡

Soit

$$f : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et que : $\forall x \in I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *:*

1. $\operatorname{th} \frac{f(x)}{2} = \tan \frac{x}{2}$
2. $\operatorname{th} f(x) = \sin x$
3. $\operatorname{ch} f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
4. $\operatorname{sh} f(x) = \tan x$.

Solution : *Remarquons d'abord que dans l'intervalle de définition,* $0 < (\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) < \frac{\pi}{2}$ *et donc que la tangente prend ses valeurs dans* $]0, +\infty[$ *et par conséquent que f est bien définie.*

1. *Puisque*
$$\operatorname{th} X = \frac{e^{2X} - 1}{e^{2X} + 1}$$
En remplaçant,
$$\operatorname{th} \frac{f(x)}{2} = \frac{\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + 1}$$
et en développant $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$, *on trouve le résultat.*
2. *On utilise la même expression de* $\operatorname{th} x$ *et l'on trouve :*
$$\operatorname{th} f(x) = \frac{\tan^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + 1} = \sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$
où l'on a utilisé la formule $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
3. *Puisque* $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, *on trouve que*
$$\operatorname{ch} f(x) = \frac{\tan^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + 1}{2\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos x}.$$
4. *De la même façon,*
$$\operatorname{sh} f(x) = \frac{\tan^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 1}{2\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} = -\frac{\sin^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - \cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}{2\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} = \frac{-\cos(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \tan x.$$

Exercice 4.37 ♡♡

Résoudre l'équation

$$5 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{sh} x = 3$$

On utilisera deux méthodes différentes :

1) En exprimant tout à l'aide d'exponentielles,
2) En utilisant $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$.

Solution :

1. *L'équation s'écrit* $5(e^x + e^{-x}) - 4(e^x - e^{-x}) = 6$*, c'est-à-dire*
$$(e^x)^2 - 6e^x + 9 = 0$$
En posant $X = e^x$*, on a une équation du second degré,* $(X-3)^2 = 0$*, on trouve alors une unique solution* $e^x = 3$*, c'est-à-dire* $\boxed{x = \ln 3}$
2. *Si* $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$*, l'équation s'écrit*
$$5\frac{1+t^2}{1-t^2} - 4\frac{2t}{1-t^2} = 3 \Longleftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0$$
l'unique solution est alors $t = \dfrac{1}{2}$*. Alors*
$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \Longleftrightarrow e^x = 3 \Longleftrightarrow x = \ln 3$$

La première solution est plus simple !

Exercice 4.38 ♡♡

Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$ *sur un domaine à déterminer. Conclusion ? Retrouver ce résultat en utilisant la trigonométrie.*

Solution : *Comme* $\operatorname{th} : \mathbb{R} \mapsto]-1,1[$*, la fonction* f *est définie sur* $\mathbb{R}$*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on trouve que*
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}}\,\frac{2}{(1-\operatorname{th} x)^2}(1-\operatorname{th}^2 x) = \sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$$
f *vérifie l'équation différentielle* $y' = y$*.* f *est donc de la forme :* $f : x \mapsto \alpha e^x$ *et comme* $f(0) = 1$*, on a* $\alpha = 1$ *et* f *est la fonction exponentielle néperienne. On retrouve ce résultat en écrivant*
$$f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}} = \sqrt{\frac{e^x}{e^{-x}}} = e^x.$$

Exercice 4.39 ♡♡

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$2\arctan(\operatorname{th} x) = \arctan(\operatorname{sh} 2x)$$

Solution : *Soit* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\arctan(\operatorname{th} x) - \arctan(\operatorname{sh}(2x)) \end{array}\right.$*. On a* $D_f = \mathbb{R}$ *et*
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{2}{1+\operatorname{th}^2 x}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2(2x)}(2\operatorname{ch}(2x)) \\ &= \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} - \frac{2}{\operatorname{ch}^2(2x)} = 0\end{aligned}$$
Par conséquent f *est constante sur* $\mathbb{R}$ *et puisque* $f(0) = 0$*, on a l'égalité voulue.*
En passant par la trigonométrie, soit $x \in \mathbb{R}$, $\exists! \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ *tel que* $\operatorname{th} x = \tan\theta$*. Alors* $\arctan(\operatorname{sh}(2x)) = \arctan(2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)$.
Or $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \dfrac{\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x}$*, donc* $\operatorname{sh} 2x = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2(\theta)} = \tan(2\theta)$ *et puisque* $2\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*, on obtient l'égalité souhaitée.*

Chapitre 5

Equations différentielles linéaires

In Order to solve a differential equation you look at it
till a solution occurs to you
George Pólya - How to solve it.

Pour bien aborder ce chapitre

L'objet de ce chapitre est de donner des outils pour résoudre des équations différentielles du premier et du second ordre. Vous rencontrerez quotidiennement ces équations en mathématiques mais aussi en physique, en chimie et en sciences de l'ingénieur. Il est donc impératif de bien maîtriser les techniques développées ici. Indirectement, nous réviserons les techniques de primitivation enseignées en terminale. Il est conseillé à ce sujet de se remettre en mémoire les primitives des fonctions usuelles, voir l'annexe E.4. Vous pourrez dans une première lecture éviter de vous focaliser sur les démonstrations. Celles-ci s'éclairciront après les premiers rudiments d'algèbre linéaire du chapitre 23 et plus particulièrement le paragraphe 23.5 page 860 et le chapitre 13 d'intégration.

5.1 Quelques rappels

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Le symbole $\mathbb{K}$ représentera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

5.2 Deux caractérisations de la fonction exponentielle

Remarque 5.1 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{at}$. La fonction f_a vérifie :
- $f_a(0) = 1$
- $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad f_a(t + t') = f_a(t) f_a(t')$
- f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_a' = a f_a$.

5.2.1 Caractérisation par une équation différentielle

On se propose d'étudier ici une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle $f' = af$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

PROPOSITION 5.1 **Caractérisation de la fonction exponentielle l'équation différentielle** $f' = af$

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et pour laquelle il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f' = af$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda e^{at}$.
Autrement dit, f vérifie : $f = \lambda f_a$. Si, de plus, $f(0) = 1$ alors $f = f_a$.

Démonstration *Introduisons la fonction* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t)\,e^{-at} \end{array} \right.$. *Il est clair que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *:*

$$\theta'(t) = f'(t)\,e^{-at} - af'(t)\,e^{-at} = af(t)\,e^{-at} - af'(t)\,e^{-at} = 0.$$

Donc θ *est une fonction constante sur l'intervalle* $\mathbb{R}$. *Il existe alors* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que :* $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)\,e^{-at} = \lambda$. *Le résultat est prouvé. On vérifie aussi facilement que si* $f(0) = 1$ *alors* $f = f_a$.

5.2.2 Caractérisation par une équation fonctionnelle

On se propose maintenant d'étudier une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t)$$

PROPOSITION 5.2 ♡ **Caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle** $f(s+t) = f(s)f(t)$
Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t)$. Si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$ alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Sinon $f(0) = 1$ et il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f' = af$, c'est à dire tel que $f = f_a$.

Démonstration *Remarquons que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $f(s) = f((s-t)+t) = f(s-t)f(t)$. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$ alors on déduit de l'égalité précédente que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Supposons alors que f ne s'annule jamais. On a $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$ et donc $f(0)\left(f(0)-1\right) = 0$. Comme f ne s'annule jamais, il vient $f(0) = 1$. Par dérivation de l'égalité $f(s+t) = f(s)f(t)$ par rapport à s, on obtient $f'(s+t) = f'(s)f(t)$ et avec $s = 0$ cela amène $f'(t) = f'(0)f(t)$ ou encore $f'(t) = af(t)$ si $a = f'(0)$. Par application de la propriété 5.1 et comme $f(0) = 1$, on peut affirmer que $f = f_a$..*

5.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

5.3.1 Vocabulaire

DÉFINITION 5.1 ♡ **Equation différentielle linéaire du premier ordre**
Soient a, b, c trois fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

– On appelle *équation différentielle du premier ordre* une équation différentielle de la forme

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t) \qquad \text{(E)}$$

– Une *solution* de cette équation différentielle est une fonction f dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad a(t)\,f'(t) + b(t)\,f(t) = c(t)$$

– *Résoudre*, ou *intégrer* l'équation différentielle (E) revient à déterminer l'ensemble des fonctions qui sont solutions de (E). On notera $\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ cet ensemble.
– Le graphe d'une solution f de (E) dans un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan est une *courbe intégrale* de (E).
– Si la fonction c est identiquement nulle, l'équation différentielle (E) est dite *homogène* ou *sans second membre*.
– (E) est dite *normalisée* si a est la fonction constante identiquement égale à 1 sur I.

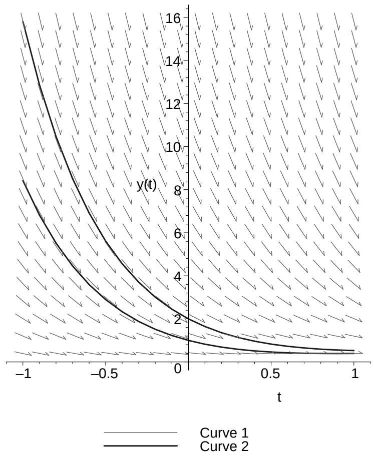


FIGURE 5.1 – Champ de vecteurs et courbes intégrales

Remarque 5.2 Si $y \in \mathscr{S}_{\mathrm{E}}$, est une solution d'une équation différentielle explicite

$$\text{(E)} \quad y' = f(y,t)$$

alors en un point (t, y) de la courbe représentative de y, la pente de la tangente à cette courbe $\mathscr{C}_y$ vaut $f(y,t)$. La connaissance de la fonction f permet de tracer un champ de vecteurs. En un point (t_0, y_0) du plan on représente un vecteur de pente $f(t_0, y_0)$. Alors un point $(t_0, y(t_0))$ d'une courbe intégrale de (E), le champ de vecteurs sera tangent à la courbe. C'est l'idée de la **méthode d'Euler**, voir 5.3.6 page 209.

PROPOSITION 5.3 ♡ **L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel**
Soit l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = 0 \quad (\mathrm{E}).$$

Alors toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E).
Autrement dit, si φ et ψ sont des solutions de (E) alors, pour tout couple de scalaires $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha\varphi + \beta\psi$ est encore solution de E.
On dit que $\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 5.2 **Condition initiale**
Soit $(t_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$. On dit que la solution φ de (E) vérifie la *condition initiale* (t_0, y_0) si et seulement si $\boxed{\varphi(t_0) = y_0}$.

DÉFINITION 5.3 **Problème de Cauchy**
On appelle *problème de Cauchy* la recherche d'une solution $y : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ d'une équation différentielle (E) vérifiant une condition initiale $(t_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$ fixée.

BIO 5 Augustin Louis Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857

Mathématicien français, Cauchy est, après Léonhard Euler (voir 1 page 29), et avec près de 800 publications, le mathématicien le plus prolifique de l'histoire des mathématiques. Il fut un pionnier dans diverses branches des mathématiques comme l'étude de la convergence et de la divergence des séries (notions que vous découvrirez en spé), l'étude des groupes de permutations (voir le chapitre 26, ce travail fut précurseur de la théorie des groupes). Il travailla sur la théorie des équations différentielles et fut le découvreur des fonctions holomorphes. Il ne se comporta pas toujours de manière adroite avec les jeunes mathématiciens. Il sous-estima ainsi le travail d'Abel ou de Galois et égara même un mémoire, pourtant capital, de ce dernier. Il fut enseignant à l'école Polytechnique. Son cours était d'une rigueur inhabituelle pour l'époque et il fut décrié au départ par ses élèves et ses collègues. Il allait néanmoins devenir une référence pour tout travail en analyse au $19^{\text{ème}}$ *siècle.*



5.3.2 Résolution de l'équation différentielle homogène normalisée

THÉORÈME 5.4 ♡♡♡ **Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée**
On suppose que :

- (H1) I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- (H2) a est une fonction continue définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors les solutions de l'équation différentielle homogène normalisée :

$$\boxed{\forall t \in \mathrm{I}, \qquad y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 \quad (\mathrm{E})}$$

sont données par les fonctions

$$\boxed{\varphi_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{-\mathrm{A}(t)} \end{array} \right.}$$

où $\alpha \in \mathbb{K}$ et où A est une primitive de a sur I.

$$\boxed{\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}) = \left\{ t \mapsto \alpha e^{-\mathrm{A}(t)} \mid \alpha \in \mathbb{K} \right\}}$$

Démonstration *Nous verrons dans le chapitre 13 que toute fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *possède une primitive sur cet intervalle (voir le théorème 13.30 page 531).*

1. *Cherchons une solution de* (E)*. Comme*

(H1) *I est un intervalle,*

(H2) *a est continue sur I,*

on peut affirmer que a possède une primitive A sur I. Considérons la fonction φ_1 donnée par

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & e^{-\mathrm{A}(t)} \end{array} \right.$$

φ_1 est clairement dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables. De plus, si $t \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= -\mathrm{A}'(t)\, e^{-\mathrm{A}(t)} \\ &= -a(t)\, e^{-\mathrm{A}(t)}. \end{aligned}$$

Par conséquent $\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t) = -a(t)\, e^{-\mathrm{A}(t)} + a(t)\, e^{-\mathrm{A}(t)} = 0$ et φ_1 est bien solution de (E).

2. *Montrons maintenant que toutes les autres solutions de (E) sont proportionnelles à celle ci. Soit $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une autre solution de (E). Comme φ_1 ne s'annule pas sur I, le quotient $\frac{\varphi}{\varphi_1}$ est défini sur I. Si nous prouvons que la dérivée de ce quotient est identiquement nulle sur I, alors, d'après le théorème 4.3, la fonction $\frac{\varphi}{\varphi_1}$ est constante sur I et il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)} = \alpha$ ce qui prouve bien que les deux fonctions sont proportionnelles. Calculons donc $\frac{\varphi}{\varphi_1}'$. Ce quotient est dérivable sur I car c'est un quotient de fonctions dérivables sur I. De plus, pour tout $t \in \mathrm{I}$,*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'(t) &= \left(\varphi e^{\mathrm{A}}\right)'(t) \\ &= \varphi'(t)\, e^{\mathrm{A}(t)} + a(t)\,\varphi(t)\, e^{\mathrm{A}(t)} \\ &= \left(\varphi'(t) + a(t)\,\varphi(t)\right) e^{\mathrm{A}(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car φ est une solution de (E). Le théorème est donc démontré.

Remarque 5.3 Avec les notations de cette dernière proposition, remarquons que si φ est une solution non nulle de (E) alors il en est de même de $\lambda\varphi$ où $\lambda \in \mathbb{K}$. Réciproquement, toute solution de (E) est proportionnelle à φ. $\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ possède une structure de droite vectorielle.

Exemple 5.1 Résoudre

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - 2ty = 0$$

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre et normalisée. La fonction $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -2t \end{array} \right.$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Une d'entre elles est donnée par $\mathrm{A} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -t^2 \end{array} \right.$. Par application du théorème précédent, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\varphi_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{t^2} \end{array} \right.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 5.5 ♡

Soient I un intervalle et a une fonction continue définie sur I, $t_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution du problème de Cauchy l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y'(t) + a(t)\, y(t) = 0 \quad (\mathrm{E})$$

vérifiant la condition initiale (t_0, y_0) (c'est à dire telle que $y(t_0) = y_0$).

Démonstration

Existence *Posons :*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t a(u)\mathrm{d}u\right) \end{array} \right.$$

Remarquons que $t \to \int_{t_0}^t a(u)\mathrm{d}u$ est la primitive de a sur I qui s'annule en t_0. Par application du théorème précédent, φ est solution de (E). De plus,

$$\varphi(t_0) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0} a(u)\mathrm{d}u\right) = y_0.$$

Par conséquent, φ vérifie bien la condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$.

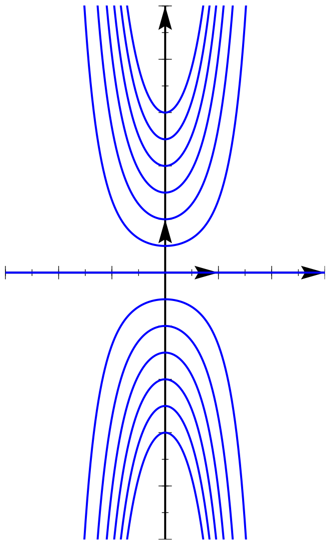


FIGURE 5.2 – Graphes de quelques solutions de (E)

Unicité *Soit ψ une autre solution de E qui vérifie la condition initiale (t_0, y_0). Par application du théorème précédent, φ et ψ sont proportionnelles :*

$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad \psi = c\varphi.$$

- *Si $y_0 = 0$ alors φ est la fonction nulle et il en est donc de même de ψ. On a donc bien $\psi = \varphi$.*
- *Sinon, si $y_0 \neq 0$, on a*

$$y_0 = \psi(t_0) = c\varphi(t_0) = c y_0$$

ce qui amène, en divisant les deux membres de cette égalité par y_0 que $c = 1$ et donc, là encore que $\psi = \varphi$.

Remarque 5.4 Avec les hypothèses de la proposition précédente : si $t_0 \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}) = \left\{ t \mapsto c \, \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u \right) \mid c \in \mathbb{K} \right\}$$

La solution prenant la valeur y_0 en t_0 est exactement $t \mapsto y_0 \, \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

Remarque 5.5 Si une solution s'annule en un point, alors elle est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Si une solution est non nulle en un point, alors elle ne s'annule jamais.

5.3.3 Résolution de l'équation différentielle normalisée avec second membre

PROPOSITION 5.6 ♡♡♡

Considérons l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t) \quad (\mathrm{E})$$

On suppose que :

- H1 — I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- H2 — a et b sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- H3 — $\varphi_0 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de (E).

alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $\varphi_0 + \varphi$ où φ est une solution de l'équation différentielle homogène associée

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y'(t) + ay(t) = 0 \quad (\mathrm{H}).$$

Autrement dit : toute solution de (E) est somme d'une solution φ de l'équation homogène (H) associée à (E) et d'une solution particulière φ_0 de (E)

$$\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}) = \left\{ \varphi_0 + \varphi \mid \varphi \in \mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{H}) \right\} = \varphi_0 + \mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{H})$$

Démonstration

– *Soit* $\varphi : I \to \mathbb{K}$ *une solution de l'équation homogène* (H) *associée à* (E)*. On a donc* $\varphi' + a\varphi = 0$*. La fonction* $\varphi_0 + \varphi$ *est solution de* (E)*. En effet :*

$$\begin{aligned}\left(\varphi_0+\varphi\right)' + a\left(\varphi_0+\varphi\right) &= \varphi_0' + \varphi' + a\varphi_0 + a\varphi \\ &= \underbrace{\left(\varphi_0' + a\varphi_0\right)}_{b} + \underbrace{\left(\varphi' + a\varphi\right)}_{0} \\ &= b.\end{aligned}$$

– *Réciproquement, soit* ψ *une solution de* (E)*. Montrons qu'il existe* $\varphi \in S_{\mathbb{K}}(H)$ *tel que* $\psi = \varphi_0 + \varphi$*. Cela revient à montrer que* $\psi - \varphi_0$ *est solution de* (H)*. On vérifie que c'est le cas car :*

$$\begin{aligned}\left(\psi-\varphi_0\right)' + a\left(\psi-\varphi_0\right) &= \underbrace{\left(\psi' - a\psi\right)}_{b} - \underbrace{\left(\varphi_0' - a\varphi_0\right)}_{b} \\ &= b - b \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exemple 5.2 Résolvons sur $I = \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' + ty = t \qquad (E)$$

Par application du théorème 5.4, les solutions de l'équation homogène : $y' + ty = 0$ sont les fonctions $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \alpha e^{-\frac{t^2}{2}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Une solution évidente de (E) est la fonction constante : $\varphi : t \mapsto 1$. D'après le théorème précédent, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\psi_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto 1 + \alpha e^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

5.3.4 Détermination de solutions particulières

Superposition des solutions

PROPOSITION 5.7 ♡ **Principe de superposition des solutions**
Soient a, b, b_1, b_2 quatre fonctions définies et continues sur I telles que $b = b_1 + b_2$. On considère les équations différentielles

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t) \qquad (E)$$

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b_1(t) \qquad (E_1)$$

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b_2(t) \qquad (E_2)$$

Si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement de (E_1) et (E_2) alors $y = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E).

Démonstration *En effet :*

$$\begin{aligned}\left(y_1+y_2\right)' + ay\left(y_1+y_2\right) &= \underbrace{y_1' + ay_1}_{b_1} + \underbrace{y_2' + ay_2}_{b_2} \\ &= b_1 + b_2 \\ &= b\end{aligned}$$

Trois cas particuliers

PROPOSITION 5.8

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'équation

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + \alpha\, y(t) = \boxed{P(t)} \qquad (E)$$

admet comme solution particulière :

- Un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha = 0$.
- Un polynôme de degré n sinon.

Démonstration

- *Si* $\alpha = 0$, *une solution de* (E) *est donnée par une primitive de* P. *Le polynôme* P *étant de degré* n, *cette primitive est nécessairement de degré* $n+1$.
- *Si* $\alpha \neq 0$, *commençons par traiter le cas où* P *est donné par* $P(t) = \lambda t^n$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Cherchons une solution de* (E) *sous la forme* $\varphi : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ *où pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. *On a :*

$$\begin{aligned}
& \varphi \text{ est solution de } (E) \\
\Longrightarrow\quad & \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k t^{k-1} + \alpha \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = \lambda t^n \\
\Longrightarrow\quad & \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\alpha_{k+1} t^k + \alpha \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = \lambda t^n \\
\Longrightarrow\quad & \alpha.\alpha_n t^n + \sum_{k=0}^{n-1} \big((k+1)\,\alpha_{k+1} + \alpha.\alpha_k\big)\, t^k = \lambda t^n \\
\Longrightarrow\quad & \begin{cases} \alpha.\alpha_n = \lambda \\ \forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad (k+1)\,\alpha_{k+1} + \alpha.\alpha_k = 0 \end{cases} \quad \text{par identification} \\
\Longrightarrow\quad & \alpha_n = \frac{\lambda}{\alpha} \text{ et } \forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad \alpha_k = -(k+1)\,\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha} \text{ car } \alpha \neq 0
\end{aligned}$$

Réciproquement, si les coefficients de $\varphi : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ *sont donnés par les relations précédentes, on vérifie que* φ *est une solution de* (E). *On prouve ainsi que* (E) *possède une solution polynomiale de degré* n *dans le cas où* P *est un monôme de degré* n. *Traitons maintenant le cas général. On suppose que* P *est donné par* $P(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$ *où :* $\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_k \in K$. *Considérons les* $n+1$ *équations :*

$$\begin{array}{rcll}
y' + \alpha y &=& \lambda_0 & (E_0) \\
y' + \alpha y &=& \lambda_1 t & (E_1) \\
y' + \alpha y &=& \lambda_2 t^2 & (E_2) \\
\vdots &=& \vdots & \\
y' + \alpha y &=& \lambda_n t^n & (E_n)
\end{array}$$

Compte tenu de ce qui vient d'être prouvé, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, (E_k) *admet une solution polynomiale* φ_k *de degré* k *si* $\lambda_k \neq 0$ *et la solution nulle sinon. Par application du principe de superposition, on peut alors affirmer que* $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$ *est solution de* E. *Comme* P *est de degré* n, φ_n *est différent de* 0 *et* φ_n *est nécessairement de degré* n. *Le polynôme* φ *est donc clairement de degré* n.

Remarque 5.6 Pour montrer la puissance de l'algèbre linéaire (à venir), voici comment on pourra démontrer cette propriété :
Pour $\alpha \neq 0$, on considère l'application f de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même défini par $f(P) = P' + \alpha P$. On a $\deg(f(P)) = \deg P$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. f est injective donc surjective. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION 5.9
Soient P un polynôme de degré n, $m \in \mathbb{K}$ et a une fonction continue sur I. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, l'équation

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + \alpha\, y(t) = \boxed{P(t)\, e^{mt}} \qquad (E)$$

admet une solution particulière sur I de la forme $t \mapsto Q(t)\, e^{mt}$ où :
- Q est un polynôme de degré n si $\alpha + m \neq 0$
- Q est un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha + m = 0$.

Démonstration *Considérons* $\psi : I \to \mathbb{K}$ *et* $\varphi : I \to \mathbb{K}, t \mapsto \psi e^{-mt}$. *Montrons que* ψ *est solution de* (E) : $y' + \alpha y = Pe^{mt}$ *si et seulement si* φ *est solution de* $(E)' : z' + (\alpha + m)\, z = P$. *Ceci prouvera la proposition. En effet, d'après la proposition précédente,* (E') *possède une solution particulière* φ_0 *qui est un polynôme de degré* n *si* $\alpha + m$ *ne s'annule pas ou un polynôme de degré* $n+1$ *si* $\alpha + m$ *s'annule. Par conséquent* $\psi_0 : I \to \mathbb{K}, t \mapsto \varphi_0 e^{mt}$ *est une solution particulière de* (E). *On a :*

$$\begin{aligned}
& \psi \text{ est solution de } (E) \\
\Longrightarrow\quad & \forall t \in I, \quad \psi'(t) + \alpha\psi(t) = P(t)\, e^{mt} \\
\Longrightarrow\quad & \forall t \in I, \quad \varphi'(t)\, e^{mt} + m\varphi(t)\, e^{mt} + \alpha\varphi(t)\, e^{mt} = P(t)\, e^{mt} \\
\Longrightarrow\quad & \forall t \in I, \quad \varphi'(t) + (\alpha + m)\,\varphi(t) = P(t) \text{ car exp ne s'annule jamais} \\
\Longrightarrow\quad & \varphi \text{ est solution de } (E')
\end{aligned}$$

Réciproquement, par des calculs analogues, on vérifie facilement que si φ *est une solution de* (E') *alors* ψ *est une solution de* (E).

Remarque 5.7 Cette technique s'appelle un changement de fonction inconnue.

PROPOSITION 5.10
Soient $\eta_1, \eta_2, \alpha, \omega \in \mathbb{R}$ avec $\omega \neq 0$. L'équation

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y'(t) + \alpha\, y(t) = \boxed{\eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t)} \qquad \text{(E)}$$

admet une solution particulière sur I de la forme $t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$ où $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration *On démontre le lemme suivant : Si* $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha\cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) = 0$ (1)*, alors* $\alpha = \beta = 0$. *En effet, pour* $t = 0$*, on a* $\alpha = 0$*, et pour* $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $\beta = 0$.
Soit $\varphi_0 : t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$. *On a la série d'implications :*

$$\begin{aligned}
& \varphi_0 \text{ est solution de (E)} \\
\Longrightarrow\quad & \forall t \in \mathrm{I}, \quad \varphi_0'(t) + \alpha\, \varphi_0(t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\
\Longrightarrow\quad & \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left(\mu_1 + \omega\mu_2\right)\cos(\omega t) + \left(\mu_2 - \omega\mu_1\right)\sin(\omega t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\
\Longrightarrow\quad & \begin{cases} \mu_1 + \omega\mu_2 & = \eta_1 \\ -\omega\mu_1 + \mu_2 & = \eta_2 \end{cases} \\
\Longrightarrow\quad & \left(\mu_1, \mu_2\right) \text{ est solution de } \begin{cases} x + \omega y & = \eta_1 \\ -\omega x + y & = \eta_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Réciproquement, si ce système admet un couple solution $\left(\mu_1, \mu_2\right)$ *alors* $\varphi_0 : t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$ *est solution de* (E).
Mais le déterminant de ce système est $1 + \omega^2 \neq 0$ *et le système possède toujours un couple solution (voir proposition 2.21 page 75).*
L'équation (E) *admet donc toujours une solution de la forme indiquée.*

Exemple 5.3 Résolvons sur l'intervalle $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x.$$

Par application du théorème 5.4, l'équation homogène $y' + y = 0$ admet comme solutions les fonctions $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha e^{-x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Une solution évidente de $y' + y = 2e^x$ est $y : x \mapsto e^x$.
D'après la proposition 5.10, on peut chercher une solution particulière de $y' + y = 4\sin x + 3\cos x$ sous la forme $\varphi : x \mapsto \alpha\cos x + \beta \sin x$. On vérifie alors que φ est solution de cette équation si et seulement si $\alpha = -1/2$ et $\beta = 7/2$. Par application du principe de superposition, les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto 1/2\cos x + 7/2\sin x + e^x + \alpha e^{-x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Méthode de variation de la constante

Soient a, b deux fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle : $\forall t \in \mathrm{I}, \quad y'(t) + a y(t) = b(t) \quad$ (E). Pour déterminer une solution particulière de (E) :

1. On peut déterminer tout d'abord une solution non nulle de l'équation homogène associée à (E). Une telle solution est de la forme $t \mapsto c\, e^{-\mathrm{A}(t)}$ où A est une primitive de a sur I et où $c \in \mathbb{K}^*$.
2. On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme : $\forall t \in \mathrm{I}, \ \psi(t) = c(t)\, e^{-\mathrm{A}(t)}$ où c est une fonction dérivable sur I. On a l'équivalence suivante :
$$\psi \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathrm{I}, \ c'(t)\, e^{-\mathrm{A}(t)} = b(t).$$
3. Le calcul de ψ est donc ramené à celui de c, c'est-à-dire à celui d'une primitive de $b\, e^{\mathrm{A}}$ sur I.

Remarque 5.8 Si on fixe t_0 dans I, c est donnée sur I par exemple par :

$$c : \begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \int_{t_0}^t b(u)\, e^{\mathrm{A}(u)} \mathrm{d}u \end{cases}$$

et ψ par :

$$\psi : \begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \left(\int_{t_0}^t b(u)\, e^{\mathrm{A}(u)} \mathrm{d}u\right) e^{-\mathrm{A}(t)} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur I est donc donné par :

$$\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}) = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-\mathrm{A}(t)} + \int_{t_0}^t b(u)\, e^{\mathrm{A}(u) - \mathrm{A}(t)} \mathrm{d}u : \ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

COROLLAIRE 5.11
Soient a et b deux fonctions continues définies sur I, $t_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$$

vérifiant la condition initiale (t_0, y_0) (c'est à dire telle que $y(t_0) = y_0$).

Démonstration *Les solutions de* (E) *sont de la forme* $\psi = \varphi_0 + \alpha\varphi$ *où :*
- φ_0 *est une solution particulière de* (E). *Celle-ci existe en vertu de la méthode de variation de la constante.*
- φ *est une solution non nulle (et qui ne s'annule donc jamais) de l'équation homogène associée à* (E).
- $\alpha \in \mathbb{K}$ *est un scalaire.*

$\psi = \varphi_0 + \alpha\varphi$ *vérifie la condition initiale* (t_0, y_0) *si et seulement si* $\psi(t_0) = y_0$ *ou, autrement dit, si et seulement si* $\alpha = \left(y_0 - \varphi_0(t_0)\right)/\varphi(t_0)$ *ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy.*

Exemple 5.4 Résolvons (E) : $\quad y' + 2ty = e^{t-t^2}$. L'équation sans second membre associée à (E) est (E_0) : $\quad y' + 2ty = 0$. La fonction $a : t \mapsto 2t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et possède donc une primitive sur $\mathbb{R}$ donnée, par exemple, par $\mathrm{A} : t \mapsto t^2$. Par application du théorème fondamental 5.4, les solutions de (E_0) sont les fonctions :

$$\varphi_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{-t^2} \end{array} \right.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Utilisons la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière de (E). Cette solution est de la forme $t \mapsto c\ e^{-t^2}$ où c est une primitive de $t \mapsto b(t)\ e^{\mathrm{A}(t)} = e^{t-t^2} e^{t^2} = e^t$ sur $\mathbb{R}$. Une telle primitive est $t \mapsto e^t$. Par conséquent $t \mapsto e^t e^{-t^2} = e^{t-t^2}$ est une solution particulière de (E) et les solutions de (E) sont de la forme :

$$t \mapsto \left(e^t + \alpha\right) e^{-t^2}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

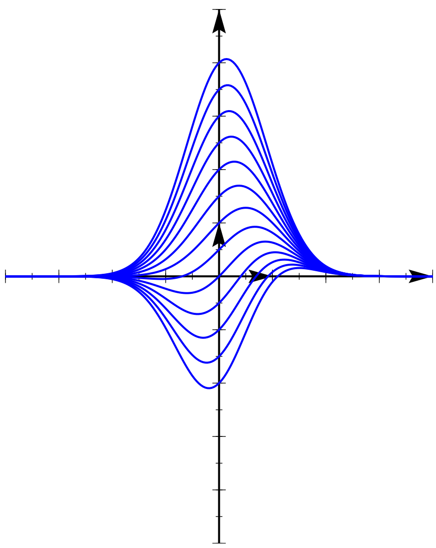


FIGURE 5.3 – Graphes de quelques solutions de (E)

5.3.5 Cas général

On suppose ici que $\mathrm{I} =]\alpha, \beta[$ où α et β sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $\alpha < \beta$ (on peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$). Soient a, b et c trois fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit J un sous intervalle de I sur lequel a ne s'annule pas.
On considère l'équation

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t) \quad (\mathrm{E}).$$

Pour tout $t \in \mathrm{J}$, on peut normaliser (E) en l'équation

$$\forall t \in \mathrm{J} \quad y'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} y(t) = \frac{c(t)}{a(t)} \quad (\mathrm{N})$$

PLAN 5.1 : Pour résoudre (E) sur (I)

1. *On résout l'équation homogène associée à* (N) *sur les sous-intervalles* J *de* I *sur lesquels* a *ne s'annule pas.*
2. *On cherche une solution particulière de* (N)*, ce qui nous permet de résoudre complètement* (N) *sur ces sous-intervalles.*
3. Analyse *Toute solution de* (E) *sur un des sous intervalles* J *de* I *sur lequel* a *ne s'annule pas est solution de* (E) *sur ce même sous intervalle. On étudie alors comment raccorder ces solutions en un point* t_0 *où* a *s'annule. Pour ce faire : si* φ_1 *est une solution de* (E) *sur* $J_1 =]\alpha', t_0[$ *et si* φ_2 *est solution de* (E) *sur* $J_2 =]t_0, \beta'[$ *(*$a(t_0) = 0$*), pour que* φ_1 *et* φ_2 *se raccordent en* t_0*, il est nécessaire que :*
   1. φ_1 *et* φ_2 *aient une même limite* l *en* t_0*.*
   2. *La fonction* φ *définie sur* $]\alpha', \beta'[$ *par* $\varphi_{|I_1} = \varphi_1$*,* $\varphi_{|I_2} = \varphi_2$ *et* $\varphi(b) = l$ *soit dérivable en* b*.*

   Synthèse *Il faut par ailleurs vérifier que la fonction* φ *ainsi construite est bien solution de* (E) *sur* $]\alpha', \beta'[$*.*

Exemple 5.5 Résolvons sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) : \quad \forall t \in I, \quad (1-t)\,y'(t) - y(t) = t$$

Normalisons (E). Nous obtenons l'équation :

$$(N) : \quad \forall t \in I_1 \cup I_2, \quad y'(t) - \frac{1}{1-t} y(t) = \frac{t}{t-1}$$

où $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$. L'équation homogène associée à (N) est :

$$(H) : \quad \forall t \in I_1 \cup I_2, \quad y'(t) - \frac{1}{1-t} y(t) = 0$$

1. Résolvons (H) sur I_1. Posons $a : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{1-t} \end{array} \right.$. On a :

   (H1) I_1 est un intervalle de $\mathbb{R}$

   (H2) a est continue sur I_1.

   Par application du théorème de résolution des équations différentielles homogènes du premier degré, on peut affirmer que les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

$$\varphi_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha_1 e^{-A(t)} \end{array} \right.$$

   où A est une primitive de A sur I_1 et où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Une telle primitive est donnée, par exemple, par A : $\left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(|1-t|) \end{array} \right.$. Par conséquent, les solutions de (H) sont de la forme :

$$\varphi_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_1}{1-t} \end{array} \right.$$

   où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. On montre de la même façon que les solutions de (H) sur I_2 sont de la forme

$$\varphi_{\alpha_2} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_2}{1-t} \end{array} \right.$$

   où $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

2. Par la méthode de variation de la constante, identifions une solution particulière ψ_1 de (N) sur I_1. ψ_1 est de la forme : $\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\lambda(t)}{1-t} \end{array} \right.$ où λ est une primitive de $t \to \frac{t}{1-t} e^{A} = t$. Une telle primitive est donnée, par exemple, par $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et

$$\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^2}{2} \frac{1}{1-t} \end{array} \right.$$

Les solutions de (N) sur I_1 sont somme de cette solution particulière de (N) et d'une solution générale de l'équation (H) et sont donc de la forme :

$$\zeta_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^2}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{\alpha_1}{1-t} = \frac{\alpha_1+t^2}{2(1-t)} \end{array} \right.$$

où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. On prouve de même que les solutions de (N) sur I_2 sont de la forme :

$$\zeta_{\alpha_2} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_2+t^2}{2(1-t)} \end{array} \right.$$

où $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

3 Analyse Cherchons s'il existe des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'un telle solution ζ existe. On doit avoir :

- $\zeta_{|I_1}$ doit être solution de (N) sur I_1 et donc il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I_1, \quad \zeta_{|I_1}(t) = \zeta_{\alpha_1}(t) = \frac{\alpha_1+t^2}{2(1-t)}$.
- $\zeta_{|I_2}$ doit être solution de (N) sur I_2 et donc il existe $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I_2, \quad \zeta_{|I_2}(t) = \zeta_{\alpha_2}(t) = \frac{\alpha_2+t^2}{2(1-t)}$.
- ζ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\zeta_{|I_1}$ doit avoir une limite quand $t \to 1^-$. Ceci n'est possible que si $\alpha_1 = -1$.
- De même $\zeta_{|I_2}$ doit avoir une limite quand $t \to 1^+$. Ceci n'est possible que si $\alpha_2 = -1$.
- On doit de plus avoir $\lim_{t\to1^-} \zeta_{|I_1(t)} = \lim_{t\to1^+} \zeta_{|I_2(t)}$, ce qu'on vérifie facilement. En conclusion, on doit avoir : $\zeta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{(t+1)}{2} \end{array} \right.$
- Enfin, ζ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut vérifier que la fonction que nous venons de construire est bien dérivable en 1, ce qui est ici évident.

Synthèse On vérifie enfin qu'une telle fonction est bien solution de (E) en s'assurant qu'elle vérifie bien (E). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (1-t)\zeta'(t) - \zeta(t) &= -\frac{1}{2}(1-t) + \frac{(t+1)}{2} \\ &= t \end{aligned}$$

La seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ est donc ζ.

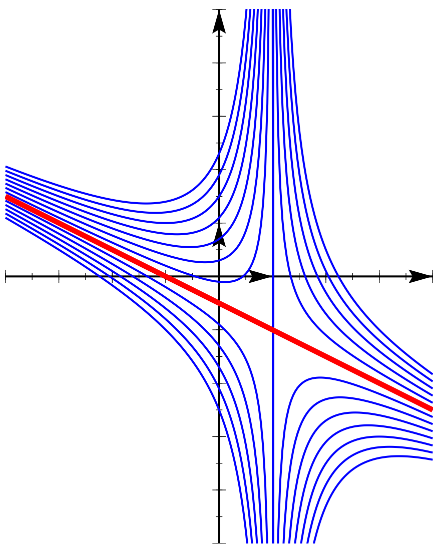


FIGURE 5.4 – Quelques courbes intégrale de (E). On remarquera celle associée à ζ

5.3.6 Méthode d'Euler

On considère le problème de Cauchy pour une équation différentielle du premier ordre explicite :

$$\begin{cases} y' & = f(t,y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Même si l'équation différentielle est linéaire, sa résolution passe par un calcul de primitives, or on ne sait calculer que très peu de primitives. Lorsque l'équation différentielle est non-linéaire, il est en général impossible de déterminer la solution explicite du problème de Cauchy. On a recours à des méthodes numériques de calcul approché de solutions. La plus simple de ces méthodes est la *méthode d'Euler* qui se base sur une idée géométrique simple.
L'idée est d'approximer la dérivée de y au point t par un taux d'accroissement :

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$$

ou de manière équivalente, d'approximer la courbe de y par sa tangente en t_0. Comme $\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \approx f(t_0,y_0)$, on en déduit que $y(t_0+h) \approx y_0 + f(t_0,y_0)$. Connaissant la valeur de y en t_0+h, on peut recommencer pour obtenir une approximation de $y(t_0+kh)$.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_0+nh, y_n)$$

Le réel y_n est une approximation de $y(t_0+nh)$. On peut travailler entre les temps t_0 et t_1 et subdiviser l'intervalle $[t_0,t_1]$ en m subdivisions régulières de pas $h=(t_1-t_0)/m$

MAPLE

```
>##Chargement de la librairie plot pour les tracés.
with(plots);

> ##La procédure Euler:
Euler:=proc(t0,t1,y0,m,f)
  local y,h,t,n,liste;
    #Calcul de la subdivision.
    h:=(t1-t0)/m;
    #On fixe les conditions initiales.
    y[0]:=y0;
    t[0]:=t0;
    liste:=[t[0],y[0]];
    #Boucle.
    for n from 1 to m
      do
      t[n]:=t[n-1]+h;
      y[n]:=f(t[n-1],y[n-1])*h+y[n-1];
      liste:=liste,[t[n],y[n]];
      od;
    #On renvoie la liste construite dans la boucle.
   [liste];
  end;
> ##Solution approchée avec la méthode d'Euler.
liste:=Euler(0,1,1,10,(t,y)->t*(y+1));
> d1:=plot(liste,color=red,linestyle=DOT);
> ##Solution exacte avec la commande dsolve.
dsolve({diff(y(t),t)-t*y(t)-t=0,y(0)=1});
                                     /1  2\
                    y(t) = -1 + 2 exp|- t |
                                     \2   /
> d2:=plot(-1+2*exp(t^2/2),t=0..1,color=blue);
>##Tracés.
display(d1,d2);
```

5.4 Équations différentielles linéaires du second ordre

5.4.1 Vocabulaire

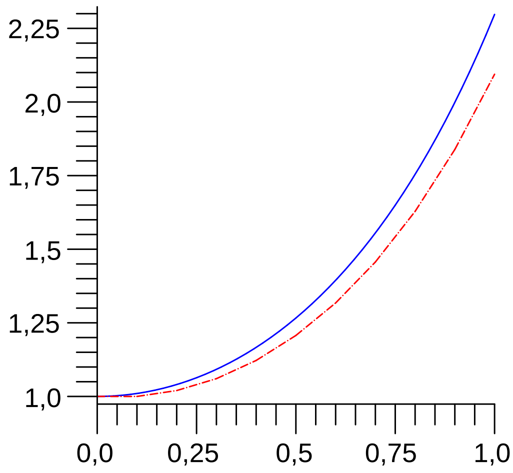


FIGURE 5.5 – La méthode d'Euler appliquée au problème de Cauchy $y' = ty - t$ et $y(0) = 1$. En trait plein, on reconnaît la solution $t \mapsto -1 + 2e^{-t^2/2}$ de ce problème et en trait pointillé la solution approchée calculée avec la méthode d'Euler

DÉFINITION 5.4 ♡ **Equation différentielle linéaire du second ordre**
Considérons trois scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$ ainsi qu'une fonction $d : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$.

– On appelle *équation différentielle du second ordre* une équation différentielle de la forme

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = d(t) \qquad \text{(E)}$$

– Une *solution* de cette équation différentielle est une fonction f deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) = d(t)$$

– *Résoudre*, ou *intégrer* l'équation différentielle (E) revient à déterminer l'ensemble des fonctions qui sont solutions de (E). On notera $\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ cet ensemble.
– Le graphe d'une solution f de (E) dans un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan est une *courbe intégrale* de (E).
– Si la fonction d est identiquement nulle sur I, l'équation différentielle (E) est dite *homogène* ou *sans second membre*.

Remarque 5.9 Si l'équation différentielle linéaire du second ordre (E) est homogène, on vérifie facilement (Exercice !) que toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E) (si φ et ψ sont éléments de $\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ alors il en est de même de $\alpha\varphi + \beta\psi$ pour tout couple (α, β) dans $\mathbb{K}$. $\mathrm{S}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ possède donc une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 5.5 ♡ **Équation caractéristique**
L'équation complexe $a\,\mathrm{X}^2 + b\,\mathrm{X} + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de l'équation différentielle (E).

DÉFINITION 5.6 ♡ **Condition initiale**
Soit $(t_0, y_0, y_1) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. On dit que la solution φ de (E) vérifie la *condition initiale* (t_0, y_0, y_1) si à la fois $\varphi(t_0) = y_0$ et $\varphi'(t_0) = y_1$.

5.4.2 Résolution de l'équation différentielle homogène du second ordre dans $\mathbb{C}$

LEMME 5.12
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

Pour tout complexe r, la fonction $\varphi_r : t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique associée à (E) : $a\,r^2 + b\,r + c = 0$.

Démonstration *Soit $r \in \mathbb{C}$. On a :*

$$\begin{array}{ll} & \varphi_r \text{ est solution de } (E) \\ \Longrightarrow & a\varphi_r'' + b\varphi_r' + c\varphi_r = 0 \\ \Longrightarrow & \forall t \in I, \quad ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \\ \Longrightarrow & \forall t \in I, \quad \left(ar^2 + br + c\right) e^{rt} = 0 \\ \Longrightarrow & ar^2 + br + c = 0 \text{ car la fonction exponentielle ne s'annule jamais} \end{array}$$

Réciproquement, si $ar^2 + br + c = 0$ alors on vérifie facilement que φ_r est solution de (E).

Remarque 5.10 Avec les notations du lemme précédent, on remarque que si r_1 et r_2 sont des racines distinctes de l'équation caractéristique associée à (E) alors $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ sont solutions de (E). Par application de la remarque précédente, on en déduit que toute combinaison linéaire $t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ est encore une solution de (E). Le théorème suivant permet d'affirmer que toutes les solutions de (E) sont de cette forme.

THÉORÈME 5.13 ♡♡♡ **Résolution d'une équation du second degré à coefficients constants dans $\mathbb{C}$**
Considérons $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ ainsi que (E) l'équation différentielle donnée par :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Notons Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique de (E) possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions

$$\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \end{array} \right.$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (E) admet une racine double r et les solutions de (E) sont les fonctions

$$\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (\alpha t + \beta) e^{rt} \end{array} \right.$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Démonstration *Nous allons à nouveau effectuer un changement de fonction inconnue. Soit z une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Notons $r_1 \in \mathbb{C}$, une des deux racines de l'équation caractéristique de (E). Considérons f la fonction donnée par : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & z(t)e^{r_1 t} \end{array} \right.$. La fonction f est elle aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & z(t)e^{r_1 t} \\ f'(t) & = & \left(z'(t) + r_1 z(t)\right) e^{r_1 t} \\ f''(t) & = & \left(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)\right) e^{r_1 t} \end{array}$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rl} & af''(t) + bf'(t) + cf(t) \\ = & \left(az''(t) + (2ar_1 + b) z'(t) + \underbrace{\left(ar_1^2 + br_1 + c\right)}_{=0} z(t) \right) e^{r_1 t} \\ = & \left(az''(t) + (2ar_1 + b) z'(t)\right) e^{r_1 t} \end{array}$$

En conclusion, f est solution de (E) si et seulement si, la fonction exponentielle ne s'annulant jamais, z' est solution de :

$$(\varepsilon_{r_1}) : \quad ay' + (2ar_1 + b) y = 0$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E).

- *Si $\boxed{\Delta \neq 0}$: Alors l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$.*
  Considérons l'ensemble $\mathscr{A} = \left\{t \to \alpha_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 e^{r_2 t} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}\right\}$ et montrons que $\mathscr{A} = S_{\mathbb{C}}(E)$. Pour ce faire, nous allons effectuer un raisonnement par double inclusion :
  $\boxed{\subset}$ *Par application du lemme précédent, il est clair que $t \to e^{r_1 t}$ et $t \to e^{r_2 t}$ sont éléments de $S_{\mathbb{C}}(E)$. Par conséquent toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est encore élément de $S_{\mathbb{C}}(E)$ ce qui prouve la première inclusion.*

$\boxed{\supset}$ *Réciproquement, soit $f \in S_{\mathbb{C}}(E)$. Alors, compte tenu de ce qui a été fait précédemment, si z est la fonction donnée par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = f(t)e^{-r_1 t}$, z' est solution de (ε_{r_1}) : $\quad ay' + (2ar_1 + b)y = 0$. Mais, comme $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$, il vient $2ar_1 + b = r_1 - r_2$ et (ε_{r_1}) s'écrit : (ε_{r_1}) : $\quad ay' + (r_1 - r_2)y = 0$. Appliquons la théorie des équations différentielles linéaires du premier degré à cette équation. Les solutions sont de la forme : $y_\alpha : t \to \alpha e^{-(r_1-r_2)t}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, et donc z est une primitive d'une de ces fonctions :*

$$\exists \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = -\frac{\alpha}{r_1 - r_2} e^{-(r_1-r_2)t} + \beta.$$

Compte tenu de la définition de z, on a bien prouvé qu'il existe $\alpha_1 \left(= \beta\right)$ et $\alpha_2 \left(= -\frac{\alpha}{r_1 - r_2}\right)$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \alpha_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 e^{r_2 t}$$

- *Si $\boxed{\Delta = 0}$: L'équation caractéristique possède donc une racine double r_0. Dans ce cas, $2ar_0 + b = 0$ et donc f est solution de (E) si et seulement si z' est solution de $\left(\varepsilon_{r_0} : \quad y' = 0\right)$, c'est à dire si et seulement si $z'' = 0$. De $z'' = 0$, on déduit qu'il existe α et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \alpha t + \beta$. Compte tenu de la définition de z, on peut alors affirmer que f est solution de (E) si et seulement si : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\alpha t + \beta\right)e^{rt}$.*

Remarque 5.11 Les solutions de (E) s'expriment comme combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles. Si on note Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E), ces deux fonctions sont :
- $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ dans le cas où $\Delta \neq 0$.
- $t \mapsto e^{rt}$ et $t \mapsto te^{rt}$ dans le cas où $\Delta = 0$.

L'ensemble des solutions $S_{\mathbb{C}}(E)$ possède donc une structure de plan vectoriel.

Exercice Prouver la non proportionnalité des fonctions en question.

PROPOSITION 5.14 ♡
Soient $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Il existe une unique solution φ de (E) vérifiant les conditions initiales (t_0, y_0, y_1), c'est à dire telle que à la fois $\varphi(t_0) = y_0$ et $\varphi'(t_0) = y_1$.

Démonstration *On va faire la démonstration dans le cas où le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E) est non nul. Dans le cas où ce discriminant est nul, la démonstration est identique. Les solutions de (E) sont les fonctions : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique et où c_1 et c_2 sont des complexes. Montrons qu'il existe une et une seule solution φ_0 vérifiant les conditions initiales : $\varphi_0(t_0) = y_0$ et $\varphi_0'(t_0) = y_1$. Le couple (c_1, c_2) doit être le couple solution du système :*

$$\begin{cases} xe^{r_1 t_0} + ye^{r_2 t_0} = y_0 \\ xr_1 e^{r_1 t_0} + yr_2 e^{r_2 t_0} = y_1 \end{cases}.$$

Ce système possède bien une et une seule solution car son déterminant

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1+r_2)t_0} - r_1 e^{(r_1+r_2)t_0} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t_0}$$

est non nul. Ce qui prouve la proposition.

5.4.3 Résolution de l'équation différentielle homogène du second ordre dans $\mathbb{R}$

THÉORÈME 5.15 ♡♡♡ **Résolution des équations différentielles du premier ordre dans $\mathbb{R}$**
Considérons $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ ainsi que (E) l'équation différentielle donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E).
– Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique de (E) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\boxed{\varphi_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \end{cases}}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

– Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique de (E) admet une racine double r et les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$\varphi_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\alpha t + \beta)\, e^{rt} \end{cases}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

– Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique de (E) admet deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$ et les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$\varphi_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)\right] e^{rt} \end{cases}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Démonstration

– *Les deux premiers cas se traitent comme dans le cas complexe.*
– *Supposons que le discriminant soit négatif et donc que l'équation caractéristique de* (E) *possèdent deux racines complexes conjuguées :* $r \pm i\omega \in \mathbb{C}$. *Par application du théorème complexe 5.13 page 211, les solutions de* (E) *sont de la forme* $t \mapsto \lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \lambda_2 e^{(r-i\omega)t}$ *où* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. *Les fonctions* $t \mapsto e^{rt} \cos \omega t$ *(*$\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 1/2$*) et* $t \mapsto e^{rt} \sin \omega t$ *(*$\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = -1/2$*) sont donc solutions de* (E) *ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires. Réciproquement, si* φ *est une solution réelle de* (E), *alors il existe* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ *tels que* φ *s'écrit* $\varphi : t \mapsto \lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \lambda_2 e^{(r-i\omega)t}$. *Comme* f *est réelle, elle est égale à sa partie réelle et il vient :*

$$\begin{aligned} f &= \operatorname{Re}(f) \\ &= \frac{f + \bar{f}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \lambda_2 e^{(r-i\omega)t} + \bar{\lambda}_1 e^{(r+i\omega)t} + \bar{\lambda}_2 e^{(r+i\omega)t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right) e^{(r+i\omega)t} + \left(\bar{\lambda}_1 + \lambda_2\right) e^{(r-i\omega)t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right) e^{(r+i\omega)t} + \overline{\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right) e^{(r+i\omega)t}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right) e^{(r+i\omega)t}\right) \\ &= \underbrace{\operatorname{Re}\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right)}_{\alpha \in \mathbb{R}} e^{rt} \cos \omega t + \underbrace{\operatorname{Im}\left(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2\right)}_{\beta \in \mathbb{R}} e^{rt} \sin \omega t \end{aligned}$$

Ce qui prouve la formule annoncée.

Remarque 5.12 Dans le cas réel, $S_{\mathbb{R}}$ (E) est encore un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Exemple 5.6 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' = \omega^2 y$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$. Son discriminant réduit est $\omega^2 > 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont donc $\pm\omega$ et les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions : $t \mapsto \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.7 Résolvons maintenant, toujours dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ où $\omega \in \mathbb{R}^*$.Son discriminant réduit est $\omega^2 < 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont $\pm i\omega$ et les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions : $t \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5.4.4 Équation différentielle du second ordre avec second membre

On considère dans toute la suite une équation différentielle du second ordre à coefficients complexes

$$\forall t \in \mathrm{I} \quad ay'' + by'(t) + cy(t) = d(t) \qquad \text{(E)}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $d : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$. On admettra les résultats suivants :

PROPOSITION 5.16 ♡
Toute solution de (E) est somme d'une solution particulière de l'équation homogène associée à (E) et d'une solution particulière de (E).

Proposition 5.17 Cas où d est une fonction polynomiale
On suppose que d est une fonction polynomiale. Alors (E) possède une solution particulière de la forme :
- Q si $c \neq 0$.
- tQ si $c = 0$ et $\neq 0$
- t^2Q si $b = c = 0$.

où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

Proposition 5.18 Cas où $d = \mathrm{P}e^{mt}$
On suppose que d est de la forme $d : t \mapsto \mathrm{P}(t)\, e^{mt}$ où P est une fonction polynomiale et où $m \in \mathbb{C}$. Alors (E) possède une solution particulière de la forme :
- Q si m n'est pas une racine de $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$
- tQ si m est une racine simple de $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$
- t^2Q si m est une racine double de $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c = 0$

où Q est une fonction polynomiale de même degré que P.

Proposition 5.19 Cas où d est une combinaison linéaire de fonctions sin **et** cos
Soient $\eta_1, \eta_2, a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$ avec $\omega \neq 0$. L'équation

$$\forall t \in \mathrm{I}, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \boxed{\eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t)} \qquad \text{(E)}$$

admet une solution particulière sur I de la forme $t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$ où $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration *Soit $\varphi_0 : t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$. On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned}
& \varphi_0 \text{ est solution de (E)} \\
\iff & \forall t \in \mathrm{I}, \quad a\varphi_0''(t) + b\varphi_0'(t) + c\varphi_0(t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\
\iff & \forall t \in \mathrm{I}, \quad \left(\left(1-\omega^2\right)\mu_1 + \omega\mu_2\right)\cos(\omega t) + \left(\left(1-\omega^2\right)\mu_2 - \omega\mu_1\right)\sin(\omega t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\
\iff & \begin{cases} \left(1-\omega^2\right)\mu_1 + \omega\mu_2 & = \eta_1 \\ -\omega\mu_1 + \left(1-\omega^2\right)\mu_2 & = \eta_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le déterminant de ce système est $\left(1-\omega^2\right) + \omega^2 \neq 0$ et le système possède toujours un couple solution. L'équation (E) admet donc toujours une solution de la forme indiquée.

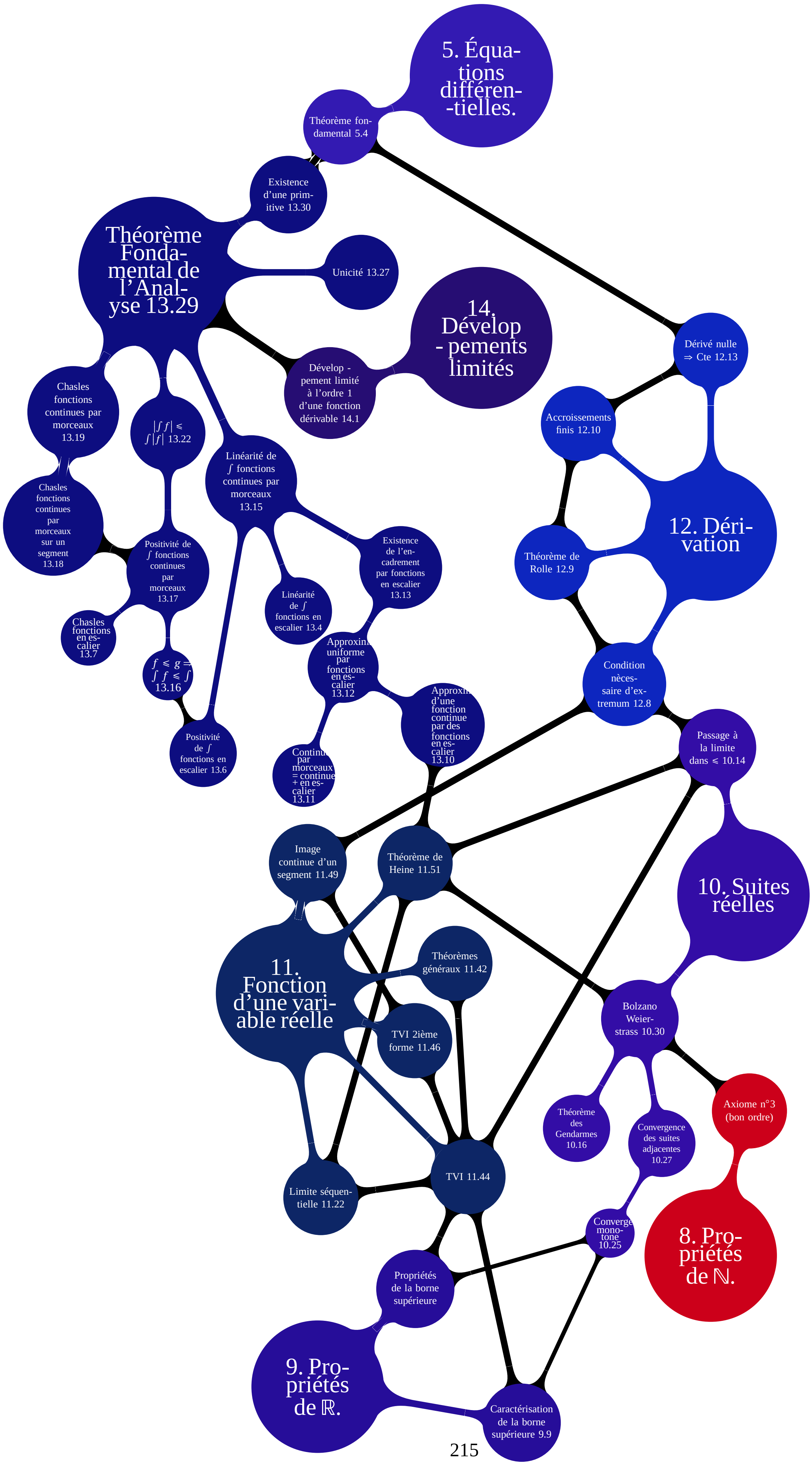
Exemple 5.8 Résolvons (E) : $y'' - y' - 2y = 3e^{-t} + t$ dans $\mathbb{R}$. Le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ est 9. Ses deux racines sont -1 et 2. Les solutions de cette équation sont donc les fonctions $t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{2t}$. Cherchons une solution particulière de $\left(\mathrm{E}'\right)$: $y'' - y' - 2y = 3e^{-t}$.Par application du critère 5.18, comme -1 est une racine de l'équation caractéristique, il faut chercher cette solution particulière sous la forme $t \mapsto ate^{-t}$. En injectant cette fonction dans l'équation différentielle $\left(\mathrm{E}'\right)$, on trouve $a = -3/2$. Cherchons maintenant une solution particulière de $\left(\mathrm{E}''\right)$: $y'' - y' - 2y = t$. La forme du second membre nous invite à utiliser le critère 5.17 et à chercher cette solution particulière sous la forme $t \mapsto bt + c$. Par la même méthode que précédemment, on trouve : $b = -1/2$ et $c = 0$. Le principe de superposition nous permet alors d'affirmer que $t \mapsto -1/2t - 3/2e^{-t}$ est une solution particulière de (E). Enfin, les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} - 1/2t - 3/2e^{-t}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En résumé

Les quatre points principaux de ce chapitres, à connaître parfaitement, sont :

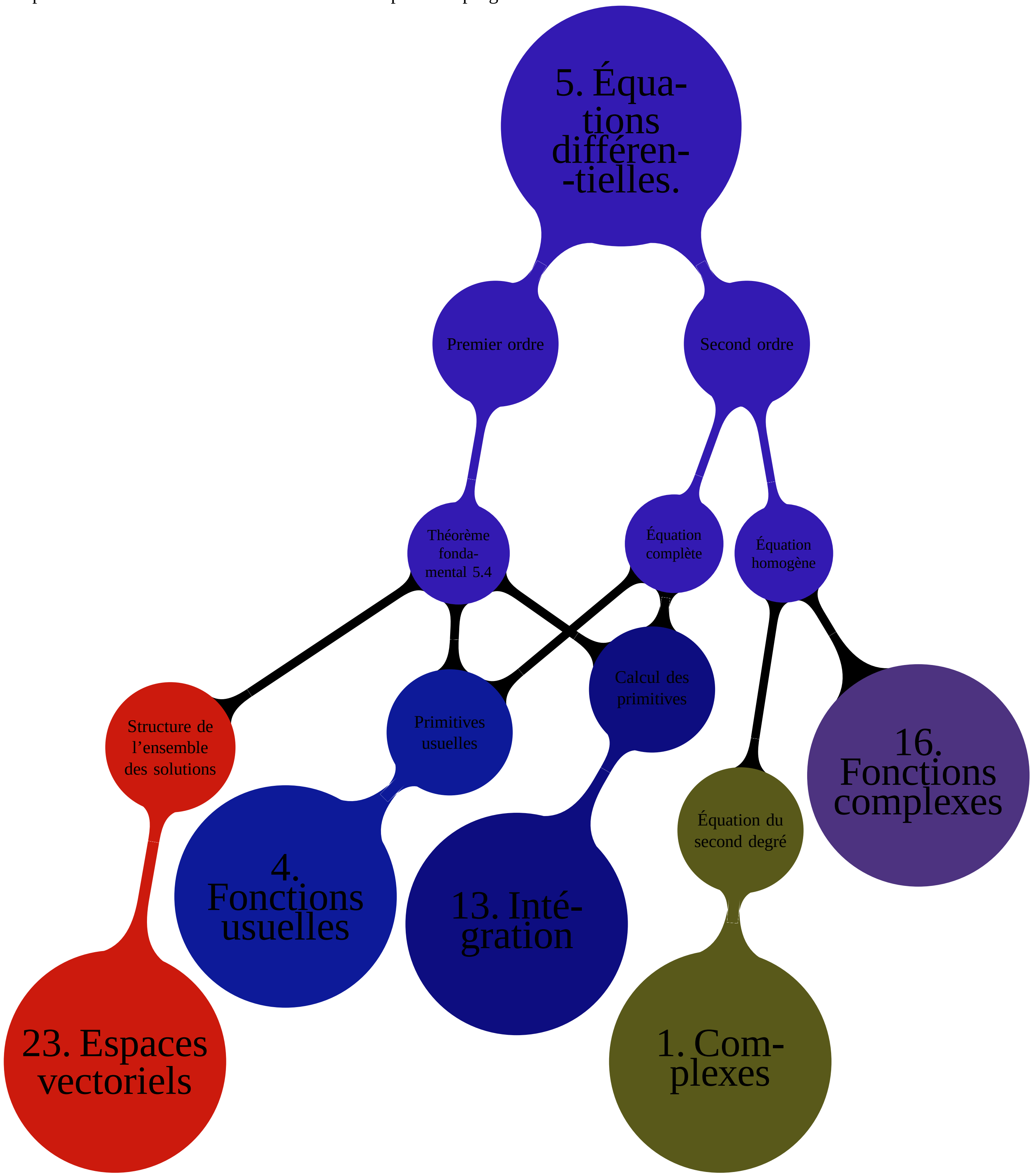
1. Le théorème de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre.
2. La méthode de variation de la constante.
3. Le théorème de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients complexes.
4. Le théorème de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients réels.

Ce chapitre utilise de nombreux résultats du cours d'analyse. Le diagramme suivant explique la filiation du théorème fondamental donnant les solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.



5. Équa- tions différen- -tielles.
Théorème fon- damental 5.4
Existence d'une prim- itive 13.30
Théorème Fonda- mental de l'Anal- yse 13.29
Unicité 13.27
14. Dévelop - pements limités
Dévelop - pement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable 14.1
Dérivé nulle ⇒ Cte 12.13
Accroissements finis 12.10
12. Déri- vation
Théorème de Rolle 12.9
Condition nèces- saire d'ex- tremum 12.8
Chasles fonctions continues par morceaux 13.19
$|\int f| \leqslant \int |f|$ 13.22
Linéarité de $\int$ fonctions continues par morceaux 13.15
Chasles fonctions continues par morceaux sur un segment 13.18
Positivité de $\int$ fonctions continues par morceaux 13.17
Existence de l'en- cadrement par fonctions en escalier 13.13
Linéarité de $\int$ fonctions en escalier 13.4
Chasles fonctions en es- calier 13.7
$f \leqslant g \Rightarrow \int f \leqslant \int$ 13.16
Approxim uniforme par fonctions en es- calier 13.12
Approxim d'une fonction continue par des fonctions en es- calier 13.10
Positivité de $\int$ fonctions en escalier 13.6
Continu par morceaux = continue + en es- calier 13.11
Passage à la limite dans ⩽ 10.14
Image continue d'un segment 11.49
Théorème de Heine 11.51
10. Suites réelles
11. Fonction d'une vari- able réelle
Théorèmes généraux 11.42
TVI 2ième forme 11.46
Bolzano Weier- strass 10.30
Théorème des Gendarmes 10.16
Convergence des suites adjacentes 10.27
Axiome n°3 (bon ordre)
8. Pro- priétés de ℕ.
TVI 11.44
Limite séquen- tielle 11.22
Converge mono- tone 10.25
Propriétés de la borne supérieure
9. Pro- priétés de ℝ.
Caractérisation de la borne supérieure 9.9

On peut encore faire le lien avec les différents chapitres du programme :



5.5 Exercices

5.5.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 5.1 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

1. $y' + y = \cos x + \sin x$
2. $y' - 3y = 2$
3. $y' - 2x\ y = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$
4. $y' + 2y = e^{2x}$
5. $y' + y = \sin 2x$
6. $y' - 5y = e^{5x}$

Solution : *Après avoir résolu l'équation homogène, on cherche une solution particulière. Si celle-ci n'est pas évidente, on utilise ici un des critères 5.8, 5.9 ou 5.10 ainsi que le principe de superposition 5.7.*

1. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x) + \alpha e^{-x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2/3 + \alpha e^{3x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha e^{x^2} + \operatorname{ch} x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(1/4\, e^{4x} + \alpha\right) e^{-2x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2/5 \cos(2x) + 1/5 \sin(2x) + \alpha e^{-t}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
6. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x + \alpha)\, e^{5x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 5.2 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2 \sin x$
3. $y' - y = (x+1)\, e^x$
4. $y' + y = x - e^x + \cos x$
5. $y' + y = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{2x}$
6. $y' + y = \sin x + 3 \sin 2x.$

Solution : *Après avoir résolu l'équation homogène, on cherche une solution particulière. Si celle-ci n'est pas évidente, on utilise ici un des critères 5.8, 5.9 ou 5.10 ainsi que le principe de superposition 5.7.*

1. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1/4 - 1/2\, x + 1/2\, x^2 + \alpha e^{-2x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\cos(x) + \sin(x) + \alpha e^{-x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(1/2\, x^2 + x + \alpha\right) e^x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - 1 - 1/2\, e^x + 1/2 \cos(x) + 1/2 \sin(x) + \alpha e^{-x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(1/27 \left(26 - 24\, x + 9\, x^2\right) e^{3x} + \alpha\right) e^{-x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
6. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -1/2 \cos(x) + 1/2 \sin(x) - 6/5 \cos(2x) + 3/5 \sin(2x) + \alpha e^{-x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 5.3 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

1. $(1 + x^2)\, y' + 2xy = e^x + x.$
2. $\left(1 + x^2\right) y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$
3. $y' + 2xy = e^{x - x^2}.$
4. $\left(1 + x^2\right) y' = xy + \left(1 + x^2\right).$
5. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$
6. $\left(x^2 + 1\right)^2 y' + 2x \left(x^2 + 1\right) y = 1\ .$
7. $\sqrt{1 + x^2}\, y' - y = 1.$

Solution : *Après avoir normalisé si nécessaire l'équation différentielle étudiée et vérifié que l'équation normalisée est définie sur* $\mathbb{R}$*, on résout l'équation homogène associée puis on cherche une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante si celle ci n'est pas évidente.*

1. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x + 1/2\, x^2 + \alpha}{1 + x^2}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x + \alpha}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (e^x + \alpha)\, e^{-x^2}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto .\left(\operatorname{argsh}(x) + \alpha\right) \sqrt{1 + x^2}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(x^2 + \alpha\right) e^{-x^2}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

6. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\arctan(x)+\alpha}{1+x^2}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
7. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -1+\alpha e^{\operatorname{argsh} x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 5.4 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(2+\cos x)\, y' + \sin x \; y = (2+\cos x)\sin x$.
2. $y' - y = e^x \sin 2x$.
3. $(1+e^x)\, y' + e^x \; y = 1 + e^x$.
4. $\operatorname{ch} x \; y' - \operatorname{sh} x \; y = \operatorname{sh}^3 x$.
5. $\left(1+\cos^2 x\right) y' - \sin 2x \; y = \cos x$
6. $\left(x^2+1\right) y' + xy = 1$
7. $y' - \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x} y = \operatorname{sh} x$.

Solution : *Après avoir normalisé si nécessaire l'équation différentielle étudiée et vérifié que l'équation normalisée est définie sur $\mathbb{R}$, on résout l'équation homogène associée puis on cherche une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante.*

1. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (2+\cos x)(\alpha - \ln(2+\cos x)); \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -1/2\, e^x \cos(2x) + \alpha e^x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\alpha + x + e^x}{1+e^x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{ch} x \left(\alpha + \operatorname{ch} x + \frac{1}{\operatorname{ch} x}\right); \quad \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -1/2\, e^x \cos(2x) + \alpha e^x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
6. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\operatorname{argsh}(x)+\alpha}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
7. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (1+\operatorname{ch} x)(\alpha + \ln(1+\operatorname{ch} x)); \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 5.5 ♡

Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y \operatorname{cotan} x = \sin x$ *sur* $]0,\pi[$.
2. $xy' + y = \sin^3 x$ *sur* $\mathbb{R}_-^*$.
3. $x\left(1+\ln^2 x\right) y' - 2\ln x \; y = \left(1+\ln^2 x\right)^2$.
4. $\sin x \; y' - \cos x \; y + 1 = 0$ *sur* $]0,\pi[$.
5. $y' + (\tan x)\, y = \cos^3 x$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
6. $\sqrt{1-x^2}\, y' + y = 1$ *sur* $]-1,1[$.

Solution : *Après avoir normalisé si nécessaire l'équation différentielle étudiée et vérifié que l'équation normalisée est définie sur l'intervalle spécifié, on résout l'équation homogène associée puis on cherche, si nécessaire, une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante.*

1. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1/2\, x - 1/4 \sin(2x) + \alpha}{\sin(x)}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1/12 \cos(3x) - 3/4 \cos(x) + \alpha}{x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(1+\ln^2 x\right)(\alpha + \ln x); \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\tan(x)} + \alpha \sin(x) = \cos x + \alpha \sin x; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x)\,(1/4 \sin(2x) + 1/2\, x + \alpha); \quad \alpha \in \mathbb{R}$
6. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + \alpha e^{-\arcsin(x)}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 5.6 ♡

Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $y' + (\tan x)\; y - \sin 2x = 0$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. $\operatorname{sh} x \; y' - \operatorname{ch} x y = 1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *puis sur* $\mathbb{R}_-^*$.
3. $x^3 y' + 4\left(1-x^2\right) y = 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
4. $\sqrt{x^2-1}\; y' + y = 1$ *sur* $[1,+\infty[$.
5. $\sin^3 x \; y' = 2\cos x \; y$ *sur* $]0,\pi[$.

Solution : *Après avoir normalisé si nécessaire l'équation différentielle étudiée et vérifié que l'équation normalisée est définie sur l'intervalle spécifié, on résout l'équation homogène associée puis on cherche, si nécessaire, une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante.*

1. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2\,(\cos(x))^2 + \alpha \cos(x); \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\operatorname{ch} x + \alpha \operatorname{sh}(x); \quad \alpha \in \mathbb{R}$. *Le* α *trouvé pour* $\mathbb{R}_+^*$ *n'a rien à voir avec le* α *trouvé pour* $\mathbb{R}_-^*$.
3. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha e^{2x^{-2}} x^4; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + \alpha e^{-\operatorname{argch} x} = 1 + \dfrac{\alpha}{x + \sqrt{x^2 - 1}}; \quad \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha e^{2(-1+\cos(2x))^{-1}} = \alpha \exp\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right); \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 5.7 ♡

Soit $k > 0$. *Montrer qu'il existe une unique condition initiale* $y_0 \in \mathbb{R}$ *telle que la solution du problème de Cauchy*

$$y' - ky = \sin t \quad y(0) = y_0$$

soit bornée sur $[0, +\infty[$.

Solution : *On cherche la solution générale de l'équation différentielle , avec une solution particulière de la forme* $t \mapsto \mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t$. *On trouve que les solutions sont les fonctions :*

$$y(t) = -\frac{1}{k^2+1}(k \sin t + \cos t) + \mathrm{C}e^{kx}$$

Pour qu'une telle solution soit bornée sur $[0, +\infty[$, *il faut et il suffit que* $\mathrm{C} = 0$ *et alors*

$$y(x) = -\frac{1}{k^2+1}(k \sin t + \cos t)$$

qui correspond à la donnée initiale $y(0) = -\dfrac{1}{k^2+1}$.

Exercice 5.8 ♡♡

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *continues vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

⚠ *Attention 5.9* *Cet exercice utilise le théorème fondamental de l'analyse 13.29 page 531.*

Solution : *Soit* f *une telle fonction. Elle vérifie :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sin x + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos x + 2f(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = 3f(x) + \cos x - \sin x$$

Par conséquent, f *doit être une solution de l'équation différentielle*

$$(\mathrm{E}) \ : y' - 3y = \cos x - \sin x$$

On cherche l'ensemble des solutions de (E) *et on trouve*

$$\mathscr{S}_\mathrm{E} = \{\mathrm{C}e^{3x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\}$$

Puisque $f(0) = 0$, *il vient :*

$$f(x) = \frac{1}{5}e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x$$

et on vérifie que cette fonction convient.

Exercice 5.9 ♡

Résoudre pour un entier $n \geqslant 1$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E}_n) \ : y' + \frac{nx}{x+1} y = (x+1)^n e^x$$

sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-1, +\infty[$.

Solution : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène est*

$$\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \{x \mapsto \mathrm{C}e^{-nx}(x+1)^n \ ; \ \mathrm{C} \in \mathbb{R}\}$$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y(x) = \mathrm{C}(x)e^{-nx}(x+1)^n$$

et la méthode de la variation de la constante donne

$$\mathrm{C}'(x) = e^{(n+1)x}$$

Une solution particulière est

$$y(x) = \frac{(x+1)^n e^x}{n+1}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathscr{S} = \{x \mapsto \frac{e^x(x+1)^n}{n+1} + \mathrm{C}e^{-nx}(x+1)^n \ ; \mathrm{C} \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 5.10 ♡♡

On considère une fonction $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer que pour toute solution non-nulle φ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \ : y' - a(x)y = 0$$

il existe un unique réel α tel que la fonction définie par $\psi(x) = e^{-\alpha x}\varphi(x)$ soit T- périodique.

⚠ *Attention 5.10* *Cet exercice utilise le théorème fondamental de l'analyse 13.29 page 531.*

Solution : *Soit une solution φ de l'équation différentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\varphi(x) = \varphi(0)e^{\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction ψ donnée par $\psi(x) = e^{-\alpha x}\varphi(x)$ vérifie alors

$$\frac{\psi(x+\mathrm{T})}{\psi(x)} = e^{-\alpha\mathrm{T} + \int_x^{x+\mathrm{T}} a(t)\,\mathrm{d}t}$$

Mais la fonction définie par $\mathrm{A}(x) = \int_x^{x+\mathrm{T}} a(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}(1)$ sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}'(x) = a(x+\mathrm{T}) - a(x) = 0$. Par conséquent, $\dfrac{\psi(x+\mathrm{T})}{\psi(x)} = e^{-\alpha\mathrm{T} + \int_0^{\mathrm{T}} a(t)\,\mathrm{d}t}$. On doit donc avoir

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} a(t)\,\mathrm{d}t$$

et on vérifie réciproquement que ψ est T-périodique.

Exercice 5.11 ♡♡

Trouver toutes les fonctions $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0, +\infty[$, vérifiant :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt$$

⚠ *Attention 5.11* *Cet exercice utilise le théorème fondamental de l'analyse 13.29 page 531.*

Solution : *Comme f est continue, par application du théorème fondamental de l'analyse, il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0. On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la relation : $2xf(x) = 3\mathrm{F}(x)$ qui permet d'affirmer que, comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il en est de même de f. La fonction f est alors solution de l'équation différentielle :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 2xf'(x) - f(x) = 0$$

et donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha\sqrt{x} \end{cases}}$. *Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation fonctionnelle de départ.*

5.5.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 5.12 ♡

Résoudre les équations différentielles (E) *données par :*

1. $y'' - 3y' + 2y = e^t$
2. $y'' - 4y' + 4y = (t^2+1)e^{2t}$
3. $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$
4. $y'' + y = \sin 2t$
5. $y'' + y' - 2y = \sin t e^t$
6. $y'' - 4y' + 4y = e^t + (3t-1)e^{2t} + t - 2$

Solution :

1. *Les racines de l'équation caractéristique associée à* (E) *sont* 1 *et* 2*. Les solutions de l'équation générale sont les fonctions* $t \mapsto \mathrm{A}e^t + \mathrm{B}e^{2t}$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$*. Comme* 1 *est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de* (E) *de la forme :* $t \mapsto ate^t$*. On trouve* $a = -1$*. Les solutions de* (E) *sont les fonctions* $t \mapsto (\mathrm{A}-t)\,e^t + \mathrm{B}e^{2t}$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
2. 2 *est une racine double de l'équation caractéristique associée à l'équation. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions* $t \mapsto (\mathrm{A}t+\mathrm{B})\,e^{2t}$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$*. On cherche une solution particulière de* (E) *sous la forme :* $t^2\left(at^2+bt+c\right)e^{2t}$*. On trouve alors* $a = 1/12$, $b = 0$ *et* $c = 1/2$*. Les solutions de* E *sont donc les fonctions* $t \mapsto \left(t^2/12\left(6+t^2\right) + \mathrm{A}t + \mathrm{B}\right)e^{2t}$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
3. *L'équation caractéristique associée à* (E) *admet deux racines complexes conjuguées* $-1 \pm 2i$*. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions* $t \mapsto (\mathrm{A}\cos 2t + \mathrm{B}\sin 2t)\,e^{-t}$*. Linéarisons le second membre, on obtient :* $\cos^2 t = 1/2\,(1+\cos 2t)$*. Une solution particulière de* $y'' + 2y' + 5y = 1/2\cos(2t)$ *est* $t \mapsto 1/34\cos 2t + 2/17\sin 2t$*. Une solution particulière de* $y'' + 2y' + 5y = 1/2$ *est la fonction constante :*$t \mapsto 1/10$*. On applique alors le principe de superposition et les solutions de* (E) *sont les fonctions* $t \mapsto (\mathrm{A}\cos 2t + \mathrm{B}\sin 2t)\,e^{-t} + 1/34\cos 2t + 2/17\sin 2t + 1/10$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
4. *L'équation caractéristique associée à* (E) *admet deux racines complexes conjuguées* $\pm i$*. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions :* $t \mapsto \mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t$ *avec* $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathbb{R}$*. On cherche une solution particulière de* (E) *de la forme* $t \mapsto a\cos 2t + b\sin 2t$*. On trouve* $a = 0$ *et* $b = -1/3$*. Les solutions de* (E) *sont donc les fonctions* $t \mapsto (\mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t) - 1/3\sin 2t$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
5. *On vérifie facilement que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :* $t \mapsto \mathrm{A}e^t + \mathrm{B}e^{-2t}$*. Introduisons l'équation complexe* $y'' + y' - 2y = e^{(1+i)t}$*. On calcule une solution particulière facilement :*$t \mapsto -e^t/10\,(3\cos t + \sin t)$*. Les solutions de* (E) *sont donc les fonctions :* $t \mapsto \mathrm{A}e^t + \mathrm{B}e^{-2t} - e^t/10\,(3\cos t + \sin t)$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
6. *On détermine facilement les solutions de l'équation homogène. On utilise le principe de superposition pour chercher une solution particulière. On trouve la solution générale :*

$$t \mapsto e^t + \frac{t^3 - t^2}{2}e^{2t} + \frac{t-1}{4} + (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^{-t}$$

avec $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5.13 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *les équations différentielles*

1. $y'' - 2y' + y = te^t$
2. $y'' - 4y' + 5y = \cos 2t - 2\sin 2t$
3. $y'' + 9y = \cos 2t e^t$.
4. $y'' + 4y' - 5y = 2e^t$
5. $y'' + y' + y = e^t \cos t$.
6. $y'' - 3y' + 2y = (t^2+1)e^t$

Solution :

1. *On détermine facilement les solutions de l'équation homogène. Comme* 1 *est une racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme* $t \mapsto t^2(at+b)\,e^t$ *et on trouve* $a = 1/6$ *et* $b = 0$*. Finalement, les solutions de l'équation sont les fonction* $t \mapsto (\mathrm{A}t+\mathrm{B})\,e^t + 1/6t^3 e^t$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
2. *On montre facilement que les solutions de l'équation sont les fonctions* $t \mapsto (\mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t)\,e^{2t} - 3/13\cos 2t - 2/13\sin 2t$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
3. *On détermine facilement les solutions de l'équation homogène. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle :* $y'' + 9y = e^{(1+2i)t}$ *sous la forme* $t \mapsto ae^{(1+2i)t}$*. On trouve* $a = 3/26 - i/13$*. Une solution particulière de* (E) *est donnée par la partie réelle de cette fonction, soit* $t \mapsto 1/26\,(3\cos 2t + 2\sin 2t)\,e^t$ *et les solutions de* (E) *sont les fonctions :* $t \mapsto \mathrm{A}\cos 3t + \mathrm{B}\sin 3t + 1/26\,(3\cos 2t + 2\sin 2t)\,e^t$ *avec* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$..

4. *On montre facilement que les solutions de l'équation sont les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{3} te^t + Ae^t + Be^{-5t}$ *avec* $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
5. *On cherche une solution particulière de* $y'' + y' + y = e^{(1+i)t}$ *de la forme* $t \mapsto ae^{(1+i)}t$. *On trouve alors une solution particulière de* (E) *qui est* $t \mapsto (2/13 \cos t + 3/13 \sin t)e^t$. *Les solutions de* (E) *sont les fonctions :* $t \mapsto (\frac{2}{13}\cos t + \frac{3}{13}\sin t)e^t + Ae^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + Be^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ *avec* $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
6. *On montre facilement que les solutions de l'équation sont les fonctions* $t \mapsto \left(-\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right)e^t + Ae^t + Be^{2t}$ *avec* $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5.14 ♡♡

Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$ *:*

$$(E_m) \quad y'' - 2y' + my = \cos x$$

Solution : *On note* $\mathscr{S}_m$ *l'ensemble solution de cette équation différentielle. Le discriminant réduit de l'équation caractéristique vaut* $1-m$. *On est donc conduit à étudier les trois cas :*

1. *Si* $m < 1$, *on trouve* $\mathscr{S}_m = \{x \mapsto \frac{m-1}{(m-1)^2+4}\cos x - \frac{2}{(m-1)^2+4}\sin x + A\operatorname{ch}\left((1+\sqrt{1-m})x\right) + B\operatorname{sh}\sqrt{1-m}x \mid A,B \in \mathbb{R}\}$
2. *Si* $m = 1$, *on trouve* $\mathscr{S}_m = \{x \mapsto -\frac{\sin x}{2} + Ae^x + Bxe^x \mid A,B \in \mathbb{R}\}$
3. *Si* $m > 1$, *on trouve* $\mathscr{S}_m = \{x \mapsto \frac{-2\sin x + (m-1)\cos x}{(m-1)^2+4} + e^x\left(A\cos\left((\sqrt{m-1})x\right) + B\sin\left((\sqrt{m-1})x\right)\right) \mid A,B \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5.15 ♡♡

Soit $m \in \mathbb{R}$. *Résoudre l'équation différentielle (solutions réelles) :*

$$my'' - (1+m^2)y' + my = xe^x$$

Solution : *L'équation caractéristique est* $(r-m)(mr-1) = 0$. *Il faut distinguer le cas* $m = 0$ *et le cas* $m \neq 0$. *Pour chercher une solution particulière, distinguer le cas où* $m = 1$ *des autres cas.*

5.5.3 Résolution par changement de fonction inconnue

Exercice 5.16 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$\left(t^2+1\right)y'' + \left(t^2 - 2t + 1\right)y' - 2ty = 0$$

en introduisant la fonction $z = y' + y$.

Solution : *Remarquons que l'équation s'écrit aussi :* $\left(t^2+1\right)\left(y''+y'\right) - 2t(y+y') = 0$. *Supposons qu'il existe une solution* y *de l'équation différentielle. Posons* $z = y' + y$. *La fonction* z *vérifie :* $\left(1+t^2\right)z' - 2tz = 0$. *Cette équation est linéaire et du premier degré. Ses solutions sont les fonctions :* $z_\alpha : t \mapsto \alpha\left(t^2+1\right)$. *Reste à résoudre* $y' + y = \alpha\left(t^2+1\right)$. *Ses solutions sont :* $\boxed{t \mapsto \alpha\left(t^2 - 2t + 3\right) + \beta e^{-t}}$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *On en déduit que* y *est de cette forme. Réciproquement, toute fonction de cette forme est solution de l'équation différentielle.*

Exercice 5.17 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$(E): \quad y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$$

en introduisant la fonction $z(t) = e^{t^2}y(t)$.

Solution : *Supposons qu'il existe une solution y de (E). Considérons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction z donnée par : $z(t) = e^{t^2} y(t)$, soit $y(t) = e^{-t^2} z(t)$. D'où $y'(t) = (z' - 2tz)e^{-t^2}$ et $y''(t) = (z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z(t))e^{-t^2}$. Donc $0 = y''(t) + 4ty'(t) + (11 + 4t^2)y(t) = (z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z + 4tz' - 8t^2 + 11 + 4t^2)e^{-t^2} = (z'' + 9z)e^{-t^2}$. Donc z vérifie l'équation du second degré à coefficients constants : $z'' + 9z = 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme : $\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha\cos 3t + \beta\sin 3t \end{array} \right.$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par conséquent y est de la forme :*

$$\boxed{\psi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\alpha\cos 3t + \beta\sin 3t\right) e^{-t^2} \end{array} \right.}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On vérifie réciproquement que les fonctions de cette forme sont solution de l'équation.

Exercice 5.18 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad -\left(x^4 + 2x^2 + 1\right) y'' + 4x\left(x^2 + 1\right) y' + \left(x^4 - 4x^2 + 3\right) y = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = \frac{y(x)}{1+x^2}$.

Solution : *Supposons qu'il existe une solution y de (E). Considérons pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction donnée par $z(x) = y(x)/1 + x^2$. Comme :*

$$y(x) = \left(1 + x^2\right) z(x), \quad y'(x) = \left(1 + x^2\right) z'(x) + 2xz(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = \left(1 + x^2\right) z''(x) + 4z'(x) + 2z(x),$$

en remplaçant dans (E), on trouve que la fonction z est alors solution de l'équation du second degré à coefficients constants : $z'' - z = 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions : $\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha e^x + \beta e^{-x} \end{array} \right.$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par conséquent y est de la forme :

$$\boxed{\psi_{\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\alpha e^x + \beta e^{-x}\right)\left(1 + x^2\right) \end{array} \right.}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On vérifie réciproquement que toute fonction de cette forme est solution de (E).

Exercice 5.19 ♡

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \; : y'' + \frac{1}{2x^2} y = 0.$$

1. *Soit y une solution du problème. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$: $z(t) = y\left(e^t\right) e^{-\frac{t}{2}}$.*
   (a) *Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour tout $x > 0$.*
   (b) *En déduire que la fonction $t \mapsto z(t)$ vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation $\left(E'\right)$ d'ordre 2 à coefficients constants.*
   (c) *Résoudre $\left(E'\right)$.*
2. *Résoudre (E).*

Solution :

1. (a) *Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $t = \ln x$. Si $z(t) = y\left(e^t\right) e^{-\frac{t}{2}}$ alors $y(x) = \sqrt{x} z(\ln x)$.*
   (b) *Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on déduit de l'égalité précédente que :*

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} z(\ln x) + z'(\ln x)\right) \quad \text{et} \quad y''(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(z''(\ln x) - \frac{1}{4} z(\ln x)\right)$$

En remplaçant dans (E), on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left(E'\right) \; : z''(t) + \frac{1}{4} z(t)$$

qui est une équation du second degré à coefficients constants.

(c) *D'après le cours, ses solutions sont les fonctions :*

$$z:\begin{cases}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \alpha\cos\frac{t}{2}+\beta\sin\frac{t}{2}\end{cases}$$

où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. *On en déduit que les solutions de* (E) *sont les fonctions :*

$$y:\begin{cases}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \alpha\cos\frac{\ln x}{2}+\beta\sin\frac{\ln x}{2}\end{cases}$$

où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

5.5.4 Résolution d'équations différentielles par changement de variable

Exercice 5.20 ♡

Résoudre sur $]0,+\infty[$ *puis sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$4xy''+2y'-y=0$$

(on posera $t=\sqrt{x}$*)*

Solution : *Soit* y *une solution de* (E) *sur* $]0,+\infty[$. *Posons* $z(t)=y\left(t^2\right)$. *Comme* y *est deux fois dérivable il en est de même de* z *et on a :*

$$\begin{cases}z(t) & =y\left(t^2\right)\\ z'(t) & =2ty'\left(t^2\right)\\ z''(t) & =2y'\left(t^2\right)+4t^2y''\left(t^2\right)\end{cases}.$$

Comme y *est solution de la première équation,* z *est solution de :* $f''-f=0$. *Par conséquent, il existe* $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $z:t\mapsto \mathrm{A}\operatorname{ch}t+\mathrm{B}\operatorname{sh}t$. *La fonction* y *est alors donnée par :* $y:x\mapsto \mathrm{A}\operatorname{ch}(\sqrt{x})+\mathrm{B}\operatorname{sh}(\sqrt{x})$. *Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solution de l'équation sur* $]0,+\infty[$.
Sur $]-\infty,0[$, *on pose* $x=-t^2$ *et* $z(t)=y\left(t^2\right)$.

$$\begin{cases}z(t) & =y\left(-t^2\right)\\ z'(t) & =-2ty'\left(-t^2\right)\\ z''(t) & =-2y'\left(t^2\right)+4t^2y''\left(t^2\right)\end{cases}.$$

Donc $z''(t)=-z(t)$. *Donc il existe* $\left(\mathrm{A}',\mathrm{B}'\right)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $z:t\mapsto \mathrm{A}'\operatorname{ch}t+\mathrm{B}'\operatorname{sh}t$. *La fonction* y *est alors donnée par :* $y: x\mapsto \mathrm{A}'\cos(\sqrt{-x})+\mathrm{B}'\sin(\sqrt{-x})$. *Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solution de l'équation sur* $]-\infty,0[$.
Pour avoir une solution sur $\mathbb{R}$, *la continuité en zéro impose* $\mathrm{A}=\mathrm{A}'$. *La continuité en zéro de la dérivée impose* $\mathrm{B}=\mathrm{B}'$. *Réciproquement, si on se donne* $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$, *la fonction* $\psi_{\mathrm{A,B}}$ *définie par* $\psi_{\mathrm{A,B}}(x)=\mathrm{A}\operatorname{ch}(\sqrt{x})+\mathrm{B}\operatorname{sh}(\sqrt{x})$ *pour* $x\geqslant 0$ *et* $\psi_{\mathrm{A,B}}(x)=\mathrm{A}\cos(\sqrt{-x})+\mathrm{B}\sin(\sqrt{-x})$ *est solution sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5.21 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E}):\quad x^2y''+3xy'+y=x^2$$

en effectuant le changement de variable $t=\ln x$.

Solution : *Soit* y *une solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Posons* $z(t)=y\left(e^t\right)$. *Comme* y *est deux fois dérivable il en est de même de* z *et on a :*

$$\begin{cases}z(t) & =y\left(e^t\right)\\ z'(t) & =e^ty'\left(e^t\right)\\ z''(t) & =e^ty'\left(e^t\right)+e^{2t}y''\left(e^t\right)\end{cases}.$$

Comme y *est solution de la première équation,* z *est solution de :* $f''+2f'+f=e^{2t}$. *Par conséquent, il existe* $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $z:t\mapsto(\mathrm{A}t+\mathrm{B})e^{-t}+1/9e^{2t}$. *La fonction* y *est alors donnée par :* $y:x\mapsto\dfrac{(\mathrm{A}\ln x+\mathrm{B})}{x}+\dfrac{x^2}{9}$. *Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation sur* $]0,+\infty[$.

Exercice 5.22 ♡

Résoudre sur $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathrm{E}) \ : \quad \left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right) y' + 4y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \arctan x$.

Solution : *Soit* y *une solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Posons* $z(t) = y(\tan t)$. *Comme* y *est deux fois dérivable, il en est de même de* z *et on a :*

$$\begin{cases} y(x) & = z(\arctan x) \\ y'(x) & = \dfrac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) & = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} z'(\arctan x) + \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2} z''(\arctan x) \end{cases}.$$

Comme y *est solution de la première équation,* z *est solution de :* $f''+4f = 0$. *Par conséquent, il existe* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $z : t \mapsto \mathrm{A}\cos 2t + \mathrm{B}\sin 2t$. *La fonction* y *est alors donnée par :* $y : x \mapsto \cos(2\arctan x) + \mathrm{B}\sin(2\arctan x)$. *Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5.23 ♡

Résoudre l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \ : \quad (1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$$

d'inconnue $y :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *supposée deux fois dérivables. On pourra utiliser le changement de variable défini par* $t = \arcsin x$.

Solution : *Soit* y *une solution de* (E) *sur* $]-1,1[$. *Posons* $z(t) = y(\sin t)$. *Comme* y *est deux fois dérivable, il en est de même de* z *et on a :*

$$\begin{cases} y(x) & = z(\arcsin x) \\ y'(x) & = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin x) \\ y''(x) & = \dfrac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} z'(\arcsin x) + \dfrac{1}{\left(1-x^2\right)} z''(\arcsin x) \end{cases}.$$

Comme y *est solution de la première équation,* z *est solution de :* $f''+9f = 0$. *Par conséquent, il existe* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $z : t \mapsto \mathrm{A}\cos 3t + \mathrm{B}\sin 3t$. *La fonction* y *est alors donnée par :* $y : x \mapsto \cos(3\arcsin x) + \mathrm{B}\sin(3\arcsin x)$. *Réciproquement, on vérifie que les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation sur* $\mathbb{R}$.

5.5.5 Application aux équations différentielles linéaires du premier ordre avec problèmes de raccord des solutions

Exercice 5.24 ♡

Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad x^2 y' + y = 1$$

sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Solution : *On résout d'abord l'équation sur* $\mathrm{I}_1 =]-\infty, 0[$ *et* $\mathrm{I}_2 =]0, +\infty[$. *Sur chacun de ces intervalles, l'équation est équivalente à l'équation normalisée dont l'ensemble des solutions est :*

$$\{1 + \frac{\mathrm{C}}{x} \mid \mathrm{C} \in \mathbb{R}\}$$

On trouve ensuite que si I *est un intervalle contenant* 0*, la seule solution de* (E) *sur* I *est la fonction constante égale à* 1.

Exercice 5.25 ♡

Résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad (x^2-1)y' - xy + 3(x - x^3) = 0$$

sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Solution : *Soit* $I_1 =]-\infty,-1[$, $I_2 =]-1,1[$ *et* $I_3 =]1,+\infty[$. *Sur chacun de ces intervalles, l'équation est équivalente à l'équation normalisée*

$$(E'): \quad y' - \frac{x}{x^2-1}y = 3x$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\{x \mapsto C\sqrt{|x^2-1|} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

On recherche ensuite une solution particulière de la forme $y(x) = C(x)\sqrt{|x^2-1|}$ *avec* $C'(x) = 3x\sqrt{|x^2-1|}$, $C(x) = 3\int x\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}\,dx$ *où* $\varepsilon = +1$ *sur* I_1 *et* I_3, $\varepsilon = -1$ *sur* I_2. *On trouve* $y(x) = 3(x^2-1)$ *comme solution particulière. Donc la solution générale de* (E) *sur* I_k *s'écrit*

$$y(x) = 3(x^2-1) + C\sqrt{|x^2-1|}$$

Sur un intervalle I *contenant* 1 *ou* -1, *puisque la fonction* $\sqrt{|x^2-1|}$ *n'est pas dérivable en* 1 *et* -1, *la seule solution de* (E) *est la fonction* $y(x) = 3(x^2-1)$.

Exercice 5.26 ♡

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3$$

1. *Résoudre* (E) *sur des intervalles qu'on précisera.*
2. *Déterminer les solutions de* (E) *définies sur* $\mathbb{R}$ *?*

Solution :

1. *L'équation normalisée associée à* (E) *est* (N) : $y' - \frac{2}{x}y = \frac{(x-1)(x+1)^3}{x}$. *Celle ci est définie sur* $I_1 =]-\infty,0[$ *et* $I_2 =]0,+\infty[$. *Appliquant d'abord sur* I_1 *puis sur* I_2 *le théorème fondamental et la méthode de variation de la constante, on trouve que, pour* $k = 1,2$, *les solutions de* (N) *et donc de* (E) *sont, sur* I_k *de la forme :*

$$\varphi_{\alpha_k} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} + \alpha_k x^2 \end{array} \right. \quad ; \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

2. *Supposons qu'il existe* φ *une solution de* (E) *définie sur* $\mathbb{R}$. *Alors* φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et il existe* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :* $\varphi_{|I_1} = \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} + \alpha_1 x^2$ *et* $\varphi_{|I_2} = \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} + \alpha_2 x^2$. *Posons alors :*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} + \alpha_1 x^2 & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2} + \alpha_2 x^2 & \text{si } x \in I_2 \end{cases} \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Réciproquement, une fonction* φ *ainsi définie est solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 5.27 ♡♡

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2y' + y = 1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Solution : *Soit* I *un intervalle ne contenant pas* 0. *Les solutions de* (E) *sur* I *sont les solutions de l'équation normalisée*

$$(E') \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$$

L'équation homogène associée s'écrit :

$$(H) \quad y' + \frac{1}{x}y = 0$$

Notons $a(x) = \frac{1}{x}$, *dont une primitive est* $A(x) = \ln|x|$. *L'ensemble des solutions de l'équation homogène est alors*

$$S_H = \left\{ x \mapsto ce^{-\ln|x|} = \frac{C}{x} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

(en posant $C = -c$ si $I \subset]-\infty, 0[$). On trouve ensuite une solution particulière évidente, $\widetilde{y}(x) = 1$. Les solutions de (E) sur I sont donc de la forme

$$\boxed{y(x) = 1 + \frac{C}{x}}$$

Si maintenant $0 \in I$, et y est une solution sur I, alors il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I \subset]0, +\infty[$, $y(x) = 1 + \dfrac{C_1}{x}$ et il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I \subset]-\infty, 0[$, $y(x) = 1 + \dfrac{C_2}{x}$. Pour que y soit solution en 0, il faut d'après l'équation que $y(0) = 1$. Pour qu'une telle fonction soit dérivable en 0, il faut et il suffit que $C_1 = C_2 = 0$. La seule solution de (E) sur I est donc la fonction constante égale à 1.

5.5.6 Divers

Exercice 5.28 ♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}(2)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) \geqslant 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$$

Solution : *Considérer $g(x) = f''(x) + f(x)$ Résoudre l'équation différentielle avec l'hypothèse $g \geqslant 0$.*

Exercice 5.29 ♡♡

Soit $p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue non-nulle et positive. Montrer que toute solution de

$$(E) \quad y'' + p(x)y = 0$$

s'annule au moins une fois.

Solution : *Par l'absurde, si $y > 0$, $y'' = -py \leqslant 0.$, y' est décroissante puis $y' = 0$, ensuite $p = 0$.*

Exercice 5.30 ♡♡

Soit $u : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}(2)$ telle que

$$u''(x) + p(x)u'(x) > 0$$

Montrer que u atteint son maximum en a ou en b.

Solution : *Sinon, en un point intérieur, $u'(x) = 0$, puis $u''(x) > 0$, d'où u serait localement convexe, une absurdité.*

Exercice 5.31 ♡♡

Soient deux fonctions f et g continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Montrer que f et g sont nulles.

Solution : *D'après le théorème fondamental, puisque g est continue sur $[0, 1]$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}(1)$ sur $[0, 1]$, et de même, g est de classe $\mathscr{C}(1)$ sur $[0, 1]$, avec $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$. On en déduit que f et g sont deux fois dérivables sur $[0, 1]$ et que $\forall x \in [0, 1]$, $f''(x) = g'(x) = f(x)$, et $g''(x) = g(x)$. Par conséquent, il existe quatre constantes $(A, B) \in \mathbb{R}2$ et $(A', B') \in \mathbb{R}2$ telles que*

$$\forall x \in [0, 1], \ f(x) = A \operatorname{sh} x + B \operatorname{ch} x \text{ et } g(x) = A' \operatorname{sh} x + B' \operatorname{ch} x$$

En injectant dans $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, et dans $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, on trouve que $A = B = A' = B' = 0$ et par conséquent, $f = g = 0$.

Exercice 5.32 ♡♡

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \cos x - x - \int_0^x (x - t) f(t)\,dt$$

Solution : *D'après le théorème fondamental, puisque les fonctions f et $t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction définie par $\mathrm{F}(x) = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}(1)$ sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathscr{C}(1)$ sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin x - 1 - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

En appliquant encore une fois le théorème fondamental, on montre que f est de classe $\mathscr{C}(2)$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -\cos x - f(x)$$

donc que f vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. En résolvant cette équation, il existe deux constantes $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}2$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x + \frac{x^2}{2}\sin(x)$$

Mais comme d'après l'équation vérifiée par f, $f(0) = 1$, et l'équation vérifiée par f', $f'(0) = -1$, on en tire $\mathrm{A} = 1$ et $\mathrm{B} = -1$. Par conséquent, la seule solution possible est

$$f(x) = \cos x - \sin x - \frac{x}{2}\sin x$$

On vérifie réciproquement que cette fonction est bien solution de notre problème en calculant l'intégrale $\int_0^x (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5.33 ♡♡

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ : 3y^2(y'' + y') + 6yy'^2 + y^3 = e^{-x}$$

On considère une solution y de (E). Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que la fonction y^n soit solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Trouver alors une solution de (E).

Solution : *Pour $n = 3$,*

$$z = y^3,\ z' = 3y^2y',\ z'' = 6yy'^2 + 3y^2y''$$

et par conséquent, z vérifie l'équation différentielle

$$z'' + z' - z = e^{-x}$$

En résolvant, il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}2$ tels que

$$z(x) = e^{-x} + \mathrm{A}\,\mathrm{ch}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)$$

Exercice 5.34 ♡♡

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}(1)$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Solution : *Soit une telle fonction f. Elle est de classe $\mathscr{C}(2)$ et en dérivant, elle doit vérifier :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f(x)$$

Par conséquent, il existe $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$$

En reportant dans l'équation, on trouve que $\mathrm{A} = 0$ et donc que $f(x) = \mathrm{B}\sin x$. On vérifie réciproquement que $\forall \mathrm{B} \in \mathbb{R}$, cette fonction convient.

Exercice 5.35 ♡

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$$

Solution : *Soit f une telle fonction. Elle est deux fois dérivable puisque f' est une composée de fonctions dérivable (puisque $f = f' \circ \varphi$ où $\varphi(x) = -x$), et en dérivant, on trouve que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f'(-x) = f(x)$. Par conséquent, f est solution de l'équation différentielle $y'' = y$ et donc il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-x}$$

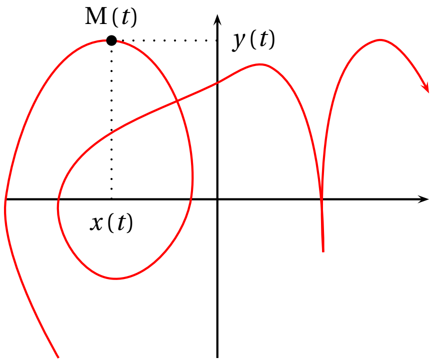
Mais alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{A}e^{x} - \mathrm{B}e^{-x} = \mathrm{A}e^{-x} + \mathrm{B}e^{x}$ d'où nécessairement $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} = -\mathrm{B}$ et donc $f = 0$. La fonction nulle vérifie réciproquement la propriété.

Chapitre 6

Étude des courbes planes

La voiture décrivit une élégante cardioïde et s'arrêta en bas des marches.
Boris VIAN - L'écume des jours (1946).

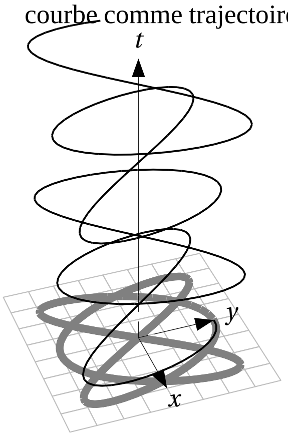
On identifiera dans tout ce chapitre, le plan euclidien $\mathscr{P}$ à $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un repère orthonormal direct. On notera I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point (ou une réunion de tels intervalles).
Nous allons apprendre ici à étudier les courbes du plan. Elles peuvent être vues comme la trajectoire d'un mobile dans le plan et il y aura de nombreuses analogies dans ce chapitre avec celui de cinématique en science physique.



Se donner une telle courbe revient à se donner un couple de fonctions (x, y) définies sur un intervalle I de R : $x : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. La courbe est alors le sous-ensemble du plan formé par les points $\mathrm{M}(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ quand le temps t parcourt l'intervalle I.
Même si on va utiliser les outils appris au lycée pour étudier les graphes des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, on comprend que le problème est ici très différent. Une courbe du plan n'est en général pas le graphe d'une fonction de I dans $\mathbb{R}$ comme on s'en convaincra en examinant le dessin ci contre. Aussi il faudra développer de nouvelles techniques. Pour une fonction

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} : \begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{cases},$$

il faudra définir ce qu'est une limite et une dérivée. Lors de la représentation de la courbe, il faudra comprendre que ce n'est pas le graphe de la fonction $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ qui est dessiné (ce graphe est un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^3$) mais la projection de ce graphe sur le plan (x, y). Aussi la variable t n'est pas représentée sur le dessin. Par contre, un mobile ayant cette courbe comme trajectoire se trouve à la position $(x(t), y(t))$ au temps t.



Les courbes paramétrées peuvent présenter des branches infinies, ce qui signifie que le mobile se déplaçant suivant cette courbe part à l'infini, ou des points stationnaires (le vecteur vitesse du mobile en ce point est nul). Il faudra être en mesure de pouvoir étudier ces deux phénomènes afin de bien représenter la courbe.
De nombreuses courbes paramétrées peuvent être étudiées avec les outils d'analyse de lycée. Par contre, afin d'étudier les branches infinies ou les points stationnaire de certaines autres, il faudra disposer d'un outil plus sophistiqué, les développements limités, qui ne sera introduit qu'au chapitre 14. Aussi ce chapitre devra être lu en deux fois. Une première fois pendant la première période en sautant les parties utilisant les développements limités et une seconde fois après avoir étudié le chapitre 14. Ces parties et les exercices correspondants sont indiqués dans le texte.

6.1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

6.1.1 Définitions

DÉFINITION 6.1 ♡ Fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$
Une *fonction vectorielle* $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ définie sur I est donnée par un couple (x, y) de fonctions réelles définies sur I. Les fonctions $x : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{R}$ et $y : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{R}$ s'appellent les *composantes* de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ ou les *applications coordonnées* de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ et :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right. .$$

DÉFINITION 6.2 ♡ Limite en un point d'une application vectorielle
Soient $\overrightarrow{l} = (l_1, l_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, $t_0 \in \mathrm{I}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ une application vectorielle définie sur I. On dit que $\overrightarrow{\mathrm{F}}(t)$ *converge vers* l *quand* t *tend vers* t_0 et on note :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{l}$$

lorsque $\left\| \overrightarrow{\mathrm{F}}(t) - \overrightarrow{l} \right\| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$.

PROPOSITION 6.1 ♡ Caractérisation de la convergence par les fonctions coordonnées
Soit $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ une fonction vectorielle donnée par le couple (x, y) sur I. Soit $\overrightarrow{l} = (l_1, l_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{l} \iff \left\{ \begin{array}{l} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l_1 \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l_2 \end{array} \right.$$

Démonstration *On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{\mathrm{F}}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{l} \\ \iff & \sqrt{(x(t) - l_1)^2 + \left(y(t) - l_2\right)^2} = \|\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{l}\| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \\ \iff & (x(t) - l_1)^2 + \left(y(t) - l_2\right)^2 \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l_1 \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

car une somme de deux nombres positifs est nulle si et seulement si ces deux nombres sont nuls.
Rappelons la définition suivante :

DÉFINITION 6.3 ♡ Dérivabilité d'une fonction réelle
On dit qu'une fonction réelle $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est *dérivable en* $t_0 \in \mathrm{I}$ si il existe un réel l tel que :

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \to t_0]{} l$$

Dans le cas où cette limite existe, on notera $f'(t_0) = l$.
De plus, on dira que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point t de I non situé à une extrémité de I.

DÉFINITION 6.4 ♡ Dérivabilité d'une fonction vectorielle
On dit qu'une fonction vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{F}} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ est *dérivable* en $t_0 \in \mathrm{I}$ si il existe $\overrightarrow{l} = (l_1, l_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{F}}(t) - \overrightarrow{\mathrm{F}}(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{l}$$

Dans le cas où cette limite existe, on note $\overrightarrow{\mathrm{F}}'(t_0) = l$.

DÉFINITION 6.5 ♡ Dérivabilité d'une fonction vectorielle sur un intervalle
On dit qu'une fonction vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{F}} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ est *dérivable* sur I si $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est dérivable en tout point t de I non situé à une extrémité de I.

PROPOSITION 6.2 ♡ **Caractérisation par les fonctions coordonnées**
Une fonction vectorielle $\overrightarrow{F} : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ est *dérivable* en $t_0 \in I$ si et seulement si les deux fonctions réelles qui la composent : x et y sont dérivables en t_0. On a alors :

$$\boxed{F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))}$$

Démonstration : Considérons la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{\theta} : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \dfrac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} \end{cases}$$

ses fonctions coordonnées sont :

$$\theta_1 : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_2 : \begin{cases} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \end{cases}$$

En appliquant la proposition précédente, on a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned} & x \text{ et } y \text{ sont dérivables en } t_0 \\ \iff & \text{les fonctions coordonnées } \theta_1 \text{ et } \theta_2 \text{ de } \overrightarrow{\theta} \text{ vérifient } \theta_1(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} x'(t_0) \quad \text{et} \quad \theta_2(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} y'(t_0) \\ \iff & \overrightarrow{\theta}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \left(x'(t_0), y'(t_0)\right) \\ \iff & \overrightarrow{F} \text{ est dérivable en } t_0 \text{ et } F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \end{aligned}$$

De manière plus générale, on dira que :

DÉFINITION 6.6 ♡ **Fonction k fois dérivable, de classe $\mathscr{C}^k$**

- Une fonction $\overrightarrow{F} : I \to R^2$ est dite *k fois dérivable sur* I si ses fonctions coordonnées le sont.
- Une fonction $\overrightarrow{F} : I \to R^2$ est dite de *classe $\mathscr{C}^k$* sur I si ses fonctions coordonnées sont k fois dérivables sur I et si sa dérivée k-ième est continue.

6.1.2 Dérivation du produit scalaire et du déterminant

PROPOSITION 6.3 ♡ **Dérivation du produit scalaire, du déterminant**
Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux applications définies sur I, dérivables en $t_0 \in I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Alors les applications

$$\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{G} \rangle : \begin{cases} I & \longrightarrow & R \\ t & \longmapsto & \langle \overrightarrow{F}(t) | \overrightarrow{G}(t) \rangle \end{cases} \quad \text{et} \quad \det\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}\right) : \begin{cases} I & \longrightarrow & R \\ t & \longmapsto & \det \overrightarrow{F}(t) \overrightarrow{G}(t) \end{cases}$$

sont dérivables en t_0 et

$$\boxed{\left(\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{G} \rangle\right)'(t_0) = \langle \overrightarrow{F}'(t_0) | \overrightarrow{G}(t_0) \rangle + \langle \overrightarrow{F}(t_0) | \overrightarrow{G}'(t_0) \rangle}$$

$$\boxed{\left(\det\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}\right)\right)'(t_0) = \det\left(\overrightarrow{F}'(t_0), \overrightarrow{G}(t_0)\right) + \det\left(\overrightarrow{F}(t_0), \overrightarrow{G}'(t_0)\right)}$$

Démonstration *Notons $\overrightarrow{F} = (f_1, f_2)$ et $\overrightarrow{G} = (g_1, g_2)$. Comme* F *et* G *sont dérivables en t_0, d'après le théorème 6.2, il en est de même des fonctions f_1, f_2, g_1, g_2. Soit $t \in I$. Remarquons que*

$$\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{G} \rangle(t) = f_1(t) g_1(t) + f_2(t) g_2(t)$$

et la fonction $\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{G} \rangle$ est donc dérivable en t_0 par opérations sur les fonctions dérivables en t_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus :

$$\begin{aligned} \left(\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{G} \rangle\right)'(t_0) &= (f_1.g_1 + f_2.g_2)'(t_0) \\ &= f_1'(t_0) g_1(t_0) + f_1(t_0) g_1'(t_0) + f_2'(t_0) g_2(t_0) + f_2(t_0) g_2'(t_0) \\ &= \langle \overrightarrow{f}'(t_0) | \overrightarrow{g}(t_0) \rangle + \langle \overrightarrow{f}(t_0) | \overrightarrow{g}'(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

La deuxième formule se prouve de même.

COROLLAIRE 6.4 ♡ **Dérivation de la norme**

Soit $\overrightarrow{F}$ une fonction définie sur I, dérivable en $t_0 \in I$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et **ne s'annulant pas**. Alors l'application $\left\|\overrightarrow{F}\right\| : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en t_0 et

$$\left(\left\|\overrightarrow{F}\right\|\right)'(t_0) = \frac{\langle \overrightarrow{F}'(t_0) | \overrightarrow{F}(t_0)\rangle}{\left\|\overrightarrow{F}(t_0)\right\|}$$

Démonstration *On sait que $\left\|\overrightarrow{F}\right\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{F}\rangle}$. D'après la proposition précédente $t \mapsto \langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{F}\rangle$ est dérivable en t_0 et on sait que la fonction racine est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $\overrightarrow{F}$ ne s'annule pas, il en est de même de $t \mapsto \langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{F}\rangle(t)$ et donc la fonction $\left\|\overrightarrow{F}\right\|$ est dérivable en t_0. De plus, grâce à la formule de dérivation et la symétrie du produit scalaire :*

$$\left(\left\|\overrightarrow{F}\right\|\right)'(t_0) = \left(\sqrt{\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{F}\rangle}\right)'(t_0) = \frac{\left(\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{F}\rangle\right)'(t_0)}{2\sqrt{\langle \overrightarrow{F} | \overrightarrow{F}\rangle(t_0)}} = \frac{\langle \overrightarrow{F}'(t_0) | \overrightarrow{F}(t_0)\rangle}{\left\|\overrightarrow{F}(t_0)\right\|}.$$

6.2 Arcs paramétrés

6.2.1 Définitions

DÉFINITION 6.7 ♡ **Arc paramétré**

On appelle *arc paramétré* ou *courbe paramétrée* un couple $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $\overrightarrow{F} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$.

DÉFINITION 6.8 ♡ **Support d'un arc paramétré**

On appelle *support (ou image) de l'arc paramétré* $(I, \overrightarrow{F})$ l'ensemble des points du plan :

$$\Gamma = \left\{M \in \mathscr{P} \mid \exists t \in I : \ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(t)\right\}$$

Pour tout $t \in I$, on notera $M(t)$ le point du support de l'arc $(I, \overrightarrow{F})$ tel que $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{F}(t)$.

Remarque 6.1

Se donner une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ revient à se donner un arc paramétré $\left(I, \overrightarrow{F}\right)$ où pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{F}(t) = \left(t, f(t)\right)$.

Remarque 6.2 L'étude d'un arc paramétré peut s'interpréter ainsi :

– I est un intervalle de temps.
– $M(t)$ est un point mobile du plan dont la position à l'instant $t \in I$ est donné par $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F}(t)$.
– Le support de l'arc paramétré $(I, \overrightarrow{F})$ est appelé *trajectoire du mouvement*.
– Les vecteurs $\overrightarrow{F'}(t)$ et $\overrightarrow{F''}(t)$, si ils existent, sont respectivement appelés *vecteur vitesse* et *vecteur accélération* du point M à l'instant t.

6.2.2 Étude locale d'un arc paramétrée

DÉFINITION 6.9 **Limite d'une famille de droites dans le plan**

On dit qu'une famille de droites $(D_t)_{i \in I \setminus \{t_0\}}$ passant par un même point M admet une limite lorsque $t \to t_0$ s'il existe une famille $(\overrightarrow{u}(t))_{t \in I \setminus \{t_0\}}$ de vecteurs directeurs de ces droites possédant un vecteur limite $\overrightarrow{l}$ *non-nul* lorsque $t \to t_0$. La droite $D = M + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{l})$ s'appelle la limite de (D_t).

DÉFINITION 6.10 **Tangente à un arc paramétré**

Soit un arc paramétré $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$ et $t_0 \in I$. On dit que l'arc admet une tangente au point $M_0 = M(t_0) \in \Gamma$ si la famille de droites $D_t = \left(M(t_0), M(t)\right)$ admet une limite lorsque $t \to t_0$. La droite limite s'appelle la tangente à l'arc au point M_0.

Remarque 6.3 On définit de la même façon, avec les limites à droite ou à gauche, la notion de demi-tangente en un point.

Remarque 6.4 Une conséquence de cette définition et de la remarque 6.1 est que si une fonction f est dérivable en $t_0 \in \mathrm{I}$ alors le vecteur $(1, f'(t_0))$ est tangent au graphe de f en $(t_0, f(t_0))$.

DÉFINITION 6.11 **Point régulier, stationnaire**
Un point $\mathrm{M} = \mathrm{M}(t_0)$ d'un arc paramétré est dit *régulier* lorsque $\overrightarrow{\mathrm{F}}'(t_0) \neq 0$. Sinon, on dit que c'est un point *stationnaire*.

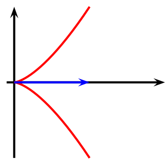
PROPOSITION 6.5 **Tangente en un point régulier**
Un arc paramétré possède une tangente en un point régulier $\mathrm{M}(t_0)$: la droite passant par $\mathrm{M}(t_0)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{F}}'(t_0)$.

Démonstration *Notons*

$$\overrightarrow{u} : \begin{cases} \mathrm{I} \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{F}}(t) - \overrightarrow{\mathrm{F}}(t_0)}{t - t_0} \end{cases}$$

Pour $t \neq t_0$, le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ dirige la droite $(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t))$ et $\overrightarrow{u}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{\mathrm{F}}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Remarque 6.5
Il se peut que $\overrightarrow{\mathrm{F}}'((t_0) = 0$ et que la courbe admette en $\mathrm{M}(t_0)$ une tangente. Par exemple, si on considère le support de $\overrightarrow{\mathrm{F}}(t) = \left(t^2, t^3\right)$ en $t_0 = 0$, alors il admet en $t_0 = 0$ un vecteur tangent horizontal. Pourtant ce point est stationnaire. On va étudier maintenant deux méthodes pour calculer, quand c'est possible, le vecteur tangent à une courbe en un point stationnaire.



Étude d'un point stationnaire avec des outils de terminale, première période

PROPOSITION 6.6 ♡ **Tangente en un point stationnaire**
Soit $\mathrm{M}(t_0)$ un point stationnaire d'une courbe paramétrée $(\mathrm{I}, \overrightarrow{\mathrm{F}})$ où $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est donnée par le couple de fonctions (x, y) définies sur I .

- si $\boxed{\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \xrightarrow[t \to t_0]{} m}$ où m est un réel alors la courbe admet en $\mathrm{M}(t_0)$ une tangente de pente m.
- si $\boxed{\left|\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}\right| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty}$ alors la courbe admet en $\mathrm{M}(t_0)$ une tangente verticale.

Démonstration *Soit* $\theta : \begin{cases} \mathrm{I} \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \end{cases}$

- *Si* $\theta(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} m$ *alors le vecteur* $(1, \theta(t))$ *dirige la droite* $(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t))$. *En effet, un vecteur directeur de cette droite étant celui de coordonnées* $\left(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0)\right)$ *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & x(t) - x(t_0) \\ \theta(t) & y(t) - y(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

et $\lim_{t \to t_0} \theta(t) = (1, m) \neq (0, 0)$

- *Si* $\theta(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$ *alors on peut vérifier que le vecteur* $\left(\frac{1}{\theta(t)}, 1\right)$ *dirige la droite* $(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t))$ *et on a :* $\lim_{t \to t_0} \left(\dfrac{1}{\theta(t)}, 1\right) = (0, 1) \neq (0, 0)$

Exemple 6.1 Utilisons cette méthode pour calculer un vecteur tangent à la courbe $\left(\mathrm{I}, \overrightarrow{\mathrm{F}}\right)$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}}(t) = \left(t^2, t^3\right)$ de la remarque 6.5 en le point stationnaire de paramètre $t = 0$. On a :

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{t^3}{t^2} = t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

donc la pente de la tangente en le point stationnaire $(0, 0)$ est 0. Cette droite est l'axe des abscisses.

Remarque 6.6 Cette méthode n'est utilisable que si on sait déterminer la limite du quotient $\frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$, ce qui ne sera pas toujours possible avec les outils dont vous disposez en début d'année.

Étude d'un point stationnaire avec les développements limités, seconde période

PROPOSITION 6.7 ♡♡ **Tangente en un point stationnaire**
Si $M(t_0)$ est un point stationnaire d'un arc $\mathscr{C}^k$ et s'il existe $p \leqslant k$ tel que

$$\overrightarrow{F}'(t_0) = \dots = \overrightarrow{F}^{(p-1)}(t_0) = 0, \overrightarrow{F}^{(p)}(t_0) \neq 0$$

alors l'arc possède une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{F}^{(p)}(t_0)$.

Démonstration *C'est une conséquence de la formule de Taylor-Young en t_0 pour les fonctions vectorielles (il suffit d'utiliser la formule de Taylor-Young (13.40 page 539) pour les deux fonctions coordonnées) :*

$$\overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{F}(t_0) + (t-t_0)\overrightarrow{F'}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + (t-t_0)^p\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

avec $\overrightarrow{\varepsilon(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} \overrightarrow{0}$. *Définissons alors la fonction $\overrightarrow{u}$ en posant pour $t \neq t_0$,*

$$\overrightarrow{u(t)} = \frac{p!}{(t-t_0)^p}\left[\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)\right] = \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + p!\overrightarrow{\varepsilon}(t)$$

Pour $t \neq t_0$, $\overrightarrow{u(t)}$ dirige la droite $M(t_0)M(t)$ *et* $\overrightarrow{u}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} F^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Exemple 6.2 Cette méthode appliquée à la courbe $\left(I, \overrightarrow{F}\right)$ avec $I = \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{F}(t) = \left(t^2, t^3\right)$ de la remarque 6.5 en le point stationnaire de paramètre $t = 0$. donne $F^{(2)}(t) = (3t, 2)$ et donc un vecteur tangent à la courbe en le point stationnaire est celui de coordonnées $(0, 2)$.

Remarque 6.7 Cette méthode peut être utilisée sans connaître les développements limités. Par contre, elle peut nécessiter un grand nombre de calculs avant de trouver un vecteur $\overrightarrow{F}^{(p)}(t_0) = \left(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)\right)$ qui ne s'annule pas. Ces calculs sont grandement facilités, comme on le verra dans les exercices, avec les développements limités.

Le théorème suivant permet d'étudier localement l'allure d'une courbe au voisinage d'un point stationnaire sous des hypothèses très générales.

THÉORÈME 6.8 ♡♡♡ **Étude locale d'un point stationnaire**
On suppose que la fonction $\overrightarrow{F} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^k$, et qu'il existe deux entiers $1 \leqslant p < q \leqslant k$ tels que :

(H1) $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ est le premier vecteur non-nul parmi $\overrightarrow{F'}(t_0), \dots, \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$.

(H2) q est le premier entier parmi $[\![p+1, q]\!]$ tel que le système de vecteurs $(\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0))$ soit libre

Alors :

1. Le vecteur $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe au point $M(t_0)$.
2. Pour $t \neq t_0$, dans le repère $\mathscr{R} = \left(M(t_0), \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$, le point $M(t)$ a pour coordonnées : $M(t)\left|\begin{matrix} X(t) \\ Y(t) \end{matrix}\right._{\mathscr{R}}$
3. $X(t) \underset{t\to t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^p}{p!}$, $Y(t) \underset{t\to t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^q}{q!}$.

La parité des entiers p et q donne localement le signe de $X(t)$ et $Y(t)$ au voisinage de t_0 lorsque $t < t_0$ et $t > t_0$. On en déduit alors la position locale de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de t_0 comme illustré sur la figure 6.2.2.

Démonstration *Écrivons la formule de Taylor-Young vectorielle en t_0 à l'ordre q :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}(t) &= \overrightarrow{F}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}\overrightarrow{F^{(p+1)}}(t_0) + \dots \\ &= + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0) + (t-t_0)^q\overrightarrow{\varepsilon}(t)\end{aligned}$$

Mais comme les vecteurs $\overrightarrow{F^{(p+1)}}(t_0), \dots \overrightarrow{F^{(q-1)}}(t_0)$ *sont tous proportionnels à* $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$, *on peut écrire* $F^{(k)}(t_0) = \alpha_k F^{(p)}(t_0)$ *pour* $k \in [\![p+1, q-1]\!]$ *et comme* $\left(\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)\right)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$, *on peut décomposer le vecteur* $\overrightarrow{\varepsilon(t)}$ *sur cette base :*

$$\overrightarrow{\varepsilon(t)} = \lambda(t)\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + \mu(t)\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$$

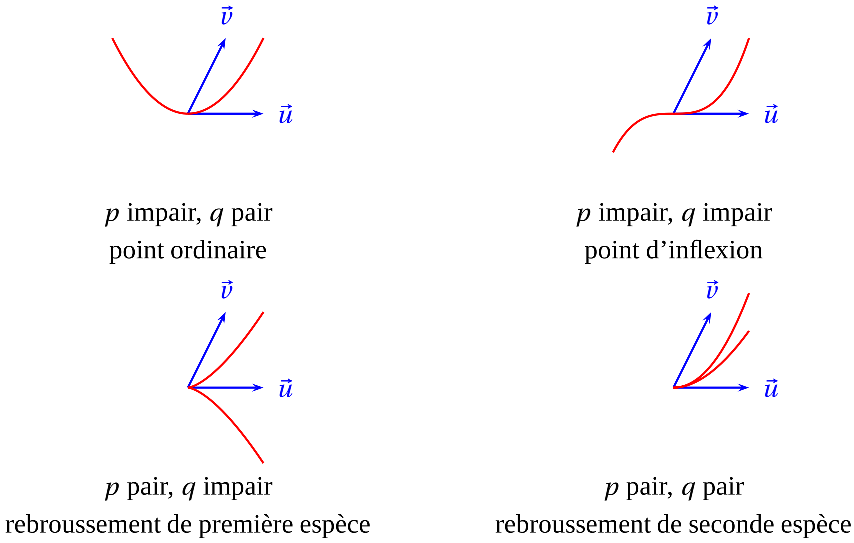


FIGURE 6.1 – Étude locale d'une courbe paramétrée

avec $\lambda(t), \mu(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$. *Alors :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{F}(t)} - \overrightarrow{\mathrm{F}(t_0)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!}\big[1 + (t-t_0)\alpha_{p+1} + \dots \\ + (t-t_0)^{q-1-p}\alpha_{q-1} + p!(t-t_0)^q\lambda(t)\big]\overrightarrow{\mathrm{F}^{(p)}}(t_0) \\ + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\big[1 + q!\mu(t)\big]\overrightarrow{\mathrm{F}^{(q)}}(t_0)\end{aligned}$$

Puisque $\overrightarrow{\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)} = \vec{\mathrm{F}}(t) - \vec{\mathrm{F}}(t_0)$, *on en déduit l'expression des coordonnées du point* $\mathrm{M}(t)$ *dans le repère* $\mathscr{R}$ *:*

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(t) &= \frac{(t-t_0)^p}{p!}\big[1 + (t-t_0)\alpha_{p+1} + \dots \\ &\quad + (t-t_0)^{q-1-p}\alpha_{q-1} + p!(t-t_0)^q\lambda(t)\big] \\ &\underset{t\to t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(t) &= \frac{(t-t_0)^q}{q!}\big[1 + q!\mu(t)\big] \\ &\underset{t\to t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}\end{aligned}$$

L'équivalent donne le signe de $\mathrm{X}(t)$ *et* $\mathrm{Y}(t)$ *au voisinage de* t_0. *On obtient donc localement la position du point* $\mathrm{M}(t)$ *dans un quart de plan lorsque* $t < t_0$ *et* $t > t_0$ *d'où l'étude géométrique résumée sur la figure 6.2.2.*

Remarque 6.8 En pratique, pour étudier un point stationnaire $\mathrm{M}(t_0)$, on effectue un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de t_0 et on adapte l'idée de la démonstration précédente. Puisque le point $\mathrm{M}(t_0)$ est stationnaire, $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ et donc le coefficient de $(t - t_0)$ sera nul dans les développements limités de x et y. Puisqu'il nous faut deux vecteurs indépendants $\mathrm{F}^{(p)}(t_0)$ et $\mathrm{F}^{(q)}(t_0)$, il faut au moins un DL à l'ordre 3 des deux fonctions x et y.

Exemple 6.3

$$\begin{cases} x(t) &= 3\cos(t) - 2\sin^3(t) \\ y(t) &= \cos(4t)\end{cases}$$

pour $t \in [0, 2\pi]$. Commençons par chercher les points stationnaires :

$$\begin{cases} x'(t) &= -3\sin(t)\big[1 + \sin(2t)\big] \\ y'(t) &= -4\sin(4t)\end{cases}$$

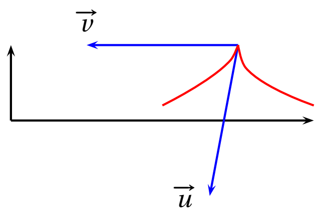
x' et y' s'annulent simultanément en $t = 0$ et $t = 3\pi/4$. Étudions le point stationnaire $\mathrm{M}(0)$. Pour cela, effectuons un DL à l'ordre 3 :

$$\begin{cases} x(t) &= 3 - \frac{3}{2}t^2 - 2t^3 + o(t^3) \\ y(t) &= 1 - 8t^2 + o(t^3)\end{cases}$$

d'où le DL vectoriel :

$$\vec{F}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}_{\vec{F}(0)} + t^2 \underbrace{\begin{pmatrix}-3/2\\-8\end{pmatrix}}_{\vec{u}} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}}_{\vec{v}} + o(t^3)$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas liés et dans le repère $\mathscr{R} = (M(0), \vec{u}, \vec{v})$, le point $M(t)$ a pour coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ avec $X(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ et $Y(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^3$. On en déduit l'allure locale de la courbe au voisinage de $M(0)$: c'est un point de rebroussement de première espèce.



L'étude du point stationnaire $M(3\pi/4)$ s'effectue de même.

Branches infinies des courbes paramétrées

Définition 6.12 ♡ Branche infinie
On dit que l'arc $(I, \vec{F})$ possède une *branche infinie* en t_0 lorsque $\|\vec{F}(t)\| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$.

Remarque 6.9 Si $\lim_{t\to t_0} |x(t)| = +\infty$ ou si $\lim_{t\to t_0} |y(t)| = +\infty$ alors l'arc (I, f) possède une branche infinie en t_0.

Définition 6.13 ♡ Droite asymptote
Soit $(I, \vec{F})$ un arc paramétré possédant une branche infinie en $t_0 \in I$. On dit que la droite $\mathscr{D}$ est *asymptote* à l'arc $(I, \vec{F})$ en t_0 si $d(M(t), \mathscr{D}) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.

Proposition 6.9 ♡ Caractérisation pratique d'une droite asymptote
Soit $(I, \vec{F})$ un arc paramétré possédant une branche infinie en $t_0 \in I$. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $a\,x + b\,y + c = 0$ est asymptote à l'arc $(I, \vec{F})$ en t_0 si et seulement si

$$\boxed{a\,x(t) + b\,y(t) + c \xrightarrow[t\to t_0]{} 0}$$

.

Démonstration : Soit $\mathscr{D}$ une droite affine d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$. La distance du point $M(t)\begin{vmatrix}x(t)\\y(t)\end{vmatrix}_{R}$ vaut :

$$d(M(t), \mathscr{D}) = \frac{|ax(t) + by(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cette distance tend vers 0 si et seulement si $ax(t) + by(t) + c \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.

Plan 6.1 : Pour déterminer la droite asymptote à une branche infinie

- ***Une seule des deux applications coordonnées de f tend vers l'infini en valeur absolue quand t tend vers t_0 :***
  1. *Si $x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $|y(t)| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$ alors la droite d'équation $x = l$ est asymptote à la courbe et le signe de $x(t) - l$ détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.*
  2. *Si $|x(t)| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} l \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe et le signe de $y(t) - l$ détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.*
- ***Les deux applications coordonnées de f tendent vers l'infini en valeur absolue quand t tend vers t_0 :***
  Si $|x(t)| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$ et $|y(t)| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$, on forme le quotient $\frac{y(t)}{x(t)}$ et on cherche la limite de ce quotient quand

t tend vers t_0.

1. *Si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} a \in \mathbb{R}^*$: on forme alors $y(t) - a\,x(t)$ et si cette quantité tend vers une limite finie b alors la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à la courbe en t_0. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - a\,x(t) - b$.*

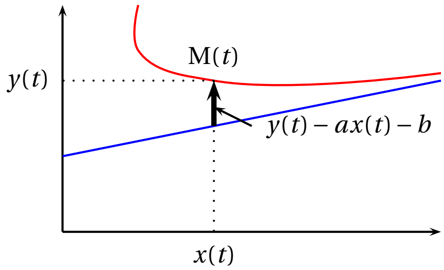


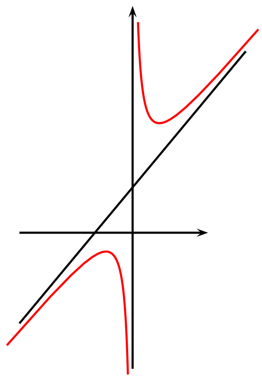
FIGURE 6.2 – *Signe de $y(t) - ax(t) - b$*

2. *Si $\left|\frac{y(t)}{x(t)}\right| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$, on dit que la courbe possède une branche parabolique $(\mathrm{O}y)$.*
3. *Si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$, on dit que la courbe possède une branche parabolique $(\mathrm{O}x)$*

Exemple 6.4 Intéressons nous à la courbe donnée par

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{t-1} \\ y(t) &= \dfrac{t^2+1}{t-1} \end{cases}.$$

Elle présente des branches infinies quand $t \to 1^{\pm}$ et quand $t \to \pm\infty$.



Si $t \to +\infty$. Comme $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe quand $t \to +\infty$.

Si $t \to -\infty$. On montre de même que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe quand $t \to -\infty$.

Si $t \to 1^+$.

1. On forme le quotient $y(t)/x(t)$ et on cherche sa limite quand $t \to 1^+$:
$$\frac{y(t)}{x(t)} = t^2 + 1 = \xrightarrow[t\to1]{} 2$$
2. On cherche maintenant la limite de $y(t) - 2x(t)$ quand $t \to 1$:
$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2-1}{t-1} = t + 1 \xrightarrow[t\to1]{} 2$$
donc la droite d'équation $y = 2x + 2$ est asymptote à la courbe quand $t \to 1^+$.
3. On cherche la position de la courbe relativement à l'asymptote. Pour ce faire, on étudie le signe de :
$$y(t) - 2x(t) - 2 = t - 1 \geqslant 0 \text{ si } t \geqslant 1.$$
Donc la courbe est au dessus de l'asymptote quand $t \to 1^+$.

Si $t \to 1^-$. La même étude montre que la droite d'équation $y = 2x+2$ est asymptote à la courbe quand $t \to 1^-$ et que la courbe est en dessous de l'asymptote dans ce cas.

Par définition, dire qu'une droite est asymptote à la branche infinie quand $t \to t_0$ d'une courbe paramétrée signifie que la courbe s'approche infiniment près de la droite quand $t \to t_0$. Quand ce phénomène se produit, on sait mieux représenter le support de la courbe étudiée. Malheureusement toutes les branches infinies n'ont pas la même croissance et celles dites paraboliques ne s'approchent pas d'une droite quand $t \to t_0$. Par contre on peut parfois trouver des courbes simples qui vont être asymptotes à cette branche parabolique, voir à ce sujet l'exemple 6.6.

Lorsque $x(t)$ et $y(t)$ tendent toutes les deux vers l'infini, le plus rapide pour étudier la branche infinie consiste à effectuer un développement asymptotique de ces deux fonctions lorsque $t \to t_0$ à la précision d'un terme significatif qui tend vers 0. On essaie alors de faire une combinaison linéaire des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour éliminer les termes tendant vers l'infini.

Si on trouve une relation du type

$$y(t) = ax(t) + b + c(t-t_0)^k + o\Big((t-t_0)^k\Big)$$

on en déduit que la droite $y = ax+b$ est asymptote à la courbe et la position locale de la courbe par rapport à son asymptote se déduit du signe de c et de la parité de k.

Exemple 6.5 Considérons la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3}{t^2-9} \\ y(t) &= \dfrac{t^2-2t}{t-3} \end{cases}$$

Elle présente des branches infinies lorsque $t \to \pm\infty$, $t \to \pm 3$.

1. $t \to -3$: $x(t) \xrightarrow[t\to-3]{} +\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t\to-3]{} -5/2$ donc la droite d'équation $y = -5/2$ est asymptote.
2. $t \to \pm\infty$: effectuons un développement asymptotique :

$$x(t) = t + \frac{9}{t} + o(1/t)$$
$$y(t) = t + 1 + \frac{3}{t} + o(1/t)$$

Pour éliminer le terme divergent, il suffit d'effectuer la combinaison linéaire :

$$y(t) - x(t) - 1 = \frac{-6}{t} + o(1/t)$$

On en déduit d'une part que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote. D'autre part, la quantité $y(t) - x(t) - 1$ représente la mesure algébrique verticale entre la droite et $M(t)$. Par conséquent, lorsque $t \to +\infty$, la courbe est située localement au dessous de l'asymptote et lorsque $t \to -\infty$, elle est située localement au dessus.

3. $t \to 3$,

$$x(t) = \frac{9}{2(t-3)} + \frac{15}{4} + \frac{7}{8}(t-3) + o((t-3))$$
$$y(t) = \frac{3}{t-3} + 4 + (t-3)$$

Éliminons les termes divergents :

$$y(t) - \frac{2}{3}x(t) = \frac{3}{2} + \frac{5}{12}(t-3) + o((t-3))$$

On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe. Lorsque $t \to 3^-$, la courbe est située localement en dessous de son asymptote. Lorsque $t \to 3^+$, elle est située localement au dessus.

Cette méthode du développement asymptotique permet également de détecter d'autres courbes asymptotes.

Exemple 6.6

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{\sin t + 1}{t} \\ y(t) &= \dfrac{\cos t}{t^2} \end{cases}$$

Étudions la branche infinie $t \to 0$ en utilisant Maple :

```
                                 MAPLE
> x := (sin(t)+1)/t;
> y := cos(t) / t^2;
> series(x, t = 0, 2);

                                   -1           2
                                  t   + 1 + O(t )

> series(y, t = 0, 2);

                                  -2            2
                                 t   - 1/2 + O(t )
```

Pour faire disparaître le terme en $1/t^2$, considérons $y(t) - x(t)^2$:

```
                                 MAPLE

> series(y - x^2, t = 0, 2);

                               -1                     2
                         - 2 t   - 3/2 + 1/3 t + O(t )
```

Pour faire ensuite disparaitre le terme en $1/t$, réutilisons $x(t)$:

```
                                 MAPLE
> series(y - x^2 + 2*x, t = 0, 2);

                                                  2
                              1/2 + 1/3 t + O(t )
```

Puisque

$$y(t) - x(t)^2 + 2x(t) - \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{3},$$

on en déduit que la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 1/2$ est asymptote à notre courbe. Lorsque $t \to 0^+$, la courbe est située localement au dessus de la parabole et lorsque $t \to 0^-$, elle est située localement en dessous.

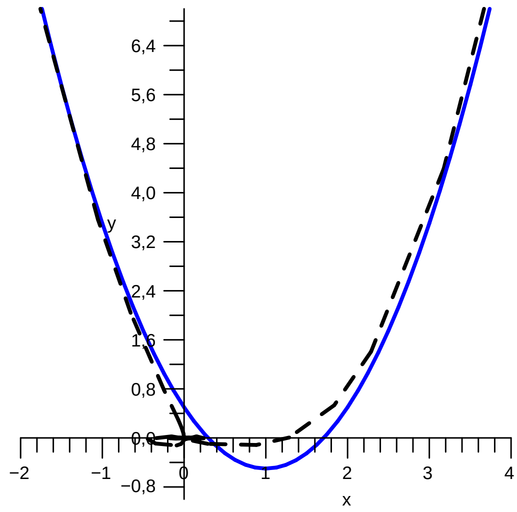


FIGURE 6.3 – En trait pointillé le support de la courbe paramétrée, en trait plein le graphe de la parabole asymptote.

6.2.3 Étude complète et tracé d'une courbe paramétrée

PLAN 6.2 : Plan d'étude d'une courbe paramétrée

1. *Déterminer le domaine de définition des deux fonctions x et y.*
2. *Étudier les symétries éventuelles.*
3. *Dresser le tableau de variations des fonctions x et y et repérer dans ce tableau les points stationnaires, les points à tangente horizontale ou verticale et les branches infinies.*

4. *Étudier les points stationnaires.*
5. *Étudier les branches infinies.*
6. *Tracé sommaire de la courbe. Il est inutile d'utiliser la calculatrice pour reporter des points, il suffit de placer les asymptotes éventuelles, de mettre en évidence les points stationnaires et d'avoir l'allure globale de la courbe.*

Le point 2 est très important et permet bien souvent de restreindre l'étude à un intervalle plus petit. Pour cela, on interprète géométriquement la position du point $M(\varphi(t))$ par rapport au point $M(t)$ où φ est une certaine transformation. Voyons quelques exemples courants :

– Si $x(t+T)=x(t)$ et $y(t+T)=y(t)$, le point $M(t+T)$ est le même que le point $M(t)$. On aura tracé toute la courbe si on restreint l'étude au paramètre t qui varie dans un intervalle de la forme $[a,a+T[$.
– Si $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$, le point $M(-t)$ est le symétrique orthogonal du point $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox). Il suffit de tracer la courbe pour $t\in[0,+\infty[$ et de compléter le dessin final par une symétrie par rapport à (Ox).
– Si $x(-t)=-x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'origine. Il suffit d'étudier la courbe pour $t\in[0,+\infty[$ et de compléter le tracé par une symétrie de centre l'origine.
– Si $x(1/t)=-x(t)$ et $y(1/t)=y(t)$, les points $M(1/t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à (Oy). Si on trace la portion de courbe pour $t\in]0,1]$, la portion correspondant à $t\in[1,+\infty[$ s'en déduit par une symétrie par rapport à l'axe (Oy).

Exemple 6.7 Étudier la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t)=\tan t+\sin t\\ y(t)=\dfrac{1}{\cos t}\end{cases}$$

1. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\pi/2; k\in\mathbb{Z}\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude**. On remarque que $x(t+2\pi)=x(t)$ et $y(t+2\pi)=y(t)$. Donc $M(t+2\pi)=M(t)$. Il suffit de faire l'étude de la courbe sur un intervalle $[\alpha,\alpha+2\pi]$. De plus, $x(-t)=-x(t)$ et $y(-t)=y(t)$. Le point $M(-t)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe Oy. Il suffit donc de faire l'étude sur $[0,\pi]$ et de compléter le tracé de la courbe par une symétrie par rapport à la droite Oy.
3. **Variations**. On calcule

$$x'(t)=\frac{\cos^3 t+1}{\cos^2 t}\qquad y'(t)=\frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

D'où le tableau de variations :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	‖	$+$	0
$y'(t)$	0	$+$	‖	$+$	0
$x(t)$	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0
$y(t)$	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1

On remarque le point $M(0)$ qui est à tangente horizontale, un point stationnaire $M(\pi)$ et une branche infinie en $t=\pi/2$.

4. **Étude du point stationnaire**.
   – Sans les développements limités :

$$\frac{y(t)-y(\pi)}{x(t)-x(\pi)}=\frac{\frac{1}{\cos t}+1}{\tan t+\sin t}=\frac{1+\cos t}{\sin t(1+\cos t)}=\frac{1}{\sin t}\xrightarrow[t\to\pi^-]{}+\infty$$

   donc la courbe admet une tangente verticale en le point stationnaire de paramètre $t=\pi$.
   – Avec les développements limités : Posons $h=t-\pi$, et faisons un DL(0,3) :

$$\widetilde{x}(h)=\frac{h^3}{2}+o(h^3),\quad \widetilde{y}(h)=-1-\frac{h^2}{2}+o(h^3)$$

   d'où l'on tire

$$F(h)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\frac{h^2}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\frac{h^3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+o(h^3)$$

   Dans le repère $\mathscr{R}=(M(\pi),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u}=(0,-1)$ et $v=(1,0)$, le point $M(t)$ a pour coordonnées $\big(X(t),Y(t)\big)$ avec $X(t)\sim(t-\pi)^2/2$ et $Y(t)\sim(t-\pi)^3/2$ lorsque $t\to\pi$. On en déduit que le point $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce à tangente verticale.

5 **Étude de la branche infinie**.

– Sans les développements limités : On forme le quotient

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{\sin t\,(1+\cos t)} \xrightarrow[t\to\pi/2]{} 1.$$

Ensuite, on calcule :

$$y(t) - x(t) = \frac{1-\sin t}{\cos t} - \sin t \xrightarrow[t\to\pi/2]{} -1$$

car sin et cos sont dérivables en $\pi/2$ donc pour leurs taux d'accroissements respectifs en $\pi/2$, on a :

$$\frac{\sin t - 1}{t-\pi/2} \xrightarrow[t\to\pi/2]{} \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\cos t}{t-\pi/2} \xrightarrow[t\to\pi/2]{} -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

donc

$$\frac{1-\sin t}{\cos t} = -\frac{\dfrac{\sin t - 1}{t-\pi/2}}{\dfrac{\cos t}{t-\pi/2}} \xrightarrow[t\to\pi/2]{} 0.$$

Enfin, on étudie la position de la courbe par rapport à l'asymptote d'équation $y = x-1$:

$$y(t) - x(t) + 1 = \frac{(1-\sin t)(1+\cos t)}{\cos t}$$

qui est du signe de $\cos t$. Donc lorsque $t \to \pi/2^+$, la courbe arrive sous l'asymptote , et lorsque $t \to \pi/2^-$, la courbe arrive sur l'asymptote.

– Avec les développements limités : Lorsque $t \to \pi/2$, en posant $h = t - \pi/2$, on effectue un développement asymptotique des deux fonctions :

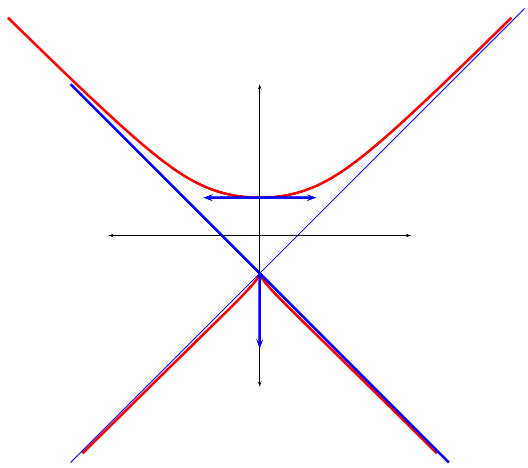
$$\widetilde{x}(h) = x(\pi/2+h) = -\frac{1}{\tan h} + \cos(h) = -\frac{1}{h(1+h^2/3+o(h^2))} + 1 + o(h) = -\frac{1}{h} + 1 + \frac{h}{3} + o(h)$$

$$\widetilde{y}(h) = -1/\sin h = -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} + o(h)$$

Et alors

$$\widetilde{y}(h) - \widetilde{x}(h) + 1 = -h/2 + o(h)$$

ce qui montre que $y(t) - x(t) + 1 \sim -(t-\pi/2)/2$ lorsque $t \to \pi/2$. Par conséquent, la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe. Lorsque $t \to \pi/2^+$, la courbe arrive sous l'asymptote à gauche, et lorsque $t \to \pi/2^-$, la courbe arrive sur l'asymptote à droite.



Exemple 6.8

L'astroïde est la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\sin^3 t \end{cases}$$

1. Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. **Symétries :**
   - $x(t+2\pi) = x(t)$, $y(t+2\pi) = y(t)$ donc $M(t+2\pi) = M(t)$. Il suffit de tracer la courbe pour $t \in [t_0, t_0+2\pi]$.
   - $x(t+\pi) = -x(t)$, $y(t+\pi) = -y(t)$ donc le point $M(t+\pi)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'origine. Il suffit de tracer la courbe pour $t \in [t_0, t_0+\pi]$ et de compléter le dessin par une symétrie centrale pour obtenir toute la courbe.
   - $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$ donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox). Il suffit de faire l'étude sur $[0, \pi/2]$ puis de compléter par une symétrie.
   - $x(\pi/2 - t) = y(t)$, $y(\pi/2 - t) = x(t)$ donc le point $M(\pi/2 - t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la première bissectrice. Il suffit finalement de faire l'étude pour $t \in [0, \pi/4]$, de compléter le tracé par des symétries par rapport à la première bissectrice, l'axe (Ox) et l'origine pour obtenir la courbe complète.
3. **Variations :**

$$\begin{cases} x'(t) &= -3a\cos^2 t \sin t \\ y'(t) &= 3a\sin^2 t \cos t \end{cases}$$

t	0	$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0 +	
$y'(t)$	0 +	
$x(t)$	a ↗	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
$y(t)$	0 ↗	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$

On remarque que le point $M(0)$ est stationnaire. Il n'y a pas de branche infinie.

4. **Étude du point stationnaire** La première méthode est ici inutilisable car la limite ne peut pas se calculer avec les techniques usuelles. Effectuons un développement limité à l'ordre 3 :

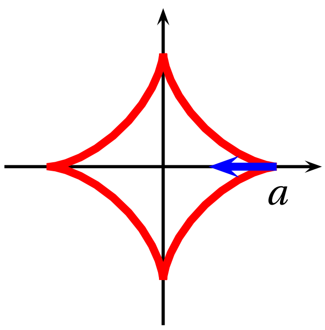
$$\begin{cases} x(t) &= a - \frac{3}{2}at^2 + o(t^3) \\ y(t) &= at^3 + o(t^3) \end{cases}$$

d'où

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3a/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}}_{\vec{v}} + o(t^3)$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant indépendants, dans le repère $(M(0), \vec{u}, \vec{v})$, le point $M(t)$ a pour coordonnées $X(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ et $Y(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^3$. On en déduit que le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce à tangente horizontale.

5. **Tracé :**



Exemple 6.9 Une roue de rayon $R > 0$ roule sans glisser sur une route horizontale. Déterminons la trajectoire d'un point situé sur sa périphérie. Notons $C(t)$ le centre de la roue et t l'angle entre la verticale et le vecteur $\overrightarrow{C(t)M(t)}$. La roue roule sans glisser donc si le centre à l'instant t se trouve à l'abscisse x_C, on a $x_C = Rt$. On en déduit que $C(t)\left|\begin{matrix} Rt \\ R \end{matrix}\right.$ puis comme

$\overrightarrow{C(t)M(t)}\begin{vmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{vmatrix}$ on obtient l'équation paramétrique de la courbe qui s'appelle la *cycloïde* :

$$\begin{cases} x(t) & = R(t - \sin t) \\ y(t) & = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

1. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. **Symétries :** puisque $x(t+2\pi) = x(t) + 2R\pi$, $y(t+2\pi) = y(t)$, le point $M(t+2\pi)$ se déduit du point $M(t)$ par une translation de vecteur $\overrightarrow{V} = (2R\pi, 0)$. Il suffit donc de tracer la courbe pour $t \in [0, 2\pi]$ et on complète le tracé par une infinité de translations de vecteur $\overrightarrow{V}$. Puisque $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy). Il suffit donc d'étudier la courbe pour $t \in [0, \pi]$ et de compléter par une symétrie par rapport à (Oy).
3. **Variations :**

$$\begin{cases} x'(t) & = R(1 - \cos t) \\ y'(t) & = R\sin t \end{cases}$$

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	
$y'(t)$	0	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$R\pi$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2R$

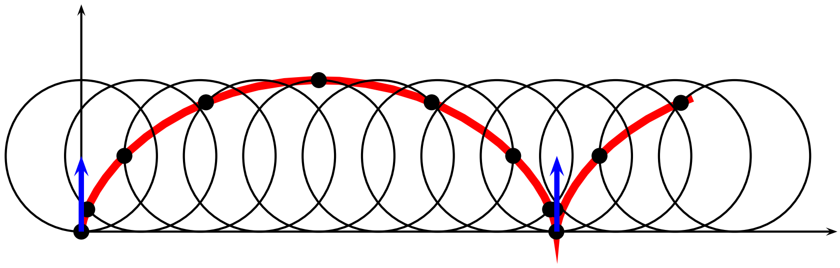
On remarque que le point $M(0)$ est stationnaire et que le point $M(\pi)$ est à tangente horizontale.

4. **Étude du point stationnaire :** Là encore, la première technique est peu commode car elle aboutit à une limite difficile à calculer avec les méthodes usuelles. On effectue alors un DL à l'ordre 3,

$$\overrightarrow{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ R/2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix} R/6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}} + o(t^3)$$

On en déduit que le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce à tangente verticale.

5. **Tracé :**



6.3 Etude d'une courbe polaire $\rho = f(\theta)$.

6.3.1 Notations

Il peut être plus commode d'étudier une courbe non pas en coordonnées cartésiennes, mais en coordonnées polaires car elle s'exprime parfois ainsi plus facilement. Nous allons expliquer ici comment mener cette étude.
On définit les fonctions vectorielles :

$$\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin\theta\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{\jmath}$$

et on remarque que :

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = \overrightarrow{v}, \quad \frac{d\overrightarrow{v}}{d\theta} = -\overrightarrow{u}$$

Le repère $\mathscr{R}_\theta = \left(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta)\right)$ s'appelle le *repère polaire*.

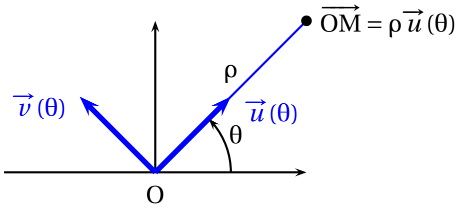


FIGURE 6.4 – Repère polaire : $\mathscr{R}_\theta = (O, u(\theta), v(\theta))$

Étant données deux fonctions $\rho : I \mapsto \mathbb{R}$ et $\theta : I \mapsto \mathbb{R}$, on peut définir la courbe paramétrée $(I, \vec{f})$ par

$$\boxed{\vec{F}(t) = \rho(t)\,\vec{u}(\theta(t))}$$

PROPOSITION 6.10 ♡ Calcul de la vitesse et de l'accélération dans le repère polaire

$$\boxed{\vec{F}'(t) = \rho'(t)\,\vec{u}\big(\theta(t)\big) + \rho(t)\theta'(t)\,\vec{v}\big(\theta(t)\big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{F}''(t) = \big[\rho''(t) - \rho(t)\theta'^2(t)\big]\,\vec{u}\big(\theta(t)\big) + \big[2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t)\big]\,\vec{v}\big(\theta(t)\big)}$$

Démonstration *Il suffit d'appliquer les formules de dérivation usuelles ainsi que les relations* $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$ *et* $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$.

6.3.2 Etude d'une courbe $\rho = f(\theta)$.

On considère une courbe polaire

$$\rho = f(\theta)$$

où $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}(k)$, (avec $k \geqslant 2$). C'est l'ensemble des points du plan de coordonnées polaires (ρ, θ) liés par cette relation. Notre but est de tracer une telle courbe.

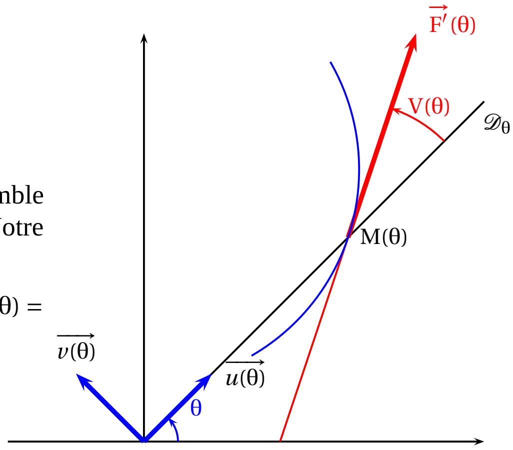


FIGURE 6.5 – L'angle $V(\theta)$: $\tan V(\theta) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$

1. Une courbe polaire est une courbe paramétrée particulière : $\vec{F}(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$,
$$\begin{cases} x(\theta) &= \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) &= \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

2. *Recherche des symétries éventuelles :*
Il est important, avant de commencer l'étude d'une courbe polaire de réduire l'intervalle d'étude. Quelques exemples :
   – Si $\rho(\theta)$ est T périodique, avec $T = \dfrac{p}{q}2\pi$,
   – Si $\rho(-\theta) = \pm\rho(\theta)$,
   – Si $\rho(\theta_0 - \theta) = \pm\rho(\theta)$.

3. *Etude locale*
   – On exprime $\vec{F}'(\theta)$ dans la base $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$:
$$\vec{F}'(\theta) = \rho'(\theta)\,\vec{u} + \rho(\theta)\,\vec{v}$$
   – Les points stationnaires ne peuvent correspondre qu'au passage au pôle. On obtient l'allure locale de la courbe en examinant le signe de ρ : un point stationnaire pour une courbe polaire ne peut être qu'un *point ordinaire* (ρ change de signe) ou un *rebroussement de première espèce* (ρ ne change pas de signe) ;
   – En un point différent de l'origine (donc régulier), si $V(\theta)$ est l'angle entre la droite $(OM(\theta))$ et la tangente à la courbe en $M(\theta)$, alors :
$$\boxed{\tan V(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}}$$
   – Si pour une valeur donnée de θ, $\rho'(\theta) = 0$ alors $\vec{F}'(\theta)$ est colinéaire à $\vec{v}(\theta)$ et on dit que $\vec{F}'(\theta)$ est *orthoradial*.

4. Etude des branches infinies :
   – Elles se produisent lorsque $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \infty$;

– Si $\theta_0 = k\pi$, (Ox) est direction asymptotique. Il suffit d'étudier :

$$y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$$

– Si $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, il suffit d'étudier :

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$$

– Sinon, on fait l'étude dans le repère polaire $(0, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$:

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$$

5. Branches infinies spirales :
   – Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} \infty$;
   – Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} R$, on a un cercle ou un point asymptote ;

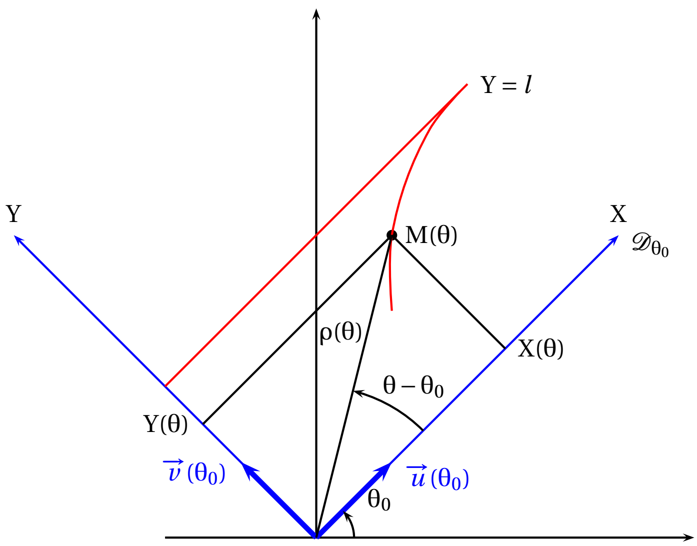


FIGURE 6.6 – Recherche d'asymptote : $Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} l$

6.3.3 La cardioïde

Étudions la cardioïde. Cette courbe est donnée par l'équation polaire

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0).$$

Nous allons nous limiter au cas où $a = 1$, le cas général se traite de manière identique.

1. La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R}$
2. Elle est 2π-périodique donc il suffit de travailler sur un intervalle de longueur 2π. Comme ρ est impaire, on peut étudier la courbe pour $\theta \in [0, \pi]$, on déduira la partie manquante par la symétrie d'axe (Ox).
3. Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $\rho'(\theta) = -\sin\theta$. On en déduit les variations de ρ :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\rho'(\theta)$	0	$-$	-1	$-$	0
$\rho(\theta)$	2	↘	1	↘	0

   On remarque que la courbe présente un vecteur tangent orthoradial quand $\theta = 0$.
4. La courbe présente un point stationnaire en $\theta = \pi$. Comme ρ ne change pas de signe en ce point, on a un point de rebroussement de première espèce.
5. La courbe ne présente pas de branche infinie.
6. Représentation graphique :

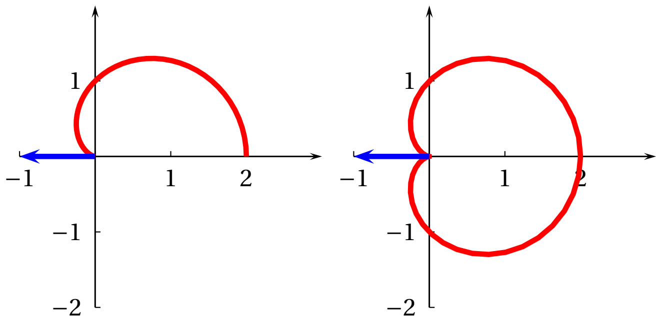


FIGURE 6.7 – Cardioïde : On effectue d'abord le tracé de la portion de courbe étudiée puis on complète le dessin par la symétrie d'axe (Ox)

6.3.4 La strophoïde droite

C'est la courbe polaire d'équation

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

avec $a > 0$. On se borne à étudier la courbe dans le cas $a = 1$.

1. La fonction ρ est définie pour $\theta \neq \pi/2 \ [\pi]$.
2. Il suffit de travailler sur un intervalle de longueur 2π car ρ est 2π-périodique. Mais $\forall\theta \neq \pi/2 \ [\pi]$, $\rho(\pi-\theta) = -\rho(\theta)$. On peut donc travailler sur un intervalle de longueur π. Enfin, comme ρ est paire, la courbe présente une symétrie d'axe (Ox) et il suffit de l'étudier sur $I = [0, \pi/2[$.
3. Pour tout $\theta \in I$, on montre avec les formules de trigonométrie que

$$\rho(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = 2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}$$

donc $\rho'(\theta) = -2\sin\theta - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ qui est négative sur I. On calcule aussi facilement que ρ ne s'annule qu'en un seul point de I : $\pi/4$. On en déduit les variations de ρ :

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	$-$	$-2\sqrt{2}$	$-$	
$\rho(\theta)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On remarque que le vecteur tangent à la courbe en le point de paramètre $\theta = 0$ est orthoradial.

4. La courbe ne présente pas de point stationnaire.
5. Par contre, on remarque une branche infinie quand $\theta \to \pi/2^-$. Comme :

$$x = \rho(\theta)\cos\theta = \cos(2\theta) \xrightarrow[\theta\to\pi/2^-]{} -1 \quad \text{et} \quad y = \rho(\theta)\sin\theta \xrightarrow[\theta\to\pi/2^-]{} -\infty,$$

on en déduit que la droite $x = -1$ est asymptote à cette branche infinie. La courbe de plus se trouve à droite de cette asymptote.

6. On en déduit alors le graphe de la courbe.

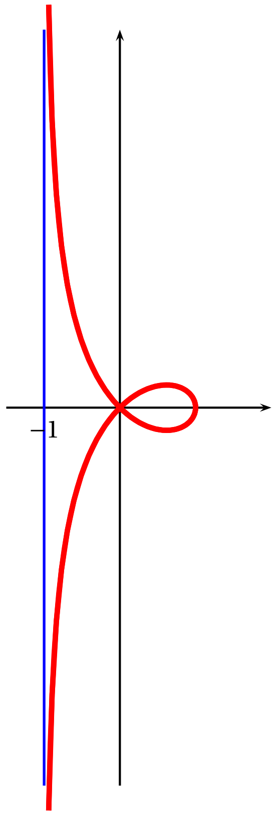


FIGURE 6.8 – Strophoïde droite

Remarque 6.10 Voir les sites web suivants :

```
http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml
http://perso.wanadoo.fr/jpq/courbes/index.htm
http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html
http://mathworld.wolfram.com/
```

pour les propriétés des courbes classiques avec des animations.

6.4 Exercices

Dans tous les exercices de ce chapitre, on considère le plan euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

6.4.1 Fonctions vectorielles

Exercice 6.1 ♡♡

On considère le mouvement d'un point $M(t)$ *dans le plan au cours du temps. On suppose que ce mouvement est décrit par une fonction vectorielle* $\vec{f} : I \longrightarrow \mathscr{P}$ *de classe* C^2 *et ne s'annulant pas appelée vecteur position du point* M*. On a donc :*

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t)$$

On appellera vecteur vitesse et vecteur accélération du point M *à l'instant* t *les vecteurs* $\vec{v}(t) := \vec{f}'(t)$ *et* $\vec{a}(t) := \vec{f}''(t)$

1. *On suppose que le mouvement du point* M *est circulaire de centre* O*, c'est-à-dire que* $t \mapsto \left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\|$ *est constante. Montrer qu'alors les vecteurs position et vitesse sont orthogonaux pour tout* $t \in I$.
2. *On suppose maintenant que le mouvement du point* $M(t)$ *est à accélération de centre* O*, ce qui signifie que à chaque instant, son vecteur accélération est colinéaire à son vecteur position. Montrer alors que* $t \mapsto \det\left(\overrightarrow{OM}(t), \vec{v}(t)\right)$ *est constante.*
3. *Montrer que si le mouvement du point* M *est à la fois circulaire et à accélération de centre* O *alors il est uniforme (c'est-à-dire que la norme de son vecteur vitesse est constante).*

Solution :

1. *Considérons* $\theta_1 : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\|\vec{f}(t)\right\| \end{array}\right.$ *. Cette application est de classe* C^2 *sur* I *car c'est le cas de* $\vec{f}$ *et parce que* $\vec{f}$ *ne s'annule pas sur* I*. Pour tout* $t \in I$ *:*

$$\theta_1'(t) = \frac{\langle \vec{f}'(t) \mid \vec{f}(t) \rangle}{\left\|\vec{f}(t)\right\|^2} = 0$$

ce qui amène : $\langle \vec{f}'(t) \mid \vec{f}(t) \rangle$*. Les vecteurs* $\overrightarrow{OM}(t)$ *et* $\vec{v}(t)$ *sont donc bien orthogonaux.*

2. *L'application :* $\theta_2 : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \det\left(\vec{f}(t), \vec{v}(t)\right) \end{array}\right.$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *et pour tout* $t \in I$ *:*

$$\theta_2'(t) = \det\left(\vec{v}(t), \vec{v}(t)\right) + \det\left(\vec{f}(t), \vec{a}(t)\right) = 0.$$

Donc θ_2 *est constante.*

3. *Si le mouvement est à la fois circulaire et à accélération de centre* O *alors, pour tout* $t \in I$*, le vecteur vitesse* $\vec{v}(t)$ *est orthogonal au vecteur position* $\overrightarrow{OM}(t)$*. L'angle formé par ces deux vecteurs est congru à* $\pi/2$ *modulo* π*, donc :*

$$\begin{aligned} \left|\det\left(\overrightarrow{OM}(t), \vec{v}(t)\right)\right| &= \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| . \left\|\vec{v}(t)\right\| \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OM}(t), \vec{v}(t)}\right)\right| \\ &= \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| . \left\|\vec{v}(t)\right\| \end{aligned}$$

Comme ce déterminant et $\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|$ *ne dépendent pas du temps, on en déduit que* $\left\|\vec{v}(t)\right\|$ *est aussi indépendant du temps.*

6.4.2 Courbes en coordonnées cartésiennes

Exercice 6.2 ♡

Étudier la courbe paramétrée donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{t^3+2}{t} \end{array}\right.$$

Solution :

1. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$.
2. La courbe ne présente pas de symétrie évidente.
3. Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{2\left(t^3-1\right)}{t^2}.$$

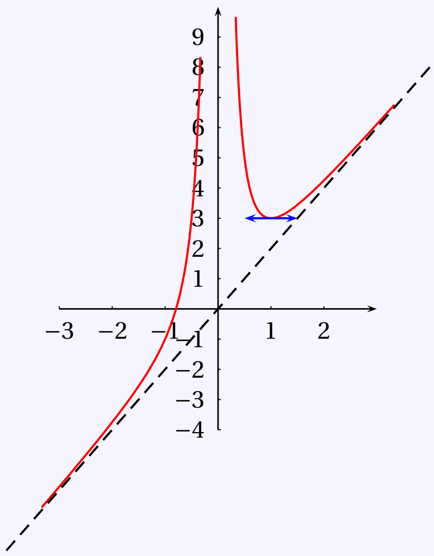
   On en déduit le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	$-$	‖	$-$ -1	$-$
$x(t)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$	$\searrow 0$
$y(t)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 3$	$\nearrow +\infty$
$y'(t)$	$-$	‖	$-$ 0	$+$

4. La courbe ne présente pas de point stationnaire.
5. La courbe admet quatre branches infinies. En $\pm\infty$, la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Étudions les branches infinies quand $t \to 0^+$ et quand $t \to 0^-$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t^3 + 2 \xrightarrow[t\to 0]{} 2 \quad \text{et} \quad y(t) - 2x(t) = t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

   donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe quand $t \to 0^+$ et quand $t \to 0^-$. De plus, la courbe est toujours au dessus de cette asymptote.
6. On en déduit l'allure de la courbe :



Exercice 6.3 ♡

Étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Solution :

1. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude**. Si $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, $x(1/t) = y(t)$ et $y(1/t) = x(t)$. On peut restreindre l'étude à $I =]-1, 1]$, on déduira la partie manquante de la courbe par une symétrie par rapport à la bissectrice principale.

3. ***Variations***. *Soit* $t \in \mathrm{I}$. *On calcule*

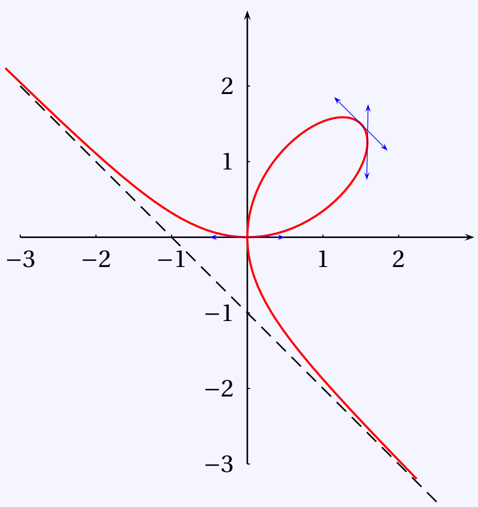
$$x'(t) = 3\,\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \qquad y'(t) = 3\,\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

On en déduit le tableau de variation suivants :

t	-1		0		$2^{-\frac{1}{3}}$		1
$x'(t)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	$-\frac{3}{4}$
$x(t)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$2^{\frac{2}{3}}$	↘	$\frac{3}{2}$
$y(t)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$2^{\frac{1}{3}}$	↗	$\frac{3}{2}$
$y'(t)$	‖	$-$		$+$		$+$	$\frac{3}{4}$

4. ***Étude du point stationnaire***.*La courbe ne possède pas de point stationnaire.*

5. ***Étude de la branche infinie***. *On a une branche infinie quand* t *tend vers* -1^+. *Comme* $\frac{y(t)}{x(t)} = t \xrightarrow[t\to -1^+]{} -1$ *et comme* $y(t)+x(t) = 3\,\frac{t}{t^2-t+1} \xrightarrow[t\to -1^+]{} -1$, *la droite d'équation* $y = -x-1$ *est asymptote à la courbe quand* t *tend vers* -1^+. *De plus :* $y(t) - (-x(t) - 1) = \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} \geqslant 0$. *La courbe est donc au dessus de l'asymptote.*
Cette courbe est un folium de Descartes.



Exercice 6.4 ♡♡

Étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1-t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$

Solution :

1. *Les fonctions* x *et* y *sont définies sur* $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude***. *Comme pour tout* $t \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, $x(-t) = x(t)$ *et* $y(-t) = -y(t)$, *la courbe admet l'axe* $(\mathrm{O}x)$ *comme axe de symétrie et on restreint l'étude à* $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. *Il n'y a pas d'autre symétrie évidente.*
3. ***Variations***. *Soit* $t \in \mathrm{I}$. *On calcule*

$$x'(t) = \frac{2t}{\left(1-t^2\right)^2} \qquad y'(t) = -\frac{t^2(t^2-3)}{(t-1)^2(t+1)^2}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		1		$\sqrt{3}$	
$x'(t)$	0	$+$	‖	$+$		$+$
$x(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$ 0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$ $-\infty$
$y'(t)$	0	$+$	‖	$+$		$-$

4. ***Étude du point stationnaire*** *Le point de paramètre $t = 0$ est stationnaire. Comme*

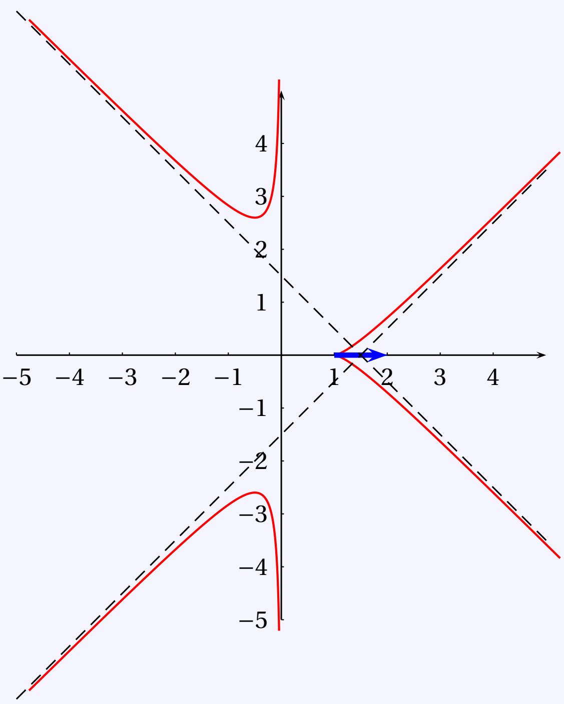
$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \frac{\frac{t^3}{1-t^2}}{\frac{1}{1-t^2}-1} = t \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

la courbe admet une tangente horizontale en ce point.

5. ***Étude des branches infinies****. La courbe présente plusieurs branches infinies.*
   – *Quand $t \to -1$, on forme le quotient $y(t)/x(t)$ et on calcule sa limite quand $t \to -1$ qui vaut 1. Puis*

$$y(t) - x(t) = \frac{t^3-1}{1-t^2} = -\frac{t^2+t+1}{t+1} \xrightarrow[t\to 1]{} -\frac{3}{2}$$

   donc la droite d'équation $y = x - 3/2$ est asymptote aux branches infinies quand $t \to 1^+$ et $t \to 1^-$. Étudions la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Elle est donnée par le signe de $y(t) - x(t) + 3/2 = -1/2(2t+1)(t-1)/(t+1)$ qui est toujours positif quand t est proche de 1 par valeurs inférieures et négatif quand il est proche de 1 par valeurs supérieures. La courbe est donc au dessus de l'asymptote dans le premier cas et en dessous dans le second.
   – *Quand $t \to +\infty$, la courbe admet l'axe vertical comme asymptote.*



Exercice 6.5 ♡

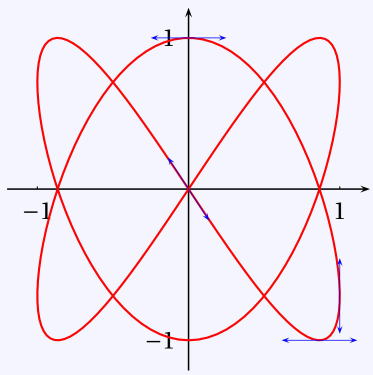
Étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$

Solution :

1. *Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$.*
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude****. x et y sont 2π périodiques. On se restreint à $[-\pi,\pi]$. $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. On a donc une symétrie d'axe $\mathrm{O}y$ et on travaille sur $[0,\pi]$. Mais $x(\pi - t) = \sin(2\pi - 2t) = -\sin 2t = -x(t)$ et $y(\pi - t) = \cos 3\pi - 3t = \cos(\pi - 3t) = -\cos 3t = -y(t)$. On a donc une symétrie de centre O et on travaillera sur $\mathrm{I} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*
3. ***Variations****. Soit $t \in \mathrm{I}$. On calcule*
$$x'(t) = 2\cos(2t) \qquad y'(t) = -3\sin(3t)$$
Par conséquent :
$$x'(t) \geqslant 0 \iff t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad y'(t) \geqslant 0 \iff t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$
On en déduit le tableau de variation suivants :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	2	$+$	0	$-$		$-$	-2
$x(t)$	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
$y(t)$	1	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	0
$y'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	3

4. ***Étude du point stationnaire** La courbe ne présente pas de point stationnaire.*
5. ***Étude de la branche infinie****. La courbe ne présente pas de branche infinie.*



Il s'agit d'une courbe de Lissajoux.

Exercice 6.6 ♡♡

Étudier la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \\ y(t) = \dfrac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t} \end{cases}$

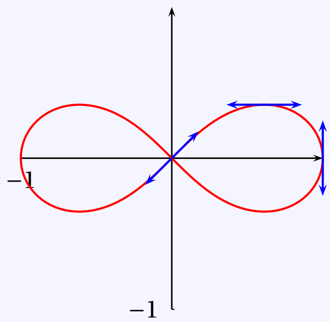
Solution :

1. *Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$.*
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude****. x et y sont 2π périodiques, on travaille donc sur $[-\pi,\pi]$. De plus, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$ et on déduira la partie manquante de la courbe par la symétrie de centre O. De plus : $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$. La courbe admet donc comme axe de de symétrie l'axe $(\mathrm{O}x)$ et on l'étudiera sur $[0, \frac{\pi}{2}]$*
3. ***Variations****. Soit $t \in \mathrm{I}$. On calcule*
$$x'(t) = \frac{\left(3-\cos^2(t)\right)\cos(t)}{\left(1+\cos^2(t)\right)^2} \qquad y'(t) = \frac{3\cos^2(t) - 1}{\left(1+\cos^2(t)\right)^2}$$
Sur I, x' est toujours positive. y' est du signe de $3\cos^2(t) - 1$ et, en notant $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$, est donc positive si

$t \in [0,\alpha]$ et négative sinon. Remarquons que comme $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et comme $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	$\frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	-1

4. ***Étude des points stationnaires, des branches infinies*** La courbe ne présente ni point stationnaire, ni branche infinie.
   Cette courbe s'appelle une lemniscate de Bernoulli.



Exercice 6.7 ♡♡

On considère la courbe paramétrée Γ *donnée par :*

$$\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th} t \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$$

et appelée tractrice.

1. *Donner le domaine de définition de* x *et* y.
2. *Montrer que* Γ *admet une propriété de symétrie qui permet de réduire son étude à un intervalle qu'on précisera.*
3. *Étudier les variations de* x *et* y.
4. *Étudier les branches infinies de* Γ.
5. *Préciser la nature du point* A *de paramètre* 0 *ainsi que la tangente en ce point.*
6. *Tracer la courbe.*
   (a) *Pour tout réel* $t > 0$, *déterminer une équation cartésienne de la tangente* $\mathscr{D}_t$ *à* Γ *au point* $M(t)$ *de paramètre* t.
   (b) *Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point* $N(t)$ *dont on déterminera les coordonnées.*
   (c) *Déterminer la distance* $M(t)N(t)$.
   (d) *Préciser la nature du mouvement du point* $N(t)$.

Solution :

1. *Les fonctions* x *et* y *sont définies sur* $\mathbb{R}$..
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude.*** *Si* $t \in \mathbb{R}$, *on a :* $x(-t) = -x(t)$ *et* $y(-t) = y(t)$. *On restreint alors l'étude à* $I = \mathbb{R}_+^*$ *et on déduira la partie de courbe manquante par la symétrie d'axe* (Oy).
3. ***Variations.*** *Soit* $t \in I$. *On calcule*

$$x'(t) = \operatorname{th}^2 t \qquad y'(t) = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$$

On en déduit le tableau de variation suivants :

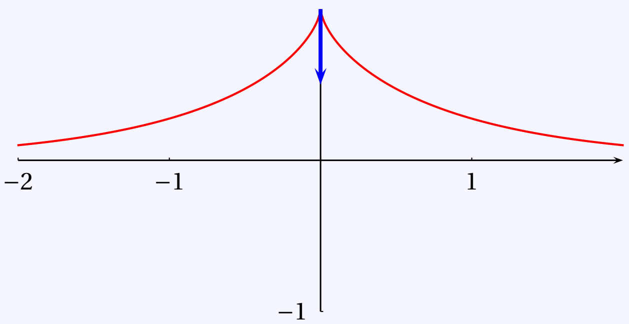
t	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$
$x(t)$	$0 \nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$1 \searrow$	0
$y'(t)$	0	$-$

4. ***Étude du point stationnaire*** *Le seul point stationnaire est celui de paramètre* $t=0$. *On a*

$$x''(t) = -2\,\mathrm{th}(t)\left(-1+\mathrm{th}^2(t)\right) \qquad y''(t) = \frac{\mathrm{ch}^2(t)-2}{\mathrm{ch}^3(t)}$$

donc $x''(0)=0$ *et* $y''(0)=-1$. *La courbe admet alors une tangente verticale au point stationnaire. Par symétrie, on en déduit que le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce.*

5. ***Étude de la branche infinie****. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation* $y=0$ *quand* t *tend vers* $+\infty$.



6. *Soit* $t>0$. *Un vecteur directeur à la tangente à la courbe au point* M *de paramètre* t *est celui de coordonnées* $\left(x'(t), y'(t)\right) = \left(\mathrm{th}^2 t, -\dfrac{\mathrm{sh}\, t}{\mathrm{ch}^2 t}\right)$ *ou encore celui de coordonnées :* $(\mathrm{sh}\, t, -1)$ *qui lui est colinéaire. Une équation cartésienne de cette tangente est donc* $\boxed{x+\mathrm{sh}(t)\,y-t=0}$. *Les coordonnées du point* N *sont alors* $(t,0)$ *et il décrit bien un mouvement rectiligne uniforme. De plus :*

$$\mathrm{NM}^2 = (x(t)-t)^2 + \left(y(t)\right)^2 = \mathrm{th}^2 t + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t} = 1$$

donc $\mathrm{NM}=1$.

Exercice 6.8 ♡♡

On se donne la courbe paramétrée

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t + \dfrac{1}{2t-1} \\ y(t) = t^2 - \dfrac{1}{2t+1} \end{cases}$$

1. *Préciser le domaine de définition de* $f : t \mapsto (x(t), y(t))$. *Étudier ensuite les variations de* x *et de* y *en fonction du paramètre* t.
2. (a) *Quelle est la nature des branches infinies de* Γ *lorsque* t *tend vers* $\pm\infty$.
   (b) *Montrer que lorsque* t *tend vers* $\frac{-1}{2}$ *(respectivement* $\frac{1}{2}$*),* Γ *possède une asymptote dont on précisera l'équation. Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote. de la tangente en ce point.*
   (c) *Tracer le support de* Γ.

Solution :

1. *x et y sont définies sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$. La courbe ne présente pas de symétrie évidente. Soit $t\in\mathrm{I}$. On a :*

$$x'(t)=\frac{8t(t-1)}{(2t-1)^2}\quad\text{et}\quad y'(t)=2\frac{4t^3+4t^2+t+1}{(2t+1)^2}=\frac{2(t+1)\left(4t^2+1\right)}{(2t+1)^2}$$

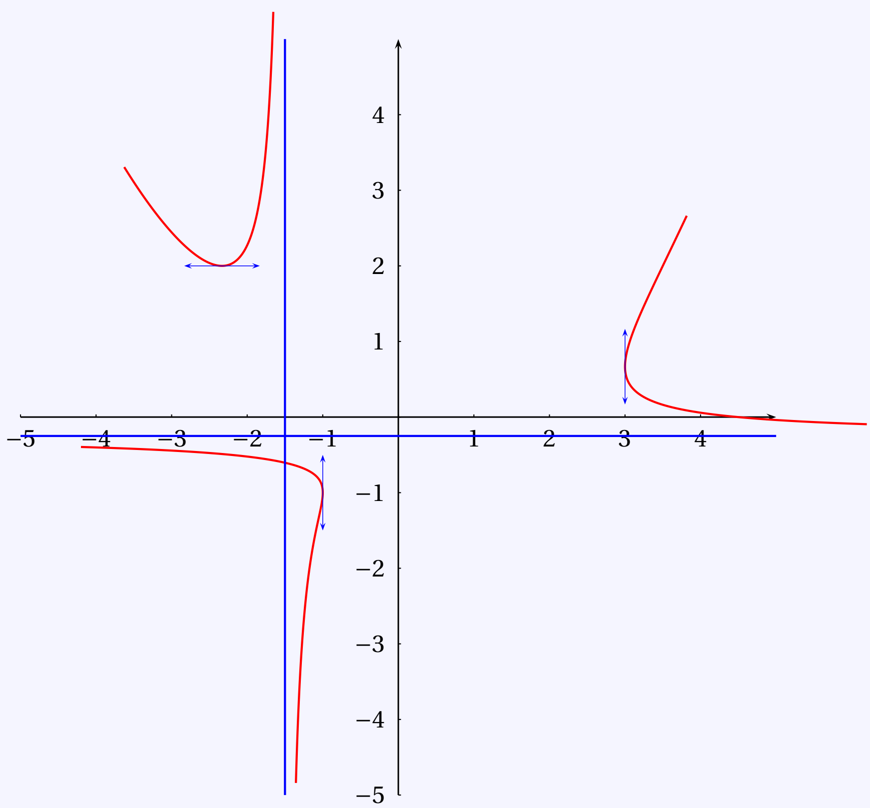
la factorisation du numérateur de y' étant obtenue en remarquant que -1 est une racine évidente de $4t^3+4t^2+t+1$. On en déduit le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{7}{3}$	↗	$-\frac{3}{2}$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↗	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$		$+$		$+$	

2. (a) *On vérifie que $\dfrac{y(t)}{x(t)}\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$ et $\dfrac{y(t)}{x(t)}\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\infty$. Ces deux branches infinies sont donc des branches paraboliques de direction $\mathrm{O}y$.*

   (b) *Lorsque t tend vers $\frac{-1}{2}$ Γ admet une asymptote verticale d'équation $x=-\frac{3}{2}$ et quand t tend vers $\frac{1}{2}$ Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y=-\frac{1}{4}$.*

3.



Exercice 6.9 ♡♡

Étudier la courbe donnée par : $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t} \\ y(t) &= \cos t \end{cases}$.

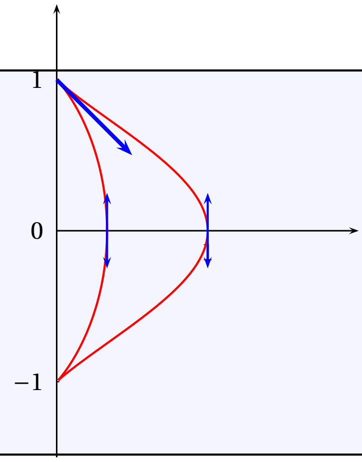
⚠ *Attention 6.10* *La correction de cet exercice utilise les équivalents.*

Solution :

1. *x et y sont définies sur $\mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont 2π-périodiques. On peut restreindre le domaine d'étude à $[-\pi,\pi]$. De plus, si t est élément de ce segment : $x(\pi-t)=x(t)$ et $y(\pi-t)=-y(t)$. On peut alors restreindre le domaine d'étude à $\mathrm{I}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. On obtiendra la partie manquante de la courbe par une symétrie d'axe $\mathrm{O}x$.*
2. *Soit $t\in\mathrm{I}$:*
$$x'(t)=\frac{\sin t\cos t\,(4+\sin t)}{(2+\sin t)^2}\quad \text{et}\quad y'(t)=-\sin t$$
Comme $\cos$ est positif sur I, $x'(t)$ est du signe de $\sin t$. On en déduit le tableau de variations :

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	1	↘	0	↗	$\frac{1}{3}$
$y(t)$	0	↗	1	↘	0
$y'(t)$	1	$+$	0	$-$	-1

L'unique point où la courbe est singulière est celui de paramètre $t=0$. On lit dans le tableau de variation que la courbe admet une tangente verticale en le point de paramètre $t=-\frac{\pi}{2}$ ainsi qu'en celui de paramètre $t=\frac{\pi}{2}$.
3. *En utilisant les formules usuelles d'équivalent :*
$$\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=\frac{(\cos t-1)(2+\sin t)}{\sin^2 t}\underset{t\to0}{\sim}\frac{-2\frac{t^2}{2}}{t^2}=-1$$
La courbe admet donc en le point singulier une tangente Δ de pente -1. Une équation cartésienne de Δ est alors : $y=-x+1$.
4. *Soit $t\in\mathrm{I}$. La position du point M par rapport à Δ est donnée par le signe de $y(t)+x(t)-1$:*
$$\begin{aligned} y(t)+x(t)-1 &= \cos t+\frac{\sin^2 t}{2+\sin t}-1\\ &= \frac{2\cos t+\sin t\cos t+1-\cos^2 t-2-\sin t}{2+\sin t}\\ &= \frac{-\left(\cos^2 t-2\cos t+1\right)+\sin t\cos t-\sin t}{2+\sin t}\\ &= \frac{-(\cos t-1)^2+\sin t(\cos t-1)}{2+\sin t}\\ &= \frac{(\cos t-1)(1-\cos t+\sin t)}{2+\sin t}\\ &= \frac{\sqrt2(\cos t-1)\left(\frac{\sqrt2}{2}-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2+\sin t}\end{aligned}$$
et le signe de cette expression est donnée par celui de $\frac{\sqrt2}{2}-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ qui est positif si t est proche de 0 et positif et qui est négatif si t est proche de 0 et négatif. Par conséquent, au voisinage du point singulier, la courbe est en dessus de la tangente pour les temps positifs et en dessous pour les temps négatifs. Le point singulier est donc un point de rebroussement de première espèce.
5. *Représentation graphique :*



Il s'agit d'un bicorne.

Exercice 6.10 ♡♡

Étudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}$$

On montrera l'existence d'une parabole asymptote.

⚠ *Attention 6.11* *Les développements limités sont utilisés dans la correction de l'exercice*

Solution :

1. ***Domaine de définition :*** $D_x = D_y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude :*** *Pas de symétrie évidente.*
3. ***Variations :*** *On calcule*

$$x'(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{2t^2} \qquad y'(t) = \frac{-2(t-1)}{t^3}$$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
y	0	↘	-3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	0
$y'(t)$		$-$	-4	$-$	‖	$+$	0	$-$	

En traçant le tableau de variations, on trouve un point stationnaire $M(1)$*, et une branche infinie lorsque* $t \to 0$.

4. ***Étude du point stationnaire :*** *en posant* $h = x - 1$*, on trouve*

$$\widetilde{F}(h) = F(1+h) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \frac{h^3}{2}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} + o(h^3)$$

et donc le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce, de tangente dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,-2)$.

5. ***Étude des branches infinies :*** *Lorsque* $t \to \pm\infty$*, comme* $y(t) \to 0$*, la droite* (Ox) *est asymptote, et le tableau de variations donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.*
Pour l'étude de la branche infinie en $t = 0$*, écrivons*

$$x(t) = t/2 + 1/(2t), \quad y(t) = -1/t^2 + 2/t$$

et calculons (pour éliminer les termes en $1/t^2$*) :*

$$y(t) + 4x^2(t) = 2 + 2/t + t^2$$

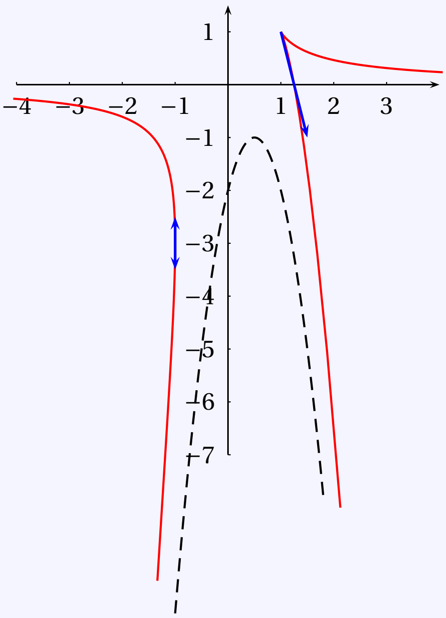
Éliminons ensuite les termes divergents en $1/t$ *en calculant*

$$y(t) + 4x^2(t) - 4x(t) = 2 + 2/t + t^2$$

d'où l'on tire que

$$y(t)+4x^2(t)-4x(t)-2 \sim -2t$$

et donc la parabole d'équation $y=-4x^2+4x-2$ *est asymptote à la courbe, et lorsque* $t\to 0^+$, *la courbe est située localement au dessous de la parabole, et lorsque* $t\to 0^-$, *elle est située localement au dessus de la parabole.*



Exercice 6.11 ♡♡

Construire la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Déterminer ensuite les coordonnées du point double I *et montrer que les tangentes en* I *sont orthogonales.*

⚠ *Attention 6.12* *Les développements limités sont utilisés dans la correction de l'exercice*

Solution :

1. **Domaine de définition :** $D_x=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ *et* $D_y=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude :** *Pas de restrictions apparentes.*
3. **Variations :** *On trouve que*

$$x'(t)=-\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2},\qquad y'(t)=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	‖	$-$	-1	$-$	‖	$-$	$-5/9$	$-$	
$x(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2/3$	↘	0
$y(t)$	$-\infty$	↗	$-1/2$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	$3/2$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Le tableau de variations montre deux points ordinaires à tangente horizontale : $M(0)=(0,0)$ *et* $M(2)=(2/3,4)$.

4. **Points stationnaires :** *Il n'y a pas de points stationnaires.*
5. **Branches infinies :** *Lorsque* $t\to\pm\infty$, *le tableau de variations montre que la droite* (Ox) *est asymptote, et on lit la position de la courbe par rapport à cette asymptote. De même, lorsque* $t\to -1$, *la droite d'équation* $y=-1/2$ *est asymptote au vu du tableau de variations.*

Pour l'étude de la branche infinie, lorsque $t \to 1$ et en posant $h = t-1$:

$$x(h) = \frac{1}{2h} + \frac{1}{4} - \frac{h}{8} + \underset{h\to 0}{o}(h), \quad \text{et} \quad y(h) = \frac{1}{h} + 2 + h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

et donc, lorsque $t \to 1$,

$$y(t) - 2x(t) - \frac{3}{2} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{5}{4}(t-1)$$

la droite $y = 2x + 3/2$ est asymptote. Lorsque $t \to 1^{-1}$, la courbe arrive à gauche en dessous, et lorsque $t \to 1^+$, la courbe arrive sur l'asymptote à droite au dessus.

6. ***Coordonnées du point double :*** *Cherchons le point double $\mathrm{M} = \mathrm{M}(t_1) = \mathrm{M}(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$. On doit avoir*

$$\begin{cases} t_1(t_2^2-1) & = t_2(t_1^2-1) \\ t_1^2(t_2-1) & = t_2^2(t_1-1) \end{cases}$$

et en mettant $(t_1 - t_2)$ en facteur,

$$\begin{cases} t_1 t_2 + 1 & = 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) & = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, $t_1 t_2 = -1$ et $t_1 + t_2 = -1$. Les deux valeurs t_1 et t_2 sont racines du trinôme

$$\mathrm{T}^2 + \mathrm{T} - 1 = 0$$

Le point double a pour coordonnées

$$x = \frac{t_1}{t_1^2-1} = \frac{t_2}{t_2^2-1} = \frac{t_1-t_2}{t_1^2-t_2^2} = \frac{1}{t_1+t_2} = -1$$

et de même, $y = -1$. $\mathrm{I} = (-1,-1)$.

7. ***Tangentes orthogonales au point double :*** *Les deux tangentes au point doubles sont dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{F}'}(t_1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}'}(t_2)$. Il suffit de montrer que ces deux vecteurs sont orthogonaux. Calculons leur produit scalaire :*

$$s = \left(\overrightarrow{\mathrm{F}'}(t_1) \mid \overrightarrow{\mathrm{F}'}(t_2)\right) = x'(t_1)x'(t_2) + y'(t_1)y'(t_2)$$

On calcule

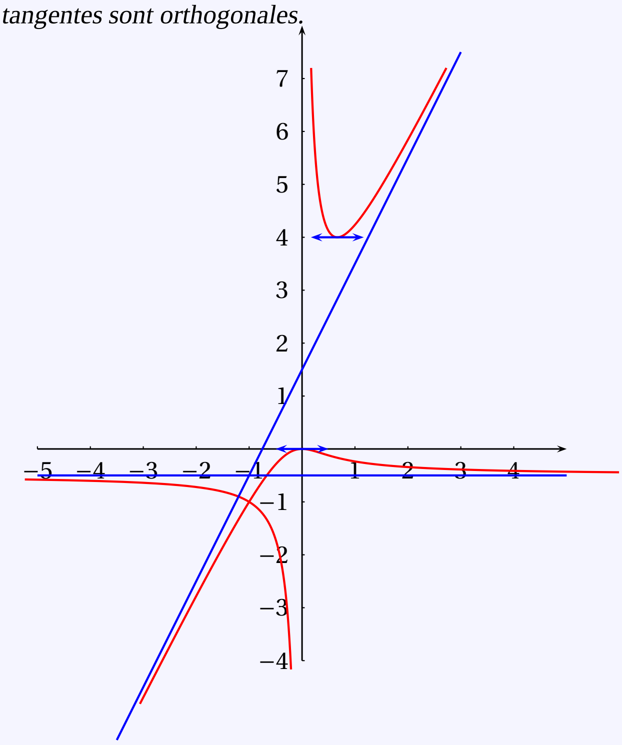
$$s = \frac{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}{(t_1^2-1)^2(t_2^2-1)^2} + \frac{t_1 t_2(t_1-2)(t_2-2)}{(t_1-1)^2(t_2-1)^2} = \frac{(t_1 t_2)^2 + (t_1^2+t_2^2)+1}{\left[(t_1 t_2)^2 - (t_1^2+t_2^2)+1\right]^2} + \frac{t_1 t_2\left[t_1 t_2 - 2(t_1+t_2)+4\right]}{\left[t_1 t_2 - (t_1+t_2)+1\right]^2}$$

Mais $t_1^2 + t_2^2 = (t_1+t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 3$, et finalement

$$s = \frac{1+3+1}{(1-3+1)^2} - \frac{-1+2+4}{(-1+1+1)^2} = 5-5 = 0$$

Ce qui montre que les deux tangentes sont orthogonales.

8. ***Tracé :***



Exercice 6.12 ♡♡

Construire la courbe

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^3}{3t+1} \\ y(t) &= \dfrac{3t^2}{3t+1} \end{cases}.$$

Attention 6.13 *Les développements limités sont utilisés dans la correction de l'exercice*

Solution :

1. **Domaine de définition :** *Les fonctions x et y sont définies sur* $\mathrm{I} = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$.
2. **Symétries :** *Il n'y a pas de symétrie évidente.*
3. **Variations :** *Si $t \in \mathrm{I}$ alors :*

$$x'(t) = \frac{3t^2(2t+1)}{(3t+1)^2} \qquad y'(t) = \frac{3t(3t+2)}{(3t+1)^2}$$

t		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$-1/3$		0	
$x'(t)$	$-$	$-4/9$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$
$x(t)$	$+\infty$ ↘	$8/27$	↘	$1/4$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
$y(t)$	$-\infty$ ↗	$-4/3$	↘	$-3/2$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$
$y'(t)$	$+$	0	$-$	-3	$-$	‖	$-$	0	$+$

4. **Points stationnaires :** *On remarque que la courbe admet un point stationnaire en $t = 0$. Étudions cette singularité :*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 3t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underset{t\to 0}{o}(t^3) \\ \underset{t\to 0}{o}(t^3) \end{pmatrix}$$

Le point stationnaire est donc un point de rebroussement de première espèce.

5. **Branches infinies :** *On a une branche infinie pour $t \to \pm\infty$:*

$$x(t) = -\frac{1}{81t} + \frac{1}{27} - \frac{t}{9} + \underset{t\to+\infty}{o}(t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{9t} - \frac{1}{3} + t + \underset{t\to+\infty}{o}(t)$$

Donc :

$$3x(t) - y^2(t) - \frac{1}{3}y(t) + \frac{1}{9} = \frac{2}{27t} + \underset{t\to+\infty}{o}(1/t)$$

Cette branche admet donc une parabole asymptote d'équation : $3x - y^2 - \dfrac{y}{3} + \dfrac{1}{9} = 0$. *On a une autre branche infinie pour $t \to -\frac{1}{3}$. Avec $u = t - 1/3$:*

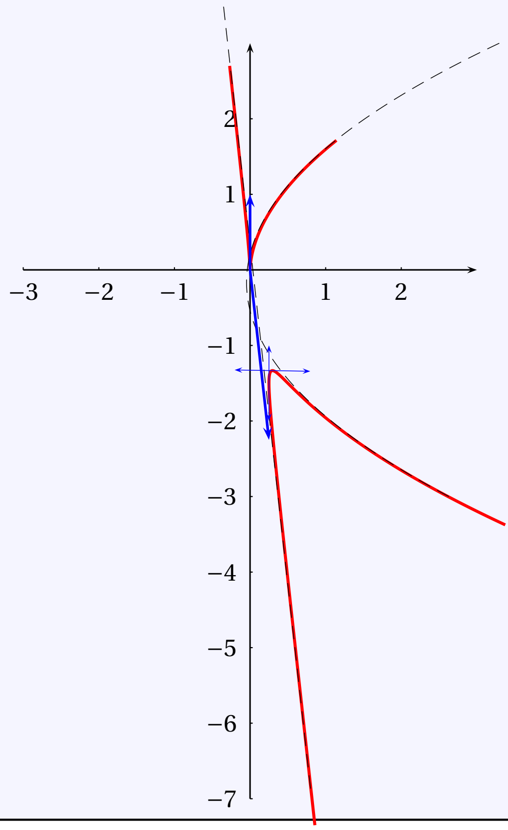
$$x(u) = -\frac{1}{81u} + \frac{1}{9} - \frac{u}{3} + \underset{u\to 0}{o}(u) \quad \text{et} \quad y(u) = \frac{1}{9u} - \frac{2}{3} + u + \underset{u\to 0}{o}(u)$$

d'où :

$$y(u) + 9x(u) - \frac{1}{3} = -2u + \underset{u\to 0}{o}(u)$$

En conclusion, la droite d'équation $y = -9x + 1/3$ est asymptote à cette branche infinie et la courbe est située en dessous de l'asymptote si $t > -1/3$ et au dessus si $t < -1/3$.

6. **Tracé :**



Exercice 6.13 ♡♡

On considère la famille de courbes paramétrées :

$$x(t) = \cos^3 t + m\sin t \qquad y(t) = \sin^3 t + m\cos t$$

1. *Faire l'étude de* C_0.
2. *Pour quelles valeurs de* m*, la courbe* C_m *admet-elle des points stationnaires ?*
3. *Trouver l'équation paramétrique de l'ensemble des points stationnaires et représenter cet ensemble.*

Solution :

1. *Voir l'exercice 6.4.*
2. ***Recherche des points stationnaires de*** C_m ***:***

$$x'(t) = \cos t\,(m - 3\sin t\cos t) \qquad y'(t) = \sin t\,(3\sin t\cos t - m)$$

Une condition nécessaire et suffisante est que $m \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$*, avec* $m = \frac{3}{2}\sin(2t)$.

3. ***Lieu des pts stationnaires :*** *on montre par double inclusion que c'est la courbe paramétrée :*

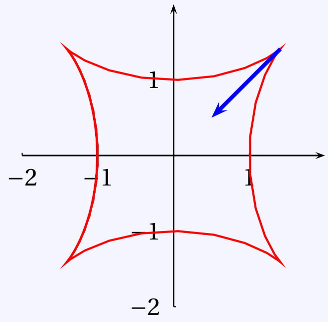
$$x(t) = \cos t\left(1 + 2\sin^2 t\right) \qquad y(t) = \sin t\left(1 + 2\cos^2 t\right)$$

4. ***Étude de cette courbe :*** *Les fonctions* x *et* y *sont définies sur* $\mathbb{R}$*. Elles sont* 2π *périodiques don on peut travailler sur* $[-\pi, \pi]$. x *est paire et* y *impaire, donc on peut limiter l'étude à* $[0, \pi]$ *et déduire la partie restante de la courbe par la symétrie d'axe* (Ox)*. Pour tout* t *dans cet intervalle,* $x(\pi - t) = -x(t)$ *et* $y(\pi - t) = y(t)$*. On a donc aussi une symétrie d'axe* $\left(Oy\right)$ *et on travaille sur* $[0, \pi/2]$*. Enfin,* $x(\pi/2 - t) = y(t)$ *et* $y(\pi/2 - t) = x(t)$ *On travaille finalement sur* $[0, \frac{\pi}{4}]$ *et la courbe présente aussi une symétrie par rapport à la première bissectrice. Pour tout* $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ *, on calcule*

$$\begin{cases} x'(t) & = -3\sin(t)\left[1 - 2\cos^2 t\right] \\ y'(t) & = 3\cos(t)\left[1 - 2\sin^2 t\right] \end{cases}$$

et on en déduit le tableau de variations et le tracé :

t	0		$\pi/4$
$x'(t)$	0	$+$	0
x	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$
$y'(t)$	3	$+$	0



Remarquons qu'on a un point stationnaire en $t = \frac{\pi}{4}$. En raison des symétries, c'est nécessairement un point rebroussement de première espèce.

Exercice 6.14 ♡♡♡

On considère la courbe paramétrée Γ :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 - 2t \\ y(t) &= 2t^3 - 3t^2 \end{cases}$$

1. *Tracer cette courbe et étudier le point stationnaire.*
2. *Écrire l'équation cartésienne de la tangente à Γ en un point $M(t)$ ordinaire.*
3. *À quelle condition sur t_1, t_2 les tangentes issues des points ordinaires $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont-elles orthogonales ?*
4. *Soit un point $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$. Trouver une condition nécessaire pour que de M soient issues deux tangentes orthogonales à Γ.*

Solution :

1. *Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$. Il n'y a pas de symétrie évidente. Pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$x'(t) = 2(t-1) \quad \text{et} \quad y'(t) = 6t(t-1).$$

On en déduit les variations de x et y :

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	-2	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

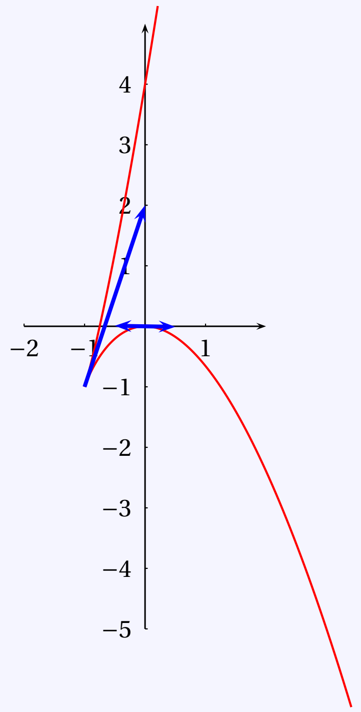
Le point de paramètre 1 est stationnaire.On écrit :

$$x(t) = -1 + (t-1)^2 \quad \text{et} \quad y(t) = -1 + 3(t-1)^2 + 2(t-1)^3$$

et

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (t-1)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (t-1)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc un point de rebroussement de première espèce, avec une tangente de pente 3. La courbe présente des branches infinies quand $t \to \pm\infty$. On a $y(t)/x(t) = \left(2t^3 - 3t^2\right) / \left(t^2 - 2t\right) = t(2 - 3/t)(1 - 2/t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \pm\infty$ donc ces branches sont de type parabolique de direction (Oy).



2. *La tangente* T_t *à la courbe en un point de paramètre* $t \neq 1$ *est dirigée par le vecteur* $\left(x'(t), y'(t)\right)$ *ou encore par celui de coordonnées* $(1, 3t)$*. Une équation de* T_t *est de la forme :* $3tx - y + c = 0$ *où* $c \in \mathbb{R}$*. Comme* $M(t) = \left(x(t), y(t)\right) \in T_t$*, il vient* $c = -t^3 + 3t^2$ *et donc*

$$\boxed{T_t : 3tx - y - t^3 + 3t^2 = 0}.$$

3. *On traduit l'orthogonalité des tangentes par* $\overrightarrow{T_{t_1}}.\overrightarrow{T_{t_2}} = 0$*, c'est-à-dire* $\boxed{t_1 t_2 = -1/9}$.
4. *Le point* M *appartient à la tangente issue de* $M(t)$ *si et seulement si* t *est racine du polynôme*

$$P(t) = t^3 - 3t^2 - 3xt + y = 0.$$

Si t_1, t_2, t_3 *désignent les trois racines complexes de ce polynôme, leur produit vérifie* $t_1 t_2 t_3 = -y$*. D'après la question précédente, on doit avoir* $t_3 = 9y$ *qui doit être racine de* P*, c'est-à-dire*

$$y(9^3 y^2 - 3 \times 9^2 y - 3 \times 9x + 1) = 0$$

et si $y \neq 0$*, on reconnaît l'équation d'une parabole.*

6.4.3 Courbes polaires

Exercice 6.15 ♡

Tracer la courbe polaire $\rho = 1 + \tan \frac{\theta}{2}$*. On précisera les coordonnées du point double.*

Solution :

1. ***Domaine de définition de*** ρ ***:*** *La fonction* ρ *est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude :*** *Puisque* $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$, $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$ *et il suffit donc de faire l'étude sur* $[0, 2\pi]$.
3. ***Tableau de signe de*** ρ ***:*** *Il est clair que* ρ *est croissante, et s'annule en* $3\pi/2$.

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	1 ↗	2 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	1

4. ***Passage au pôle :*** *le passage au pôle correspond à un point ordinaire, à tangente verticale (*ρ *change de signe).*
5. ***Branche infinie :*** *lorsque* $\theta \to \pi$*. Il y a une direction asymptotique horizontale. Pour chercher une droite asymptote, étudions* $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$*. En posant* $u = \theta - \pi$*,* $\widetilde{y}(u) = y(\pi + u) = -\sin u + 2\cos^2(u/2) = 2 - u + o(u)$*. La droite d'équation* $y = 2$ *est donc asymptote à la courbe, et lorsque* $\theta \to \pi^-$*, la courbe arrive sur l'asymptote, et lorsque* $\theta \to \pi^+$*, la courbe arrive sous l'asymptote.*
6. ***Point double :*** *On voit sur le dessin que le point double vérifie* $M(\theta_1) = M(\theta_1 + \pi)$ *avec* $\theta_1 \in [0, \pi/2]$*, c'est-à-dire*

$$\rho(\theta_1) = -\rho(\theta_1 + \pi)$$

En posant $t = \tan(\theta_1/2)$*, on obtient*

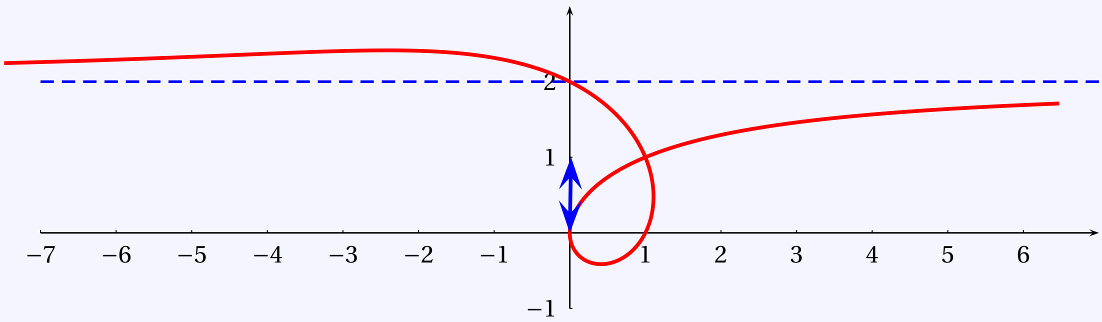
$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

c'est-à-dire $t = \sqrt{2} - 1$ *(pour avoir* $\theta_1 \in [0, \pi/2]$*. Alors si le point double a pour coordonnées* $M = (x_1, x_2)$*, on trouve, puisque* $\rho(\theta_1) = \sqrt{2}$*, que :*

$$x_1 = \rho(\theta_1)\cos(\theta_1) = \sqrt{2}\frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$y_1 = \rho(\theta_1)\sin(\theta_1) = \sqrt{2}\frac{2t}{1+t^2} = 1$$

Donc le point double est $M = (1, 1)$*.*
7. ***Représentation graphique :***



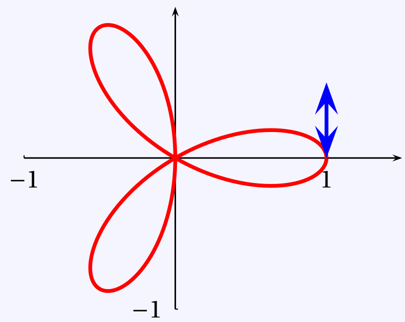
Exercice 6.16 ♡

Tracer la courbe polaire $\rho = \cos(3\theta)$*.*

Solution :

1. ***Domaine de définition de*** ρ ***:*** ρ *est définie sur* $\mathbb{R}$*.*
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude :*** *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$*.*
   - $\rho(\theta + 2\pi/3) = \rho(\theta)$*, donc* $M(\theta + 2\pi/3)$ *est l'image du point* $M(\theta)$ *par la rotation de centre* 0 *et d'angle* $2\pi/3$*. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle de la forme* $[\alpha, \alpha + 2\pi/3]$ *;*
   - $\rho(\theta + \pi/3) = -\rho(\theta)$*, donc le point* $M(\theta + \pi/3)$ *est l'image du point* $M(\theta)$ *par la rotation d'angle* $-2\pi/3$*. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle de longueur* $\pi/3$ *;*
   - $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$*, donc le point* $M(-\theta)$ *est le symétrique du point* $M(\theta)$ *par rapport à l'axe* Ox*.*

   On fait donc l'étude sur $[0, \pi/6]$*, et on complète la courbe par symétrie par rapport à* $(0x)$*, puis par rotations d'angle* $-2\pi/3$*.*
3. ***Variations :*** *La fonction* ρ *est décroissante sur* $[0, \pi/6]$ *et s'annule en* $\pi/6$*. Comme* ρ' *s'annule en* 0*, la courbe présente une tangente orthoradiale en* $\theta = 0$*.*
4. ***Points stationnaires :*** *Le passage au pôle est un point ordinaire car* ρ *change de signe donc il n'y a pas de point stationnaire.*
5. ***Branches infinies :*** *Il n'y a pas de branche infinie.*
6. ***Représentation graphique :***



Il s'agit d'un trifolium.

Exercice 6.17 ♡

Construire la courbe paramétrée

$$\rho = \frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

Solution :

– ***Domaine de définition :*** *Le domaine de définition de* ρ *est* $D_\rho = \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ *; Remarquons que*

$$\forall \theta \in D_\rho, \quad \rho(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\theta}{\cos(\theta+\pi/4)}.$$

– ***Restriction du domaine d'étude :*** *Soit* $\theta \in D_\rho$.
  – $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$*, donc* $M(\theta+2\pi) = M(\theta)$. *On n'étudie la courbe que sur un intervalle de la forme* $[\alpha, \alpha+2\pi]$.
  – $\rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$ *: le point* $M(\theta+\pi)$ *est le symétrique du point* $M(\theta)$ *par rapport à l'origine. Il suffit de faire l'étude sur l'intervalle* $I = [0,\pi] \setminus \{\pi/4\}$ *et de compléter la courbe par une symétrie par rapport au pôle.*

– ***Variations de*** ρ ***:*** *Pour tout* $\theta \in I$

$$\rho'(\theta) = -\frac{1}{(\cos\theta - \sin\theta)^2}$$

donc ρ *est décroissante sur* $[0,\pi/4[$ *et sur* $]\pi/4,\pi]$.

θ	0		$\pi/4$		π
$\rho'(\theta)$	1	$-$	‖	$-$	1
ρ	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0

– ***Point stationnaire :*** ρ *s'annule en* $\theta = 0$ *ou en* $\theta = \pi$ *en changeant de signe. Le passage au pôle correspond à un point ordinaire à tangente horizontale.*

– ***Étude de la branche infinie :*** *lorsque* $\theta \to \pi/4$. *Un point de la courbe a pour coordonnées* $M(\theta) = \big(x(\theta), y(\theta)\big)$ *où* $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ *et* $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$. *On calcule* $y(\theta)/x(\theta) = \tan\theta \xrightarrow[\theta\to\pi/4]{} 1$. *Puis*

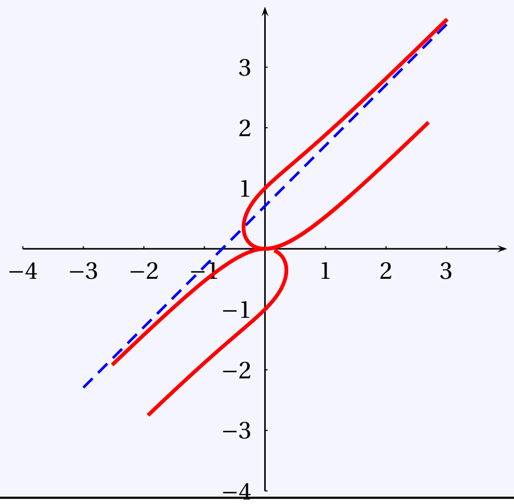
$$y(\theta) - x(\theta) = \frac{\sin\theta(\sin\theta - \cos\theta)}{\sin\theta - \cos\theta} = \sin\theta \xrightarrow[\theta\to\pi/4]{} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc la droite $y = x + \sqrt{2}/2$ *est asymtote à la courbe quand* $\theta \to \pi/4$. *On aurait aussi pu procéder ainsi : on fait l'étude dans le repère polaire* $\mathscr{R}_{\pi/4}$. *Dans ce repère, le point* $M(\theta)$ *a pour ordonnée* $Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \pi/4)$*, et en posant* $h = \theta - \pi/4$*, on trouve que*

$$\widetilde{Y}(h) = Y(\pi/4 + h) = \cos h(1 + \tan h) = 1 + h + o(h)$$

Par conséquent, il y a une droite asymptote horizontale, d'équation $Y = 1$ *dans le repère polaire* $\mathscr{R}_{\pi/4}$*, et lorsque* $\theta \to \pi/4^{-1}$*, la courbe arrive sous l'asymptote, et lorsque* $\theta \to \pi/4^{+}$*, elle arrive au dessus.*

– ***Représentation graphique :***



Exercice 6.18 ♡♡

Construire la courbe

$$\rho = 1 - \tan 2\theta$$

Solution :

1. ***Domaine de définition :*** *Le domaine de définition de* ρ *est* $D_\rho = \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. ***Restriction du domaine d'étude :*** *Comme* $\tan$ *est* π *périodique,* ρ *est* $\pi/2$ *périodique et il suffit de travailler sur un intervalle de longueur* $\pi/2$ *On travaillera sur* $I = [0, \pi/2] \setminus \{\pi/4\}$.
3. ***Variations de*** ρ ***:*** *Pour tout* $\theta \in I$, $\rho'(\theta) = 2\left(1 + \tan^2 2\theta\right)$ *donc* ρ *est croissante sur* $[0, \pi/4[$ *et sur* $]\pi/4, \pi/2]$.

θ	0		$\pi/8$		$\pi/4$		$\pi/2$
$\rho'(\theta)$	-2	$-$	-4	$-$	‖	$-$	-2
ρ	1	↘	0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1

4. ***Point stationnaire :*** *La courbe ne présente pas de point stationnaire.*
5. ***Étude de la branche infinie :*** *lorsque* $\theta \to \pi/4$. *Un point de la courbe a pour coordonnées* $M(\theta) = \left(x(\theta), y(\theta)\right)$ *où* $x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$ *et* $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$. *On calcule* $y(\theta)/x(\theta) = \tan\theta \xrightarrow[\theta\to\pi/4]{} 1$. *Puis*

$$\begin{aligned} y(\theta) - x(\theta) &= \frac{(\cos 2\theta - \sin 2\theta)(\sin\theta - \cos\theta)}{\cos 2\theta} \\ &= -2\frac{\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\theta} \\ &= -\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{2}}{\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}}\,\frac{2\theta - 2\frac{\pi}{4}}{\cos\left(2\theta - \cos\frac{2\pi}{4}\right)} \xrightarrow[\theta\to\pi/4]{} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

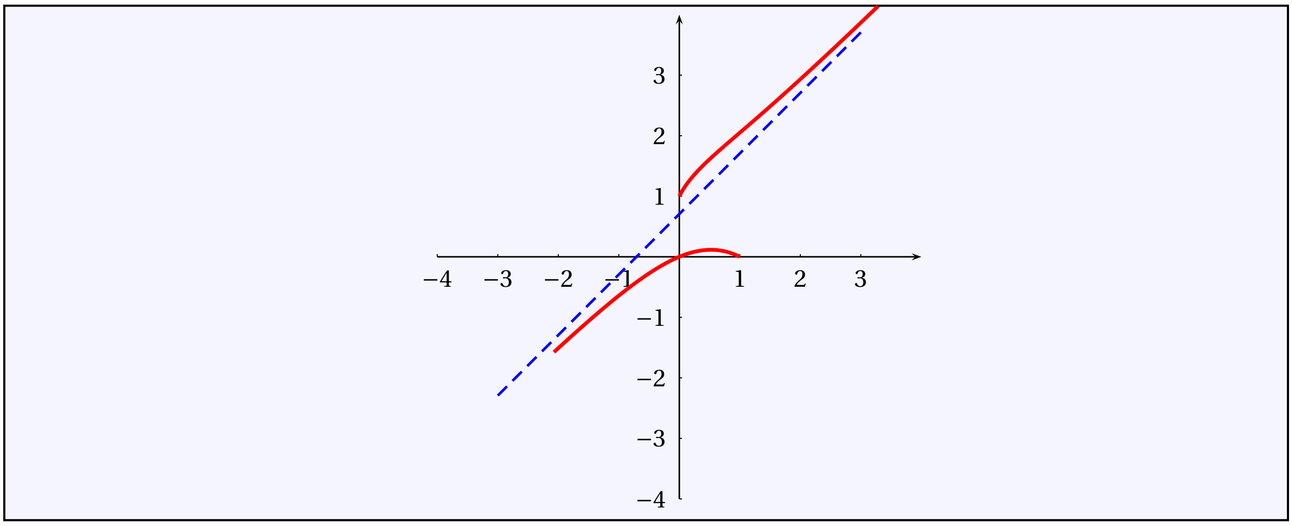
en reconnaissant deux taux d'accroissement. Donc la droite $y = x + \sqrt{2}/2$ *est asymptote à la courbe quand* $\theta \to \pi/4$. *Si on sait utiliser les équivalents, c'est un peu plus simple :*

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \underset{\theta\to\pi/4}{\sim} \frac{\pi}{4} - \theta \quad \text{et} \quad \cos 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \underset{\theta\to\pi/4}{\sim} \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

donc par produit d'équivalents :

$$y(\theta) - x(\theta) \underset{\theta\to\pi/4}{\sim} -\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow[\theta\to\pi/4]{} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On en déduit de plus la position de la courbe par rapport à l'asymptote, elle est en dessous quand $\theta \to \pi/4^-$ *et au dessus quand* $\theta \to \pi/4^+$.
6. ***Représentation graphique :***



Exercice 6.19 ♡♡

Construire la courbe

$$\rho = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$$

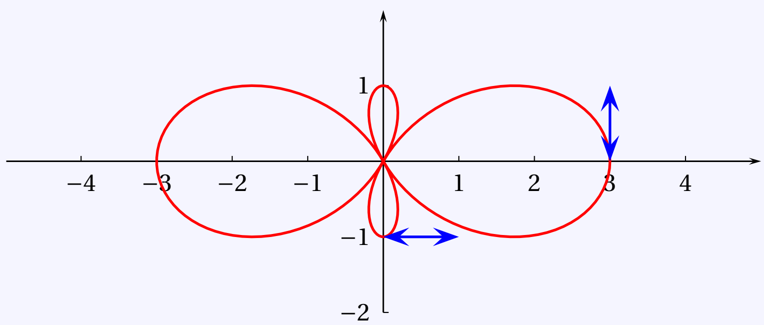
Solution :

1. ***Domaine de définition***. *La fonction* ρ *est définie sur* $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. *Mais en utilisant la trigonométrie, on montre que* $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \sin 3\theta = 4\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta$ *donc* $\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z},\quad \rho(\theta) = 4\cos^2\theta - 1$ *et* ρ *se prolonge par continuité en chaque point de* $\pi\mathbb{Z}$. *On travaille donc sur* $\mathbb{R}$.
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude***. ρ *est* 2π *périodique et on travaille alors sur un intervalle de longueur* 2π. *Mais* $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$ *donc on peut travailler sur un intervalle de longueur* π. *Enfin, comme* ρ *est paire, son support admet une symétrie d'axe* $(\mathrm{O}x)$ *et on étudie la courbe sur* $\mathrm{I} = [0,\pi/2]$.
3. ***Variations***. *Pour tout* $\theta\in\mathrm{I}$, $\rho'(\theta) = -8\sin\theta\cos\theta = -4\sin(2\theta)$. *Donc* ρ' *est négative sur* I. *On calcule facilement que les seuls points de* I *où* ρ *s'annule sont* 0 *et* $\pi/2$. *Par ailleurs, le seul point de* I *où* ρ *s'annule est* $\pi/3$. *On en déduit les variations de* ρ :

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$
$\rho'(\theta)$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0
$\rho(\theta)$	3	↘	0	↘	-1

La courbe présente un vecteur tangent orthoradial en $\theta = 0$ *et en* $\theta = \pi/2$.

4. ***Étude du point stationnaire***. *La courbe ne présente pas de point stationnaire.*
5. ***Étude de la branche infinie***. *La courbe ne présente pas de branche infinie.*
6. ***Représentation graphique***.



Exercice 6.20 ♡♡

Construire la courbe

$$\rho = 1 + \frac{1}{\theta - 2}$$

Solution :

1. ***Domaine de définition***. *La fonction* ρ *est définie sur* $I = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude***. *La courbe ne présente pas de symétrie évidente.*
3. ***Variations***. *Pour tout* $\theta \in I$, $\rho'(\theta) = -1/(\theta-2)^2$. *Donc* ρ' *est négative sur* I. *On calcule facilement que le seul point de* I *où* ρ *s'annule est* 1. *On en déduit les variations de* ρ *:*

θ	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\rho'(\theta)$		$-$	-1	$-$	‖	$-$	
$\rho(\theta)$	1	↘	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

Remarquons que la courbe passe par le pôle quand $\theta = 1$.

4. ***Étude du point stationnaire***. *La courbe ne présente pas de point stationnaire.*
5. ***Étude des branches infinies***. *La courbe présente des branches infinies quand* $\theta \to \pm\infty$ *et quand* $\theta \to 2$.
   - *Quand* $\theta \to \pm\infty$ *: comme* $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\pm\infty]{} 1$, *la courbe admet le cercle unité comme cercle asymptote. Elle est à l'intérieur du cercle quand* $\theta \to -\infty$ *et à l'extérieur quand* $\theta \to +\infty$.
   - *Quand* $\theta \to 2$ *: on étudie la quantité* $y(\theta)/x(\theta)$ *:*

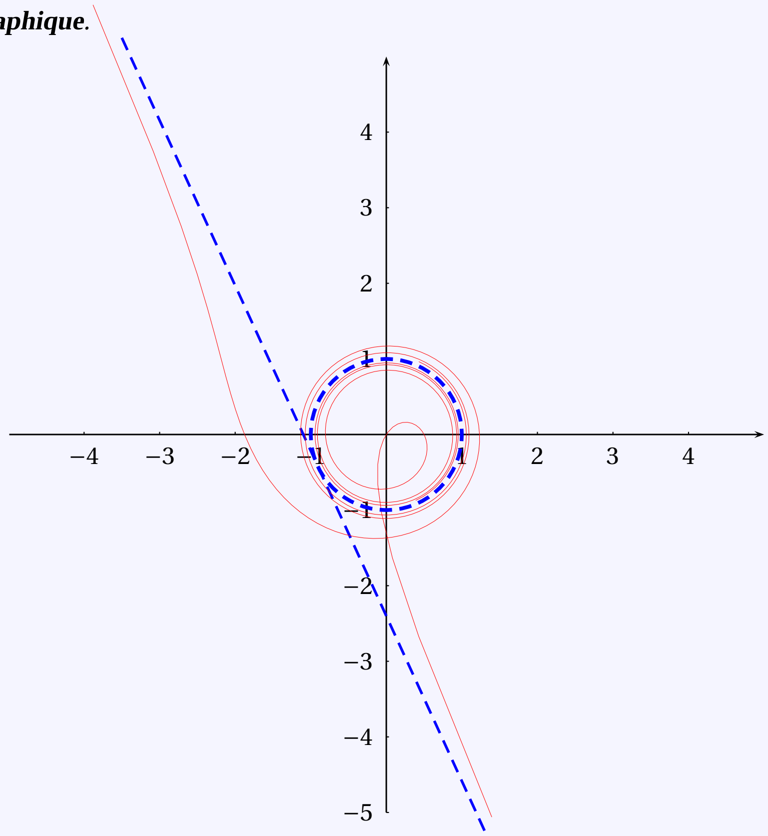
$$\frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \frac{\rho(\theta)\sin\theta}{\rho(\theta)\sin\theta} = \tan\theta \xrightarrow[\theta\to 2]{} \tan 2.$$

On forme maintenant la quantité :

$$y(\theta) - \tan 2\, x(\theta) = \rho(\theta)\left(\sin\theta - \tan 2\cos\theta\right) = \rho(\theta)\frac{\sin\theta\cos 2 - \sin 2\cos\theta}{\cos 2} = \frac{1}{\cos 2}\left(\sin(\theta-2) + \frac{\sin(\theta-2)}{\theta-2}\right).$$

En utilisant la limite usuelle $\sin x/x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, *on montre que* $y(\theta) - \tan 2\, x(\theta) \xrightarrow[x\to 2]{} 1/\cos 2$. *La droite* $y = \tan 2\, x + 1/\cos 2$ *est donc asymptote à la courbe quand* $\theta \to 2$.

6. ***Représentation graphique***.



Exercice 6.21 ♡♡

On considère le cercle

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 1$$

et le point $A\begin{vmatrix}-2\\0\end{vmatrix}$. *Déterminer le lieu des projections orthogonales de* A *sur les tangentes au cercle.*

Solution : *Un point du cercle a pour coordonnées* $M(t)\begin{vmatrix}\cos t\\ \sin t\end{vmatrix}$ *et la tangente en* $M(t)$ *a pour équation cartésienne*

$$T_t : \cos t\, x + \sin t\, y = 1$$

Le projeté orthogonal $P(t)$ *de* A *sur* T_t *vérifie* $P\begin{vmatrix}x(t)\\y(t)\end{vmatrix} = A + \lambda\overrightarrow{OM(t)}$ *et on trouve que*

$$\begin{cases} x(t) &= -2 + (1 + 2\cos t)\cos t \\ y(t) &= (1 + 2\cos t)\sin t \end{cases}$$

En effectuant un changement de repère de centre A *(*$X = x + 2$, $Y = y$*), puisque* t *est l'angle entre* (Ox) *et* $AP(t)$*, on a une équation polaire de la courbe décrite par* P *:*

$$\rho = 1 + 2\cos\theta$$

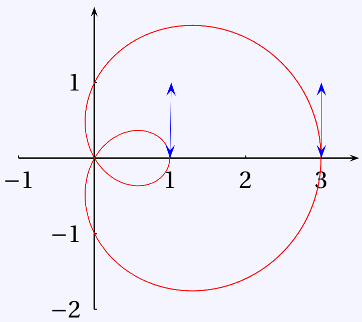
qu'on étudie.

1. ***Domaine de définition***. *La fonction* ρ *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. ***Restriction de l'intervalle d'étude***. *La fonction* ρ *est paire et* 2π*-périodique. On travaillera sur* $I = [0, \pi]$ *et on déduire la partie manquante de la courbe par une symétrie d'axe* (Ox).
3. ***Variations***. *Pour tout* $\theta \in I$, $\rho'(\theta) = -2\sin\theta$. *Donc* ρ' *est négative sur* I. *On calcule facilement que le seul point de* I *où* ρ *s'annule est* $2\pi/3$. *La courbe présente un vecteur tangent orthoradial en* 0 *et* π.

θ	0		$2\pi/3$		π
$\rho'(\theta)$	0	$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	0
$\rho(\theta)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

   Remarquons que la courbe passe par le pôle quand $\theta = 2\pi/3$.

4. ***Étude du point stationnaire***. *La courbe ne présente pas de point stationnaire.*
5. ***Étude des branches infinies***. *La courbe ne présente pas de branche infinie.*
6. ***Représentation graphique***.



C'est un limaçon de Pascal.

Exercice 6.22 ♡♡

Une roue de rayon b *roule sans glisser sur une roue de rayon* a. *Déterminer le lieu d'un point de la circonférence de la roue de rayon* a.

Solution : *Dans un repère orthonormé* $\mathscr{R} = (0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *la roue de rayon* a *est centrée en* O, *et la roue de rayon* b *est centrée en* C. *Notons* P *l'intersection des deux roues, et* M *le point de la circonférence. En notant* t *l'angle* $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OP})$, α *l'angle* $(\vec{\imath}, \overrightarrow{CM})$ *et* γ *l'angle* $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CM})$, *on a les relations*

$$t + \gamma - \alpha = \pi$$

La condition de roulement sans glissement s'écrit

$$at = b\gamma$$

Donc si x *et* y *sont les coordonnées du point* M,

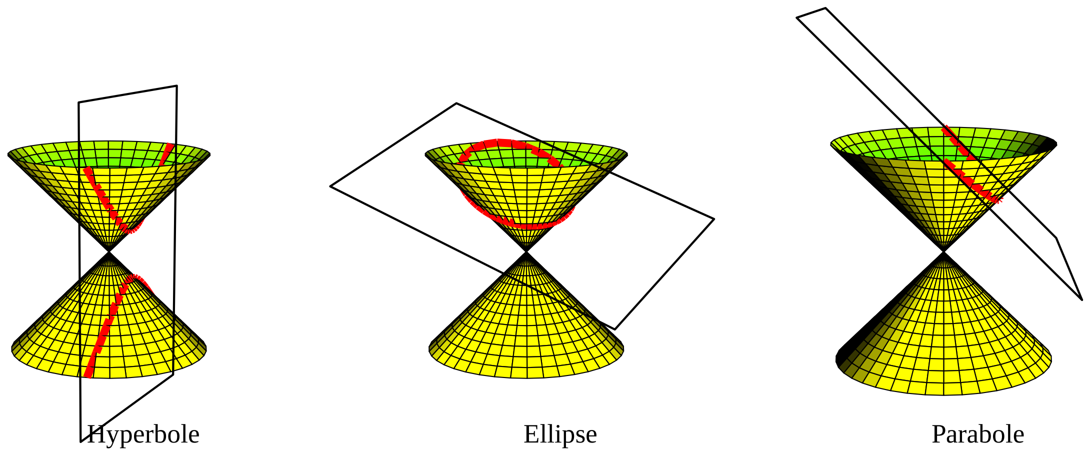
$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos\big((a+b)/bt\big) \\ y = (a+b)\sin t - b\sin\big((a+b)/bt\big) \end{cases}$$

Chapitre 7

Coniques

Compared to what an ellipse can tell us, a circle has nothing to say.
Eric T. Bell.

Pour bien aborder ce chapitre



Hyperbole Ellipse Parabole

Les coniques sont des courbes du plan étudiées depuis les grecs. Elles l'ont été par Menechme vers 400 ans avant J.C. Puis par Archimède, Apollonius de Perge, ... Ils les voyaient comme les intersections d'un cône et d'un plan et les avaient baptisées « sections coniques ». Suivant l'angle d'inclinaison de ce plan avec l'axe du cône, on distingue différents cas (voir l'exercice 7.2 page 286) :

- Si cet angle est inférieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une hyperbole.
- Si cet angle est supérieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une ellipse.
- Si cet angle est égal à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une parabole.

Mais d'autres situations peuvent se produire, ainsi si le plan contient le sommet du cône, l'intersection du plan et du cône peut être formé de deux droites sécantes, ou d'une seule droite, ou même seulement de ce sommet. Ces coniques sont dites dégénérées tandis que les trois premières obtenues sont dites propres.

Il existe d'autres façons d'introduire les coniques. Celle retenue dans ce cours est appelée « définition monofocale des coniques », ou « définition par foyer-directrice »(voir la définition 7.1). On verra, avec la « définition bifocale »(voir la définition 7.17) un autre moyen de définir les coniques propres.

Enfin, on peut voir les coniques comme la famille des courbes du plan d'équation cartésienne $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ où $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$. On apprendra dans le paragraphe 7.6 à étudier de telles courbes et comment reconnaître parmi celles-ci les coniques propres.

Les coniques possèdent de nombreuses propriétés géométriques remarquables et on en étudiera quelques unes dans les exercices de ce chapitre. On les retrouve en mains endroits dans la nature. Kepler au 16e siècle a compris que les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe un des deux foyers. Galilée au 17e siècle découvre qu'un obus tiré d'un canon décrit une trajectoire parabolique. La trajectoire d'une comète cyclique est une ellipse et celle d'une comète qui ne revient jamais est une parabole ou une hyperbole. Dans la vie courante, c'est grâce aux propriétés géométriques des paraboles que peuvent fonctionner les télescopes et les antennes paraboliques (voir l'exercice 7.3 page 286).

7.1 Définitions et premières propriétés

7.1.1 Définition monofocale

Notation 7.1 Si A et B sont deux points du plan, on notera $d(A,B)$ la distance de A à B, c'est-à-dire la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

DÉFINITION 7.1 ♡ **Conique**

Soient $\mathscr{D}$ une droite du plan, F un point du plan n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et e un réel strictement positif. On appelle *conique* de *foyer* F, de *directrice* $\mathscr{D}$ et d'*excentricité* e la courbe $\mathscr{C}$ formée des points M du plan vérifiant :

$$\boxed{d(M,F) = e\, d(M,\mathscr{D})}$$

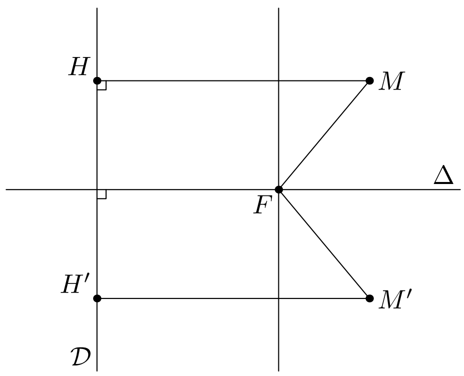
- Si $0 < e < 1$, on dit que $\mathscr{C}$ est une *ellipse*.
- Si $e = 1$, on dit que $\mathscr{C}$ est une *parabole*.
- Si $e > 1$, on dit que $\mathscr{C}$ est une *hyperbole*.

La droite Δ passant par F et orthogonale à $\mathscr{D}$ est appelée l'*axe focal*.

PROPOSITION 7.1 ♡

L'axe focal d'une conique est un axe de symétrie de cette conique.

Démonstration



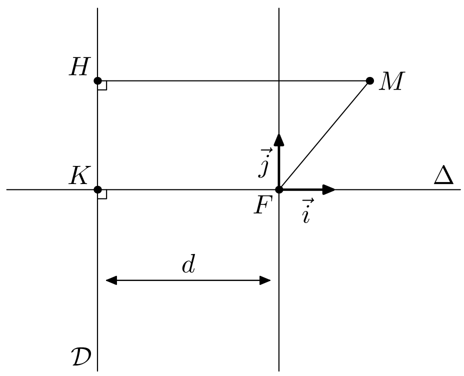
Soit M *un point de la conique* $\mathscr{C}$ *de directrice* $\mathscr{D}$, *de foyer* F *et d'excentricité* e. *Soit* Δ *l'axe focal de* $\mathscr{C}$ *et soit* M′ *l'image de* M *par la réflexion d'axe* Δ. *Soit* H *et* H′ *les projetés orthogonaux respectifs de* M *et* M′ *sur* $\mathscr{D}$. *Les droites* $\mathscr{D}$ *et* Δ *sont perpendiculaires donc* $d(M',\mathscr{D}) = H'M' = HM = d(M,\mathscr{D})$. *Comme* Δ *est la médiatrice du segment* $[MM']$ *et que* $F \in \Delta$, *on a aussi* $d(M',F) = d(M,F)$. *Par conséquent* $d(M',F) = d(M,F) = ed(M,\mathscr{D}) = ed(M',\mathscr{D})$ *ce qui prouve que* $M' \in \mathscr{C}$.

DÉFINITION 7.2 ♡ **Paramètre**

Soit $\mathscr{C}$ une conique de directrice $\mathscr{D}$, de foyer F et d'excentricité e. Soit $d = d(F,\mathscr{D})$. Le réel $p = e\, d$ est appelé *paramètre* de la conique $\mathscr{C}$.

Remarque 7.1 Le paramètre d'une conique $\mathscr{C}$ correspond à la distance de F à chacun des deux points de $\mathscr{C}$ situés sur la droite passant par F et parallèle à $\mathscr{D}$.

7.1.2 Équation cartésienne d'une conique



PROPOSITION 7.2 ♡ **Équation cartésienne d'une conique**

Soit $\mathscr{C}$ une conique de directrice $\mathscr{D}$, de foyer F et d'excentricité e. Soit $d = d(\mathrm{F},\mathscr{D})\cdot$ Dans un repère orthonormal $(\mathrm{F},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ choisi en sorte que $\mathscr{D}$ ait pour équation $x=-d$ ($\Longleftrightarrow \overrightarrow{i}$ unitaire normal à $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{j}$ unitaire directeur pour $\mathscr{D}$) $\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne :

$$\boxed{x^2+y^2=e^2(x+d)^2}$$

Démonstration *Soit K le projeté orthogonal de F sur la directrice $\mathscr{D}$. On rapporte le plan au repère $\mathscr{R}\left(\mathrm{F},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{i}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{KF}}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{KF}}\right\|}$ et où $\overrightarrow{j}$ est directement orthogonal à $\overrightarrow{i}$. Remarquons que $\overrightarrow{j}$ dirige la directrice $\mathscr{D}$. Posons $d=d(\mathrm{F},\mathscr{D})\cdot$ La directrice, dans ce repère, admet bien comme équation cartésienne $x=-d$. Soit $\mathrm{M}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$. On a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathscr{C} &\Longleftrightarrow d(\mathrm{M},\mathrm{F})=e\,d(\mathrm{M},\mathscr{D})\\ &\Longleftrightarrow d^2(\mathrm{M},\mathrm{F})=e^2\,d^2(\mathrm{M},\mathscr{D})\\ &\Longleftrightarrow x^2+y^2=e^2(x+d)^2\end{aligned}$$

d'où l'équation cartésienne de la conique dans $\mathscr{R}$.

Remarque 7.2 L'axe focal de la conique passe par F et est dirigé par $\overrightarrow{i}$. Son équation dans $\mathscr{R}$ est $y=0$.

Multimédia : Pour une directrice et un foyer fixés, on trace en faisant varier e les différentes coniques correspondantes.

7.1.3 Équation polaire d'une conique

On fixe un repère orthonormal du plan $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

PROPOSITION 7.3 ♡ **Équation polaire d'une conique**

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation polaire $r=\dfrac{d}{\cos(\theta-\theta_0)}$ avec $h\neq 0$. Alors une équation polaire de la conique $\mathscr{C}$ de foyer O, d'excentricité e et de directrice $\mathscr{D}$ est :

$$\boxed{r=\frac{ed}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}}.$$

Démonstration *Si $\theta_0=\pi\ [2\pi]$ alors la directrice $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à l'axe des abscisses et d'équation $x=-d$. On peut alors utiliser la proposition 7.2 : une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $x^2+y^2=e^2(x+d)^2$. On passe en polaire et on obtient $r=\pm e(r\cos\theta+d)$. La conique $\mathscr{C}$ est donc l'ensemble des points satisfaisant :*

$$r=-\frac{ed}{1+e\cos\theta}\ \text{ou}\ r=\frac{ed}{1-e\cos\theta}.$$

Mais ces deux équations sont celles d'une même courbe. En effet, si (r,θ) satisfait la première équation alors $(-r,\theta+\pi)$ satisfait la seconde. Ces deux couples sont les coordonnées polaires d'un même point du plan. Une équation polaire de $\mathscr{C}$ est donc donnée par $r=\dfrac{ed}{1+e\cos(\theta-\pi)}$.
Dans le cas général, on effectue une rotation de centre O et d'angle $\theta_0-\pi$ et on trouve pour la conique l'équation polaire $r=\dfrac{ed}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$.

Remarque 7.3
- L'équation polaire d'une conique s'écrit aussi $p=\dfrac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$
- L'axe focal de cette conique admet comme équation polaire $\theta=\theta_0$.

7.2 Étude de la parabole : $e=1$

On s'intéresse dans ce paragraphe à une parabole $\mathscr{P}$ de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$, de paramètre $p>0$. On considère à nouveau le repère $\mathscr{R}(\mathrm{F},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ construit dans la proposition 7.2. Dans ce repère, une équation de $\mathscr{P}$ est

$$x^2+y^2=(x+p)^2.$$

L'axe focal Δ, passe par F, est dirigé par $\overrightarrow{i}$ (et admet donc comme équation $y=0$), coupe $\mathscr{P}$ en un unique point de coordonnées $(-\frac{p}{2},0)$, ce qui justifie la définition suivante :

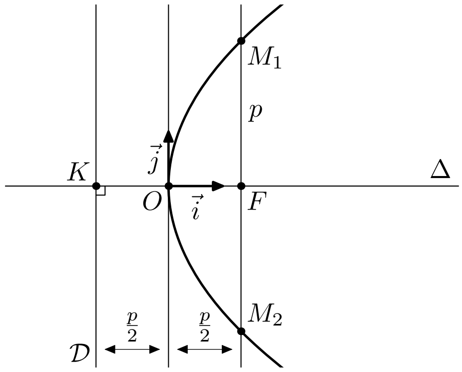
DÉFINITION 7.3 ♡ **Sommet d'une parabole**
On appelle *sommet* de la parabole $\mathscr{P}$ l'unique point S d'intersection entre $\mathscr{P}$ et son axe focal Δ. Dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées de S sont $(-\frac{p}{2}, 0)$.

Remarque 7.4 Si K est le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{D}$, S est le milieu de [FK].

PROPOSITION 7.4 ♡ **Équation réduite d'une parabole**
Il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel la parabole $\mathscr{P}$ de paramètre $p > 0$ admet pour équation caractéristique :

$$\boxed{Y^2 - 2\,p\,X = 0}$$

Cette équation est appelée *équation réduite* de la parabole $\mathscr{P}$.
Réciproquement, une courbe d'équation : $Y^2 - 2\,p\,X = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est une parabole de foyer $\boxed{F\left|\begin{matrix}\frac{p}{2}\\0\end{matrix}\right.}$ et de directrice d'équation $\boxed{\mathscr{D}\ : X = -\frac{p}{2}}$.



Démonstration
$\boxed{\Rightarrow}$ *Soit $\mathscr{P}$ la parabole de paramètre $p > 0$, de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$. Dans le repère $\mathscr{R}\left(F, \vec{i}, \vec{j}\right)$ construit dans la proposition 7.2, $\mathscr{P}$ admet comme équation cartésienne $x^2 + y^2 = (x+p)^2$ ou :$y^2 = 2px + p^2$. Considérons le point $O\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ et le repère $\mathscr{R}'\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Calculons les formules de changement de coordonnées du repère $\mathscr{R}$ au repère $\mathscr{R}'$. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$ et de coordonnées (X, Y) dans $\mathscr{R}'$. On a :*

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j}.$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM} = \frac{p}{2}\vec{i} + x\vec{i} + y\vec{j} = \left(x + \frac{p}{2}\right)\vec{i} + y\vec{j}.$$

Par identification, on obtient alors :

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{p}{2} \\ Y = y \end{cases}.$$

L'équation de $\mathscr{P}$: $y^2 = 2px + p^2$ devient dans $\mathscr{R}'$: $Y^2 = 2pX$. Remarquons que O est le sommet de la parabole.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Soit $\mathscr{C}$ une courbe d'équation $Y^2 - 2\,p\,X = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrons que $\mathscr{C}$ est une parabole. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $X = -\frac{p}{2}$, $F\left|\begin{matrix}\frac{p}{2}\\0\end{matrix}\right.$ et $M\left|\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right.$ un point du plan. Montrons que $d(M,F) = d(M,\mathscr{D})$ si et seulement si $M \in \mathscr{C}$ ce qui prouvera que $\mathscr{C}$ est une parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$. Remarquons que :*

$$d^2(M,F) = \left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2 \quad \text{et} \quad d^2(M,\mathscr{D}) = \left(X + \frac{p}{2}\right)^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\iff d(M,F) = d(M,\mathscr{D}) \\ &\iff d^2(M,F) = d^2(M,\mathscr{D}) \\ &\iff \left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &\iff Y^2 - 2\,p\,X = 0 \\ &\iff M \in \mathscr{C}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 7.5 ♡ **Paramétrage de la parabole**
On peut paramétrer la parabole d'équation $Y^2 - 2\ p\ X = 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{p\ t^2}{2} \\ y(t) = p\ t \end{array}\right. : t \in \mathbb{R}$$

Démonstration *Soit* $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *le repère construit dans la proposition précédente. Dans ce repère une équation de* $\mathscr{P}$ *est* $y^2 - 2px = 0$. *Soit* $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ *un point du plan. On a équivalence entre :*

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\iff y^2 - 2px = 0 \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad y = p\ t \quad \text{et} \quad x = \frac{p\ t^2}{2}. \end{aligned}$$

Remarque 7.5 Comme $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, la parabole possède deux branches paraboliques de direction asymptotique OX (c'est de là que vient l'appellation).

PROPOSITION 7.6 ♡ **Tangente à la parabole**
Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ de paramètre $p > 0$ et paramétrée par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \frac{p\ t^2}{2} \\ y(t) = p\ t \end{array}\right. : t \in \mathbb{R}$.

– La tangente $\mathscr{T}_{M_0}$ à $\mathscr{P}$ au point M_0 de $\mathscr{P}$ de paramètre $t_0 \in \mathbb{R}$ a pour équation :

$$x - t_0 y + p\frac{t_0^2}{2} = 0$$

– La tangente $\mathscr{T}_{M_0}$ à $\mathscr{P}$ au point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation

$$y\ y_0 = p(x + x_0)$$

Démonstration *Soit* $\mathscr{T}_0$ *la tangente à* $\mathscr{P}$ *au point de paramètre* t_0. *Un vecteur directeur à cette tangente a pour coordonnées* $\left(pt_0, p\right)$. *Le vecteur de coordonnées* $(t_0, 1)$ *dirige donc* $\mathscr{T}_0$. *Une équation cartésienne de* $\mathscr{T}_0$ *est donc*

$$\begin{vmatrix} t_0 & x - x(t_0) \\ 1 & y - y(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

soit $t_0\left(y - pt_0\right) - \left(x - \frac{p\ t_0^2}{2}\right) = 0$ *ou encore* $x - t_0 y + \frac{p\ t_0^2}{2} = 0$. *Par ailleurs, comme* $x_0 = \frac{p\ t_0^2}{2}$ *et que* $y_0 = p\ t_0$, *cette équation s'écrit encore* $px - y_0 y + px_0 = 0$.

7.3 Étude de l'ellipse : $0 < e < 1$

On considère dans tout ce paragraphe une ellipse $\mathscr{E}$ de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e $(0 < e < 1)$.

PROPOSITION 7.7 ♡ **Équation réduite de l'ellipse**
– Il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel $\mathscr{E}$ a pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad 0 < b < a$$

Cette équation est appelée *équation réduite de l'ellipse* $\mathscr{E}$.

– **Réciproquement** : l'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ est l'équation d'une ellipse de foyer $F\begin{vmatrix} -c \\ 0 \end{vmatrix}$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, de directrice $\mathscr{D} : X = -\frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *D'après la proposition 7.2, il existe un repère orthonormal direct* $\mathscr{R}\left(\mathrm{F}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *dans lequel une équation cartésienne de* $\mathscr{E}$ *est*

$$x^2 + y^2 = e^2 (x+d)^2 \ (\star)$$

où $d = d(\mathrm{F}, \mathscr{D})$*. On a :*

$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\iff \left(1-e^2\right)x^2 - 2e^2 dx + y^2 - e^2 d^2 = 0\\
&\iff \left(1-e^2\right)\left(x^2 - \frac{2e^2 d}{1-e^2}x\right) + y^2 - e^2 d^2 = 0\\
&\iff \left(1-e^2\right)\left(\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 - \frac{e^4 d^2}{\left(1-e^2\right)^2}\right) + y^2 - e^2 d^2 = 0\\
&\iff \left(1-e^2\right)\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + y^2 - e^2 d^2 - \frac{e^4 d^2}{1-e^2} = 0\\
&\iff \left(1-e^2\right)\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + y^2 - \frac{e^2 d^2\left(1-e^2\right) + e^4 d^2}{1-e^2} = 0\\
&\iff \left(1-e^2\right)\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + y^2 - e^2 d^2 \frac{1-e^2+e^2}{1-e^2} = 0\\
&\iff \left(1-e^2\right)\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + y^2 - \frac{e^2 d^2}{1-e^2} = 0\\
&\iff \left(1-e^2\right)^2\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + \left(1-e^2\right)y^2 - e^2 d^2 = 0\\
&\iff \frac{\left(1-e^2\right)^2}{e^2 d^2}\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{1-e^2}{e^2 d^2}y^2 - 1 = 0\\
&\iff \left(\frac{1-e^2}{ed}\right)^2\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + \frac{1-e^2}{e^2 d^2}y^2 - 1 = 0 \left(\star'\right)
\end{aligned}$$

Posons alors

$$a = \frac{ed}{1-e^2}, \quad b = \frac{ed}{\sqrt{1-e^2}}, \quad c = \frac{e^2 d}{1-e^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{X} = x - c \\ \mathrm{Y} = y \end{cases}.$$

Ces quantités sont bien définies car $0 < e < 1$*. Remarquons qu'on a* $a > b > 0$*. Le couple* (X, Y) *représente les coordonnées dans un repère* $\mathscr{R}'\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *d'un point de coordonnées* (x, y) *dans le repère* $\mathscr{R}\left(\mathrm{F}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *où* O *est déduit de* F *par une translation de vecteur* $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} c \\ 0 \end{vmatrix}$*. Dans ce nouveau repère,* $(\star)$ *s'écrit alors*

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} = 1$$

qui est bien de la forme annoncée. On a par ailleurs bien $a^2 - b^2 = c^2$*,* $\frac{c}{a} = e$ *et* $d = \frac{b^2}{c}$*. Enfin, une équation de la directrice* $\mathscr{D}$ *dans* $\mathscr{R}$ *étant* $x = -d$*, une équation de* $\mathscr{D}$ *dans* $\mathscr{R}'$ *est :* $\mathrm{X} + c = -d$*, soit* $\mathrm{X} = -d - c$*. Mais* $-d - c = -\dfrac{b^2 + c^2}{c} = -\frac{a^2}{c}$*. Une équation de* $\mathscr{D}$ *dans* $\mathscr{R}'$ *est donc :* $\mathrm{X} = -\frac{a^2}{c}$*.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, soit* $\mathscr{E}$ *une courbe d'équation* $\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} = 1$ *dans un repère* $\mathscr{R}'\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$*.avec* $a > b > 0$*. Posons*

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad d = \frac{b^2}{c}.$$

Par identification avec l'équation $\left(\star'\right)$*, on reconnait l'ellipse de foyer* $\mathrm{F}\begin{vmatrix} -c \\ 0 \end{vmatrix}$ *de directrice* $\mathscr{D} : \mathrm{X} = -\frac{a^2}{c}$ *et d'excentricité* e*.*

PROPOSITION 7.8 ♡

Soit $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal dans lequel $\mathscr{E}$ a pour équation $\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$.

- L'origine O est centre de symétrie de $\mathscr{E}$. C'est le *centre* de l'ellipse.
- OX et OY sont axes de symétrie de $\mathscr{E}$. OX est appelé *axe focal* ou *grand axe*. OY est appelé *axe non focal* ou *petit axe*.
- a est appelé *demi-axe focal* ou *demi-grand axe*. b est appelé *demi-axe non focal* ou *demi-petit axe*.
- Soit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. $\mathscr{E}$ admet deux foyers F et F′ de coordonnées dans le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$: $\mathrm{F}\begin{vmatrix} -c \\ 0 \end{vmatrix}$ et $\mathrm{F}'\begin{vmatrix} c \\ 0 \end{vmatrix}$ de directrice associée d'équation, dans ce même repère : $\mathscr{D} : \ \mathrm{X} = -\frac{a^2}{c}$ et $\mathscr{D}' : \ \mathrm{X} = \frac{a^2}{c}$.
- L'ellipse $\mathscr{E}$ coupe les axes du repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ en quatre points A, A′, B, B′ appelés les *sommets* de $\mathscr{E}$ et on a : $\mathrm{A}\begin{vmatrix} -a \\ 0 \end{vmatrix}$, $\mathrm{A}'\begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}$, $\mathrm{B}\begin{vmatrix} 0 \\ -b \end{vmatrix}$, $\mathrm{B}'\begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix}$.

PROPOSITION 7.9 ♡ **Paramétrage de l'ellipse**

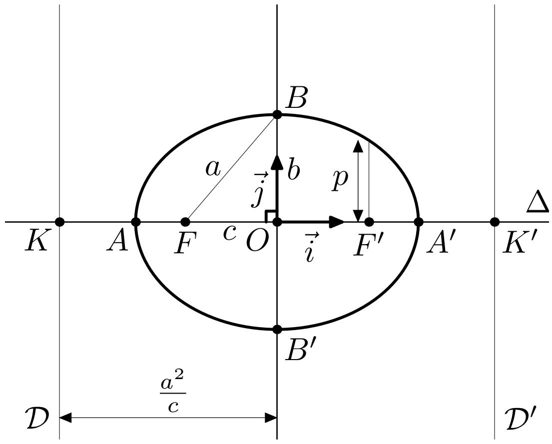
On peut paramétrer l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ avec $0<b<a$ dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ par

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \end{cases} : t\in[-\pi,\pi]$$

Démonstration *Soit* $\mathscr{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *le repère construit dans la proposition précédente. Dans ce repère une équation de* $\mathscr{E}$ *est* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$. *Soit* $M\begin{vmatrix}X\\Y\end{vmatrix}$ *un point du plan. On a équivalence entre :*

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{E} &\iff \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \\ &\iff \exists t\in[-\pi,\pi],\quad X=a\cos t \quad \text{et} \quad Y=b\sin t \end{aligned}$$

Remarque 7.6 L'ellipse ne possède pas de branche infinie.



PLAN 7.1 : Pour construire une ellipse

1. *On trace ses axes focaux et demi-focaux.*
2. *On place le centre* O *de l'ellipse puis ses quatre sommets* A, A′, B, B′.
3. *On mesure au compas la longueur* OA *et on place le compas en* B.
4. *On trace les deux arcs intersectant l'axe focal. On obtient ainsi les points* F *et* F′.

DÉFINITION 7.4 ♡ **Affinité orthogonale**

Soient $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal. L'affinité orthogonale de base $(O,\vec{i})$ et de rapport $k\in\mathbb{R}$ est l'application du plan dans lui même qui au point M de coordonnées (x,y) associe le point M′ de coordonnées (x,ky).

PROPOSITION 7.10 ♡ **Cercle principal d'une ellipse**

L'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ avec $0<b<a$ dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ est l'image du cercle $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $X^2+Y^2=a^2$ par l'affinité orthogonale de base $(O,\vec{i})$ et de rapport $k=\frac{b}{a}$. Le cercle $\mathscr{C}$ est appelé *cercle principal* de l'ellipse $\mathscr{E}$.

Démonstration *Soit* M *un point de* $\mathscr{C}$. *Il existe* $t\in[-\pi,\pi]$ *tel que les coordonnées de* M *soient* $(a\cos t, a\sin t)$. *Soit* T *l'affinité orthogonale en question. On a* $T(M)\begin{vmatrix}a\cos t\\b\sin t\end{vmatrix}$. *Donc* $T(M)\in\mathscr{E}$. *Réciproquement, tout point de* $\mathscr{E}$ *est image d'un point de* $\mathscr{C}$ *par* T.

PROPOSITION 7.11 ♡ **Équation de la tangente à une ellipse**

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'ellipse $\mathscr{E}$ de demi-grand axe a et de demi-petit axe b $(0<b<a)$ et paramétrée par $\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \end{cases} : t\in[-\pi,\pi]$.

– La tangente $\mathscr{T}_{M_0}$ à $\mathscr{E}$ au point M_0 de $\mathscr{E}$ de paramètre $t_0\in\mathbb{R}$ a pour équation :

$$b\ x\ \cos t_0 + a\ y\ \sin t_0 - ab = 0$$

– La tangente $\mathcal{T}_{M_0}$ à $\mathcal{E}$ au point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation

$$\frac{x\ x_0}{a^2} + \frac{y\ y_0}{b^2} - 1 = 0$$

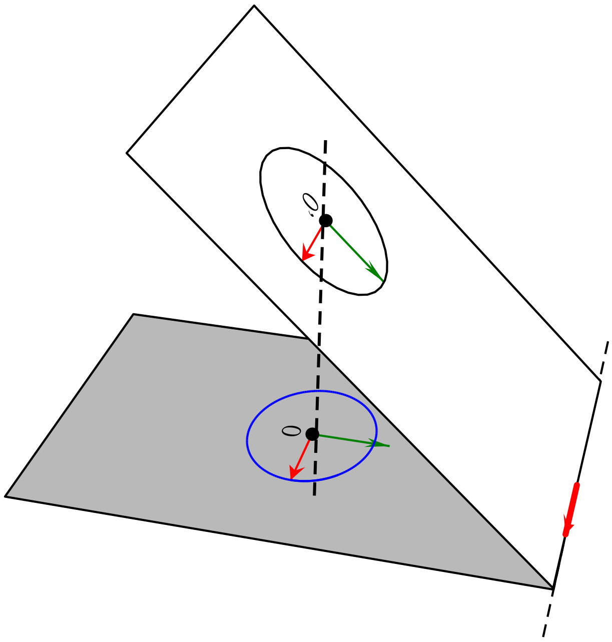
Démonstration

– *Un vecteur tangent à l'ellipse $\mathcal{E}$ en le point M de paramètre t est celui de coordonnées $(-a\sin t, b\cos t)$. Une équation de la tangente $\mathcal{T}_M$ à $\mathcal{E}$ en M est donc :*

$$\begin{vmatrix} -a\sin t & x - a\cos t \\ b\cos t & y - b\sin t \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne : $b\ x\ \cos t + a\ y\ \sin t - ab = 0$.

– *Si (x_0, y_0) sont les coordonnées de M_0, cette équation devient : $\frac{x\ x_0}{a^2} + \frac{y\ y_0}{b^2} - 1 = 0$.*



PROPOSITION 7.12 ♡ **L'image d'un cercle dans l'espace par une projection orthogonale est une ellipse**

L'image d'un cercle $\mathcal{C}$ de l'espace par une projection orthogonale sur un plan $\mathcal{P}$ non perpendiculaire au plan contenant $\mathcal{C}$ est une ellipse de $\mathcal{P}$.

Démonstration *Nommons $\mathcal{P}'$ le plan contenant le cercle $\mathcal{C}$, r le rayon de $\mathcal{C}$, O' son centre et O le projeté orthogonale de O' sur le plan $\mathcal{P}$.*

Si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles alors l'image de $\mathcal{C}$ par la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ est le cercle de même rayon et de centre O.

On suppose que $\mathcal{P}'$ est non parallèle à $\mathcal{P}$. On note alors $\mathcal{D}$ la droite formée par leur intersection et $\alpha \in]0, \pi/2[$ l'angle non orienté entre les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire dirigeant $\mathcal{D}$. Soit $\overrightarrow{j}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ en sorte que $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ soit un repère orthonormal de $\mathcal{P}$. De la même façon, on considère un vecteur $\overrightarrow{j}'$ en sorte que $\mathcal{R}'\left(O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right)$ soit un repère orthonormal de $\mathcal{P}'$. $\theta \in \mathbb{R}$. Par la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$, le point $M' \in \mathcal{P}'$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}'$ se transforme en le point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées $(x, y\cos\alpha)$ dans $\mathcal{R}$.

Si M' est élément de $\mathcal{C}$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et les coordonnées de M' sont alors $(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\alpha)$. Donc M' est élément de l'ellipse de centre O, de demi grand axe r et de demi petit axe $R\cos\alpha$. Réciproquement, on vérifie que si $M(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\alpha)$ est élément de cette ellipse alors c'est le projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$ du point $M'(r\cos\theta, r\sin\theta)$ de $\mathcal{P}'$.

7.4 Étude de l'hyperbole : $1 < e$

On considère dans tout ce paragraphe une hyperbole $\mathcal{H}$ de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e $(e > 1)$.

PROPOSITION 7.13 ♡ **Équation réduite de l'hyperbole**

– Il existe un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans lequel $\mathcal{H}$ a pour équation

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0,\ b > 0}$$

Cette équation est appelée *équation réduite de l'hyperbole $\mathscr{H}$*.

– **Réciproquement** : l'équation $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ avec $a>0,\ b>0$ est l'équation d'une hyperbole de foyer $\boxed{F\begin{vmatrix} c \\ 0\end{vmatrix}}$ avec $\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2}}$, de directrice $\boxed{\mathscr{D}:\ X=\frac{a^2}{c}}$ et d'excentricité $\boxed{e=\frac{c}{a}}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *D'après la proposition 7.2, il existe un repère orthonormal direct $\mathscr{R}\left(F,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ dans lequel une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ est*

$$x^2+y^2=e^2(x+d)^2\ (\star)$$

où $d=d(F,\mathscr{D})$. On a :

$$\begin{aligned}
(\star) &\iff \left(1-e^2\right)x^2-2e^2dx+y^2-e^2d^2=0\\
&\iff \left(e^2-1\right)x^2+2e^2dx-y^2+e^2d^2=0\\
&\iff \left(e^2-1\right)\left(x^2+\frac{2e^2d}{e^2-1}x\right)-y^2+e^2d^2=0\\
&\iff \left(e^2-1\right)\left(\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2-\frac{e^4d^2}{\left(e^2-1\right)^2}\right)-y^2+e^2d^2=0\\
&\iff \left(e^2-1\right)\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2-y^2+e^2d^2-\frac{e^4d^2}{e^2-1}=0\\
&\iff \left(e^2-1\right)\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2-y^2+\frac{e^2d^2\left(e^2-1\right)-e^4d^2}{e^2-1}=0\\
&\iff \left(e^2-1\right)\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2-y^2+e^2d^2\frac{e^2-1-e^2}{e^2-1}=0\\
&\iff \left(e^2-1\right)\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2-y^2-\frac{e^2d^2}{e^2-1}=0\\
&\iff \left(e^2-1\right)^2\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2-\left(e^2-1\right)y^2-e^2d^2=0\\
&\iff \frac{\left(e^2-1\right)^2}{e^2d^2}\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2-\frac{e^2-1}{e^2d^2}y^2-1=0\\
&\iff \left(\frac{e^2-1}{ed}\right)^2\left(x+\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2-\frac{e^2-1}{e^2d^2}y^2-1=0\left(\star'\right)
\end{aligned}$$

Posons alors

$$a=\frac{ed}{e^2-1},\quad b=\frac{ed}{\sqrt{e^2-1}},\quad c=\frac{e^2d}{e^2-1}\quad \text{et}\quad \begin{cases}X=x+c\\ Y=y\end{cases}.$$

Ces quantités sont bien définies car $e>1$. Remarquons que $a>0$ et $b>0$. (X,Y) sont les coordonnées dans un repère $\mathscr{R}'\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ d'un point de coordonnées (x,y) dans le repère $\mathscr{R}\left(F,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ où O est déduit de F par une translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}-c\\0\end{vmatrix}$. Dans ce nouveau repère, $(\star)$ s'écrit alors

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

qui est bien de la forme annoncée. On a par ailleurs bien $a^2+b^2=c^2$, $\frac{c}{a}=e$ et $d=\frac{b^2}{c}$. Dans $\mathscr{R}'$, on a $F\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$. Enfin, une équation de la directrice $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{R}$ étant $x=-d$, une équation de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{R}'$ est $X-c=-d$, soit $X=c-d$. Mais $c-d=\frac{c^2-b^2}{c}=\frac{a^2}{c}$. Une équation de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{R}'$ est donc $X=\frac{a^2}{c}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, soit $\mathscr{H}$ une courbe d'équation $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ dans un repère $\mathscr{R}'\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ avec $a>0$ et $b>0$. Posons*

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\quad e=\frac{c}{a}\quad \text{et}\quad d=\frac{b^2}{c}.$$

Par identification avec l'équation $\left(\star'\right)$, on reconnait l'hyperbole de foyer $F\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$ de directrice $\mathscr{D}:X=\frac{a^2}{c}$ et d'excentricité e.

PROPOSITION 7.14 ♡

Soit $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ un repère orthonormal dans lequel l'hyperbole $\mathscr{H}$ a pour équation $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ avec $a>0,\ b>0$.

a) L'origine O est centre de symétrie de $\mathscr{H}$. C'est le *centre* de l'hyperbole.

b) OX et OY sont axes de symétrie de $\mathscr{H}$. OX est appelé *axe focal* ou *grand axe*. OY est appelé *axe non focal* ou *axe non transverse*.

c) a est appelé *demi-axe focal* ou *demi-grand axe*. b est appelé *demi-axe non focal* ou *demi-petit axe*.

d) Soit $c = \sqrt{a^2+b^2}$. $\mathscr{H}$ admet deux foyers F et F′ de coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $F\begin{vmatrix} c \\ 0 \end{vmatrix}$ et $F'\begin{vmatrix} -c \\ 0 \end{vmatrix}$ de directrice associée d'équation, dans ce même repère, : $\mathscr{D}: X = \frac{a^2}{c}$ et $\mathscr{D}': X = -\frac{a^2}{c}$.

e) L'hyperbole $\mathscr{H}$ coupe le grand axe en deux points A et A′ appelés les *sommets* de $\mathscr{H}\cdot$ On a $A\begin{vmatrix} a \\ 0 \end{vmatrix}$ et $A'\begin{vmatrix} -a \\ 0 \end{vmatrix}$

PROPOSITION 7.15 ♡ **Paramétrage de l'hyperbole**

On peut paramétrer l'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$, $b > 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par

$$\begin{cases} x(t) = \varepsilon a \operatorname{ch} t \\ y(t) = b \operatorname{sh} t \end{cases} : t \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1$$

Démonstration *Soit* $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *le repère construit dans la proposition précédente. Dans ce repère une équation de* $\mathscr{H}$ *est* $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. *Soit* $M\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$ *un point du plan. On a équivalence entre :*

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{H} &\iff \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R},\quad Y = b \operatorname{sh} t \quad \text{et} \quad X = \pm a \operatorname{ch} t \end{aligned}$$

Remarque 7.7 Remarquons que l'hyperbole possède des branches infinies.

PROPOSITION 7.16 ♡ **Asymptotes à l'hyperbole**

Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$, $b > 0$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\mathscr{H}$ admet deux asymptotes : $\boxed{\delta: bX - aY = 0}$ et $\boxed{\delta': bX + aY = 0}$.

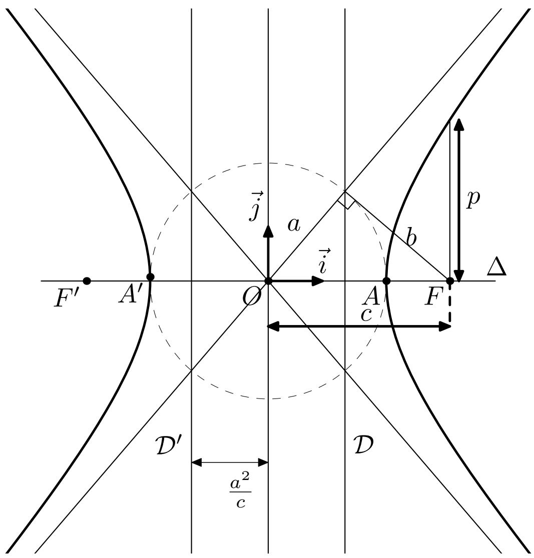
Démonstration *Nous allons nous limiter à la branche correspondant à* $\varepsilon = 1$ *et montrer que cette branche admet les deux asymptotes indiquées. Par symétrie d'axe* (Oy), *on en déduira que la branche de l'hyperbole correspondant à* $\varepsilon = -1$ *admet aussi ces deux droites comme asymptotes. Commençons par l'étude de la branche infinie quand* t *tend vers* $+\infty$. *On a :*

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b \operatorname{sh} t}{a \operatorname{ch} t} = \frac{b}{a} \operatorname{th} t \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{b}{a}$$

De plus :

$$y(t) - \frac{b}{a} x(t) = b(\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t) = -be^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent, la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$, *soit* $bx - ay = 0$ *est asymptote à l'hyperbole. De plus :* $y(t) - \frac{b}{a}x(t) = -be^{-t} < 0$. *La courbe est donc en dessous de l'asymptote. On fait de même pour l'asymptote à la branche infinie quand* t *tend vers* $-\infty$. *On peut aussi utiliser la symétrie de l'hyperbole par rapport à l'axe* (Ox) *et déduire ainsi la seconde asymptote de la première.*



PLAN 7.2 : Pour construire une hyperbole

1. *On trace ses axes focal et demi-focal.*
2. *On place le centre* O *de l'hyperbole puis ses deux sommets* A *et* A′.
3. *On trace le cercle de centre* O *et de rayon* a .
4. *On trace les asymptotes.*
5. *Pour une de ces deux asymptotes, on considère son intersection avec le cercle. Elle est formée de deux points* P *et* P′.
6. *On trace les perpendiculaires à l'asymptote passant par chacun de ces deux points.*
7. *L'intersection de chacune de ces deux perpendiculaires avec l'axe focal est constituée des deux foyers de l'hyperbole.*
8. *Les directrices de l'hyperbole sont les droites perpendiculaires à l'axe focal et passant par* P *et* P′.

7.5 Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole

PROPOSITION 7.17 ♡ **Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole**

Soient a et c deux réels strictement positifs, F et F′ deux points du plan tels que $\left\|\overrightarrow{FF'}\right\| = 2c$.

1. Si $a > c$, l'ensemble des points du plan tels que

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = 2a}$$

est l'ellipse de foyers F et F′ et de demi-grand axe a

2. Si $a < c$, l'ensemble des points du plan tels que

$$\boxed{\left|\left\|\overrightarrow{MF}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF'}\right\|\right| = 2a}$$

est l'hyperbole de foyers F et F′ et de demi-axe focal a.

Démonstration *Introduisons le point* O *milieu de* $[F,F']$ *et* $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OF}/\left\|\overrightarrow{OF}\right\|$. *Soit* $\overrightarrow{j}$ *un vecteur unitaire directement orthogonal à* $\overrightarrow{i}$. *On forme ainsi un repère orthonormal direct* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. *Dans ce repère, on a* $F(c,0)$, $F'(-c,0)$. *Soit* $M\left(x,y\right)$ *un point de plan. On calcule* $MF^2 = (x-c)^2 + y^2$ *et* $MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$ *et il s'ensuit que*

$$MF^2.MF'^2 = \left((x-c)^2+y^2\right)\left((x+c)^2+y^2\right) = \left(x^2+y^2+c^2-2cx\right)\left(x^2+y^2+c^2+2cx\right) = \left(x^2+y^2+c^2\right)^2 - 4c^2x^2$$

et que

$$MF^2 + MF'^2 = (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 = 2\left(x^2+y^2+c^2\right).$$

1. *On a alors les équivalences :*

$$\begin{aligned}
& MF + MF' = 2a \\
\iff\ & MF^2 + MF'^2 + 2MF.MF' = 4a^2 \\
\iff\ & 2MF.MF' = 4a^2 - \left(MF^2 + MF'^2\right) \\
\iff\ & 4MF^2.MF'^2 = \left(4a^2 - \left(MF^2+MF'^2\right)\right)^2 \\
\iff\ & \left(x^2+y^2+c^2\right)^2 - 4c^2x^2 = \left(2a^2 - \left(x^2+y^2+c^2\right)\right)^2 \\
\iff\ & \left(a^2-c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2-c^2\right) \\
\iff\ & b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
\iff\ & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

où $b^2 = a^2 - c^2$ *est bien défini car* $a > c$. *Donc on a* $MF + MF' = 2a$ *si et seulement si* M *est élément de l'ellipse de centre* O, *de demi-grand axe* a *et de demi-petit axe* b.

2. *On a les équivalences :*

$$\begin{aligned}
& \left|\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'\right| = 2a \\
\iff & \mathrm{MF}^2+\mathrm{MF}'^2-2\mathrm{MF}.\mathrm{MF}' = 4a^2 \\
\iff & 2\mathrm{MF}.\mathrm{MF}' = \left(\mathrm{MF}^2+\mathrm{MF}'^2\right)-4a^2 \\
\iff & 4\mathrm{MF}^2.\mathrm{MF}'^2 = \left(\left(\mathrm{MF}^2+\mathrm{MF}'^2\right)-4a^2\right)^2 \\
\iff & \left(x^2+y^2+c^2\right)^2-4c^2x^2 = \left(\left(x^2+y^2+c^2\right)-2a^2\right)^2 \\
\iff & \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 = a^2\left(a^2-c^2\right) \\
\iff & \left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2 = a^2\left(c^2-a^2\right) \\
\iff & b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2 \\
\iff & \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

où $b^2=c^2-a^2$ est bien défini car $a<c$. Donc on a $\left|\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'\right|=2a$ si et seulement si M est élément de l'hyperbole de centre O, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b.

Application : Comment dessiner une ellipse avec un crayon et une ficelle.

7.6 Courbes algébriques dans le plan

Le plan est rapporté dans tout ce paragraphe à un repère orthonormal direct $\mathscr{R}\left(\mathrm{O},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. On s'intéresse ici à l'ensemble $\mathscr{C}$ des points du plan dont une équation cartésienne est :

$$\mathrm{P}\left(x,y\right) = ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

où $\left(a,b,c,d,e,f\right)\in\mathbb{R}^6$ et où les réels a, b et c ne sont pas tous nuls (sinon $\mathscr{C}$ est une droite affine du plan).

DÉFINITION 7.5 ♡
On appelle discriminant de la courbe du second degré :

$$\mathscr{C}\ : ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

le réel, noté Δ et donné par : $\Delta = ac-b^2$.

LEMME 7.18 ♡ **Élimination du terme en xy**
Il existe une rotation de centre O et d'angle $\theta\in\mathbb{R}$ telle que dans le repère $\mathscr{R}'\left(\mathrm{O},\overrightarrow{i}',\overrightarrow{j}'\right)$ déduit du repère $\mathscr{R}$ par cette rotation, l'équation de $\mathscr{C}$ devient :

$$\mathscr{C}\ : \mathrm{AX}^2+\mathrm{CY}^2+\mathrm{DX}+\mathrm{EY}+\mathrm{F}=0.$$

De plus $\Delta = ac-b^2 = \mathrm{AC}$ (et $\mathrm{F}=f$).

Démonstration *On utilise les formules de changement de repère de la proposition 2.5 page 68 :*

$$\begin{cases} x &= \cos\theta\mathrm{X}-\sin\theta\mathrm{Y} \\ y &= \sin\theta\mathrm{X}+\cos\theta\mathrm{Y}\end{cases}$$

où θ est un réel à déterminer. On a :

$$\begin{aligned}
& ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\
\iff & \left(a\cos^2\theta+c\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{X}^2+\left(a\sin^2\theta+c\cos^2\theta-2b\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{Y}^2+ \\
& \left(2\left(c-a\right)\sin\theta\cos\theta+2b\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\right)\mathrm{XY}+\left(d\cos\theta+e\sin\theta\right)\mathrm{X}+\left(e\cos\theta-d\sin\theta\right)\mathrm{Y}+f=0
\end{aligned}$$

On cherche θ en sorte que $2\left(c-a\right)\sin\theta\cos\theta+2b\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=0$ ce qui s'écrit aussi $\left(c-a\right)\sin2\theta+2b\cos2\theta=0$.

- *Si $a=c$ alors on peut prendre $\theta=\pi/4$.*
- *Si $a\neq c$ alors on peut prendre $\theta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2b}{a-c}\right)$.*

Dans le nouveau repère, l'équation de $\mathscr{C}$ est bien de la forme annoncée avec $A = a\cos^2\theta + c\sin^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta$, $C = a\sin^2\theta + c\cos^2\theta - 2b\sin\theta\cos\theta$, $D = d\cos\theta + e\sin\theta$, $E = e\cos\theta - d\sin\theta$ *et* $F = f$.
On remarque que $A + C = a + c$, *que* $A - C = (a-c)\cos 2\theta + 2b\sin 2\theta$ *et que* $AC = 1/4\left((A+C)^2 - (A-C)^2\right)$.
Si $a = 0$ *et donc* $\theta = \pi/4$, *on vérifie facilement que* $ac - b^2 = AC$. *Sinon, si* $\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2b}{a-c}\right)$, *alors* $\tan 2\theta = 2b/(a-c)$ *et*

$$\cos^2 2\theta = \frac{1}{1+\tan^2 2\theta} = \frac{(a-c)^2}{(a-c)^2+4b^2}$$

donc

$$A - C = (a-c)\cos 2\theta\left(1 + \frac{2b}{a-c}\tan 2\theta\right) = (a-c)\cos 2\theta\left(1+\tan^2\theta\right) = \frac{a-c}{\cos 2\theta}$$

et $(A-C)^2 = (a-c)^2 + 4b^2$.
Donc

$$AC = \frac{1}{4}\left((A+C)^2 - (A-C)^2\right) = \frac{1}{4}\left((a+c)^2 - (a-c)^2\right) - b^2 = ac - b^2.$$

LEMME 7.19 ♡ **Élimination des termes linéaires**
Si $\Delta \neq 0$ alors il existe un repère orthonormal $\mathscr{R}''\left(\Omega, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right)$ déduit de $\mathscr{R}'$ par une translation dans lequel une équation de $\mathscr{C}$ est :

$$Au^2 + Cv^2 = F'$$

où $F' \in \mathbb{R}$.

Démonstration *Le repère $\mathscr{R}''$ est déduit du repère $\mathscr{R}'$ par une translation de vecteur $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. On a donc les formules de changement de repère :*

$$\begin{cases} X &= u + \alpha \\ Y &= v + \beta \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} & AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0 \\ \iff \quad & Au^2 + Cv^2 + (2A\alpha + D)\,u + (2C\beta + E)\,v + A\alpha^2 + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0 \end{aligned}$$

On cherche (α,β) en sorte que

$$\begin{cases} 2A\alpha + D &= 0 \\ 2C\beta + E &= 0 \end{cases}.$$

Comme $\Delta = AC \neq 0$, ce système admet comme solutions $\alpha = -D/(2A)$ et $\beta = -E/(2C)$. On en déduit F'' en remplaçant α et β par ces valeurs dans $A\alpha^2 + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F$. Dans ce nouveau repère, l'équation de $\mathscr{C}$ est bien de la forme annoncée.

On en déduit le théorème de classification des courbes du second degré, dû à Descartes (voir 2.2.1 page 67).

THÉORÈME 7.20 ♡♡ **Classification des courbes du second degré**
On considère une courbe du second degré d'équation :

$$\mathscr{C} : \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dans un repère orthonormal. On note $\Delta = ac - b^2$ son discriminant.
– Si $\Delta > 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.
– Si $\Delta < 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.
– Si $\Delta = 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.

Démonstration *D'après le lemme 7.18, on peut trouver un repère dans lequel une équation de $\mathscr{C}$ est $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$ où $A, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ et où $\Delta = ac - b^2 = AC$.*

1. *Si $\Delta = 0$ alors $A = 0$ ou $C = 0$.*
   (a) *Si $A = 0$ et $C \neq 0$ alors $\mathscr{C} : CY^2 + DX + EY + F = 0$ qui s'écrit aussi $\mathscr{C} : C(Y + E/(2C))^2 + DX + F - E^2/(4C) = 0$.*
      i. *Si $D \neq 0$ alors en posant $Y' = Y + \frac{E}{2C}$ et $X' = -\frac{1}{2C}\left(X + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4CD}\right)$ on obtient : $\mathscr{C} : Y'^2 - 2DX' = 0$ et on reconnaît une parabole.*
      ii. *Si $D = 0$, alors en effectuant le même travail, on montre qu'une équation de $\mathscr{C}$ dans un repère convenablement choisi est de la forme $Y'^2 + F' = 0$. Si $F' > 0$, $\mathscr{C}$ est l'ensemble vide, si $F' = 0$, $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $Y' = 0$ et enfin si $F' < 0$, $\mathscr{C}$ est la réunion des droites parallèles d'équations $Y' = \sqrt{-F'}$ et $Y' = -\sqrt{-F'}$.*
   (b) *Si $A \neq 0$ et $C = 0$ alors $\mathscr{C} : AX^2 + DX + EY + F = 0$, on retrouve les mêmes résultats que dans le cas précédent .*
   (c) *Si $A = 0$ et $C = 0$ alors la courbe n'est plus du second degré.*
2. *Si $\Delta \neq 0$, on sait d'après le lemme 2 que dans un bon repère, $\mathscr{C} : AX'^2 + CY'^2 = F'$ avec $A, C, F' \in \mathbb{R}$ et $\Delta = AC$.*

(a) *Si* $\Delta > 0$*, alors* A *et* C *sont de même signe et on peut écrire l'équation de* $\mathscr{C}$ *sous la forme :* $\frac{X'^2}{A'^2} + \frac{Y'^2}{C'^2} = \varepsilon$ *avec* $\varepsilon = 0, 1$ *ou* -1 *et* $A', C' > 0$*. Si* $\varepsilon = 0$ *alors* $\mathscr{C}$ *est réduit à un point. Si* $\varepsilon = -1$ *alors* $\mathscr{C}$ *est vide. Enfin, si* $\varepsilon = 1$ *alors* $\mathscr{C}$ *est une ellipse.*

(b) *Si* $\Delta < 0$*, alors* A *et* C *sont de signe contraire et on peut écrire l'équation de* $\mathscr{C}$ *sous la forme :* $\frac{X'^2}{A'^2} - \frac{Y'^2}{C'^2} = \varepsilon$ *avec* $\varepsilon = 0, 1$ *ou* -1 *et* $A', B' > 0$*. Si* $\varepsilon = 0$ *alors l'équation s'écrit :* $\left(\frac{X}{A'} - \frac{Y}{C'}\right)\left(\frac{X}{A'} + \frac{Y}{C'}\right) = 0$ *et* $\mathscr{C}$ *est la réunion de deux droites sécantes. Si* $\varepsilon = \pm 1$*,* $\mathscr{C}$ *est une hyperbole.*

Remarque 7.8 Ce théorème fournit un algorithme pour déterminer la nature d'une courbe

$$\mathscr{C} : \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

et préciser son équation réduite.

1. Calculer le discriminant $\Delta = ac - b^2$ et $T = a + c$. Selon le signe de Δ, on peut, sans calcul, préciser le type de la courbe.
2. (a) Si $\Delta \neq 0$, par un changement du centre du repère défini par les formules :

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

   on se débarrasse des termes linéaires en x et y pour aboutir à une équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = F$$

   Le centre du nouveau repère est, dans $\mathscr{R}$, $\Omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$.

   (b) On sait qu'on peut, par rotation des axes, se placer dans un repère orthonormé de même centre Ω où l'équation devient :

$$Ax^2 + Cy^2 = F$$

   (c) On connaît la somme et le produit de A et de C :

$$\begin{cases} A + C & = a + c \\ AC & = ac - b^2 \end{cases}.$$

   Ils sont par conséquent racines d'un trinôme du second degré.

   (d) Ayant déterminé A et C, on peut écrire l'équation réduite de la conique et discuter de sa nature en fonction du signe de F.

   (e) Si l'on veut avoir toutes les informations, il faut déterminer l'angle θ de rotation choisi pour annuler le terme xy.
3. Si $\Delta = 0$, on peut, par rotation des axes, se placer dans un repère orthonormé de même centre où l'équation devient :

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = F$$

   avec $A = 0$ ou $B = 0$. On sait alors qu'après une translation, on peut facilement identifier $\mathscr{C}$.

Exemple 7.2 Réduire la conique $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 16x - 9 = 0$.

1. Son discriminant vaut -8 donc $\mathscr{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.
2. On effectue le changement de repère $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$. On obtient :

$$X^2 + 6XY + Y^2 + (6\beta + 2\alpha + 16)X + (2\beta + 6\alpha)Y - 9 + \beta^2 + \alpha^2 + 16\alpha + 6\alpha\beta = 0.$$

   On se débarrasse des termes linéaires si

$$\begin{cases} 6\beta + 2\alpha + 16 & = 0 \\ 2\beta + 6\alpha = 0 \end{cases}$$

   c'est à dire si $\alpha = 1$ et $\beta = -3$ ce qui nous donne $\boxed{\Omega(1, -3)}$ Dans ce nouveau repère, l'équation de $\mathscr{C}$ devient : $X^2 + 6XY + Y^2 - 1 = 0$.

3 On sait que par rotation des axes on peut se placer dans un repère orthonormé de même centre Ω où l'équation devient :

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}y^2 = 1.$$

On sait que $\mathrm{AC} = \Delta = -8$ et que $\mathrm{A}+\mathrm{C} = a+c = 2$. Ils sont donc racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 8$ et on trouve $\mathrm{A} = 4$ et $\mathrm{C} = -2$ ou $\mathrm{A} = -2$ et $\mathrm{C} = 4$. On obtient alors dans le nouveau repère pour $\mathscr{C}$ une des deux équations $4x^2 - 2y^2 = 1$ ou $-2x^2 + 4y^2 = 1$. Ces deux équations sont obtenues dans deux repères différents, l'un étant déduit de l'autre par une rotation d'angle $\pi/2$. On reconnaît une hyperbole de demi-axes $1/2$ et $\sqrt{2}/2$ et de centre $\Omega\,(1,-3)$.

Pour mieux faire, il faut déterminer complètement la rotation. En partant de l'équation $\mathrm{X}^2 + 6\mathrm{XY} + \mathrm{Y}^2 - 1 = 0$, on effectue le changement de repère

$$\begin{cases} \mathrm{X} &= \cos(\theta)\,x - \sin(\theta)\,y \\ \mathrm{Y} &= \sin(\theta)\,x + \cos(\theta)\,y \end{cases}$$

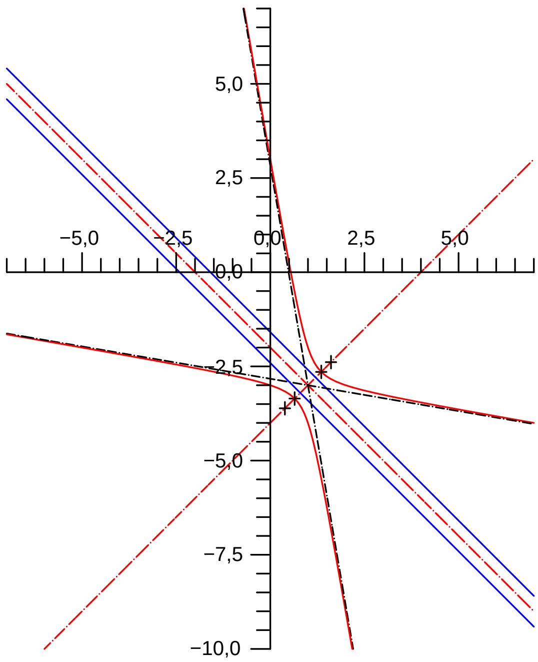
et on obtient :

$$\left(6\sin(\theta)\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)x^2 + 6\left(\cos^2(\theta) - \sin(\theta)^2\right)xy + \left(\cos^2(\theta) - 6\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin^2(\theta)\right)y^2 = 1$$

ou encore

$$(3\sin(2\theta) + 1)\,x^2 + 6\cos(2\theta)\,xy + (1 - 3\sin(2\theta))\,y^2 = 1.$$

Pour supprimer les termes linéaires, il suffit de prendre $\theta = \pi/4$ et on obtient dans le nouveau repère $\mathscr{C}$: $4x^2 - 2y^2 = 1$. On sait donc que $a = 1/2$, $b = \sqrt{2}/2$ et $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}/2$. On en déduit que $e = c/a = \sqrt{3}$. De plus, les équations des directrices dans le repère final sont $x = \sqrt{3}/6$ et $x = -\sqrt{3}/6$. Les coordonnées des foyers sont $\left(\sqrt{3}/2, 0\right)$ et $\left(-\sqrt{3}/2, 0\right)$. On peut alors facilement représenter $\mathscr{C}$.



Remarque 7.9 Pour le tracé final, on peut s'aider des méthodes 15 page 277 et 16 page 281.

7.7 Exercices

7.7.1 En général

Exercice 7.1 ♡

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan $\mathscr{P}$ et F un point du plan non situé sur $\mathscr{D}$. Montrer que par tout point M du plan non situé sur $\mathscr{D} \cup \{\mathrm{F}\}$ passe une et une seule conique $\mathscr{C}$ de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.

Solution : *On a $d(\mathrm{M}, \mathscr{D}) > 0$ car $\mathrm{M} \notin \mathscr{D}$ et $d(\mathrm{M}, \mathrm{F}) > 0$ car $\mathrm{M} \neq \mathrm{F}$. Par conséquent $e = \dfrac{d(\mathrm{M}, \mathrm{F})}{d(\mathrm{M}, \mathscr{D})}$ est un réel positif non nul. Par construction, la conique de directrice $\mathscr{D}$, de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$ passe par M.*

Exercice 7.2 ♡♡

On considère un cône de révolution de sommet S, d'axe $\mathscr{D}$ et on note $\alpha \in]0, \pi/2[$ une mesure de l'angle entre cet axe et une génératrice du cône. On va étudier l'intersection entre ce cône et un plan $\mathscr{P}$ de l'espace.

1. *Dans un repère orthonormal direct de l'espace fixé, déterminer une équation cartésienne du cône.*
2. *En choisit un repère orthonormal direct de l'espace en sorte qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ soit $z = 0$. Écrire une équation cartésienne de l'intersection $\mathscr{I}$ du cône et du plan et reconnaître l'équation algébrique d'une courbe du plan de degré 2.*
3. *On note $\beta \in]0, \pi/2[$ l'angle entre le plan $\mathscr{P}$ et l'axe $\mathscr{D}$ du cône. Montrer que $\cos^2 \beta = a^2 + b^2$.*
4. *Conclure en comparant α et β.*

Solution :

1. *On note $\overrightarrow{u}\,(a, b, c)$ un vecteur directeur unitaire de $\mathscr{D}$. Un point M est élément du cône si et seulement si l'angle non orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{SM}}\right)$ est égal) α ou $\pi - \alpha$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{SM}}.\overrightarrow{u} = \pm \left\|\overrightarrow{\mathrm{SM}}\right\| \cos\alpha$ ce qui amène l'équation cartésienne :*

$$\left(a(x - x_{\mathrm{S}}) + b\left(y - y_{\mathrm{S}}\right) + c(z - z_{\mathrm{S}})\right)^2 = \left((x - x_{\mathrm{S}})^2 + \left(y - y_{\mathrm{S}}\right)^2 + (z - z_{\mathrm{S}})^2\right) \cos^2 \alpha$$

   où $\mathrm{S}\left(x_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{S}}, z_{\mathrm{S}}\right)$ et $\mathrm{M}\left(x, y, z\right)$.

2. *Avec $z = 0$, l'équation précédente devient :*

$$\left(a(x - x_{\mathrm{S}}) + b\left(y - y_{\mathrm{S}}\right) - c z_{\mathrm{S}}\right)^2 = \left((x - s_{\mathrm{S}})^2 + \left(y - y_{\mathrm{S}}\right)^2 + z_{\mathrm{S}}^2\right) \cos^2 \alpha$$

   et en développant, on trouve une expression de la forme :

$$\left(a^2 - \cos^2 \alpha\right) x^2 + 2abxy + \left(b^2 - \cos^2 \alpha\right) y^2 + dx + ey + f = 0$$

   où $d, e, f \in \mathbb{R}$. On reconnaît l'équation d'une courbe algébrique du plan de degré 2.

3. *Notons $\overrightarrow{u_0}$ le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{u}$ sur le plan $\mathscr{P}$. Comme $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$, les coordonnées de $\overrightarrow{u_0}$ sont $(a, b, 0)$. Mais $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u_0} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{u_0}\| \cos\beta$ et il vient $a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\beta$ d'où l'égalité.*

4. *On calcule le discriminant de cette équation :*

$$\Delta = \left(a^2 - \cos^2 \alpha\right)\left(b^2 - \cos^2 \alpha\right) - a^2 b^2 = \cos^2 \alpha \left(\cos^2 \alpha - \left(a^2 + b^2\right)\right) = \cos^2 \alpha \left(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta\right).$$

   Comme α et β sont compris entre 0 et $\pi/2$, le signe de Δ est donné par $\cos\alpha - \cos\beta$.
   - *Si $\alpha < \beta$ alors $\mathscr{I}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide. .*
   - *Si $\alpha = \beta$ alors $\mathscr{I}$ est une une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.*
   - *Si $\alpha > \beta$ alors $\mathscr{I}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.*

7.7.2 Paraboles

Exercice 7.3 ♡

On considère une parabole. Montrer que les rayons parallèles à l'axe réfléchis sur la parabole passent par le foyer.

Application : *Le fonctionnement du miroir d'un télescope de Newton est basé sur la propriété de la parabole prouvée dans la question 3. de cet exercice.*

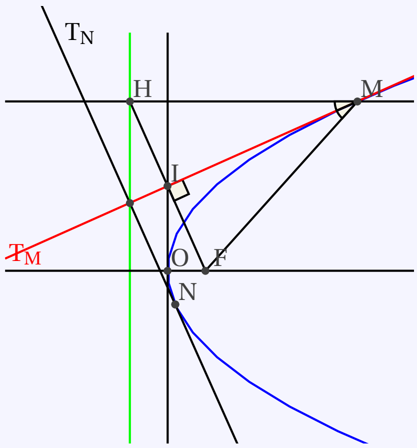
Solution : En paramétrant la parabole $M(t)\left|\begin{matrix} t^2/2p \\ t \end{matrix}\right.$, un vecteur normal en $M(t)$ est $\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix} -1 \\ t/p \end{matrix}\right.$. Calculons $\overrightarrow{FM(t)}\left|\begin{matrix} (t^2-p^2)/2p \\ t \end{matrix}\right.$ et $\|\overrightarrow{FM(t)}\| = \dfrac{t^2+p^2}{2p}$. On calcule alors $\dfrac{\overrightarrow{FM(t)}}{\|\overrightarrow{FM(t)}\|}.\overrightarrow{n} = 1$ et en posant $\overrightarrow{h}\left|\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{h}.\overrightarrow{n} = 1$ ce qui montre que la droite (FM) et la droite horizontale passant par M sont symétriques par rapport à la normale en M.

Exercice 7.4 ♡

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de paramètre $p > 0$ et de directrice $\mathscr{D}$. Soient M un point de $\mathscr{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$. Montrer que :

1. *La tangente $\mathscr{T}_M$ à $\mathscr{P}$ en M coupe la tangente au sommet de $\mathscr{P}$ en I, milieu du segment $[FH]$.*
2. *La tangente $\mathscr{T}_M$ à $\mathscr{P}$ en M est la bissectrice principale du triangle isocèle FMH.*
3. *Le projeté orthogonal du foyer de $\mathscr{P}$ sur les tangentes à $\mathscr{P}$ décrit la tangente au sommet.*
4. *Deux tangentes à $\mathscr{P}$ perpendiculaires se coupent sur la directrice $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$.*

Solution :



1. *D'après le cours, la tangente $\mathscr{T}_S$ à la parabole en son sommet admet pour équation cartésienne : $x = 0$ et $\mathscr{T}_{M_0}$: $x - t_0 y + p\frac{t_0^2}{2} = 0$. Ces deux droites se coupent en le point de coordonnées $\left(0, \frac{pt_0}{2}\right)$ qui est bien le milieu I du segment $[FH]$.*
2. *Comme le triangle FMH est isocèle, la bissectrice principale de l'angle $\widehat{HMF}$ est aussi la médiane issue de M. Or, on vient de prouver que la droite passant par M et par le milieu de $[FK]$ est la tangente en M à $\mathscr{P}$.*
3. *La droite (MI) est aussi la hauteur du triangle FMH issue de M. Par conséquent, les droites (FH) et $\mathscr{T}_M$ sont perpendiculaires en I. Le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{T}_M$ est donc I. Il est clair que le point I, ses coordonnées étant $\left(0, \frac{pt_0}{2}\right)$ est élément de la tangente au sommet.*
4. *Soient $\mathscr{T}_M : x - ty + p\frac{t^2}{2} = 0$ et $\mathscr{T}_{M'} : x - t'y + p\frac{t'^2}{2} = 0$ deux tangentes à $\mathscr{T}$ en les points M de paramètre t et M' de paramètre t'. Ces deux droites se coupent en le point de coordonnées $\left(ptt'/2, p\left(t+t'\right)/2\right)$ et sont orthogonales si et seulement si $1 + tt' = 0$. Si c'est le cas, les coordonnées de leur point d'intersection s'écrivent $\left(-p/2, p\left(t - 1/t\right)/2\right)$. Ce point est bien un point de la directrice $\mathscr{D}$ car une équation cartésienne de cette dernière est $x = -p/2$.*

Exercice 7.5 ♡♡

On considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et un point $A\left|\begin{matrix} a^2/2p \\ a \end{matrix}\right.$ de cette parabole. On considère deux points distincts de la parabole $M\left|\begin{matrix} m^2/2p \\ m \end{matrix}\right.$ et $N\left|\begin{matrix} n^2/2p \\ n \end{matrix}\right.$. On note $\alpha = m + n$ et $\beta = mn$.

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les droites (AM) et (AN) soient orthogonales.*
2. *Montrer que lorsque M, N varient sur la parabole, (avec la condition d'orthogonalité précédente), la droite (MN) passe par un point fixe Q à déterminer.*
3. *À chaque point A de la parabole on peut donc associer le point Q. Déterminer le lieu de Q lorsque A varie.*

Solution :

1. En traduisant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$, on trouve que $(m+a)(n+a)+4p^2 = 0$ c'est-à-dire $\boxed{\beta + a\alpha + a^2 + 4p^2 = 0}$.
2. L'équation cartésienne de la droite (MN) est :

$$2px - \alpha y + \beta = 0$$

et en utilisant la condition d'orthogonalité, cette équation devient $\alpha(y+a) - 2px + a^2 + 4p^2 = 0$. on voit donc que cette droite passe par le point fixe . $\boxed{Q \left| \begin{array}{l} \dfrac{a^2+4p^2}{2p} \\ -a \end{array} \right.}$.

3. En éliminant le paramètre a, on voit que le point Q se déplace sur la parabole d'équation $\boxed{y^2 = 2p(x-2p)}$. c'est-à-dire la parabole initiale translatée du vecteur $2p\,\vec{i}$.

Exercice 7.6 ♡♡

On considère une parabole d'équation cartésienne

$$\mathscr{P} : \ 2px = y^2$$

1. Soient deux points distincts $M\left| \begin{array}{l} t^2/2p \\ t \end{array} \right.$ et $N\left| \begin{array}{l} t'^2/2p \\ t' \end{array} \right.$ de la parabole. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la droite (MN) soit normale à la parabole en M.
2. Déterminer la longueur minimale des cordes (MN) vérifiant cette condition.

Solution :

1. Le vecteur $\vec{t}\left| \begin{array}{l} t/p \\ 1 \end{array} \right.$ dirige la tangente en M. En écrivant $\overrightarrow{MN}.\vec{t} = 0$, on trouve que $\boxed{t(t+t')+2p^2 = 0}$.

2. On calcule

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = (t'-t)^2\left[1 + \frac{(t'+t)^2}{4p^2}\right]$$

Mais en utilisant que

$$t+t' = -\frac{2p^2}{t} \text{ et } t'-t = t'+t-2t = -\frac{2}{t}(p^2+t^2)$$

on exprime

$$d(M,N)^2 = \frac{4}{t^4}(p^2+t^2)^3$$

et en étudiant cette fonction, $f'(t) = \dfrac{8(p^2+t^2)^2}{t^5}(t^2-2p^2)$, on en déduit ses variations. Elle admet un minimum en $t = \sqrt{2}p$ et finalement, la distance minimale vaut $\boxed{3\sqrt{3}p}$.

7.7.3 Ellipses

Exercice 7.7 ♡

On considère une ellipse de grand axe (AA'). Soit M_0 un point de l'ellipse. La tangente en M_0 coupe les tangentes en A et A' aux points P et P'. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{A'P'}$ est constant.

Solution : L'ellipse dans un bon repère orthonormé a pour équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et $A\left| \begin{array}{l} -a \\ 0 \end{array} \right.$, $A'\left| \begin{array}{l} a \\ 0 \end{array} \right.$. Si $M_0\left| \begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \end{array} \right.$, l'équation cartésienne de la tangente en M_0 est

$$T_{M_0} : \ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

On trouve alors (il faut que $M_0 \neq A, A'$*)* $P\left|\begin{matrix} -a \\ \dfrac{b^2}{y_0}\left(1+\dfrac{x_0}{a}\right)\end{matrix}\right.$, $P'\left|\begin{matrix} a \\ \dfrac{b^2}{y_0}\left(1-\dfrac{x_0}{a}\right)\end{matrix}\right.$ *et il s'ensuit* $\boxed{\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{A'P'} = b^2}$.

Exercice 7.8 ♡♡

On considère un point P *d'une ellipse de centre* O*. On lui associe un point* M *tel que la tangente en* M *à l'ellipse soit parallèle à la droite* (OP)*.*

1. *Montrer que l'aire du triangle* OPM *est constante et la calculer.*
2. *Montrer que* $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2$ *est constante.*

Solution :

1. *On rapporte le plan à un repère orthonormal dans lequel l'ellipse est paramétrée par :* $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$ *avec* $t \in [0,2\pi]$ *et* $0 < b < a$*. La tangente à l'ellipse au point* M_0 *de paramètre* $T_0 \in [0,2\pi]$ *admet comme équation cartésienne :* $b\cos T_0 x + a\sin T_0 y - ab = 0$*. On suppose que* P *est le point de paramètre* $t_0 \in [0,2\pi]$*. Un vecteur tangent* $\overrightarrow{v}$ *à l'ellipse au point* M *de paramètre* $t \in [0,2\pi]$ *est donné par :* $\overrightarrow{v}\left|\begin{matrix} -a\sin t \\ b\cos t\end{matrix}\right.$*. Les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OP}$ *sont :* $\left|\begin{matrix} a\cos t_0 \\ b\sin t_0\end{matrix}\right.$*. Le vecteur* $\overrightarrow{v}$ *est colinéaire au vecteur* $\overrightarrow{OP}$ *si et seulement si :* $\det\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{v}\right) = 0$*, c'est-à-dire si et seulement si :* $\cos t \cos t_0 + \sin t \sin t_0 = 0$*, ce qui s'écrit encore :* $\cos(t - t_0) = 0$ *et équivaut à* $t = t_0 + \frac{\pi}{2}$ *ou* $t = t_0 - \frac{\pi}{2}$*. Les coordonnées du point* P *sont donc :* $\boxed{\left|\begin{matrix} -a\sin t_0 \\ b\cos t_0\end{matrix}\right.}$ *ou* $\boxed{\left|\begin{matrix} a\sin t_0 \\ -b\cos t_0\end{matrix}\right.}$*. Dans le premier cas, l'aire du triangle* OPM *est :*

$$\frac{\left|\det\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}\right)\right|}{2} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ b\sin t_0 & b\cos t_0\end{vmatrix}\right| = \boxed{\frac{ab}{2}}$$

   Dans le second cas, l'aire est identique. Cette dernière est donc bien constante.

2. *En appliquant les résultats précédents :*

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 = \boxed{a^2 + b^2}$$

   Cette somme est bien constante.

Exercice 7.9 ♡♡

On considère l'ellipse d'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

À un point M *de l'ellipse différent des sommets, on fait correspondre le point* M′ *symétrique par rapport à l'axe* (Ox)*. On note* P *le point d'intersection de la droite* (OM′) *avec la normale à l'ellipse en* M*. Déterminer le lieu du point* P *lorsque* M *décrit l'ellipse.*

Solution : *En paramétrant l'ellipse,* $M\left|\begin{matrix} a\cos t \\ b\sin t\end{matrix}\right.$*, le vecteur* $\overrightarrow{t}\left|\begin{matrix} -a\sin t \\ b\cos t\end{matrix}\right.$ *est tangent en* M *à l'ellipse et le vecteur* $\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix} b\cos t \\ a\sin t\end{matrix}\right.$ *est donc normal. Une équation cartésienne de la droite* (OM′) *est :*

$$b\sin t x + a\cos t y = 0$$

Puisque le point P *est sur la normale,* $P = M + \lambda\overrightarrow{n}$ *et puisque* $P \in (OM')$*, on trouve que* $\lambda = -\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ *et enfin*

$$\boxed{\begin{cases} x_P &= \dfrac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\cos t \\ y_P &= -\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\sin t \end{cases}}$$

On en déduit que le point P *décrit l'ellipse homothétique (privée de ses sommets) de l'ellipse initiale avec un rapport d'homothétie de* $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Exercice 7.10 ♡♡

On considère une ellipse de foyers F *et* F' *et un point* M *variable sur cette ellipse. On note* $\mathrm{T_M}$ *la tangente à l'ellipse au point* M *Montrer que* $d(\mathrm{F},\mathrm{T_M})\times d(\mathrm{F}',\mathrm{T_M})$ *est constante.*

Solution : Dans un bon repère orthonormé, l'équation cartésienne de l'ellipse est :

$$\mathscr{E}:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

avec $a>b>0$. Si $\mathrm{M}\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$, l'équation cartésienne de la tangente en M est :

$$\mathrm{T_M}:\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$$

Puisque $\mathrm{F}\left|\begin{matrix}-c\\0\end{matrix}\right.$, $\mathrm{F}'\left|\begin{matrix}c\\0\end{matrix}\right.$ où $c^2=a^2-b^2$, on calcule

$$\begin{aligned}
d(\mathrm{F},\mathrm{T_M})\times d(\mathrm{F}',\mathrm{T_M}) &= \frac{|cx_0/a^2-1|}{\sqrt{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4}}\times\frac{|cx_0^2/a^2+1|}{\sqrt{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4}}\\
&= \frac{|c^2x_0^2/a^4-1|}{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4}\\
&= \frac{|x_0^2/a^2-b^2x_0^2/a^4-1|}{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4} \qquad \text{car } c^2=a^2-b^2\\
&= \frac{b^2x_0^2/a^4+y_0^2/b^2}{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4} \qquad \text{car } x_0^2/a^2+y_0^2/b^2=1\\
&= b^2
\end{aligned}$$

Exercice 7.11 ♡♡

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, deux ellipses :

$$\mathscr{E}:\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$$

$$\mathscr{E}':\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

1. *On considère une droite* $\mathscr{D}$ *d'équation* $ux+vy+w=0$. *Écrire une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{D}$ *soit tangente à* $\mathscr{E}'$.
2. *On décide de paramétrer l'ellipse* $\mathscr{E}$. *On considère alors deux points de* $\mathscr{E}$ *de paramètres* $\mathrm{P}(\theta)$ *et* $\mathrm{Q}(\alpha)$. *Trouver une relation entre* θ *et* α *pour que la droite* (PQ) *soit tangente à l'ellipse* $\mathscr{E}$.

Solution :

1. Si la droite $\mathscr{D}$ est tangente à l'ellipse, il existe un point $\mathrm{M_0}\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ de l'ellipse tel que la droite $\mathscr{D}$ soit la droite d'équation
$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$
Les deux équations cartésiennes de droite sont proportionnelles :
$$\frac{a^2u}{x_0}=\frac{b^2v}{y_0}=-w$$
Donc on doit avoir
$$x_0=-\frac{a^2u}{w}\qquad y_0=-\frac{b^2v}{w}$$
et comme le point $\mathrm{M_0}$ est sur l'ellipse, une condition nécessaire est que
$$a^2u^2+b^2v^2=w^2$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, il suffit de poser $x_0 = -a^2 u/w$ *et* $y_0 = -b^2 v/w$*, de vérifier que ce point appartient à l'ellipse, et que la tangente à l'ellipse en ce point est la droite* $\mathcal{D}$.

2. *Paramétrons l'ellipse :*

$$\begin{cases} x = 2a\cos\theta \\ y = 2b\sin\theta \end{cases}$$

Soit $M_\theta \begin{vmatrix} 2a\cos\theta \\ 2b\sin\theta \end{vmatrix}$ *et* $P_\alpha \begin{vmatrix} 2a\cos\alpha \\ 2b\sin\alpha \end{vmatrix}$ *deux points de l'ellipse* $\mathcal{E}$*. La droite passant par ces deux points a pour équation cartésienne*

$$\begin{vmatrix} X - 2a\cos\theta & 2a(\cos\alpha - \cos\theta) \\ Y - 2b\sin\theta & 2b(\sin\alpha - \sin\theta) \end{vmatrix} = 0$$

Mais en utilisant la trigonométrie, puisque

$$\cos\alpha - \cos\theta = -2\sin((\alpha+\theta)/2)\sin((\alpha-\theta)/2)$$

et que

$$\sin\alpha - \sin\theta = 2\sin((\alpha-\theta)/2)\cos((\alpha+\theta)/2)$$

On trouve en développant ce déterminant

$$b\cos\big((\alpha+\theta)/2\big)X + a\sin\big((\alpha+\theta)/2\big)Y - 2ab\Big(\cos\big((\alpha+\theta)/2\big)\cos\theta + \sin\big(\alpha+\theta)/2\big)\sin\theta\Big) = 0$$

La condition pour que cette droite soit tangente à la petite ellipse s'écrit alors

$$a^2b^2\cos^2\big((\alpha+\theta)/2\big) + a^2b^2\sin^2\big((\alpha+\theta)/2\big) = 4a^2b^2\cos^2\big((\alpha-\theta)/2\big)$$

et après simplifications, on trouve que

$$\Big|\cos\big((\alpha-\theta)/2\big)\Big| = 1/2$$

Donc $\alpha = \theta + 2\pi/3 + 2k\pi$ *ou alors* $\alpha = \theta - 2\pi/3 + 2k\pi$.

7.7.4 Hyperboles

Exercice 7.12 ♡

Soit $\mathcal{H}$ *l'hyperbole d'équation* $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ *avec* $a > 0,\ b > 0$ *dans un repère orthonormal* $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. Prouver l'équivalence des quatre propriétés suivantes :*

1. *Les asymptotes de* $\mathcal{H}$ *sont perpendiculaires.*
2. $a = b$
3. $\mathcal{H}$ *a pour équation réduite :* $X^2 - Y^2 - a^2 = 0$.
4. *L'excentricité* e *est égale à* $\sqrt{2}$.

Lorsque $\mathcal{H}$ *vérifie une de ces 4 propriétés, on dit qu'elle est* équilatère.

Solution :

$\boxed{1 \Longleftrightarrow 2}$ *On sait que les asymptotes* δ *et* δ' *de* $\mathcal{H}$ *ont pour équations respectives dans* $\mathcal{R}$ $bx - ay = 0$ *et* $bx + ay = 0$. *Leurs vecteurs normaux respectifs sont donc* $(b, -a)$ *et* (b, a)*. Elles sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, ce qui est équivalent, grâce au produit scalaire, à écrire que* $b^2 - a^2 = 0$ *ou encore,* a *et* b *étant positifs, à* $a = b$.

$\boxed{2 \Longleftrightarrow 3}$ *La condition* $a = b$ *est clairement équivalente au fait que l'équation réduite de l'ellipse soit* $X^2 - Y^2 - a^2 = 0$.

$\boxed{2 \implies 4}$ *Si* $a = b$ *alors* $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$ *car* $a > 0$ *et* $e = c/a = \sqrt{2}$.

$\boxed{4 \implies 2}$ *Réciproquement, si* $e = \sqrt{2}$ *alors* $c^2 = 2a^2$*. Comme* $a^2 + b^2 = c^2$*, il s'ensuit que* $b^2 = a^2$ *et comme* a *et* b *sont strictement positifs, on en déduit que* $a = b$.

Exercice 7.13 ♡♡

Prouver qu'un ensemble $\mathcal{H}$ *du plan est une hyperbole équilatère si et seulement si il existe un repère (pas forcément orthonormal)* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *dans lequel* $\mathcal{H}$ *a une équation de la forme* $XY = \gamma$ *où* $\gamma \in \mathbb{R}^*$.

Solution :
$\boxed{\Longrightarrow}$ *Supposons que $\mathscr{H}$ est une hyperbole. Alors dans un bon repère orthonormal, une équation de $\mathscr{H}$ est $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ où $a, b > 0$. Cette équation s'écrit aussi*

$$\mathscr{H} : \left(bx - ay\right)\left(bx + ay\right) = a^2 b^2.$$

On introduit le changement de repère :

$$\begin{cases} X &= bx - ay \\ Y &= bx + ay \end{cases}.$$

Dans ce nouveau repère l'équation de $\mathscr{H}$ est $\mathscr{H} : XY = \gamma$ avec $\gamma = a^2 b^2$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ *Supposons que dans un repère par forcément orthonormal $\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une équation de $\mathscr{H}$ soit $XY = \gamma$. Montrons que $\mathscr{H}$ est une hyperbole. Introduisons les vecteurs : $\overrightarrow{u}' = \frac{\overrightarrow{i}}{\|\overrightarrow{i}\|} + \frac{\overrightarrow{j}}{\|\overrightarrow{j}\|}$ et $\overrightarrow{v}' = \frac{\overrightarrow{i}}{\|\overrightarrow{i}\|} - \frac{\overrightarrow{j}}{\|\overrightarrow{j}\|}$ puis les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}'/\|\overrightarrow{u}'\|$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}'/\|\overrightarrow{v}'\|$. Le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est orthonormal. De plus, on a les formules de changement de repère :*

$$\begin{cases} X &= \frac{1}{\|\overrightarrow{i}\|}\left(\frac{x}{\|\overrightarrow{u}'\|} + \frac{y}{\|\overrightarrow{v}'\|}\right) \\ Y &= \frac{1}{\|\overrightarrow{j}\|}\left(\frac{x}{\|\overrightarrow{u}'\|} - \frac{y}{\|\overrightarrow{v}'\|}\right) \end{cases}$$

et dans le nouveau repère une équation de $\mathscr{H}$ est :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{i}\|\|\overrightarrow{j}\|}\left(\frac{x^2}{\|\overrightarrow{u}'\|^2} - \frac{y^2}{\|\overrightarrow{v}'\|^2}\right) = \gamma$$

qui est de la forme $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ avec $a = \sqrt{\|\overrightarrow{i}\|\|\overrightarrow{j}\|\gamma}\|\overrightarrow{u}'\|$ et $b = \sqrt{\|\overrightarrow{i}\|\|\overrightarrow{j}\|\gamma}\|\overrightarrow{v}'\|$ (On peut supposer $\gamma > 0$ quitte à permuter a et b). Donc $\mathscr{H}$ est bien une hyperbole.

Exercice 7.14 ♡♡

Un point M d'une hyperbole se projette en H et H′ sur les deux asymptotes. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'}$ est constant.

Solution : *Dans le repère orthonormé adéquat, l'équation de l'hyperbole est $\mathscr{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et les deux asymptotes ont pour équations $y = b/ax$ et $y = -b/ax$ ou encore :*

$$\mathscr{D}_1 : \ bx + ay = 0 \quad \mathscr{D}_2 : \ bx - ay = 0$$

et les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{vmatrix} b \\ -a \end{vmatrix}$ sont normaux à ces droites. Paramétrons un point M de la branche droite de l'hyperbole : $M\begin{vmatrix} a\operatorname{ch} t \\ b\operatorname{sh} t \end{vmatrix}$. En écrivant que $H = M + \lambda\overrightarrow{n_1}$, on trouve que $\lambda = -\frac{ab}{a^2+b^2}e^t$ puis que $\overrightarrow{MH} = -\frac{ab}{a^2+b^2}e^t\begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix}$. De la même façon, on trouve que $\overrightarrow{MH'} = -\frac{ab}{a^2+b^2}e^{-t}\begin{vmatrix} b \\ -a \end{vmatrix}$ et on calcule finalement

$$\boxed{\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'} = \frac{a^2 b^2\left(b^2 - a^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}}$$

qui est bien indépendant de t. Par symétrie, on obtient le même résultat si M se trouve sur la branche gauche de l'hyperbole.

Exercice 7.15 ♡♡

On considère une hyperbole $\mathscr{H}$ et un point M variable sur cette hyperbole. On note H le projeté orthogonal du foyer F sur la tangente en M. Montrer que le point H se trouve sur le cercle tangent à l'hyperbole aux deux sommets.

Solution : *Dans un repère orthonormé bien choisi, l'équation de l'hyperbole est*

$$\mathscr{H} : \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En notant $M\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$*, l'équation cartésienne de la tangente en* M *est :*

$$T_M : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Les coordonnées du foyer sont $F\begin{vmatrix} c \\ 0 \end{vmatrix}$ *avec* $c^2 = a^2 + b^2$*. Le vecteur* $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} x_0/a^2 \\ -y_0/b^2 \end{vmatrix}$ *est normal à la tangente donc* $H = F + \lambda\overrightarrow{n}$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Puisque* $H \in T_M$*, on trouve que* $\lambda = \left(1 - \frac{cx_0}{a^2}\right) / \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)$*, puis*

$$\begin{cases} x_H &= c + \dfrac{(1 - cx_0/a^2)x_0/a^2}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ y_H &= -\dfrac{(1 - cx_0/a^2)y_0/b^2}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \end{cases}$$

et l'on calcule ensuite

$$\begin{aligned} x_H^2 + y_H^2 &= c^2 + \frac{(1 - cx_0/a^2)^2 + 2cx_0/a^2(1 - cx_0/a^2)}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ &= c^2 + \frac{(1 - cx_0/a^2)\left(1 + cx_0/a^2\right)}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ &= c^2 + \frac{1 - c^2x_0^2/a^4}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ &= c^2 + \frac{1 - x_0^2/a^2 - b^2x_0^2/a^4}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \quad \text{car } c^2 = a^2 + b^2 \\ &= c^2 - \frac{b^2(y_0^2/b^4 + x_0^2/a^4)}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \quad \text{car } x_0^2/a^2 - y_0^2/b^2 = 1 \\ &= c^2 - b^2 = a^2 \end{aligned}$$

Exercice 7.16 ♡♡

On considère une hyperbole $\mathscr{H}$ *de foyers* F *et* F′.

1. *Rappeler la définition bifocale de* $\mathscr{H}$*.*
2. *Dans un repère orthonormal, on suppose l'hyperbole paramétrée par* $\overrightarrow{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*. Pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on note* $M(t)$ *le point de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{f}(t)$*. Calculer la dérivée de la fonction* $\theta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *définie par* $\theta(t) = \left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\| - \left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|$.
3. *En déduire que si* M *est un point de l'hyperbole, la normale en* M *est la bissectrice extérieure des droites* (FM) *et* (F′M).
4. *Que dire de la tangente à* $\mathscr{H}$ *en* M *?*

Indication 7.2 : On pourra s'aider de l'exercice 2.13 page 91.

Solution :

1. *On sait que le point* M *est élément de l'hyperbole de grand axe* a *si et seulement si* $\left|\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\| - \left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|\right| = 2a$.
2. *Comme pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ *est distinct de* F *et* F′*, la fonction* θ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*. On utilise la formule de dérivation de la norme, on obtient, pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *:*

$$\theta'(t) = \frac{\langle \overrightarrow{FM(t)} \mid \overrightarrow{f}'(t)\rangle}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|} - \frac{\langle \overrightarrow{F'M(t)} \mid \overrightarrow{f}'(t)\rangle}{\left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|} = \langle \overrightarrow{u}(t) \mid \overrightarrow{f}'(t)\rangle$$

avec $\overrightarrow{u}(t) = \dfrac{\overrightarrow{FM(t)}}{\left\|\overrightarrow{FM(t)}\right\|} - \dfrac{\overrightarrow{F'M(t)}}{\left\|\overrightarrow{F'M(t)}\right\|}$ *. Comme* $|\theta|$ *est constante, on sait aussi que* $\theta' = 0$ *et il vient que* $\langle \overrightarrow{u}(t) \mid \overrightarrow{f}'(t)\rangle = 0$.

3. *Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit* M *le point de l'hyperbole de paramètre* t. *Le vecteur* $\overrightarrow{f'}(t)$ *dirige la tangente à l'ellipse en* M. *On sait d'après la question précédente que* $\overrightarrow{u}(t)$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{f'}(t)$ *et donc il dirige la normale en* M *à l'hyperbole. On sait d'après l'exercice 2.13 page 91 qu'il dirige aussi la bissectrice extérieure des droites* (FM) *et* (F′M).
4. *C'est la bissectrice intérieure des droites* (FM) *et* (F′M).

7.7.5 Coniques et coordonnées polaires

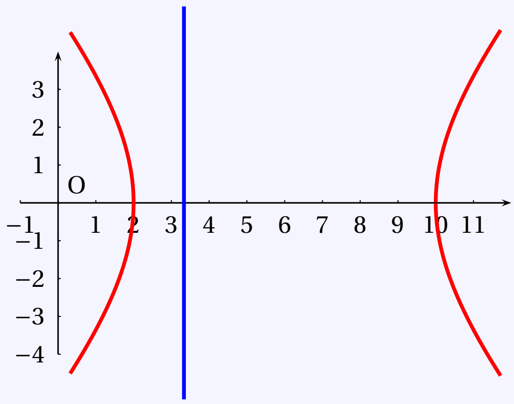
Exercice 7.17 ♡

Construire les coniques d'équation polaire :

1. $r = \dfrac{5}{1+\frac{3}{2}\cos\theta}$
2. $r = \dfrac{4}{2\sqrt{2}+\cos\theta+\sin\theta}$
3. $r = \dfrac{1}{1+\sin\theta}$

Solution :

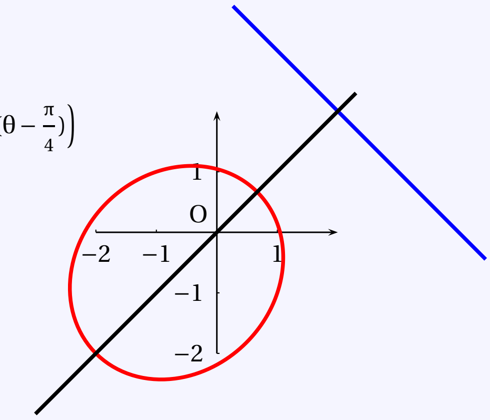
1. *On identifie avec la formule donnée dans le cours et on reconnaît une hyperbole d'excentricité* $e = 3/2$, *de foyer* O, *d'axe focale d'équation polaire* $\theta = 0$ *(l'axe des abscisses) et de directrice d'équation polaire* $r = \frac{5}{\frac{3}{2}\cos\theta}$. *Cette droite est donc perpendiculaire à l'axe des abscisses et se trouve à une distance* $10/3$ *de* O. *Les deux sommets de l'hyperbole sont sur l'axe focal et sont donnés par* $\theta = 0$ *et* $\theta = \pi$. *On obtient* $r = 5/(1+3/2\cos 0) = 2$ *et* $r = 5/(1+3/2\cos\pi) = -10$. *Les coordonnées polaires des deux sommets sont donc* $(2,0)$ *et* $(10,0)$. *Le centre de l'hyperbole est le milieu du segment formé par les sommets et il se trouve donc en le point de coordonnées polaire* $(6,0)$.



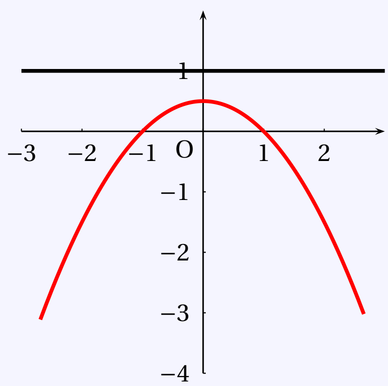
2. *On a*

$$2\sqrt{2}+\cos\theta+\sin\theta = \sqrt{2}\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) = 2\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})\right)$$

donc l'équation s'écrit aussi $r = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$. *On reconnaît une ellipse d'excentricité* $e = 1/2$, *de foyer* O, *de directrice la droite d'équation polaire* $r = \frac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$. *Cette droite est à une distance* $2\sqrt{2}$ *de* O. *L'axe focal est la droite perpendiculaire à la directrice et qui passe par le foyer. C'est donc la bissectrice principale.*



3. *L'équation s'écrit aussi* $r = 1/(1+\cos(\theta-\pi/2))$ *et on reconnaît une conique d'excentricité* $e = 1$, *c'est-à-dire une parabole. Son foyer est en* O, *sa directrice admet comme équation polaire* $r = 1/\cos(\theta-\pi/2)$. *Cette droite est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point de coordonnées cartésiennes* $(0,1)$. *L'axe focal est donc l'axe des ordonnées et le sommet de la parabole a pour coordonnées* $(0,1/2)$.



7.7.6 Courbes du second degré

Exercice 7.18 ♡

On considère la courbe $\mathscr{E}$ d'équation :

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$$

Déterminer sa nature et préciser ses éléments géométriques.

Solution : *Le discriminant de la courbe vaut* 4*. La courbe est donc une ellipse ou est réduite à un point ou vide. On effectue un changement d'origine du repère défini par les formules*

$$\begin{cases} x & = \mathrm{X} + \alpha \\ y & = \mathrm{Y} + \beta \end{cases}$$

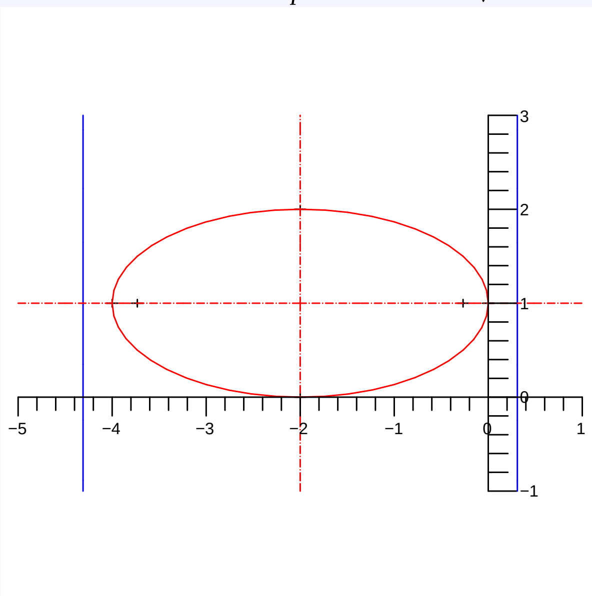
pour éliminer les termes en x et y. On choisit à cette fin α et β avec

$$\begin{cases} 2\alpha + 4 & = 0 \\ 8\beta - 8 & = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = -2$ et $\beta = 1$. L'origine du nouveau repère est $\Omega\left|\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$ et dans ce nouveau repère l'équation devient

$$\frac{\mathrm{X}^2}{4} + \mathrm{Y} = 1$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre Ω et de demi axes $a = 2$ et $b = 1$. Dans les nouvelles coordonnées, les foyers sont $\mathrm{F}\left|\begin{matrix}c\\0\end{matrix}\right.$ et $\mathrm{F}\left|\begin{matrix}-c\\0\end{matrix}\right.$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Les directrices $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ admettent comme équation respectives : $\mathrm{X} = a^2/c$ et $\mathrm{X} = -a^2/c$ avec $a^2/c = 4\sqrt{3}/3$. Enfin l'excentricité de l'ellipse est $e = c/a = \sqrt{3}/2$.



Exercice 7.19 ♡

On considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation :

$$-9x^2 + 16y^2 + 18x - 32y - 137 = 0$$

Déterminer la nature de $\mathscr{H}$ et préciser ses éléments géométriques : sommets, foyers, directrice, excentricité, asymptotes.

Solution : *Procédant comme dans l'exercice précédent, on supprime les termes linéaires dans l'équation cartésienne de $\mathscr{H}$ grâce à un changement de variable $\begin{cases} x & = \mathrm{X} + \alpha \\ y & = \mathrm{Y} + \beta \end{cases}$ ce qui amène le système $\begin{cases} -18\alpha + 18 & = 0 \\ 32\beta - 32 & = 0 \end{cases}$ et donc $\alpha = \beta = 1$.*

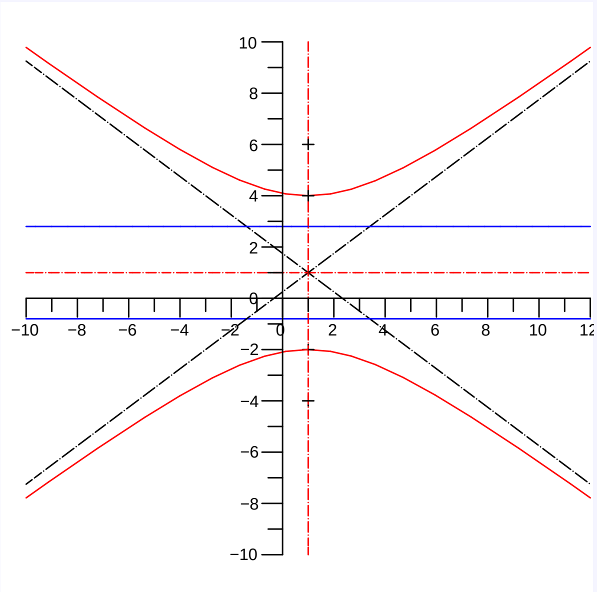
L'origine du nouveau repère est donc $\Omega\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ et l'équation de $\mathscr{H}$ s'écrit :

$$\frac{Y^2}{9}-\frac{X^2}{16}-1=0.$$

On effectue alors une rotation d'angle $\pi/2$: $\begin{cases}u=Y\\v=-X\end{cases}$ et dans ces dernières coordonnées, l'équation de $\mathscr{H}$ devient :

$$\frac{u^2}{9}-\frac{v^2}{16}-1=0.$$

La courbe $\mathscr{H}$ est donc une hyperbole de demi axes $a=3$ et $b=4$. Dans les coordonnées (u,v), les foyers de $\mathscr{H}$ sont $F\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$ et $F\begin{vmatrix}-c\\0\end{vmatrix}$ avec $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$. Les directrices $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ admettent comme équations respectives : $X=a^2/c$ et $X=-a^2/c$ avec $a^2/c=9/5$. Enfin l'excentricité de l'hyperbole est $e=c/a=5/3$ et ses asymptotes sont $\delta\ :y=\frac{b}{a}x$ et $\delta'\ :y=-\frac{b}{a}x$ avec $b/a=4/3$.



Exercice 7.20 ♡

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$2x^2+y^2+\sqrt{3}xy-1=0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

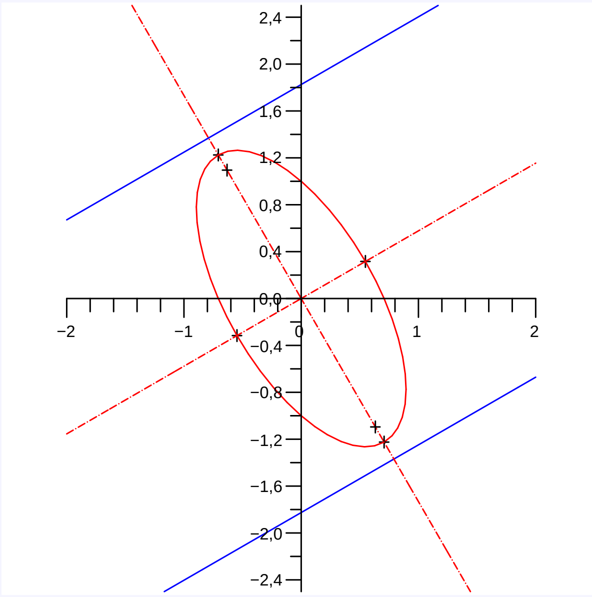
Solution : Le discriminant de cette courbe est $\Delta=5/4>0$. La courbe est une ellipse ou est réduite à un point ou vide. Il n'y a pas de terme linéaire à éliminer. Afin de faire disparaître le terme en xy, on effectue une rotation d'angle θ et de centre O : $\begin{cases}x=\cos\theta X-\sin\theta Y\\y=\sin\theta X+\cos\theta Y\end{cases}$. Le coefficient devant XY est

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\cos\theta\sin\theta &= \sqrt{3}\cos 2\theta-\sin 2\theta\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\\ &= -2\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

qui s'annule par exemple pour $\theta=-\pi/3$. Pour cette valeur de θ, l'équation de la courbe devient

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{5}}-1=0$$

La courbe est une ellipse de centre O*, de demi axes* $a = \sqrt{2}$ *et* $b = \sqrt{(2/5)}$*, d'excentricité* $e = 2\sqrt{5}/5$*. Dans le nouveau repère, l'équation des directrices est* $X = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ *et les foyers ont pour coordonnées :* $\left(\pm\frac{2}{5}\sqrt{10}, 0\right)$.



Exercice 7.21 ♡

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 + 6xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Solution : *Le discriminant de cette courbe est* $\Delta = -8 < 0$*. La courbe est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes. On effectue le changement de variable* $\begin{cases} x &= X + \alpha \\ y &= Y + \beta \end{cases}$ *afin de supprimer les termes linéaires, ce qui amène le système :* $\begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$ *qui admet comme solution :* $\alpha = \sqrt{2}/4$ *et* $\beta = -3\sqrt{2}/4$*. L'équation s'écrit alors dans le repère de centre* $\omega \left| \begin{array}{l} \sqrt{2}/4 \\ -3\sqrt{2}/4 \end{array} \right.$ *:*

$$X^2 + 6XY + Y^2 + 1 = 0.$$

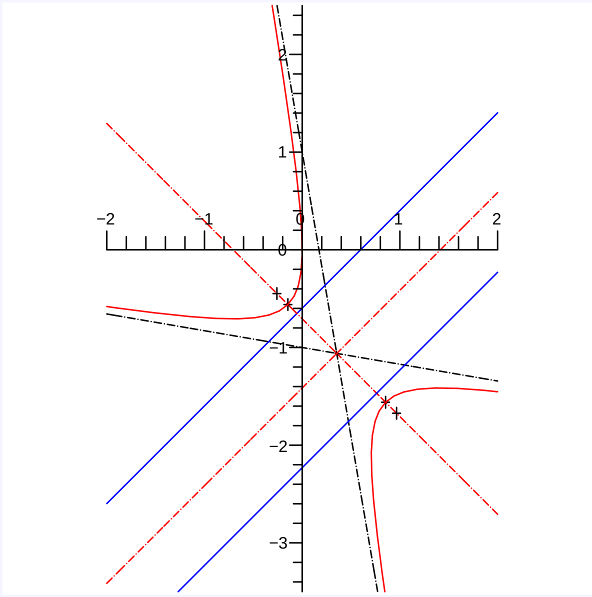
Afin de faire disparaître le terme en XY*, on effectue une rotation d'angle* θ *et de centre* ω *:* $\begin{cases} X = \cos\theta u - \sin\theta v \\ Y = \sin\theta u + \cos\theta v \end{cases}$*. Le coefficient devant* uv *est*

$$6\left(cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 6\cos(2\theta)$$

qui s'annule par exemple pour $\theta = \pi/4$*. Pour cette valeur de* θ*, l'équation de la courbe devient*

$$2u^2 - 4v^2 = 1$$

La courbe est une hyperbole de centre Ω*, de demi axes* $a = \sqrt{2}/2$ *et* $b = 1/2$*, d'excentricité* $e = \sqrt{6}/2$*. Dans le nouveau repère, l'équation des directrices est* $X = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ *et les foyers ont pour coordonnées :* $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.



Exercice 7.22 ♡

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

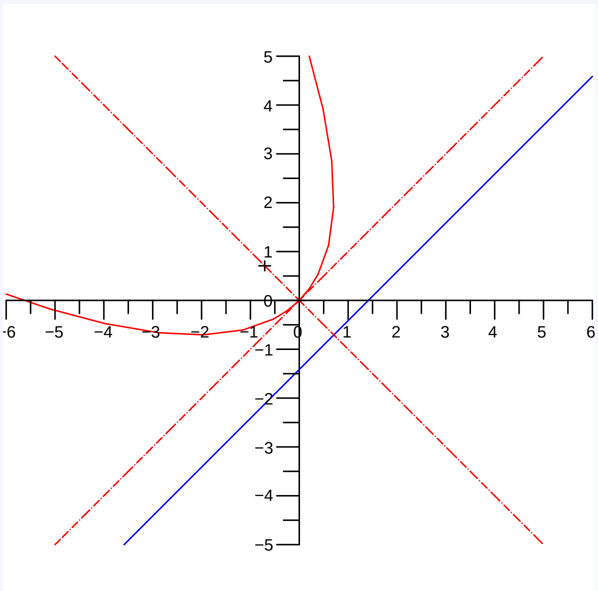
$$x^2 + 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}\,(x - y) = 0$$

Déterminer sa nature (on effectuera une rotation de centre O *et d'angle* $3\pi/4$*), puis tracer cette courbe en précisant son centre et son excentricité.*

Solution : *On calcule le discriminant* $\Delta = 0$*. La courbe est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide. Par le changement de coordonnées suggéré, l'équation devient*

$$y^2 - 4x = 0.$$

La courbe est donc une parabole de sommet O*, de directrice la droite d'équation est* $\mathrm{X} = -1$ *et de foyer* $\mathrm{F}\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$.



Exercice 7.23 ♡

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 - 4y^2 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Solution : On calcule le discriminant $\Delta = -4 < 0$. La courbe est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes. Remarquons que $x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y)$ et donc que la courbe est la réunion des deux droites sécantes en O $x - 2y = 0$ et $x + 2y = 0$.

Exercice 7.24 ♡

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 + 3x + 4y + 1 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Solution : On calcule le discriminant $\Delta = 0$. La courbe est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide. On réduit l'expression

$$x^2 + 3x + 4y + 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{5}{16}\right) = 0$$

ce qui nous amène à effectuer le changement de variable

$$\begin{cases} X &= x + \frac{3}{2} \\ Y &= y - \frac{5}{16} \end{cases}.$$

L'origine du nouveau repère est $\Omega\left|\begin{matrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{16} \end{matrix}\right.$ et dans ce nouveau repère l'équation devient

$$X^2 + 4Y = 0$$

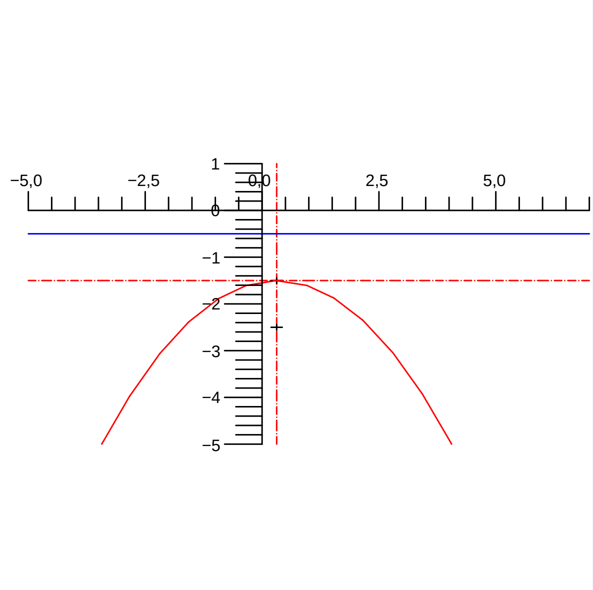
On effectue ensuite une rotation des axes d'angle $-\frac{\pi}{2}$ définie

$$\begin{cases} x &= -Y \\ y &= X \end{cases}.$$

L'équation devient alors dans ce nouveau repère

$$y^2 - 4x = 0$$

donc c'est une parabole de paramètre $p = 2$ et de centre Ω. Son foyer est $F\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right.$ et sa directrice admet comme équation



$x = -1$.

Exercice 7.25 ♡

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$2x^2 - 3x + 2y^2 + 4y - 3 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Solution : *On calcule le discriminant* $\Delta = 4$*. La courbe est une ellipse ou alors réduite à un point ou vide. Par un changement d'origine du repère défini par les formules*

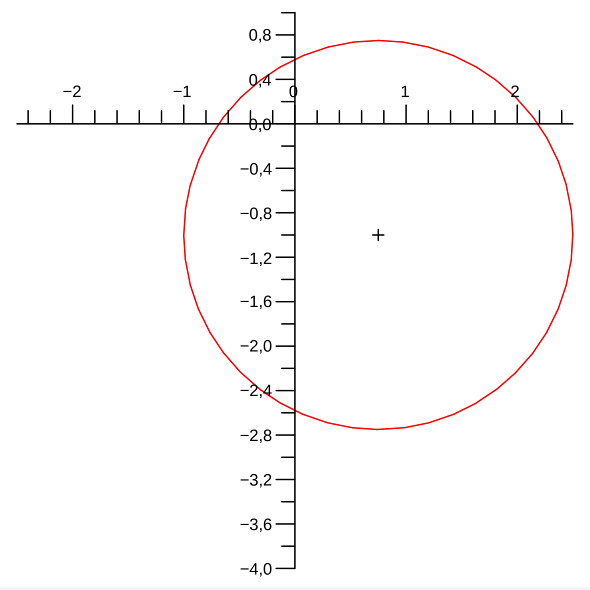
$$\begin{cases} x &= X + \alpha \\ y &= Y + \beta \end{cases}$$

pour éliminer les termes en x *et* y*, on choisit* α *et* β *avec*

$$\begin{cases} 4\alpha - 3 &= 0 \\ \beta + 1 &= 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = \frac{3}{4}$ *et* $\beta = -1$*. L'origine du nouveau repère est* $\Omega \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4} \\ -1 \end{array} \right.$ *et dans ce nouveau repère l'équation devient*

$$X^2 + Y^2 - \frac{49}{16} = 0$$



On reconnaît l'équation d'un cercle de centre Ω *et de rayon* $\frac{7}{4}$*.*

Exercice 7.26 ♡

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

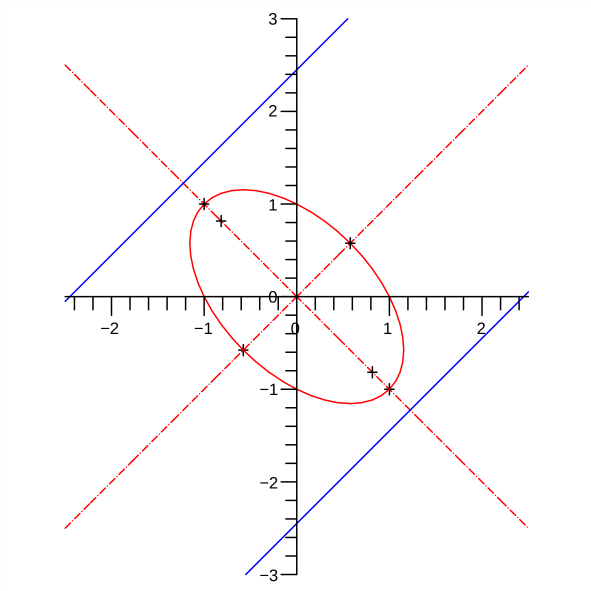
Solution : *On calcule le discriminant* $\Delta = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 > 0$*. La courbe est une ellipse ou alors réduite à un point ou vide. L'équation ne présente pas de termes en* x *et* y*. On effectue une rotation des axes d'angle* θ *définie par les formules de changement de repère*

$$\begin{cases} x &= \cos\theta X - \sin\theta Y \\ y &= \sin\theta X + \cos\theta Y \end{cases}$$

et pour annuler le terme en xy*, on choisit* $\cos(2\theta) = 0$*, c'est-à-dire* $\theta = \pi/4$*. L'équation devient alors dans ce nouveau repère*

$$\frac{X^2}{\frac{2}{3}} + \frac{Y^2}{2} = 1$$

c'est une ellipse d'excentricité $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$ *et de centre* O*. Dans le nouveau repère les directrices ont pour équation :* $X = \pm\sqrt{3}$ *et les foyers ont pour coordonnées :* $\left| \begin{array}{l} \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{array} \right.$*. On trace sans peine cette ellipse.*



Exercice 7.27 ♡

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Solution : *On calcule le discriminant* $\Delta = 25^2 - 7^2 > 0$. *La courbe est une ellipse ou alors réduite à un point ou vide. Par un changement d'origine du repère défini par les formules*

$$\begin{cases} x & = X + \alpha \\ y & = Y + \beta \end{cases}$$

pour éliminer les termes en x *et* y, *on choisit* α *et* β *avec*

$$\begin{cases} 25\alpha - 7\beta & = -32 \\ -7\alpha + 25\beta & = 32 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = -1$ *et* $\beta = 1$. *L'origine du nouveau repère est* $\Omega \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ *et dans ce nouveau repère l'équation devient*

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 = 288$$

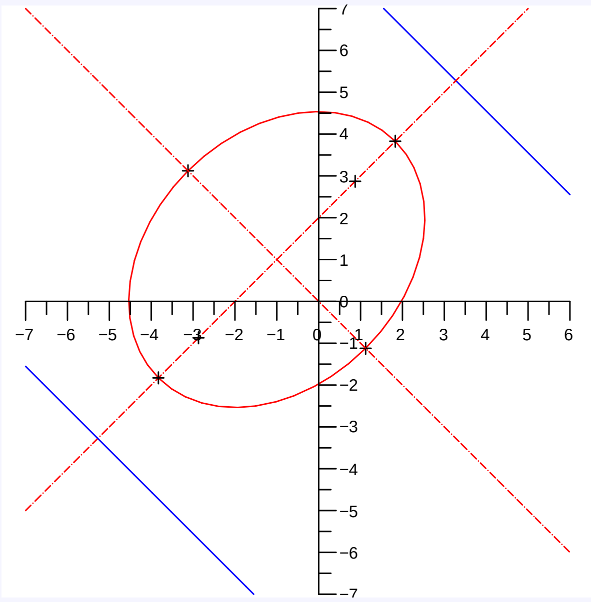
On effectue ensuite une rotation des axes d'angle θ *définie par les formules de changement de repère*

$$\begin{cases} x & = \cos\theta X - \sin\theta Y \\ y & = \sin\theta X + \cos\theta Y \end{cases}$$

et pour annuler le terme en xy, *on choisit* $\cos(2\theta) = 0$, *c'est-à-dire* $\theta = \pi/4$. *L'équation devient alors dans ce nouveau repère*

$$\frac{X^2}{4^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1.$$

C'est une ellipse d'excentricité $e = \sqrt{7}/4$ *et de centre* Ω. *On trace sans peine cette ellipse.*



Exercice 7.28 ♡

On considère la courbe d'équation

$$3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0$$

dans le repère canonique. Montrer (avec le moins de calculs possibles) que cette courbe est une hyperbole dont on précisera les demi-axes ainsi que le centre.

Solution : *Le discriminant vaut* $\Delta = -4 < 0$*. Cette courbe est soit une hyperbole, soit la réunion de deux droites sécantes. Par un changement d'origine de repère défini par les formules*

$$\begin{cases} x & = X + \alpha \\ y & = Y + \beta \end{cases}$$

pour éliminer les termes linéaires, on choisit α *et* β *vérifiant*

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta & = 6 \\ \alpha & = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = 0$ *et* $\beta = 3$*. Le centre du nouveau repère a pour coordonnées* $\Omega\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}$*. Par un changement de repère orthonormé (rotation des axes), on sait que l'on peut trouver un angle* θ *tel que dans le nouveau repère, la courbe ait pour équation*

$$Ax^2 + Cy^2 = -16$$

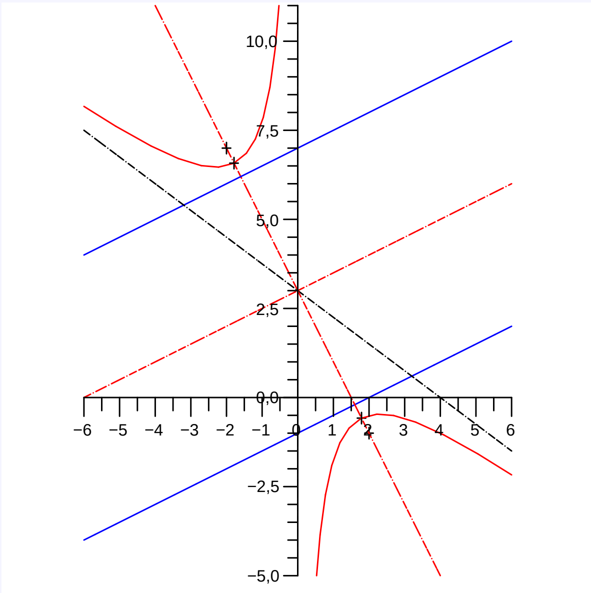
mais puisque

$$\begin{cases} AC & = \Delta = -4 \\ A + C & = 3 \end{cases}$$

A *et* C *sont racines du trinôme* $T^2 - 3T - 4 = 0$*, c'est-à-dire* $\{A, C\} = \{-1, 4\}$*. Les deux équations possibles de la courbe sont donc*

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \text{ ou } -\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

On reconnait une hyperbole de demi-axes $\boxed{4}$ *et* $\boxed{2}$*. le centre est le point* $\boxed{\Omega\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}}$.



Exercice 7.29 ♡♡

On considère un polynôme de degré 3 *:*

$$P = X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \delta$$

et la courbe formé des points $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ *d'équation*

$$\mathscr{C} : \ P(y) = P(x)$$

Montrer que :

a. *Si* $\lambda^2 - 3\mu < 0$, $\mathscr{C}$ *est une droite à préciser.*

b. *Si* $\lambda^2 - 3\mu > 0$, $\mathscr{C}$ *est la réunion d'une droite et d'une conique. On montrera que l'excentricité de cette conique est indépendante de* P.

Solution : *L'équation de* $\mathscr{C}$ *s'écrit en factorisant par* $(y-x)$ *:*

$$[y-x](x^2 + xy + y^2 + \lambda(x+y) + \mu) = 0$$

La courbe contient la droite d'équation $y = x$ *(première bissectrice). Intéressons-nous à la courbe du second degré. Par un changement de repère défini par les formules*

$$\begin{cases} x &= X + \alpha \\ y &= Y + \beta \end{cases}$$

on peut annuler les termes en x *et* y *en choisissant* α *et* β *solutions du système*

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta &= -\lambda \\ \alpha + 2\beta &= -\lambda \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = \beta = -\lambda/3$. *Dans ce nouveau repère, l'équation devient*

$$X^2 + XY + Y^2 = \frac{\lambda^2 - 3\mu}{3}$$

Si $\lambda^2 - 3\mu < 0$, *cette courbe est vide. Sinon, on sait que par une rotation des axes, on peut trouver un nouveau repère dans lequel l'équation devient*

$$AX^2 + BY^2 = \frac{\lambda^2 - 3\mu}{3}$$

avec $\Delta = AB = 1 - 1/4 = 3/4 > 0$ *et* $A + B = 2$. *On reconnaît une ellipse.* A *et* B *sont racines du trinôme* $4T^2 - 8T + 3 = 0$, *c'est-à-dire* $\{3/2, 1/2\}$. *L'équation réduite de l'ellipse s'écrit*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } \begin{cases} a^2 &= \dfrac{\lambda^2 - 3\mu}{3A} \\ b^2 &= \dfrac{\lambda^2 - 3\mu}{3B} \end{cases}$$

Pour avoir $a > b$, *on prend* $A < B$. *Alors l'excentricité vaut* $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} = \sqrt{1 - A/B} = \boxed{\sqrt{2/3}}$.

Chapitre 8

Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrements

L'administration pénitentiaire dispose,
avec ses quinze mille forçats
de trente mille paires de bras.
Pierre MILLE, L'œuvre coloniale, 21 septembre 1923.

Nos correspondants nous font remarquer que
$25 \times 8 = 20000$ et non pas 25000.
Pourquoi pas ? 26 octobre 1928.

Pour bien aborder ce chapitre

La construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels a été formalisée pour la première fois au 19e siècle par le mathématicien italien Giuseppe Peano et le mathématicien allemand Richard Dedekind. Celle-ci s'avère assez aride et délicate aussi il n'est pas question de l'aborder ici. Nous nous contenterons d'admettre l'existence de $\mathbb{N}$ et de supposer qu'il vérifie les règles suivantes :

1. **$\mathbb{N}$ est non vide**.
2. **$\mathbb{N}$ est totalement ordonné** : pour tout $x, y \in \mathbb{N}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.
3. **Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément** : si $A \subset \mathbb{N}$ est non vide, alors il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A, \quad a \leqslant x$.
4. **Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément**.

Ce sachant qu'une partie non vide $A \subset N$:
– est majorée s'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in A, \quad x \leqslant M$.
– admet un plus grand élément si il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A, \quad x \geqslant a$.

Des propriétés de N découlent directement, comme nous le verrons, le principe de récurrence. Ces propriétés nous permettront aussi d'introduire la notion très intuitive de cardinal puis de faire quelques premiers pas dans les techniques de dénombrement.
Le lecteur est invité à reprendre la section A.4 page 1131 de l'annexe A s'il n'est pas à l'aise avec les rudiments de théorie des ensembles et les notions d'applications injective, surjective et bijective.
Comme indiqué dans le programme officiel, la connaissance des démonstrations des sections 8.1 et 8.2 n'est pas exigible des étudiants.

8.1 Ensemble des entiers naturels - Récurrence

8.1.1 Ensemble des entiers naturels

Les propriétés suivantes sont conséquences de celles ci dessus :

PROPOSITION 8.1 **Construction des entiers naturels**

1. $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, noté 0.

2. $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ possède un plus petit élément, noté 1.

On peut ainsi nommer les entiers successifs :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la partie $\{p\in\mathbb{N} \mid p>n\}$ possède un plus petit élément, appelé successeur de n et noté $n+1$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la partie $\{p\in\mathbb{N} \mid p<n\}$ possède un plus grand élément, appelé prédécesseur de n et noté $n-1$.

Démonstration *La proposition est une conséquence directe des règles* 1 *et* 3 *précédentes.*

8.1.2 Principe de récurrence

Il est de règle en Danemark que ce soit un Frédéric qui succède à un Christian,
et un Christian qui succède à un Frédéric,
quels que soient les prénoms de ses prédécesseurs.
La Petite République, 13 juin 1907.

THÉORÈME 8.2 ♡♡♡ **Principe de récurrence**

Soit P_n un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que :

(H1) P_{n_0} est vrai.

(H2) $\forall n\geqslant n_0,\quad \mathrm{P}_n \implies \mathrm{P}_{n+1}$

alors P_n est vrai pour tout $n\geqslant n_0$.

Démonstration *Soit $\mathscr{F}=\{k\in\mathbb{N} \mid k\geqslant n_0 \text{ et } \mathrm{P}_k \text{ est fausse}\}$. Prouver le théorème revient à montrer que $\mathscr{F}$ est un ensemble vide. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $\mathscr{F}$ possède un plus petit élément $k_0\in\mathbb{N}$. On a nécessairement $k_0>n_0$ et P_{k_0} est fausse. De plus $k_0-1\geqslant n_0$ et P_{k_0-1} est vraie. Mais d'après l'hypothèse* 2*, P_{k_0} doit aussi être vraie ce qui est une contradiction. Par conséquent $\mathscr{F}=\varnothing$ et le principe de récurrence est prouvé.*

Remarque 8.1 On peut comprendre ce théorème en se représentant les prédicats P_n comme des dominos.

– Montrer que le prédicat P_0 est vrai revient à faire tomber le premier domino.
– Affirmer que, pour tout n , le prédicat P_n entraine le prédicat P_{n+1} revient à supposer que si un domino tombe alors il entraine dans sa chute le suivant.

Si ces deux conditions sont réunies, on fait chuter tous les dominos...

Pour rédiger une récurrence on pourra utiliser le plan suivant.

PLAN 8.1 : Pour rédiger une récurrence

On veut prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$ une propriété donnée P_n est vraie.

1. *On montre que P_0 est vraie.*
2. *Soit $n\in\mathbb{N}$.*
3. *On suppose que P_n est vraie. C'est l'hypothèse de récurrence. On montre que P_{n+1} est vraie.*
4. *D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.*

Exemple 8.1

Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0+1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. L'égalité est vraie au rang 0 : $0=\dfrac{0(0+1)}{2}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$.
3. On suppose que $0+1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Montrons que $0+1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} 0+1+2+3+\ldots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

   ce qu'il fallait démontrer.
4. L'égalité $0+1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'après le théorème de récurrence.

Il existe des variantes importantes du théorème de récurrence. Citons en deux :

THÉORÈME 8.3 ♡ **Récurrence double**
Soit P_n un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que :

(H1) P_{n_0} et P_{n_0+1} sont vrais.

(H2) $\forall n \geqslant n_0, \quad [P_n \quad \text{et} \quad P_{n+1}] \implies P_{n+2}$

alors P_n est vrai pour tout $n \geqslant n_0$.

THÉORÈME 8.4 ♡ **Récurrence forte**
Soit P_n un prédicat sur $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que :

(H1) P_0 est vrai.

(H2) $\forall n \geqslant 0, \quad [P_0, P_1, \dots, P_n] \implies P_{n+1}$

alors P_n est vrai pour tout $n \geqslant 0$.

Exemple 8.2 Les exercices 8.6 et 8.7 page 319 utilisent le principe de récurrence double. La démonstration du théorème 20.15 page 756 se fait par une récurrence forte.

8.1.3 Suite définie par récurrence

Rappels :

- Soit E un ensemble. On appelle suite de E une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans E.
- L'image de l'entier n est notée u_n.
- La suite est notée (u_n).

DÉFINITION 8.1 ♡ **Suite définie par récurrence**
Une suite peut être construite de la façon suivante :

1. On fixe une **condition initiale** u_0.
2. On se donne une **relation**, dite **de récurrence**, permettant de déterminer chaque terme de la suite en fonction du précédent : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le principe de récurrence permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une suite satisfaisant à ces deux conditions.

On va voir différents exemples de suites définies par récurrence dans les deux prochains paragraphes.

8.1.4 Notations $\sum$ et $\prod$

DÉFINITION 8.2 ♡ **Notation $\sum$**
Soit (u_n) une suite à valeurs dans un ensemble muni d'une loi additive. On définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} S_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \end{cases}$$

Exemple 8.3

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

DÉFINITION 8.3 ♡ **Notation $\prod$**
Soit (u_n) une suite à valeurs dans un ensemble muni d'une loi multiplicative. On définit $S_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n \times u_{n+1} \end{cases}$$

Exemple 8.4 Soit a est un réel :

$$\prod_{k=0}^{n} a = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} = a^{n+1}$$

DÉFINITION 8.4 ♡ **Factorielle**
On définit par récurrence la suite $(n!)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = n! \times (n+1) \end{cases}$$

Pour un entier n, le nombre $n!$ s'appelle la *factorielle* de n et se lit « n factorielle ».

PROPOSITION 8.5 ♡ **Écriture développée de $n!$**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.}$$

Exemple 8.5

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2$
- $3! = 6$
- $4! = 24$
- $5! = 120$
- $6! = 720$
- $7! = 5040$

8.1.5 Suites arithmétiques et géométriques

DÉFINITION 8.5 ♡ **Suite arithmétique**
On appelle *suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$* la suite donnée par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

PROPOSITION 8.6 ♡♡♡ **Terme général d'une suite arithmétique et somme arithmétique**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = u_0 + nr} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\,u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r}$$

Démonstration *On prouve la première relation par une simple récurrence. La seconde a été prouvée dans l'exemple 8.1 page 305.*

PLAN 8.2 : Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

DÉFINITION 8.6 ♡ **Suite géométrique**
On appelle *suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$* la suite donnée par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n \end{cases}$$

PROPOSITION 8.7 ♡♡♡ **Terme général d'une suite géométrique et somme géométrique**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_{n+1} = u_0 q^n} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0 . \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)\,u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}}$$

Démonstration *On prouve la première relation par une simple récurrence. Pour la seconde on peut faire ainsi. Soit* $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. *On calcule*

$$(1-q)\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right) = \left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right) - \left(q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1}\right) = 1-q^{n+1}$$

et il s'ensuit que $1+q+q^2+\ldots+q^n = \left(1-q^{n+1}\right)/\left(1-q\right)$. *Donc*

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n = u_0+u_0q+u_0q^2+\ldots+u_0q^n = u_0\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right) = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Si $q=1$, *la formule est évidente.*

PLAN 8.3 : Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, *on montre que le quotient* u_{n+1}/u_n *est constante.*

Remarque 8.2 On appelle *suite arithmético-géométrique* une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = ku_n + r$. Lorsque $k=1$, on a une suite arithmétique et lorsque $r=0$, on a une suite géométrique de raison k. Dans le cas général, la méthode la plus rapide pour exprimer u_n en fonction de n et u_0 consiste à déterminer une suite constante (α) vérifiant la relation de récurrence : $\alpha = k\alpha + r$. La suite $(v_n) = (u_n-\alpha)$ vérifie $v_{n+1} = kv_n$ (suite géométrique) et donc $v_n = k^n v_0$. On en déduit que $u_n = \alpha + (u_0-\alpha)k^n$ où $\alpha = r/(1-k)$.

8.2 Ensembles finis

Cette section aborde les problèmes de dénombrement. Pour être en mesure de la comprendre, il faut être à l'aise avec les notions d'application, d'injection, de surjection et de bijection. Il faut aussi posséder quelques rudiments en théorie des ensembles. On pourra consulter à cette fin les sections A.2 page 1129 et A.4 page 1131 de l'annexe A.

8.2.1 Définitions

Notation 8.6 Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tels que $m<n$. On convient de noter $[\![m,n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre m et n :

$$[\![m,n]\!] = \{k\in\mathbb{N} \mid m \leqslant k \leqslant n\}$$

LEMME 8.8 **Un premier lemme technique**
Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. Si il existe une bijection de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ alors $m=n$

Démonstration *La démonstration de ce lemme est difficile aussi on l'admettra. On pourra consulter l'exercice 8.13 page 322 qui lui est consacré.*

PROPOSITION 8.9 ♡ **Ensemble fini,Cardinal**
Soit E un ensemble. On dit que E est un *ensemble fini* si :

$$\begin{cases}\text{Soit } E=\varnothing\\ \text{Soit il existe } n\in\mathbb{N} \text{ et une bijection entre E et } [\![1,n]\!]\end{cases}$$

Si un tel entier n existe, il est alors le seul à vérifier cette propriété. On l'appelle *cardinal* de E et on le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou encore $\sharp E$.
Si E est vide, on dit que son cardinal est nul : $\mathrm{Card}(E)=0$.
Si un ensemble n'est pas fini alors on dit qu'il est *infini*.

Démonstration *Supposons que* $E\neq\varnothing$ *et supposons qu'il existe deux entiers* n *et* m *et deux applications bijectives* $\varphi : E\to[\![1,n]\!]$ *et* $\psi : E\to[\![1,m]\!]$ *alors* $\varphi\circ\psi^{-1}$ *est une bijection de* $[\![1,m]\!]$ *dans* $[\![1,n]\!]$ *et d'après le lemme précédent, on a* $n=m$.

Remarque 8.3 Il ne faut pas être décontenancé par le côté abstrait de cette définition. Quand on dénombre un ensemble d'objets, on ne fait rien d'autre que de construire une bijection entre cet ensemble et l'intervalle d'entiers $[\![1,n]\!]$.

DÉFINITION 8.7 ♡ **Ensembles équipotents**
Deux ensembles finis sont dits *équipotents* si ils ont même cardinal.

8.2.2 Propriétés des cardinaux

Lemme 8.10 Un second lemme technique
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \neq 0$ et soit $a \in E$. L'ensemble $E' = E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $n-1$.

Démonstration *Comme* E *est de cardinal* $n>0$*, il existe une bijection* $\varphi : E \to [\![1,n]\!]$*. Il y a deux possibilités :*
- *Si* $\varphi(a) = n$ *alors* $\varphi_{|E'}$ *est définie sur* E' *et à valeurs dans* $[\![1,n-1]\!]$ *et est bijective.*
- *Si* $\varphi(a) = p < n$ *alors en considérant l'application* $\psi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ *qui échange* p *et* n *et laisse invariant les autres éléments de* $[\![1,n]\!]$*,* ψ *est bijective et il en est de même de* $\psi\circ\varphi : E \to [\![1,n]\!]$*. De plus,* $\psi\circ\varphi(a) = n$ *et on est ramené au cas précédent.*

Théorème 8.11 Partie d'un ensemble finie
Si E est un ensemble fini et F une partie de E alors :
– F est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
– $\boxed{\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E) \iff F = E}$

Démonstration *Démontrons la première propriété par récurrence sur le cardinal de* E.
- *Si* $\mathrm{Card}(E) = 0$ *alors* E *est vide et il en est de même de* F*. La propriété est donc démontrée au rang* 0.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Supposons la propriété vraie pour un ensemble de cardinal* n *et montrons là pour un ensemble* E *de cardinal* $n+1$.
  - *Si* $F = E$ *alors* F *est fini et* $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$
  - *Sinon, il existe un élément* a *de* E *qui n'est pas élément de* F*. Posons :* $E' = E \setminus \{a\}$*.* E' *est non vide,* F *est inclus dans* E' *et par application du lemme précédent,* E' *est de cardinal* $\mathrm{Card}(E) - 1 = n+1-1 = n$*. On peut alors appliquer à* E' *l'hypothèse de réccurence :* F *est un sous ensemble fini de* E'*, donc de* E *et* $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E') = \mathrm{Card}(E) - 1 < \mathrm{Card}(E)$*. La propriété est alors prouvée par application du théorème de récurrence.*

Démontrons maintenant la seconde propriété. On sait déjà que si $F = E$ *alors* $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$*. Il s'agit de prouver la réciproque. Par l'absurde, nous supposons que* $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$ *mais que* $F \neq E$*. Il existe alors* $a \in E$ *tel que* $F \subset E' = E \setminus \{a\}$*. Mais, d'après le lemme précédent,* $\mathrm{Card}(E') = \mathrm{Card}(E) - 1$ *et d'après la propriété que nous venons de prouver,* $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E') = \mathrm{Card}(E) - 1 < \mathrm{Card}(E)$ *ce qui contredit notre hypothèse de départ. Par conséquent* $E = F$.

Corollaire 8.12
Toute partie d'un ensemble fini est finie.

Proposition 8.13 Caractérisation des parties finies de $\mathbb{N}$
Une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Soit* A *une partie finie de* E*. Nous allons effectuer une démonstration par récurrence sur le cardinal* n *de* A *pour prouver qu'elle est majorée.*
  - *Si* $n = 0$ *alors* A *est vide et donc majorée par n'importe quel entier.*
  - *Fixons* $n \in \mathbb{N}$ *et supposons la propriété vraie pour un ensemble de* A *de cardinal* n.
  - *Soient* A *un ensemble de cardinal* $n+1$ *et* $a \in A$*. Alors* $A \setminus \{a\}$ *est un sous-ensemble de cardinal* n *de* $\mathbb{N}$*. Il est, par application de l'hypothèse de récurrence, majoré. Soit* b *un majorant de* $A \setminus \{a\}$*. Alors* $\max(a,b)$ *est un majorant de* A *et* A *est majoré.*
  - *La propriété est alors prouvée par application du théorème de récurrence.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Soit* A *une partie de* $\mathbb{N}$ *majorée. Soit* n *un majorant de* A*. Alors* $A \subset [\![0,n]\!]$ *et par conséquent,* A *est finie de cardinal inférieur ou égal à* n.

Lemme 8.14 Un troisième et dernier lemme technique
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une bijection strictement croissante de $[\![0,n]\!]$ dans $\mathbb{N}$ alors : $\forall p \in [\![0,n]\!], \quad f(p) \geqslant p$.
2. Si f est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geqslant n$.

Démonstration *Nous allons effectuer une récurrence sur* n.
- *Si* $n = 0$ *la propriété est trivialement vérifiée.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$.
- *Supposons la propriété vraie au rang* n *et prouvons là au rang* $n+1$*.* f *est donc une bijection strictement croissante de* $[\![0,n+1]\!]$ *dans* $\mathbb{N}$*. Par conséquent,* $f_{|[\![0,n]\!]}$ *est une bijection strictement croissante de* $[\![0,n]\!]$ *dans* $\mathbb{N}$ *et appliquant l'hypothèse de récurrence :* $\forall p \in [\![0,n]\!], \quad f(p) \geqslant p$*. En particulier,* $f(n) \geqslant n$*. Mais comme* f *est strictement croissante :* $f(n+1) > f(n) \geqslant n$ *donc* $f(n+1) \geqslant n+1$.
- *La propriété est donc prouvée par application du principe de récurrence.*

La seconde partie du lemme est une application de la première à $f_{|[\![0,n]\!]}$.

Proposition 8.15
Si P est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$ de cardinal n alors il existe une et une seule bijection strictement croissante de l'intervalle $[\![1,n]\!]$ dans P.

Démonstration

– *Prouvons par récurrence sur n l'existence de cette bijection. Si $n=1$ alors P contient un unique élément qu'on note a. L'application φ définie sur le singleton $\{1\}$ dans le singleton $\mathrm{P}=\{a\}$ qui à 1 associe a est une bijection strictement croissante de $[\![1,1]\!]$ dans P. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que pour un ensemble P de cardinal n il existe une bijection strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ dans P. Soit P un ensemble de cardinal $n+1$. Comme P est une partie finie de $\mathbb{N}$, d'après la proposition 8.13, P admet un plus grand élément a. Alors $\mathrm{P}'=\mathrm{P}\setminus\{a\}$ est un ensemble de cardinal n et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une bijection strictement croissante $\varphi:[\![1,n]\!]\to\mathrm{P}'$. On prolonge φ à P en posant $\varphi(n+1)=a$. Alors φ ainsi prolongée est une bijection strictement croissante de $[\![1,n+1]\!]$ dans P car a est le plus grand élément de P. La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence.*
– *Prouvons maintenant l'unicité de cette bijection. Supposons que φ_1 et φ_2 sont deux bijections strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans P. Alors $\varphi=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ est une bijection strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même. D'après le lemme précédent, il s'ensuit que $\forall p\in[\![1,n]\!],\quad \boxed{\varphi(p)\geqslant p}$. Mais $\varphi^{-1}=\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$ est aussi une bijection strictement croissante de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même et on aussi que $\forall p\in[\![1,n]\!],\quad \varphi^{-1}(p)\geqslant p$, ce qui s'écrit encore, φ étant strictement croissante : $\forall p\in[\![1,n]\!],\quad \boxed{p\geqslant\varphi(p)}$. En conclusion, $\forall p\in[\![1,n]\!],\quad \varphi(p)=p$ et donc $\varphi=\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$. On a prouvé alors prouvé que $\varphi_1=\varphi_2$.*

8.2.3 Applications entre ensembles finis

PROPOSITION 8.16 **Caractérisation des applications injectives entre ensembles finis**
Soient E et F deux ensembles finis et $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$. On a :

1. $\mathrm{Card}\big(f(\mathrm{E})\big)\leqslant\mathrm{Card}(\mathrm{E})$
2. f est injective si et seulement si $\mathrm{Card}\big(f(\mathrm{E})\big)=\mathrm{Card}(\mathrm{E})$

Démonstration

1. *Pour tout $y\in f(\mathrm{E})$, on choisit un élément $x_y\in\mathrm{E}$ tel que $f(x_y)=y$. Soit $\mathrm{F}=\{x_y\in\mathrm{E}\mid y\in f(\mathrm{E})\}$. $f_{|\mathrm{F}}$ est une bijection de F sur $f(\mathrm{F})=f(\mathrm{E})$. Par conséquent $\mathrm{Card}\big(f(\mathrm{E})\big)=\mathrm{Card}\mathrm{F}\leqslant\mathrm{Card}\mathrm{E}$.*
2. $\boxed{\Rightarrow}$ *Si f est injective alors f réalise une bijection de E sur $f(\mathrm{E})$ et donc : $\mathrm{Card}\big(f(\mathrm{E})\big)=\mathrm{Card}(\mathrm{E})$.*
   $\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si $\mathrm{Card}\big(f(\mathrm{E})\big)=\mathrm{Card}(\mathrm{E})$ alors, avec les notations de la preuve précédente, $\mathrm{Card}(\mathrm{F})=\mathrm{Card}\big(f(\mathrm{E})\big)=\mathrm{Card}(\mathrm{E})$ et donc tout élément de $f(\mathrm{E})$ possède un et un seule antécédent. f est donc injective.*

THÉORÈME 8.17 **Bijections et ensembles finis**
Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$. On a équivalence entre :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Démonstration *On a les équivalences : f est injective $\Longleftrightarrow\mathrm{Card}\big(f(\mathrm{E})\big)=\mathrm{Card}(\mathrm{E})\Longleftrightarrow\mathrm{Card}\big(f(\mathrm{E})\big)=\mathrm{Card}\mathrm{F}\Longleftrightarrow f$ est surjective. D'où l'équivalence des trois propositions.*

PROPOSITION 8.18 **Principe des tiroirs**
Soient E et F deux ensembles finis non vides avec $\mathrm{Card}\mathrm{E}>\mathrm{Card}\mathrm{F}$ et $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$.
On a : f n'est pas injective. Autrement dit, il existe deux éléments distincts i et j de E pour lesquels $f(i)=f(j)$.

Démonstration *Par récurrence sur le cardinal de E. Si $\mathrm{Card}\mathrm{E}=2$, alors $\mathrm{Card}\mathrm{F}=1$ et la proposition est claire.*
Si $\mathrm{Card}\mathrm{E}=n+1$, alors on ne s'intéresse qu'aux F de cardinal $\leqslant n$. Si $\mathrm{Card}\mathrm{F}<n$, alors on applique la propriété de récurrence à la restriction de f à une partie de E à n éléments.
Si $\mathrm{Card}\mathrm{E}=n$, on considère la restriction $\tilde f$ de f à une partie $\mathrm{E}\setminus\{i_0\}$ de E à n éléments. Supposons qu'elle soit injective (sinon c'est gagné), d'après la proposition 8.17, elle est surjective. Donc $f(i_0)$ admet un antécédent i_1 par $\tilde f$, et par suite $f(i_0)=f(i_1)$ et f n'est pas injective.

Remarque 8.4 Cette proposition de bon sens dit que si on range des chaussettes dans une commode, on est assuré d'avoir au moins un tiroir qui comporte au moins deux chaussettes. Elle permet de résoudre un grand nombre d'exercices.

8.3 Opérations sur les ensembles finis

PROPOSITION 8.19 ♡ **Cardinal d'une réunion disjointe**
Soient A et B deux ensembles finis **disjoints**. Alors $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ est fini et :

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{Card}(\mathrm{A})+\mathrm{Card}(\mathrm{B})}$$

Démonstration *Posons* $n = \text{Card}(A)$ *et* $m = \text{Card}(B)$. *Soit* $\varphi : A \to [\![1,n]\!]$ *et* $\psi_1 : B \to [\![1,m]\!]$ *deux bijections. Posons*

$$\psi : \begin{cases} B & \longrightarrow & [\![n+1, n+m]\!] \\ x & \longmapsto & \psi(x) + n \end{cases}.$$

L'application ψ *est encore bijective. Considérons enfin l'application :*

$$\theta : \begin{cases} A \cup B & \longrightarrow & [\![1, m+n]\!] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ \psi(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{cases}$$

θ *est clairement bien définie car* $A \cap B = \varnothing$ *et est une bijection de* $A \cup B$ *sur* $[\![1, m+n]\!]$ *ce qui prouve que* $\text{Card}(A \cap B) = m + n = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

COROLLAIRE 8.20 ♡ **Cardinal du complémentaire**
Soit A une partie d'un ensemble fini E alors

$$\boxed{\text{Card}\left(A^c\right) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)}$$

où A^c désigne le complémentaire de A dans E.

Démonstration *Il suffit d'appliquer la proposition précédente à* A *et* $B = A^c$.

COROLLAIRE 8.21 ♡ **Cardinal d'une réunion finie disjointe**
Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties d'un ensemble fini E deux à deux disjointes (c'est à dire telles que, pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$), alors :

$$\boxed{\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_n)}.$$

Démonstration *La preuve est laissée en exercice au lecteur. Elle s'effectue par récurrence et la proposition précédente permet d'initialiser cette récurrence.*

COROLLAIRE 8.22 ♡ **Lemme des bergers**
Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties d'un ensemble fini E qui forment une partition de E (voir **??** p.**??**). On suppose de plus que tous les $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ont le même cardinal à savoir p. Dans ces conditions :

$$\boxed{\text{Card}(E) = n \times p}.$$

COROLLAIRE 8.23 ♡ **Cardinal d'une union**
Si A et B sont deux parties d'un ensemble fini E alors $A \cup B$ est fini et :

$$\boxed{\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)}.$$

Démonstration
On peut partitionner $A \cup B$ *de la façon suivante :*

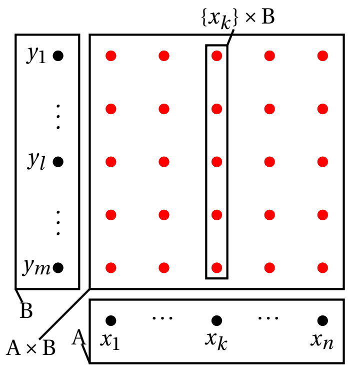
$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

On applique alors la proposition précédente.

PROPOSITION 8.24 ♡ **Cardinal d'un produit cartésien**
Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\boxed{\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)}.$$

Démonstration



Supposons que $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ *où* n *est le cardinal de* A. *On a :*

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \quad \text{et} \quad b\in B\}=\bigcup_{k=1}^{n}\left(\{x_k\}\times B\right) \quad (\star).$$

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ *l'application* $\theta_i:\left\{\begin{array}{ccc}\{x_k\}\times B & \longrightarrow & B\\ (x_i,y) & \longmapsto & y\end{array}\right.$ *est bijective donc* $\operatorname{Card}\left(\{x_k\}\times B\right)=\operatorname{Card}(B)$. *De plus les ensembles de la réunion* $(\star)$ *sont deux à deux disjoints. D'après la proposition précédente, on a :*

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A\times B) &= \operatorname{Card}(\{x_1\}\times B)+\ldots+\operatorname{Card}(\{x_n\}\times B)\\ &= \underbrace{\operatorname{Card}(B)+\ldots+\operatorname{Card}(B)}_{n \text{ fois}}\\ &= n.\operatorname{Card}(B)=\operatorname{Card}(A)\operatorname{Card}(B)\end{aligned}$$

COROLLAIRE 8.25 **Cardinal d'un produit fini**
Soient E un ensemble fini et soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors E^n est fini et :

$$\boxed{\operatorname{Card}\left(E^n\right)=(\operatorname{Card}(E))^n}$$

Démonstration *Par une récurrence facile.*

8.4 Dénombrement

8.4.1 Nombre de p-listes d'un ensemble fini

DÉFINITION 8.8 ♡ **p-liste**
Soient A un ensemble et $p\in\mathbb{N}$. On appelle *p-liste d'éléments de* A tout p-uplet d'éléments de A c'est à dire tout élément de A^p.

Exemple 8.7
- $(1,4,7,2,7)$ est une 5-liste de $\mathbb{N}$.
- $(\pi,e,i,-1)$ est une 4-liste de $\mathbb{C}$.
- $(i,e,\pi,-1)$ est une 4-liste de $\mathbb{C}$ différente de la précédente.

PROPOSITION 8.26 ♡ **Nombre de p-listes d'un ensemble fini**
Soient A un ensemble fini de cardinal n et $p\in\mathbb{N}$. Le nombre de p-listes d'éléments de A est $\boxed{n^p}$.

Démonstration *On a :* $\operatorname{Card}\left(E^p\right)=(\operatorname{Card}(E))^p=n^p$.

À méditer :

Exemple 8.8
- Le nombre de codes de 4 lettres est 26^4.
- Le nombre de façons de réaliser un collier de 30 perles avec 3 couleurs de perles est 3^{30}
- Le nombre de bouquets de 10 fleurs quand on choisit ces fleurs parmi 5 espèces est 5^{10}.

8.4.2 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Notation 8.9 Si E et F sont des ensembles, l'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E.

PROPOSITION 8.27 ♡ **Nombre d'application entre deux ensembles finis**
Si E et F sont des ensembles sont des ensembles finis de cardinaux respectifs p et n alors :

$$\boxed{\operatorname{Card}(\mathscr{F}(E,F))=\operatorname{Card}(F)^{\operatorname{Card}(E)}=n^p}$$

Démonstration Supposons que $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n = \text{Card}(E)$. Posons : $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^p \\ u & \longmapsto & (u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{array} \right.$. L'application θ associe à toute fonction de E dans F la p-liste des images des éléments de E. θ est injective et surjective, donc bijective. On en déduit que $\text{Card}(F)^{\text{Card}(E)} = n^p$

8.4.3 Arrangement

DÉFINITION 8.9 ♡ **Arrangement**
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *p-arrangement de* E une injection de $[\![1, p]\!]$ dans E. On note A_n^p le *nombre de p-arrangements de* E

Remarque 8.5
- $A_1^1 = n$.
- Si $p > n$, $A_n^p = 0$.
- Si $p = 0$, l'unique application de l'ensemble vide dans E est injective et donc on écrira $A_n^0 = 1$.

Remarque 8.6 Se donner un p-arrangement revient à se donner une p-liste de E sans répétition.
En effet, d'après la définition, un p-arrangement de E est une injection φ de $[\![1, p]\!]$ dans E. Cette injection est entièrement caractérisée par la p-liste de ses images : $(\varphi(1), \dots, \varphi(p))$. Il n'y a pas de répétition dans cette p-liste car φ est injective.

PROPOSITION 8.28 ♡ **Nombre de p-arrangements d'un ensemble fini**
Soient E un ensemble fini de cardinal n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre de p-arrangements de E est :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}.$$

Démonstration Notons $\mathscr{I}$ l'ensemble des p-arrangements de E. Comme $\mathscr{I}$ est un sous ensemble de $\mathscr{F}(E, F)$ et que ce dernier est de cardinal fini, il en est de même de $\mathscr{I}$.
Afin de calculer le cardinal de $\mathscr{I}$, nous allons effectuer un raisonnement par récurrence sur p.

1. Si $p = 0$, on a déjà vu que $A_n^0 = 1$. La formule est donc vraie pour $p = 0$.
2. Si $p = 1$, $[\![1, p]\!] = \{1\}$ est un singleton et une injection de $\{1\}$ dans E est déterminée par l'image de 1 par cette injection. Comme E compte n éléments, il y a n images possibles pour 1 et cardinal de $\mathscr{I}$ est $n = \dfrac{n!}{(n-1)!}$.
3. Soit $p < n \in \mathbb{N}$.
4. Supposons la relation vraie au rang p, c'est notre hypothèse de récurrence, et vérifions là au rang $p + 1 \leqslant n$. Une injection φ de $[\![1, p+1]\!]$ dans E est déterminée par sa restriction à $[\![1, p]\!]$: $\varphi_{|[\![1,p]\!]}$ et par l'image de $p + 1$ dans E. Par application de l'hypothèse de récurrence, il y a A_p^n possibilités pour le choix de $\varphi_{|[\![1,p]\!]}$ et du coup $n - p$ possibilités pour le choix de l'image de $p + 1$ par φ dans E. Au total, cela fait $(n-p) \times A_n^p$ possibilités, soit A_n^{p+1} possibilités et $\text{Card}\,\mathscr{I} = A_n^{p+1}$
5. Par application du théorème de récurrence, la formule est démontrée.

COROLLAIRE 8.29 ♡ **Nombre de bijections d'un ensemble fini**
Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de bijections de E dans lui même est $n!$.

À méditer :

Exemple 8.10
- Le nombre de tiercés possibles quand 15 chevaux sont en course est A_15^3.
- Le nombre de mots de 4 lettres **sans lettre répétée** est A_{26}^4.
- Le nombre de classements possibles dans une course automobile comptant 20 voitures est 20!.

8.4.4 Combinaison

DÉFINITION 8.10 ♡ **Combinaison**
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-combinaison de E un sous ensemble de cardinal p de E. On note C_n^p ou $\dbinom{n}{p}$ le **nombre de p-combinaisons de** E

Exemple 8.11
– $\{1,4,7,2,7\}$ est une 5-combinaison de $\mathbb{N}$.
– $\{\pi, e, i, -1\}$ est une 4-combinaison de $\mathbb{C}$.
– $\{i, e, \pi, -1\}$ représente la même 4-combinaison que la précédente.

Remarque 8.7

- $\binom{n}{0} = 1$ car l'ensemble vide est l'unique sous ensemble de E ayant 0 élément.
- $\binom{n}{1} = n$.
- $\binom{n}{n} = n$.
- Si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

PROPOSITION 8.30 ♡ **Nombre de p-combinaison d'un ensemble fini**
Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \leqslant n$. Le nombre de p-combinaisons de E est

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}}$$

Démonstration *Se donner un p-arrangement revient à se donner une p-combinaison puis à ordonner les éléments de cette p-combinaison, c'est à dire à choisir une bijection de cette p-combinaison dans elle même. Le nombre de bijections d'une p-combinaison de* E *dans elle même est $p!$. On a donc :*

$$\text{Nombre de } p\text{-arrangements de E} = \left(\text{Nombre de } p\text{-combinaisons dans E}\right) \times p!$$

Soit $A_n^p = C_n^p \times p!$. Ce qui prouve la propriété.

En résumé :

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \quad C_n^p = \binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

À méditer :

Exemple 8.12
– Le nombre de tirages possibles au loto est $\binom{49}{7}$.
– Le nombre de mains (c'est à dire de 5-uplet de cartes) au poker est $\binom{32}{5}$.

PROPOSITION 8.31 ♡ **Relation de Pascal**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$:

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. Formule de factorisation : $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ si $p \geqslant 1$
3. **Relation de Pascal** : $\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$

Cette dernière égalité ainsi que la remarque 8.7 permettent de construire le triangle de Pascal :

COROLLAIRE 8.32 ♡ **Triangle de Pascal**

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4 +	6 =	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

À l'intersection de la p^e et de la n^e colonne, on lit le coefficient $\binom{n}{p}$.

PROPOSITION 8.33 ♡ **Nombre de partie d'un ensemble fini**
Soit E un ensemble de cardinal n. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E a pour cardinal 2^n et donc :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration *On fait une démonstration par récurrence sur le cardinal n de E :*

1. *si $n = 0$ alors $\operatorname{Card}(E) = 0$ et $E = \varnothing$. E ne contient donc que la partie vide et $\operatorname{Card}(E) = 2^0 = 1$. La propriété est donc vraie au rang 0.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Supposons la propriété vraie pour un ensemble de cardinal n. C'est notre hypothèse de récurrence. Prouvons que la propriété est vraie pour un ensemble de cardinal $n+1$. Soient E un ensemble de cardinal $n+1$ et $a \in E$. Posons $E' = E \setminus \{a\}$. E' est de cardinal n. Il y a deux types de parties dans E :*
   - *Celles qui contiennent a. Ce sont exactement les parties de E' auxquelles on adjoint a. Par application de l'hypothèse de récurrence, il y a 2^n parties dans E' et donc 2^n parties de E qui contiennent a.*
   - *Celles qui ne contiennent pas a. Ce sont exactement les parties de E'. Toujours par application de l'hypothèse de récurrence, on compte 2^n parties dans E'.*

   Au total, E est donc constitué de $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ parties. La propriété est donc démontrée pour un ensemble de cardinal $n+1$.
4. *Par application du théorème de récurrence, la propriété est démontrée pour tout ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.*

THÉORÈME 8.34 ♡♡♡ **Formule du binôme de Newton**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration *Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Effectuons une récurrence sur n.*

1. *si $n = 0$ l'égalité est trivialement vérifiée.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Supposons l'égalité vérifiée au rang n, c'est notre hypothèse de récurrence :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

et prouvons la au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \text{ par application de l'hypothèse de récurrence} \\
&= (a+b)\left(\binom{n}{0}b^n+\binom{n}{1}ab^{n-1}+\binom{n}{2}a^2b^{n-2}+\dots+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b+\binom{n}{n}a^n\right) \\
&= \left(\binom{n}{0}ab^n+\binom{n}{1}a^2b^{n-1}+\binom{n}{2}a^3b^{n-2}+\dots+\binom{n}{n-1}a^nb+\binom{n}{n}a^{n+1}\right) \\
&\quad +\left(\binom{n}{0}b^{n+1}+\binom{n}{1}ab^n+\binom{n}{2}a^2b^{n-1}+\dots+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b^2+\binom{n}{n}a^nb\right) \\
&= \binom{n}{0}b^{n+1}+\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)ab^n+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)a^2b^{n-1}+\dots+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)a^nb+\binom{n}{n}a^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}b^{n+1}+\binom{n+1}{1}ab^n+\binom{n+1}{2}a^2b^{n-1}+\dots+\binom{n+1}{n}a^nb+\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}
\end{aligned}$$

La dernière ligne étant conséquence de la formule de Pascal. Ceci prouve que la formule est vraie au rang $n+1$.

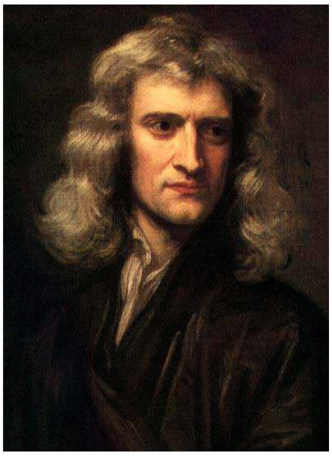
4 *La formule est démontrée par application du théorème de récurrence.*

Remarque 8.8 On peut aussi écrire :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

DÉFINITION 8.11 ♡ **Coefficients binomiaux**
Les nombres $\binom{n}{p}$ sont aussi, en raison de cette dernière égalité, appelés **coefficients binomiaux**.

BIO 6 Isaac Newton, né le 25 décembre 1642, mort le 19 mars 1727



Mathématicien Anglais. L'enfance d'Isaac Newton n'est pas particulièrement heureuse. Il perd son père à trois mois. Sa mère se re-marie quand il a trois ans et il est alors élevé par sa grand mère. À seize ans, sa mère lui enjoint de quitter l'école afin qu'il devienne fermier. Elle se rend vite compte qu'il est plus doué pour les mathématiques que pour l'agriculture aussi l'autorise-t-elle à retourner mener ses études.
À dix-huit ans, il entre au Trinity College de Cambridge où il est remarqué par le mathématicien Isaac Barrow. Pendant sept ans, il étudie les mathématiques, la physique, la philosophie et la théologie. En 1665, il a vingt-cinq ans et la peste s'abat sur la ville. Il est alors obligé de suspendre ses études et de retourner pour deux ans dans son pays natal. C'est à cette période qu'il fera ses découvertes concernant les lois de la gravitation universelle et à la décomposition de la lumière.
En 1669, il prend la chaire d'Isaac Barrow à Cambridge. Il publie son traité sur le calcul infinitésimal. Il fonde ainsi l'analyse moderne.
En 1687, il publie son œuvre majeure ``*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*´´qui marque le début de la mathématisation de la physique et qui contient tous les fondements de la mécanique.
En parallèle de ses travaux scientifiques, Newton s'initie à la chimie dès 1666 et à l'alchimie dès 1668. Il fit partie d'un réseau secret d'alchimistes et se choisit le pseudonyme alchimique Ieoua Sanctus Unus qui signifie en français : « Jéhovah Unique Saint », qui est aussi l'anagramme d'Isaac Neuutonus. Il garda pendant 25 ans le secret sur cette activité. La citation suivante de Keynes permet de comprendre pourquoi un génie de l'envergure de Newton a pu s'intéresser à l'alchimie : « Newton n'est pas le premier de l'âge de la Raison. Il est le dernier des Babyloniens et des Sumériens, le dernier grand esprit qui a contemplé le monde visible et intellectuel avec les mêmes yeux que ceux qui ont commencé à construire notre héritage intellectuel il y a quelque 10 000 ans. »
Newton avait une personnalité complexe et tourmentée. Il répugnait à publier ses travaux, ce qui lui valut différentes querelles de paternité pour certaines de ses inventions. De 1692 à 1693, il souffre d'une grande période de dépression et vit dans un état de prostration mélangeant paranoïa et hallucinations.
En 1699, il rejoint Londres car il est nommé membre du Conseil et de la Royal Society. Il en deviendra président quatre années plus tard. Il est anobli en 1705. Il meurt à Kensington à l'âge de 84 ans. Il est inhumé en grande pompe à l'abbaye de Westminster où sont enterrés les rois d'Angleterre.
Il est considéré comme un des plus grands génies de l'humanité.

Remarque 8.9 La formule du binôme permet de donner une démonstration algébrique de la formule $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

PROPOSITION 8.35 ♡ **Factorisation de** $a^n - b^n$

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

Démonstration *Il suffit de développer la partie de droite de cette égalité et de remarquer que les termes de la somme se télescopent.*

En résumé

A l'issue de ce chapitre, il convient de bien savoir effectuer un raisonnement par récurrence et d'être à l'aise avec sa rédaction.

La connaissance des p-listes, des p-arrangements et des p-combinaisons permet de résoudre des problème de combinatoire. Une des difficultés principales est de choisir le bon outil parmi ces trois. Le tableau qui suit devrait vous être d'une certaine aide.

Tableau récapitulatif

	Ordre important	Répétitions possibles	Calcul	Exemple
p-**liste**	oui	oui	n^p	code
p-**arrangement**	oui	non	A_n^p	tiercé
p-**combinaison**	non	non	C_n^p	loto

La formule du binôme est un résultat essentiel qu'on étendra aux anneaux dans le chapitre 19. On pourra ainsi l'utiliser dans le cadre du cours d'algèbre linéaire avec des endomorphismes ou des matrices.

Enfin, afin d'être à l'aise avec les manipulations et les calculs de sommes ou de produits et avant de vous lancer dans les exercices, lisez le paragraphe B.2 page 1158 de l'annexe B.

8.5 Exercices

8.5.1 Principe de récurrence

Exercice 8.1 ♡

1. *Montrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. *Calculer le nombre de carrés que l'on peut dessiner sur un échiquier* 8×8*, (les cotés sont parallèles aux bords de l'échiquier et les sommets sont des sommets de cases de l'échiquier). Généraliser avec un échiquier* $n \times n$*.*

Solution :

1. *L'égalité est vraie au rang* 1 *:* $1^2 = \frac{1\times2\times3}{6}$*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Supposons la vraie au rang* n *et montrons la au rang* $n+1$ *:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)(n+1) \\ &= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} \\ &= (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

   et la formule est encore vraie au rang $n+1$*. On termine en appliquant le théorème de récurrence.*

2. *Il y a* 64 *carrés* 1×1*, c'est bien connu. Il y a* 49 *carrés* 2×2*. Il suffit pour cela de repérer la position du sommet en haut à gauche. Cela revient à compter sur un échiquier* 7×7*. etc. On trouve au total* $8^2+7^2+\ldots+1^2 = \frac{8\times9\times17}{6} = 4\times3\times17 = 204$*. Cet exercice fait l'objet d'une blague en anglais (How many squares on a chessboard) basée sur le double entendre square = case (de l'échiquier) et square = carré.*
   Sur un échiquier $n\times n$*, il y a* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *tels carrés.*

Exercice 8.2 ♡

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Solution : *L'égalité est vraie au rang* 1 *:* $1^2 = \frac{(1\times2)^2}{2}$*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Supposons la vraie au rang* n *et montrons la au rang* $n+1$ *:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \left(n^2+4n+1\right)\frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{2^2}\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$*. On termine en appliquant le théorème de récurrence.*

Exercice 8.3 ♡

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $n\left(n^2+5\right)$ *est divisible par* 6*.*

Solution : *La propriété est clairement vraie au rang* 0 *ce qui nous permet d'initialiser la récurrence. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On suppose que* 6 *divise* $n\left(n^2+5\right)$*. Montrons que* 6 *divise* $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$*. Mais :*

$$(n+1)\left((n+1)^2+5\right) = n\left(n^2+5\right)+3n^2+3n+6 = n\left(n^2+5\right)+3n(n+1)+6$$

et :
– $n\left(n^2+5\right)$ *est divisible par* 6 *d'après l'hypothèse de récurrence.*
– $3n(n+1)$ *est divisible par* 6 *car l'un des deux* n *ou* $n+1$ *est pair donc divisible par* 2*.*
Donc $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$ *est divisible par* 6 *et la propriété est prouvée par récurrence.*

Exercice 8.4 ♡

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* 7 *divise* $3^{2n+1}+2^{n+2}$*.*

Solution : *On vérifie facilement la propriété au rang* 0*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Supposons la propriété vraie au rang* n *et prouvons la au rang* $n+1$*. Il s'agit de montrer que* $3^{2n+3}+2^{n+3}$ *est divisible par* 7*. Mais :*

$$3^{2n+3}+2^{n+3} = 3^{2n+1}\times 9+2^{2n+2}\times 2 = 3^{2n+1}\times 7+\left(3^{2n+1}+2^{2n+2}\right)\times 2$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, il est clair que 7 *divise ce nombre. La propriété est alors prouvée par récurrence.*

Exercice 8.5 ♡

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ radicaux}}.$

Solution : *La propriété est vraie au rang* 1*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Supposons que la propriété est vraie au rang* n *et prouvons la au rang* $n+1$*. Remarquons au préalable que pour tout* $x \in [0,\pi/2]$*, comme* $\cos^2 x = (\cos(2x)+1)/2$*, on peut écrire* $\cos(x/2) = \sqrt{\frac{\cos x+1}{2}}$ *et*

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) &= \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+1\right)}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ radicaux}}+1\right)} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}_{n+1 \text{ radicaux}}
\end{aligned}$$

On prouve ainsi la propriété par récurrence.

Exercice 8.6 ♡

Soit (u_n) *la suite donnée par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2\\ u_1 = 3\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1}-2u_n \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n+1$*.*

Solution :
Effectuons une récurrence double. La propriété est vraie aux rangs 0 *et* 1*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On suppose qu'elle est vraie au rang* n *et au rang* $n+1$*. On la montre au rang* $n+2$ *:*

$$u_{n+2} = 3u_{n+1}-2u_n = 3\left(2^{n+1}+1\right)-2\left(2^n+1\right) = 3\times 2^{n+1}-2\times 2^n+1 = 6\times 2^n-2\times 2^n+1 = 4\times 2^n+1 = 2^{n+2}+1$$

La propriété est ainsi prouvée par application du principe de récurrence.

Exercice 8.7 ♡

Soit (u_n) *la suite donnée par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}} \end{cases}$$

Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n$.

Solution :
Effectuons une récurrence double. La propriété est vraie aux rangs 0 *et* 1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose qu'elle est vraie au rang* n *et au rang* $n-1$. *On la montre au rang* n *:*

$$u_n = \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}} = \frac{2^{2(n-1)}}{2^{n-2}} = 2^n$$

La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence.

Exercice 8.8 ♡

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Solution :
Effectuons une preuve par récurrence, pour $n \leqslant 2$, *la propriété* $\mathrm{P}_n : 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$. *La propriété* P_2 *est clairement vraie. Soit* $n \leqslant 2$. *On suppose la propriété* P_n *vraie et on va prouver qu e* P_{n+1} *est vraie. On applique l'hypothèse de récurrence et il vient :*

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Il faut alors chercher si $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{3(n+1)}{2n+3}$. *Il suffit de former la différence des deux termes de cette inégalité et après avoir mis au même dénominateur, l'inéquation est équivalente à :* $\frac{n(n+2)}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \geqslant 0$ *qui est vraie. La propriété est alors prouvée au rang* $n+1$. *On termine en appliquant le théorème de récurrence.*

Exercice 8.9 ♡♡

Soit une fonction $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$. *Montrez qu'il existe une suite d'entiers relatifs* (α_k) *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{n}{k}$$

Solution : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *notons* $\mathscr{P}(n)$ *la propriété :*

$$\mathscr{P}(n) : \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n : \quad \forall p \in [\![0, n]\!], \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \binom{p}{k} = f(p).$$

Effectuons une récurrence sur n. *La propriété* $\mathscr{P}(0)$ *est vraie : il suffit de poser* $\alpha_0 = f(0)$. *Soit* $n_i n\mathbb{N}$. *Montrons que* $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. *Si* $\mathscr{P}(n)$ *est vraie, il existe* $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *vérifiant l'hypothèse. Définissons* α_{n+1} *par*

$$\alpha_{n+1} = f(n+1) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{n+1}{k}.$$

On vérifie alors facilement que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $f(p) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \binom{p}{k}$. *De plus, par construction :*

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{n+1}{k} + \alpha_{n+1} \binom{n+1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \binom{n1}{k}.$$

La propriété est alors conséquence du théorème de récurrence.

Exercice 8.10 ♡♡

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, *il existe un entier multiple de* 2^n *qui ne s'écrit qu'avec des "1" et des "2".*

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on considère la proposition* H_n *: il existe un entier* M_n *multiple de* 2^n *qui ne s'écrit qu'avec des "1" et des "2". De plus pour* $n \geqslant 1$, M_n *peut être choisi avec* n *chiffres.*
$\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$ *sont vraies, il suffit de prendre* $\mathrm{M}_0 = 1, \mathrm{M}_1 = 2, \mathrm{M}_2 = 12, \mathrm{M}_3 = 112$.
Montrons que $\mathrm{H}_n \Longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}$.
On cherche M_{n+1} *sous la forme* $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_n + k10^n$ *avec* $k \in \{1,2\}$. M_{n+1} *a bien* $n+1$ *chiffres. D'après* H_n *on peut écrire* $\mathrm{M}_n = m2^n$. *Si* p *est pair,* $p = 2p'$, *alors on choisit* $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_n + 2 \times 10^{n+1} = 2p'2^n + 5^n 2^{n+1} = \left(p' + 5^{n+1}\right)2^{n+1}$. *Si* p *est impair,* $p = 2p'+1$, *alors on choisit* $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_n + 10^n = (2p'+1)2^n + 5^n 2^n = \left(2p'+1+5^n\right)2^n$. *Or* $2p'+1+5^n$ *est pair en tant que somme de deux nombres impairs, on peut donc l'écrire* $2p'+1+5^n = 2q$ *avec* $q \in \mathbb{N}$ *et donc on a bien* $\mathrm{M}_{n+1} = q2^{n+1}$.

Remarque : Si on prend un chiffre pair et un chiffre impair, par exemple 3 *et* 6, *on peut toujours trouver un entier* M_n *multiple de* 2^n *qui ne s'écrit qu'avec des "3" et des "6" et ce pour tout entier* n.

Exercice 8.11 ♡♡

Soit $n \geqslant 2$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0;1]$. *Démontrer que*

$$\frac{x_1}{1 + x_2.x_3.\dots.x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1.x_3.\dots.x_n} + \dots + \frac{x_n}{1 + x_1.x_2.\dots.x_{n-1}} \leqslant n - 1.$$

Solution : *On pose*

$$\mathrm{F}(x_1; x_2; \dots; x_n) = \frac{x_1}{1 + x_2.x_3.\dots.x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1.x_3.\dots.x_n} + \dots + \frac{x_n}{1 + x_1.x_2.\dots.x_{n-1}}.$$

Comme $x_1 \leqslant 1$ *on a* $x_1.x_2.x_3.\dots.x_n \leqslant x_2.x_3.\dots.x_n$ *donc* $\dfrac{x_1}{1 + x_2.x_3.\dots.x_n} \leqslant \dfrac{x_1}{1 + x_1.x_2.x_3.\dots.x_n}$ *De même pour les autres quotients et on a alors*

$$\mathrm{F}(x_1; x_2; \dots; x_n) \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{1 + x_1.x_2.x_3.\dots.x_n}.$$

On démontre ensuite par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, *la propriété :* H_n *pour tous* $x_1; x_2; \dots; x_n \in [0;1]$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant (n-1)(1 + x_1 x_2 \dots x_n)$
La propriété est vraie pour $n = 2$ *:*
$(1 - x_1)(1 - x_2) \geqslant 0$, *soit* $1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2 \geqslant 0$ *soit* $1 + x_1 x_2 \geqslant x_1 + x_2$

Supposons qu'elle soit vraie pour l'entier $n-1$. *On fixe* $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in [0;1]$, *et on considère la fonction affine*

$$\mathrm{G}(x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n-1)(1 + x_1 x_2 \dots x_n).$$

Elle prend son maximum sur $[0;1]$ *en* 0 *ou en* 1.
$\mathrm{G}(0) = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} - (n-1) \leqslant 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(1) &= x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + 1 - (n-1)(1 + x_1 x_2 \dots x_{n-1}) \\
&\leqslant \underbrace{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} - (n-2)(1 + x_1 x_2 \dots x_{n-1})}_{\leqslant 0 \ (\mathrm{H}_{n-1})} + 1 - (1 + x_1 x_2 \dots x_{n-1}) \\
&\leqslant 0 + 1 - 1 - x_1 x_2 \dots x_{n-1} \\
&\leqslant -x_1 x_2 \dots x_{n-1} \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

donc pour tout $x_n \in [0;1], \mathrm{G}(x_n) \leqslant 0$. *CQFD.*
Pour finir, on obtient, en divisant par $1 + x_1 x_2 \dots x_n$ *:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{1 + x_1.x_2.x_3.\dots.x_n} \leqslant n - 1.$$

Exercice 8.12 ♡♡♡

Montrer que $\forall n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k k! = (n+1)! - 1$$

Montrer que tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ *se décompose de façon unique sous la forme*

$$\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{n} a_k k!, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant k, \quad a_n \neq 0$$

Solution : *On a* $\forall\, k \in \mathrm{N}, (k+1)! - 1 - (k! - 1) = k!(k+1-1) = kk!$ *En sommant ces égalités, la somme se télescope en* $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$.

Unicité : On considère deux écritures $\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{n} a_k k! = \sum_{k=1}^{m} b_k k!$. *Quitte à rajouter des* a_k *ou des* b_k *nuls, on peut supposer* $n = m$. *On suppose que les deux suites sont distinctes et on appelle* p *le plus grand entier pour lequel* $a_n \neq b - n$. *Pour fixer les idées,* $a_p < b_p$. *On a donc* $p! \leqslant (b_p - a_p)p! = \sum_{k=1}^{p-1} (a_k - b_k)k! \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} kk! = p! - 1$ *puisque* $a_k - b - k \leqslant k$ *pour tout entier* k. *On a bien une contradiction.*

Existence : Par récurrence sur N. *On a bien* $1 = 11!$ *donc* $n = 1$ *et* $a_1 = 1$. *Supposons la propriété vraie jusqu'au rang* $\mathrm{N} - 1$. *La suite* $(n!)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante et tend vers* $+\infty$ *donc on peut trouver un (unique) entier* n *tel que* $n! \leqslant \mathrm{N} < (n+1)!$ *On écrit la division euclidienne de* N *par* $n!$ *:* $\mathrm{N} = a_n n! + r$ *avec* $0 \leqslant r < n! \leqslant \mathrm{N}$. *On a* $a_n \leqslant n$, *sinon on aurait* $\mathrm{N} \geqslant (n+1)n!$ *ce qui ne convient pas. Si* $r = 0$, *on a une écriture (*$a_k = 0$ *pour* $k \in [\![1, n-1]\!]$*), sinon on écrit* $r = \sum_{k=1}^{p} a_k k!$ *d'après la propriété de récurrence. On a* $p \leqslant n - 1$, *sinon on aurait* $r \geqslant n!$. *On a donc une écriture en prenant, le cas échéant,* $a_k = 0$ *pour* $k = p+1, \dots, n-1$.

Exercice 8.13 ♡♡♡

Démontrer le ***premier lemme technique*** *:*
Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. *Si il existe une bijection de* $[\![1, m]\!]$ *dans* $[\![1, n]\!]$ *alors* $m = n$.

Solution : *Quitte à considérer la bijection réciproque, on peut toujours supposer* $n \leqslant m$.
On démontre par récurrence la propriété
H_n : $\forall\, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m$, *pour toute bijection de* $[\![1, m]\!]$ *dans* $[\![1, n]\!]$ *on a* $m = n$.

H_0 *est vraie, c'est immédiat certes lorsqu'on sait travailler avec l'ensemble vide...Formellement, on peut se passer de la vérification de* H_1 *qui suit.*
H_1 *est vraie. Soit* f *une bijection de* $[\![1, m]\!]$ *dans* $[\![1, 1]\!] = \{1\}$. $\forall\, k \in [\![1, m]\!]$, $f(k) = 1$. *Supposons l'espace d'un instant que* $m > 1$, *on aurait alors* $f(1) = f(2)$ *et* f *ne serait pas injective. Donc* $m = 1$, *ce qu'il fallait démontrer.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. *Démontrons que* $\mathrm{H}_n \Longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}$. *Pour cela, supposons* H_n.

Soit f *une bijection de* $[\![1, m]\!]$ *dans* $[\![1, n+1]\!]$. *Premier cas :* $f(m) = m+1$.
On considère f_1 $[\![1, m-1]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ *défini par* $f_1(k) = f(k)$ *pour* $k \in [\![1, m-1]\!]$. *C'est la (double) restriction de* f *à* f_1 $[\![1, m-1]\!]$ *et en* $[\![1, n]\!]$.

- f_1 *est bien une application.*
- *on a bien* $\forall\, k \in [\![1, m-1]\!]$, $f_1(k) \in [\![1, n]\!]$.
- f_1 *est bien une surjection.*
- f_1 *est bien une injection.*

Vérifications immédiates. Donc f_1 *est une bijection. D'après* H_n, *on en déduit que* $m - 1 = n$ *et donc que* $m = n+1$.
Deuxième cas : $f(m) < n+1$.
Posons $a = f^{-1}(n+1) \in [\![1, m+1]\!]$ *et* $b = f(m) \in [\![1, n+1]\!]$. *On définit* f_1 $[\![1, m-1]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ *par* $f_1(a) = b$ *et* $f_1(k) = f(k)$ *pour* $k \in [\![1, m-1]\!], k \neq a$.

- f_1 *est bien une application.*
- *on a bien* $\forall\, k \in [\![1, m-1]\!]$, $f_1(k) \in [\![1, n]\!]$.
- f_1 *est bien une surjection. Soit* $y \in [\![1, n]\!]$. *Si* $y = b$, *alors* $y = f_1(a)$. *Sinon, comme* f *est une surjection de* $[\![1, m]\!]$ *sur* $[\![1, n+1]\!]$, $\exists\, k \in [\![1, m]\!]$, *tel que* $f(k) = y$. *On ne peut pas avoir* $k = a$ *puisque* $f(a) = n+1 \neq y$ *et on ne peut pas avoir* $k = m+1$ *puisque* $f(m+1) = b \neq y$. *Donc* $f(k) = f_1(k) = b$.
- f_1 *est bien une injection. Supposons* $f_1(k) = f_1(\ell)$ *avec* $k, \ell \in [\![1, n-1]\!]$.
  Supposons $k = a$ *et donc* $f_1(k) = f_1(\ell) = f_1(a) = b$. *On a* $\ell \neq a$ *impossible, car alors* $f_1(\ell) = f(\ell) = b$. *Comme on a aussi* $f(m+1) = b$, f *ne serait plus une injection de* $[\![1, m]\!]$ *dans* $[\![1, n]\!]$. *Contradiction. Donc on a bien* $\ell = k = a$.
  Prenons le cas qui reste, $k, \ell \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{a\}$. *On a donc* $f_1(k) = f(k) = f(\ell) = f_1(\ell)$. *Comme* f *est injective, on en déduit que* $k = \ell$, *ce qu'il fallait démontrer.*

Donc f_1 *est une bijection. D'après* H_n, *on en déduit que* $m - 1 = n$ *et donc que* $m = n+1$. *On a bien* H_{n+1}.

Exercice 8.14 ♡♡♡

On se propose de démontrer la propriété $\mathrm{P}_n\ :\ \forall (a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n,\ \left(\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^n \geqslant a_1.a_2.\dots.a_n$. *Il existe de nombreuses démonstrations de cette inégalité (arithmético-géométrique). Celle-ci, due à Cauchy, utilise la récurrence de façon peu ordinaire.*

1. *démontrer* P_n *lorsque l'un au moins des* a_k *est nul. Par la suite on supposera que tous les* a_k *sont strictement positifs.*
2. *Démontrer* P_2.
3. *Par récurrence, démontrer* P_n *lorsque* n *est une puissance de deux.*
4. *Démontrer* P_n *en toute généralité. L'idée de Cauchy est de compléter la suite* a_k *par des termes tous égaux à la moyenne arithmétique des* a_k*, afin d'avoir un nombre de termes égal à une puissance de deux.*

Solution :

1. *Le produit* $a_1.a_2.\dots.a_n$ *alors que* $\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ *est positif ainsi que ses puissances.*
2. $0\geqslant(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 = a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}$. *Donc* $\dfrac{a_1+a_2}{2}\geqslant a_1a_2$ *d'où le résultat en élevant au carré.*
3. *On démontre que* $\mathrm{P}_{2^m}\Longrightarrow \mathrm{P}_{2^{m+1}}$. *Soit donc* $a_1,a_2,\dots,a_{2^{m+1}}$, 2^{m+1} *nombres (strictement) positifs.*

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}} &= \left(\left[\frac{\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_{2^m}}{2^m}+\dfrac{a_{2^m+1}+a_{2^m+2}+\dots+a_{2^{m+1}}}{2^m}}{2}\right]^2\right)^{2^m}\\ &\geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_{2^m}}{2^m}\times\frac{a_{2^m+1}+a_{2^m+2}+\dots+a_{2^{m+1}}}{2^m}\right)^{2^m}\\ &\geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_{2^m}}{2^m}\right)^{2^m}\times\left(\frac{a_{2^m+1}+a_{2^m+2}+\dots+a_{2^{m+1}}}{2^m}\right)^{2^m}\\ &\geqslant a_1.a_2.\dots.a_{2^m}\times a_{2^m+1}.a_{2^m+2}.\dots.a_{2^{m+1}}\end{aligned}$$

   Ce qu'il fallait vérifier. On a utilisé P_2 *puis deux fois* P_{2^m}.
4. *L'idée de Cauchy : Soit* n *un entier, et* $2^m\geqslant n$. *On pose* $\mathrm{M}=\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ *soit* $a_1+a_2+\dots+a_n = n\mathrm{M}$ *et on considère la suite* b_k *définie par* $b_k=a_k$ *pour* $k\leqslant n$ *et* $b_k=\mathrm{M}$ *sinon. On a* $b_1+b_2+\dots+b_{2^m} = b_1+b_2+\dots+b_n+(2^m-n)\mathrm{M} = n\mathrm{M}+(2^m-n)\mathrm{M} = 2^m\mathrm{M}$. *Résultat prévisible : on ne change pas la moyenne arithmétique en rajoutant des termes égaux à cette moyenne arithmétique.*
   D'après P_{2^m} *on a* $\mathrm{M}^{2^m}\geqslant b_1.b_2.\dots.b_n\times\mathrm{M}^{2^m-n}$ *donc en divisant par* $\mathrm{M}^{2^m-n}>0$ *puisque les* a_k *sont strictement positifs,* $\mathrm{M}^n\geqslant a_1.a_2.\dots.a_n$ *ce qu'il fallait vérifier.*

8.5.2 Sommes

Exercice 8.15 ♡

Simplifier, pour $n\in\mathbb{N}^*$*, les sommes suivantes :*

1. $\sum_{k=1}^{n+1}k-\sum_{l=0}^{n}l$
2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$
3. $\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$
4. $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

Indication 8.12 : Pour les deux derniers, on pourra utiliser les résultats des exercices 8.1 et 8.2.

Solution :

1. $\sum_{k=1}^{n+1}k-\sum_{l=0}^{n}l=\sum_{k=0}^{n}(k-k)+n+1=\boxed{n+1}$.
2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=0}^{n}k+n+1=2\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=\boxed{(n+1)^2}$.
3. $\sum_{k=1}^{n}k(k-1)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}=\boxed{\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}}$
4. $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^3+3k^2+2k\right)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2+3\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\dfrac{n(n+1)}{2}=\boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$.

Exercice 8.16 ♡

Simplifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$.
2. $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
3. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$
4. $\sum_{k=0}^{n}(k.k!)$

Indication 8.12 : Pour les deux derniers, on pourra écrire le terme général de la somme comme une différence.

Solution :

1. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\boxed{1-\frac{1}{n+1}}$ *par télescopage.*
2. $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n+1}{n}\right)=\boxed{\ln(n+1)}$ *par télescopage.*
3. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=\boxed{1-\frac{1}{(n+1)!}}$ *par télescopage.*
4. $\sum_{k=0}^{n}(k.k!)=\sum_{k=0}^{n}(((k+1)-1).k!)=\sum_{k=0}^{n}((k+1)\,k!-k!)=\sum_{k=0}^{n}((k+1)!-k!)=\boxed{(n+1)!-1}$ *par télescopage.*

Exercice 8.17 ♡

Soit $n\geqslant 1$. On considère les deux sommes

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$$

$$\tilde{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$

1. (a) *Calculer S_1, S_2 et S_3.*
   (b) *Démontrer par récurrence que : $\forall n\geqslant 1,\quad S_n=2n^4-n^2$*
2. (a) *Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{p(p+1)}=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{p+1}$.*
   (b) *En déduire une expression simple de $\tilde{S}_n$.*
   (c) *Retrouver ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence.*

Solution :

1. (a) $S_1=1$, $S_2=28$ *et* $S_3=153$.
   (b) *La formule est vraie au rang 1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons la formule vraie au rang $n+1$ et démontrons là au rang $n+1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on calcule que $S_{n+1}=S_n+(2n+1)^3=2n^4-n^2+8n^3+12n^2+6n+1=2n^4+8n^3+11n^2+6n+1$. Par ailleurs $2(n+1)^4-(n+1)^2=2n^4+8n^3+11n^2+6n+1$ et donc $S_{n+1}=2(n+1)^4-(n+1)^2$. La propriété est prouvée par récurrence.*
2. (a) *Après mise au même dénominateur et identification, on trouve :$\alpha=1$ et $\beta=-1$.*
   (b) *On en déduit que :*

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}\\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

   par télescopage

   (c) *La propriété est vraie au rang 1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons la formule vraie au rang $n+1$ et démontrons là au rang $n+1$. Appliquant l'hypothèse de récurrence :*

$$\tilde{S}_{n+1}=\tilde{S}_n+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}$$

   et la formule est prouvée par récurrence.

8.5.3 Produit

Exercice 8.18 ♡

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} 2k$
2. $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$
3. $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$
4. $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Solution : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

1. $\prod_{k=1}^{n} 2k = \boxed{2^n n!}$
2. $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{\ldots}{k+1} \times \frac{k+1}{\ldots} \times \ldots \times \frac{n}{n+1} = \boxed{\frac{1}{n+1}}$ *par télescopage.*
3. *Par télescopage ou en reconnaissant l'inverse du produit précédent :* $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \boxed{n+1}$
4. $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1\times 3}{2^2} \times \frac{2\times 4}{3^2} \times \frac{3\times 5}{4^2} \times \ldots \times \frac{(n-1)\times(n+1)}{n^2} = \boxed{\frac{n+1}{2n}}$ *encore par télescopage.*

Exercice 8.19 ♡

Le but de cet exercice est de calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le produit

$$\mathrm{P}(x) = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(2^k x\right)$$

1. *Traiter le cas où $x = 0 \quad [\pi]$*
2. *Pour $x \neq 0 \quad [\pi]$ simplifier $\sin(x)\,\mathrm{P}(x)$ et calculer $\mathrm{P}(x)$.*

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Si $x = 0 \quad [2\pi]$, il est clair que $\mathrm{P}(0) = 1$. Sinon, si $x = \pi \quad [2\pi]$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2^k x = \pi \quad [2\pi]$ et $\mathrm{P}(x) = -1$.*
2. *Soit $x \neq 0 \quad [\pi]$. On a, grâce aux formules de trigonométrie :*

$$\begin{aligned}
\sin x \mathrm{P}(x) &= \sin x . \cos x . \cos(2x) \ldots . \cos\left(2^n x\right) \\
&= \frac{1}{2} \sin(2x) . \cos(2x) \ldots . \cos\left(2^n x\right) \\
&= \frac{1}{2^2} \sin\left(2^2 x\right) . \cos\left(2^2 x\right) \ldots . \cos\left(2^n x\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sin\left(2^n x\right) \cos\left(2^n x\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sin\left(2^{n+1} x\right)
\end{aligned}$$

Comme $x \neq 0 \quad [\pi]$: $\boxed{\mathrm{P}(x) = \frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin x}}$

Exercice 8.20 ♡

On veut calculer pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ le produit $\mathrm{P} = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$.

1. *Calculer P quand $a = 1$.*
2. *Calculer $(1-a)\,\mathrm{P}$ quand $a \neq 1$ et en déduire la valeur de P.*

Solution :

1. *Si $a = 1$, $\mathrm{P} = 2^{n+1}$.*

2. *Supposons $a \neq 1$.*

$$\begin{aligned}
(1-a)\,\mathrm{P} &= (1-a)(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^{2^2}\right)\left(1+a^{2^3}\right)\dots\left(1+a^{2^n}\right)\\
&= \left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)\left(1+a^{2^2}\right)\left(1+a^{2^3}\right)\dots\left(1+a^{2^n}\right)\\
&= \left(1-a^{2^2}\right)\left(1+a^{2^2}\right)\left(1+a^{2^3}\right)\dots\left(1+a^{2^n}\right)\\
&= \vdots\\
&= \left(1-a^{2^n}\right)\left(1+a^{2^n}\right)\\
&= 1-a^{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{P} = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}}$

8.5.4 Factorielles

Exercice 8.21 ♡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de factorielles :

1. $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$
2. $1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$
3. *le terme général de la suite (u_n) donnée par la relation de récurrence : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1}u_n$.*

Solution :

1. $2 \times 4 \times \dots \times (2n) = \boxed{2^n n!}$
2. $1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} = \boxed{\dfrac{(2n)!}{2^n n!}}$
3. *On a* $u_n = \dfrac{2n-1}{n} \times \dfrac{2n-3}{n-1} \times \dots \times \dfrac{5}{2} \times \dfrac{3}{1} \times 1 = \dfrac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n!} = \boxed{\dfrac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}}$.

Exercice 8.22 ♡♡

Résoudre l'inéquation $4^n \leqslant n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution : *Considérons la suite (u_n) de terme général $4^n/n!$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On vérifie facilement que $u_{n+1}/u_n = 4/(n+1)$. Donc la suite est strictement décroissante dés que $n \geqslant 4$. On calcule alors les premières valeurs de la suite. On trouve :*

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
1	4	8	32/3	32/3	128/15	256/45	1024/315	512/315	2048/2835

donc l'ensemble solution de l'inéquation est $\boxed{[\![9,+\infty]\!]}$

Exercice 8.23 ♡♡

Montrer que

$$\forall n \geqslant 2,\quad n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Solution : *Soit $n \geqslant 2$. On a :*

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \iff n! \leqslant \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n \frac{1}{n^n} \iff n! \leqslant \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right)^n \iff \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{1+2+\dots+n}{n}$$

Mais par comparaison entre la moyenne géométrique et la moyenne arithmétique, voir 1 page 485, on sait que la dernière inégalité est valide. Il en est alors de même de la première.

8.5.5 Coefficients binomiaux, calculs de somme

Exercice 8.24 ♡

Calculer rapidement les expressions suivantes où $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\binom{n}{1}$
2. $\binom{n}{n-2}$ où $n \geqslant 2$
3. $\binom{p+n}{n}$ où $p \in \mathbb{N}$.
4. 99^3
5. 1001^2
6. $(1-x)^5$ où $x \in \mathbb{R}$.
7. $(2a-b)^4$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
8. $(1+i)^{2012}$

Solution :

1. $\binom{n}{1} = n$
2. $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
3. $\binom{p+n}{n} = \dfrac{(n+1)\dots(n+p)}{p!}$
4. $99^3 = (100-1)^3 = 100^3 - 3\times 100^2 + 3\times 100 - 1 = 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 970299$
5. $1001^2 = (1000+1)^2 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$
6. $(1-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$.
7. $(2a-b)^4 = 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$.
8. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc $(1+i)^{2012} = 2^{1006}e^{i503\pi} = -2^{1006}$

Exercice 8.25 ♡

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k$
2. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^{k+1}$
3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 5^{1-k}$
4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1} 2^{3k}$

Solution : *On applique à chaque fois la formule du binôme.*

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k \times 1^{n-k} = (1+3)^n = \boxed{4^n}$
2. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^{k+1} = 4\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k \times 1^{n-k} = \boxed{4\times 5^n}$
3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 5^{1-k} = 5\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1^{n-k}}{(-5)^k} = 5\left(1-\dfrac{1}{5}\right)^n = \boxed{\dfrac{4^n}{5^{n-1}}}$
4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1} 2^{3k} = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 8^k = -(-8+1)^n = \boxed{-(-7)^n}$.

Exercice 8.26 ♡

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \in [\![0,n]\!]$.

1. *Montrer que :* $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.
2. *En déduire que :* $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$

Solution :

1. $$p\binom{n}{p} = \frac{p.n!}{(n-p)!p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1-(p-1))!(p-1)!} = n\binom{n-1}{p-1}$$
2. $$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = n2^{n-1}$$

Exercice 8.27 ♡

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \in [\![0,n]\!]$. Montrer que

$$\binom{n+k}{k}\binom{n}{p} = \binom{n+k}{p+k}\binom{p+k}{k}.$$

Solution : *On a d'une part :*

$$\binom{n+k}{k}\binom{n}{p} = \frac{(n+k)!}{n!k!}\frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{(n+k)!}{(n-p)!p!k!}$$

et d'autre part :

$$\binom{n+k}{p+k}\binom{p+k}{k} = \frac{(n+k)!}{(n-p)!(p+k)!}\frac{(p+k)!}{p!k!} = \frac{(n+k)!}{(n-p)!p!k!}$$

d'où l'égalité.

Exercice 8.28 ♡

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

1. $\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
2. $\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
3. $\mathrm{C}_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$
4. $\mathrm{D}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k}$
5. $\mathrm{E}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$
6. $\mathrm{F}_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$
7. $\mathrm{G}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k}$
8. $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, par application de la formule du binôme de Newton, on a l'égalité :*

$$(\star) \ : \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

1. *En utilisant* $(\star)$ *avec* $x=1$*, on obtient :* $\boxed{\mathrm{A}_n = 2^n}$.
2. *En dérivant les deux membres de l'égalité* $(\star)$*, on obtient* $n(1+x)^{n-1} = nx^{n-1} + \binom{n}{1}(n-1)x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}$ *et donc, avec* $x=1$ *il vient* $\boxed{\mathrm{B}_n = n2^{n-1}}$.
3. *En dérivant une seconde fois les deux membres de l'égalité* $(\star)$*, on obtient :* $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}$ *et donc, si* $x=1$*, on a* $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n}\left(k^2-k\right)\binom{n}{k} = \mathrm{C}_n - \mathrm{B}_n$*. On obtient alors* $\mathrm{C}_n = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = \boxed{n(n+1)2^{n-2}}$
4. *En appliquant* $(\star)$ *avec* $x=-1$*, on obtient* $\boxed{\mathrm{D}_n = 0}$.
5. *On a l'égalité* $\mathrm{E}_n = \frac{\mathrm{A}_{2n}+\mathrm{D}_{2n}}{2}$ *et donc* $\boxed{\mathrm{E}_n = 2^{2n-1}}$.
6. *On a aussi* $\mathrm{E}_n + \mathrm{F}_n = \mathrm{A}_{2n}$ *ce qui amène* $\boxed{\mathrm{F}_n = 2^{2n-1}}$.
7. *On remplace* x *par* $-x$ *dans* $(\star)$*. On obtient :*

   $$(\star\star) \ : \quad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k.$$

   Puis on dérive les deux membres de cette égalité et on trouve

   $$-n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k kx^{k-1}$$

   de quoi on tire $\boxed{\mathrm{G}_n = 0}$.
8. *Intégrons maintenant les deux membres de* $(\star\star)$ *entre* 0 *et* 1*, on trouve*

   $$\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

   et on obtient $\boxed{\mathrm{H}_n = \frac{1}{n+1}}$.

Exercice 8.29 ♡

Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} \in \mathbb{N}.$$

Solution : *On peut utiliser la propriété bien connue (?) Si* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *alors (lorsque* $b \neq d$*)* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ *:*

$$\frac{\binom{2k}{k}}{k+1} = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} = \frac{\binom{2k}{k+1}}{k} = \frac{\binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1}}{k+1-k} \in \mathbb{N}.$$

Exercice 8.30 ♡♡

1. *Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :* $\forall x \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + nx \leqslant (1+x)^n$.
2. *Re-démontrer cette inégalité en utilisant la formule du binôme de Newton.*

Solution :

1. *Soit* $x \geqslant 0$*. Si* $n = 0$ *l'inégalité est clairement vérifiée. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Supposons que l'inégalité est vraie au rang* n *et prouvons la au rang* $n+1$*. Par application de l'hypothèse de récurrence :*

$$1 + (n+1)x = 1 + nx + x \leqslant (1+x)^n + x \leqslant (1+x)^n + x(1+x)^n = (1+x)^{n+1}$$

car $1 + x > 0$*. La formule est alors prouvée par application du théorème de récurrence. Remarquons que cette démonstration est encore valable si* $x > -1$*.*

2. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \geqslant 0$*. En appliquant la formule du binôme :*

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \underbrace{\ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x \\ &\geqslant 1 + nx \end{aligned}$$

Exercice 8.31 ♡

Résoudre

$$x^2 - \binom{n+1}{p+1}x + \binom{n}{p}\binom{n}{p+1} = 0$$

Solution : *On utilise les relations coefficients -racines. La somme des racines du polynôme vaut* $\binom{n+1}{p+1}$ *et le produit* $\binom{n}{p}\binom{n}{p+1}$*. D'après la formule d'additivité,* $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$*, les deux racines sont*

$$\boxed{x_1 = \binom{n}{p}} \text{ et } \boxed{x_2 = \binom{n}{p+1}}$$

Exercice 8.32 ♡

Soit $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*. Développer de deux façons*

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}.$$

Calculer le coefficient de x^{2n} *et en déduire une propriété des coefficients binomiaux.*

Solution : *On écrit* $(x+1)^{2n}(x-1)^{2n} = (x^2-1)^{2n}$. *En utilisant la formule du binôme, le coefficient de* x^{2n} *vaut* $(-1)^n\binom{2n}{n}$. *Si on développe* $(1+x)^{2n}$ *et* $(1-x)^{2n}$ *avec le binôme, on obtient que :*

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k\right)\left(\sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}(-1)^p x^p\right)$$

Le coefficient de x^{2n} *dans ce produit s'obtient en choisissant des produits de coefficients de* x^p *par les coefficients de* x^k *avec* $p+k=2n$. *Par conséquent,*

$$(-1)^n\binom{2n}{n} = \sum_{k+p=2n}(-1)^p\binom{2n}{p}\binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{n}^2$$

Exercice 8.33 ♡♡

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ *avec* $m \leqslant n$.

1. *Vérifier que*
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$
2. *Interpréter cette formule dans le triangle de Pascal.*

Solution :

1. *On effectue une récurrence sur* n. *Si* $n=0$ *alors* $m=0$ *et comme* $\binom{0}{0}=\binom{1}{1}=1$ *la formule est vérifiée au rang* 0. *Soit* $n\in\mathbb{N}$. *Supposons que pour tout* $m\in[\![0,n]\!]$, *on a* $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$. *Prouvons la formule au rang* $n+1$. *Soit* $m\in[\![0,n]\!]$. *On a :*
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{m} &= \binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\ldots+\binom{n}{m}+\binom{n+1}{m}\\ &= \binom{n+1}{m+1}+\binom{n+1}{m} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \binom{n+2}{m+1} \text{ d'après la relation de Pascal}\end{aligned}$$
Si $m=n+1$ *alors la formule est trivialement vraie. On a donc prouvé que pour tout* $m\in[\![0,n+1]\!]$, $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{k}{m}=\binom{n+2}{m+1}$. *Le résultat découle alors du théorème de récurrence.*
2. *On considère un le terme diagonale du triangle de Pascal à l'intersection de la* $m+1^{\text{ème}}$ *ligne et de la* $m+1^{\text{ème}}$ *colonne. Il s'agit de* $\binom{m}{m}$. *On lui additionne les* $k-1$ *termes juste en dessous (*$k\in\mathbb{N}^*$*). Cette somme est égale au coefficient situé à l'intersection de la* $m+2^{\text{ème}}$ *colonne et de la* $m+k+2^{\text{ème}}$ *ligne, c'est-à-dire à* $\binom{m+k+1}{m+1}$.

Exercice 8.34 ♡

Calculer pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ *:*

$$S = \sum_{k=0}^{p}\binom{p+q}{k}\binom{p+q-k}{p-k}$$

Solution : *On trouve en écrivant les coefficients binomiaux à l'aide de factorielles,*

$$\binom{p+q}{k}\binom{p+q-k}{p-k} = \frac{(p+q)!}{(p-k)!q!k!} = \frac{(p+q)!}{p!q!}\binom{p}{k}$$

Donc

$$S = \binom{p+q}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = \boxed{\binom{p+q}{p}2^p}$$

Pour une interprétation combinatoire simple de cette identité on compte de deux manières différentes, le nombre de façons de choisir p étudiants parmi $p+q$ d'en peindre k en rouge et de peindre les autres $p-k$ en vert. Il y a $\binom{p+q}{p}$ possibilités de choisir p étudiants parmi $p+q$. Pour chaque choix, il y a 2^p répartition des coloris.
Maintenant on s'intéresse aux étudiants peints en rouge. On commence par en choisir k $(0 \leqslant k \leqslant p)$ parmi $p+q$ ce qui fait $\binom{p+q}{k}$ choix. Ensuite on choisit les $p-k$ étudiants peints en vert parmi les $p+q-k$ qui restent, ce qui fait $\binom{p+q-k}{p-k}$ choix. En sommant on trouve le résultat.

Exercice 8.35 ♡

En utilisant la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}$$

calculer la somme

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{2n}{2p}^2$$

Solution : *En développant avec le binôme,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} [1 + (-1)^k] x^k = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p} x^{2p}$$

En dérivant, en multipliant par x et en re-dérivant, on trouve

$$[xf']'(x) = 8 \sum_{p=1}^{n} p^2 \binom{2n}{2p}$$

et donc $S_n = [xf']'(1)$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{2n}{2p}^2 = (n+1)\, 2^{2n}}.$$

Exercice 8.36 ♡♡

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que :*
$$\binom{2n+2}{n+1} = 2 \times \frac{2n+1}{n+1} \times \binom{2n}{n}$$
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*
$$\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant 2 \times \frac{2n+1}{n+1} \times \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$
3. *Déduire grâce à un raisonnement par récurrence que :*
$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}.$$
4. *De la même façon, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*
$$\binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$$
5. *On considère la suite (u_n) de terme général : $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.*

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. $\binom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \dfrac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(n+1)^2\,(n!)^2} = 2 \times \dfrac{2n+1}{n+1} \times \binom{2n}{n}$

2. *On a :*

$$\begin{aligned}
& \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant 2\times\frac{2n+1}{n+1}\times\frac{4^n}{2\sqrt{n}}\\
\iff\quad & \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{n+1}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\\
\iff\quad & \frac{4}{n+1} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2}\times\frac{1}{n}\\
\iff\quad & 4n(n+1) \leqslant (2n+1)^2\\
\iff\quad & 4n^2+4n \leqslant 4n^2+4n+1\\
\iff\quad & 0 \leqslant 1
\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, il en est de même de la première.

3. *Effectuons, comme proposé, une récurrence. La propriété est trivialement vérifiée si $n=1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que : $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}$. Montrons que l'inégalité est encore vraie au rang $n+1$. Il faut montrer que : $\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \binom{2n+2}{n+1}$. Appliquant l'hypothèse de récurrence et les questions précédentes :*

$$\binom{2n+2}{n+1} = 2\times\frac{2n+1}{n+1}\times\binom{2n}{n} \geqslant 2\times\frac{2n+1}{n+1}\times\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \geqslant \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}.$$

L'inégalité est donc vérifié au rang $n+1$ et la propriété est prouvée par récurrence.

4. *Raisonnons à nouveau par récurrence. Au rang 1 l'inégalité est trivialement vérifiée. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $\binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$ et montrons que $\binom{2n+2}{n+1} \leqslant \frac{4^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence et le résultat de la première question, on a :*

$$\binom{2n+2}{n+1} = 2\times\frac{2n+1}{n+1}\times\binom{2n}{n} \leqslant 2\times\frac{2n+1}{n+1}\times\frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Il faut donc montrer que : $2\times\frac{2n+1}{n+1}\times\frac{4^n}{\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{4^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$. On a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}
& 2\times\frac{2n+1}{n+1}\times\frac{4^n}{\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{4^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}\\
\iff\quad & \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^3 \leqslant \frac{8n}{n+1}\\
\iff\quad & (2n+1)^3 \leqslant 8n(n+1)^2\\
\iff\quad & 8n^3-12n^2+6n+1 \leqslant 8n^3+16n^2+8n\\
\iff\quad & 0 \leqslant 4n^2+2n-1
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie dés que $n\geqslant 1$. Il en est donc de même de la première et la propriété est prouvée par récurrence.

5. *On applique les résultats précédents et le théorème des gendarmes, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

8.5.6 Dénombrement

Exercice 8.37 ♡

Avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, combien peut-on écrire d'années au-delà de 2000 en utilisant une seule fois le même chiffre ?

Solution : *Il y a deux cas possibles :*

- *Si l'année compte 4 chiffres, alors il faut choisir son premier chiffre dans l'ensemble $[\![2,4]\!]$ et les trois autres dans $[\![0,4]\!]$ en ne reprenant pas celui qui a déjà été choisi en premier, ce qui fait $3\times A_4^3$ possibilités.*
- *Si l'année en compte 5, le premier chiffre ne peut pas être 0. Il y a donc 4 possibilités pour le choisir. Il y a A_4^4 possibilités pour les 4 chiffres suivants.*

Le nombre d'années possibles est donc : $\boxed{3\times A_4^3+4\times A_4^4}$.

Exercice 8.38 ♡

Dans une course de 10 *voitures, déterminer le nombre de classements possibles dans les cas suivants :*

1. *Toutes les voitures sont arrivées et il n'y a pas d'ex-aequo.*
2. *Toutes les voitures sont arrivées et il y a exactement deux ex-aequo.*
3. *Toutes les voitures sont arrivées et il y a deux ex-aequo à la première place (pas d'ex-aequo par ailleurs).*
4. *Trois voitures ne sont pas arrivées et il n'y a pas d'ex-aequo.*
5. *Trois voitures ne sont pas arrivées et il y a exactement deux ex-aequo*

Solution :

1. $10!$
2. *Il faut choisir les* 2 *ex-aequo ainsi que leur rang et classer les* 8 *autres voitures, ce qui donne* $C_{10}^2 \times 9 \times \times 8!$ *classements possibles.*
3. *Même raisonnement que dans la question précédente si ce n'est que le rang des ex-aequo est fixé. Il y a* $C_{10}^2 \times 8!$ *classements possibles.*
4. *Il faut choisir les* 3 *voitures qui ne sont pas arrivées et classer les* 7 *autres. Au total, cela fait* $C_{10}^3 \times 7!$ *classements possibles.*
5. *On combine les raisonnements précédents. On trouve* $C_{10}^3 \times C_7^2 \times 6 \times 5!$ *classements possibles.*

Exercice 8.39 ♡

Au bridge, les mains comptent 13 *cartes prises dans un jeu de* 52 *cartes. Combien de mains comportent :*

1. *Un seul roi.*
2. *Aucun roi*
3. *Au moins un roi*
4. *Les* 4 *rois*
5. *Que des piques*

Solution :

1. *On choisit le roi puis on choisit* 12 *cartes parmi* 48*, ce qui fait* $4 \times C_{48}^{12}$ *mains possibles.*
2. *Il faut choisir* 13 *cartes parmi* 48*, il y a* C_{48}^4 *possibilités.*
3. *On choisit un roi puis* 12 *cartes parmi* 51*, ce qui fait* $4 \times C_{51}^{12}$ *mains possibles.*
4. *Il faut compléter la main par* 9 *cartes prises parmi* 48*, ce qui fait* C_{48}^9 *possibilités.*
5. *Il n'y a qu'une main ne contenant que des piques.*

Exercice 8.40 ♡

Au poker, on distribue des mains de 5 *cartes provenant d'un jeu de* 32 *cartes.Déterminer le nombre de mains qui comporte exactement :*

1. *Exactement une paire (c'est-à-dire deux cartes de même hauteur).*
2. *Deux paires (mais pas un carré ni un brelan).*
3. *Un brelan (c'est-à-dire trois cartes de même hauteur mais pas un full).*
4. *Un full (c'est-à-dire un brelan et une paire).*
5. *Un carré (c'est-à-dire cinq cartes de même hauteur)*
6. *Une couleur (c'est-à-dire quatre cartes du même signe).*

Solution :

1. *Il y a* 8 *possibilités pour la hauteur de la paire et il faut choisir* 2 *cartes dans cette hauteur. Pour les* 3 *cartes manquantes, il faut les choisir en sorte de ne pas reformer de paire, c'est-à-dire dans des hauteurs différentes et il faut choisir une couleur pour chacune des ces hauteurs. On trouve alors :* $8 \times C_4^2 \times C_7^3 \times 4^3$.
2. *Il faut choisir les hauteurs des* 2 *paires ce qui fait* C_8^2 *possibilités. On forme ensuite les deux paires. Il faut enfin choisir la cinquième carte dans les* 6 *hauteurs restantes. Au total, il y a* $C_8^2 \times C_4^2 \times C_4^2 \times 24$ *mains possibles.*
3. *Pour former un brelan, on choisit une hauteur puis* 3 *cartes dans cette hauteur. On complète la main par* 2 *cartes prises dans les* 7 *hauteurs restantes mais dans des hauteurs différentes, ce qui correspond à* $C_7^2 \times 4^2$ *possibilités. Il y alors* $8 \times C_4^3 \times C_7^2 \times 4^2$ *mains contenant des brelans.*
4. *Il y a* $8 \times C_4^3$ *possibilités pour former le brelan. Pour la paire, on choisit une hauteur parmi les* 7 *restantes et on choisit deux couleurs parmi* 4*. Il y a donc* $8 \times C_4^3 \times 7 \times C_4^2$ *full possibles.*
5. *De manière analogue, il y a* 8×28 *mains contenant un carré.*
6. *On choisit une couleur puis* 5 *cartes dans cette couleur. Cela donne* $4 \times C_8^5$ *mains possibles.*

Exercice 8.41 ♡

Soit un ensemble fini E *de cardinal* $n > 0$. *Calculer la somme*

$$\sum_{X\in\mathscr{P}(E)} |X|$$

Solution : *Il y a* $\binom{n}{k}$ *parties* $X \subset E$ *de cardinal* k. *La somme cherchée vaut donc*

$$S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = \boxed{n2^{n-1}}$$

Exercice 8.42 ♡

Soit $n \geqslant 3$. *On considère un polygone convexe à* n *côtés.*

1. *Déterminer le nombre de diagonales joignant les sommets .*
2. *Déterminer le nombre d'intersections entre les diagonales si l'on suppose que* 2 *diagonales ne sont jamais parallèles et que* 3 *diagonales ne sont jamais concourantes.*

Solution :

1. *On se donne une diagonale du polygône dés qu'on se donne deux sommets non consécutifs. Le nombre de choix possibles est donc* $\binom{n}{2} - n = n(n-3)/2$ *diagonales (il faut enlever les* n *arêtes).*
2. *On se donne une intersection dés qu'on choisit* 2 *diagonales parmi les* $n(n-3)/2$ *du polygône ce qui fait* $\binom{n(n-3)/2}{2}$ *choix possibles.*

Exercice 8.43 ♡♡

Soient E *un ensemble fini de cardinal* n *et* A *une partie de* E *qui contient* p *éléments* ($p \leqslant n$).

1. *Quel est le nombre de parties à* k *éléments de* E *contenant un et un seul élément de* A *?*
2. *Quel est le nombre de parties à* k *éléments de* E *contenant au moins un élément de* A *?*

Solution :

1. *Soit* P *une telle partie. Il y a* p *choix pour l'élément de* A *et* $\binom{n-p}{k-1}$ *choix pour les* $k-1$ *autres éléments de* P, *donc le nombre recherché est* $p \times \binom{n-p}{k-1}$.
2. *En s'inspirant de la question précédente, le nombre de parties à* k *éléments de* E *contenant au moins un élément de* A *est égal au nombre de parties de* A *contenant exactement un élément de* A, *auquel on ajoute le nombre de parties de* A *contenant exactement* 2 *éléments de* A, ... *On trouve au final :* $p \times \binom{n-p}{k-1} + \binom{p}{2} \times \binom{n-p}{k-2} + \binom{p}{3} \times \binom{n-p}{k-3} + \ldots + \binom{p}{k} \times 1$. *On peut aussi remarquer qu'il y a exactement* $\binom{n-p}{k}$ *partie de* E *à* k *éléments ne contenant aucun élément de* A *et le nombre cherché est* $\binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$. *On a prouvé au passage la formule :* $\sum_{r=1}^{k}\binom{p}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$.

Exercice 8.44 ♡♡

Montrer que pour tout $p, q, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

Solution : *Cherchons une interprétation combinatoire à cette somme. On considère deux ensembles disjoints* E *et* F *de cardinaux respectifs* p *et* q. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On veut compter le nombre d'ensembles à* n *éléments qu'on peut former en allant chercher les éléments dans* E *et* F. *Cela revient à prendre des parties de* $E \cup F$ *à* n *éléments. Il y en a* $\binom{p+q}{n}$. *On peut les former aussi ainsi. Pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, *on prend* k *éléments dans* E *et* $n-k$ *éléments dans* F, *ce qui correspond à* $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ *possibilités. On peut ainsi former au total* $\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ *parties de* $E \cup F$ *et l'égalité est prouvée.*

Exercice 8.45 ♡♡

Soient $n, p, k \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $p \leqslant k \leqslant n$. *Dénombrez les parties à* $p+1$ *éléments de l'intervalle entier* $[|1, \ldots, n+1|]$ *dont le plus grand élément est* $k+1$. *En déduire la valeur de la somme :*

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$$

Voir l'exercice 8.33 pour une preuve de cette formule par récurrence.

Solution : *Le plus grand élément étant fixé, il suffit de choisir p éléments dans l'intervalle $[\![1,k]\!]$. Il y a pour cela $\binom{k}{p}$ possibilités. Si l'on considère une partie X quelconque de l'intervalle $[\![1,n+1]\!]$, à $p+1$ éléments, son plus grand élément k est compris entre $p+1$ et $n+1$. On peut alors faire un partage des parties à $p+1$ éléments en classes $C_{p+1},\dots C_n$ disjointes, où C_k désigne l'ensemble des parties de $[\![1,n+1]\!]$ dont le plus grand élément vaut k. Donc d'après le lemme des bergers, le cardinal de l'ensemble des parties à $p+1$ éléments vaut :*

$$|C_{p+1}|+\dots+|C_{n+1}|$$

Mais on sait également qu'il y a $\binom{n+1}{p+1}$ parties à $p+1$ éléments dans $[\![1,n+1]\!]$. Par conséquent :

$$\binom{n+1}{p+1}=\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$$

Exercice 8.46 ♡♡

Montrer que $\forall n\geqslant 0$, $\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2$ tels que $0\leqslant j+k\leqslant n$,

$$\binom{n}{j+k}\leqslant\binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

On donnera une démonstration par le calcul et une démonstration combinatoire.

Solution :

1. *Par le calcul, comme*

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{k}=\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}\quad\text{et}\quad\binom{n}{j+k}=\frac{n!}{(j+k)!(n-j-k)!},$$

   il suffit de démontrer que $j!k!\leqslant(j+k)!$, ce qui est vrai, car $(j+1)(j+2)\dots(j+k)\geqslant 1\times2\times\dots\times k$.

2. *Prouvons l'inégalité par une démonstration combinatoire. Soit A une partie de cardinal $j+k$ de $[\![1,n]\!]$. On lui associe le couple (A_1,A_2) de parties suivantes. A_1 est la partie formée des j plus petits éléments de A. Si β est le plus grand élément de A_1 et si B est l'ensemble des k éléments suivants de A alors A_2 est donné par :*

$$A_2=\left\{\alpha-\beta \mid \alpha\in B\right\}.$$

   Il est clair que $B\subset[\![1,n-j]\!]$. On peut donc définir l'application

$$\varphi:\begin{cases} P_{n,j+k} & \longrightarrow & P_{n,j}\times P_{n-j,k}\\ A & \longmapsto & (A_1,A_2)\end{cases}$$

   *où $P_{n,j+k}$ désigne l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $j+k$, $P_{n,j}$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal j et $P_{n-j,k}$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ *
   Cette application φ est injective, par construction de (A_1,A_2) et donc $|P_{n,j+k}|\leqslant|P_{n,j}||P_{n-j,k}|$ d'où l'inégalité souhaitée.

Exercice 8.47 ♡♡

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminez le nombre de surjections de l'intervalle d'entiers $[\![1,n+1]\!]$ vers l'intervalle d'entiers $[\![1,n]\!]$.

Solution : *Soit une surjection $f:[\![1,n+1]\!]\mapsto[\![1,n]\!]$. Exactement deux éléments n_1 et n_2 doivent avoir la même image k par f. Il y a $\binom{n+1}{2}$ choix possibles pour ces deux éléments, et n choix possibles pour k. Ensuite, la restriction de f de $[\![1,n+1]\!]\setminus\{n_1,n_2\}\mapsto[\![1,n]\!]\setminus\{k\}$ est une bijection et il y en a $(n-1)!$. Le nombre total de surjections est donc $\binom{n+1}{2}n(n-1)!=\boxed{\dfrac{n(n+1)!}{2}}$*

Exercice 8.48 ♡♡

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre d'entiers $k\in[\![1,n]\!]$ divisibles à la fois par 3 et par 4. Calculer a_n et trouver un équivalent de a_n lorsque $n\to+\infty$.

Solution : *Soit $p \in [\![1,n]\!]$ divisible par 3 et 4. Alors $p = 2^{2a}3^b c$ où $a,b,c \geqslant 1$. Par conséquent $p = 12^{\min(a,b)} \times d$ et donc p est divisible par 12. Réciproquement, un entier divisible par 12 est divisible par 3 et 4. a_n est donc le nombre d'entiers $p = 12k$ avec $k \geqslant 1$ avec $p \in [\![1,n]\!]$. Mais*

$$1 \leqslant 12k \leqslant n \Longleftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant \mathrm{E}(\frac{n}{12})$$

On a donc $\boxed{a_n = \mathrm{E}(\frac{n}{12})}$.

Puisque $\frac{n}{12} \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{12} + 1 \implies 1 \leqslant \frac{12a_n}{n} \leqslant 1 + \frac{12}{n}$, *d'après le théorème des gendarmes,* $\frac{12a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et donc* $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{12}}$.

Exercice 8.49 ♡♡

Soit E *un ensemble fini de cardinal* $n \in \mathbb{N}$. *Dénombrer les couples* $(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ *vérifiant*

$$X \cap Y = \varnothing$$

Solution : *Soit $p \in [\![0,n]\!]$ et soit $X \in \mathscr{P}(E)$ fixé de cardinal p. Il y a 2^{n-p} parties $Y \in \mathscr{P}(E)$ vérifiant $X \cap Y = \varnothing$. Comme il y a $\binom{n}{p}$ parties X de cardinal p, il y a donc*

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p}$$

couples (X,Y) de parties disjointes, c'est-à-dire $\boxed{3^n}$.

Exercice 8.50 ♡♡

Soit E *un ensemble fini de cardinal* $n \in \mathbb{N}$. *Dénombrer les couples* $(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ *vérifiant*

$$X \subset Y$$

Solution : *Fixons X de cardinal $p \in [\![0,n]\!]$. Se donner une partie $Y \in \mathscr{P}(E)$ telle que $X \subset Y$ revient à se donner la partie $Y \setminus X$. Il y a 2^{n-p} choix possibles pour Y. Comme il y a $\binom{n}{p}$ parties X de cardinal p, il y a donc*

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} = \boxed{3^n}$$

couples (X,Y) tels que $X \subset Y$.

Exercice 8.51 ♡♡

Soit E *un ensemble fini de cardinal* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer qu'il y a autant de parties* $X \in \mathscr{P}(E)$ *de cardinal pair que de parties de* E *de cardinal impair.*

Solution : *On démontre ce résultat par le calcul en remarquant que (voir l'exercice 8.28)*

$$\sum_{p=0, p \text{pair}}^{n} \binom{n}{p} = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0, p \text{ impair}}^{n} \binom{n}{p} = 2^{n-1}$$

Montrons ce résultat de façon combinatoire. Considérons un élément $a \in E$ et introduisons l'application

$$f : \begin{cases} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases} \end{cases}.$$

On vérifie facilement que f est involutive, c'est-à-dire que $f \circ f = \mathrm{id}$. Donc f est bijective. Il est de plus clair que f envoie une partie de cardinal pair de E sur une partie de E de cardinal impair. Il y a donc autant de parties de E de cardinal pair que de parties de E de cardinal impair.

Exercice 8.52 ♡♡

Soit E *un ensemble fini de cardinal* $n \geqslant 3$ *et* $(a,b) \in E^2$. *Soit* $2 \leqslant p \leqslant n$. *Dénombrer les parties de* E *à* p *éléments contenant* a *et* b, *contenant* a *uniquement,* b *uniquement, ni* a *ni* b. *En déduire une relation sur les coefficients*

binomiaux. Re-démontrer cette relation par le calcul :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$$

Solution : *Choisir une partie de* E *à* p *éléments contenant* a *et* b *revient à choisir* $p-2$ *éléments parmi* $n-2$*. Il y a donc* $\binom{n-2}{p-2}$ *choix possibles. De la même façon, il y a* $\binom{n-2}{p-1}$ *choix possibles pour une partie de* E *à* p *éléments contenant* a *et pas* b *(ou contenant* b *et pas* a*). Et il y a* $\binom{n-2}{p}$ *choix possibles pour une partie de* E *à* p *éléments ne contenant ni* a *ni* b*.*
Il y a par ailleurs $\binom{n}{p}$ *choix possibles pour une partie de* E *à* p *éléments. Mais pour choisir une partie de* E *à* p *éléments, on peut choisir une partie :*
– *contenant* a *et* b
– *ou alors une partie de* E *contenant* a *et pas* b
– *ou alors une partie de* E *contenant* b *et pas* a
– *ou alors une partie de* E *ne contenant ni* a *ni* b
ce qui amène :$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$*. Prouvons cette égalité par le calcul :*

$$\begin{aligned}
\binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p} &= \frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!} + 2\frac{(n-2)!}{(p-1)!(n-p-1)!} + \frac{(n-2)!}{p!(n-p-2)!} \\
&= \frac{p(p-1)(p-2)! + 2p(n-p)(n-2)! + (n-p)(n-p-1)(n-2)!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{(n^2-n)(n-2)!}{p!(n-p)!} \\
&= \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Exercice 8.53 ♡♡♡

Montrer que pour $1 < p < n$*,*

$$A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$$

Retrouver ce résultat de façon combinatoire.

Solution : *Par le calcul, en utilisant que* $A_n^p = p!\binom{n}{p}$ *et l'additivité des coefficients binomiaux :*

$$pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p = p(p-1)!\binom{n-1}{p-1} + p!\binom{n-1}{p-1} = p!\binom{n}{p} = A_n^p.$$

De façon combinatoire : A_n^p *est le nombre d'injections de* $I_p = [\![1,p]\!]$ *vers* $I_n = [\![1,n]\!]$*. On partitionne les injections en deux ensembles :*

$$A_1 = \{f \in \mathscr{I}(I_p, I_n) \mid n \in f(I_p)\} \text{ et } A_2 = \{f \in \mathscr{I}(I_p, I_n) \mid n \notin f(I_p)\}$$

On montre que $A_2 \equiv \mathscr{I}(I_p, I_{n-1})$ *et donc que* $|A_2| = A_{n-1}^p$*. On partitionne ensuite* A_1 *en classes* $B_k = \{f \in A_1 \mid f(k) = n\}$ *disjointes où* $k \in [\![1,p]\!]$*. On montre que* $B_k \equiv \mathscr{I}(I_{p-1}, I_{n-1})$ *et donc que* $|B_k| = A_{n-1}^{p-1}$*. Comme il y a* p *classes* B_k*, il vient d'après le lemme des bergers que* $|A_1| = pA_{n-1}^{p-1}$ *d'où le résultat.*

Exercice 8.54 ♡♡♡

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $p \leqslant n$*. Déterminez le nombre d'applications de* $[\![1,n]\!]$ *vers* $[\![1,p]\!]$ *telles que* $f(1) = 1$ *et*

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad f(i) \leqslant f(i+1) \leqslant f(i) + 1$$

Solution : *Dénombrons d'abord le nombre de telles applications avec* $f(n) = k$*. Puisque* $f(n) \leqslant n$*, il faut que* $k \leqslant n$ *pour qu'il en existe une. Une telle application est entièrement déterminée en se donnant les entiers* $i \in [\![1,n]\!]$ *tels que* $f(i) < f(i+1)$*, c'est-à-dire les entiers en lesquels la fonction change de valeur. Comme* $f(n) = k$*, il y a exactement* k *« sauts », c'est-à-dire* k *changements de valeur. Choisir une telle fonction revient alors à choisir ces* k *entiers dans* $[\![1,n]\!]$ *et il y a* $\binom{n}{k}$ *choix possibles. Le nombre cherché vaut donc :*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k}}$$

Exercice 8.55 ♡♡♡

Soit E *un ensemble fini de cardinal* $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer*

$$\sum_{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2} |X\cup Y|$$

Solution : *Soit* $k \in [\![0,n]\!]$. *Déterminons le nombre de paires* (X,Y) *telles que* $|X\cup Y| = k$. *Il y a* $\binom{n}{k}$ *choix possibles pour l'ensemble* $X\cup Y$. *Une fois* $Z = (X\cup Y)$ *fixé, il y a* $\binom{n}{p}$ *choix possibles pour la partie* $X \subset Z$ *de cardinal fixé* $p \in [\![0,k]\!]$. *Une fois la partie* X *fixée, la partie* Y *doit contenir* $Z\setminus X$. *Il y a autant de parties* Y *possibles que de choix de parties de* X, *c'est-à-dire* 2^p.
Au total, il y a $\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}2^p = 3^k$ *choix possibles pour le couple* (X,Y) *tel que* $X\cup Y = Z$.
La somme cherchée vaut donc

$$S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^k = \boxed{3n\times 4^{n-1}}$$

Exercice 8.56 ♡♡♡

Soient $n,p,k \in \mathbb{N}$. *On considère un quadrillage à coordonnées entières et* $A = (0,n)$, $B = (p,k)$ *deux points de ce quadrillage. Déterminer le nombre de trajets de* A *vers* B *avec réflexion sur l'axe* (Ox), *c'est-à-dire que :*

1. *pour aller de* A *vers l'axe* $(0x)$, *on peut avancer d'un cran vers la droite ou d'un cran vers le bas.*
2. *Pour aller de l'axe* $(0x)$ *vers* B, *on peut avancer d'un cran vers le haut ou d'un cran vers la droite.*

Solution : *Soit* $i \in [\![0,p]\!]$. *Pour aller de* A *vers vers le point de coordonnées* $(i,0)$, *il faut descendre* n *fois et avancer* i *fois vers la droite et donc au total parcourir* $n+i$ *segments. Un tel chemin est entièrement déterminé dés qu'on a choisi les* i *segments horizontaux. Le nombre de trajets de* A *vers* $(i,0)$ *vaut donc* $\binom{n+i}{i}$. *Pour aller ensuite de* $(0,i)$ *à* B, *il y a* $\binom{p+k-i}{k}$ *chemins. Et donc pour aller de* A *vers* B, *il y a*

$$\boxed{\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{i}\binom{p+k-i}{k}}$$

chemins possibles.

Exercice 8.57 ♡♡♡

On considère un échiquier de 8×8 *cases.*

1. *De combien de façons peut-on disposer* 8 *tours sur l'échiquier sans qu'elles soient en prise ?*
2. *Si l'on a placé les* 8 *tours ainsi, montrer qu'il y a un nombre pair de tours placées sur des cases blanches.*

Solution :

1. *Il est clair que chaque colonne de l'échiquier doit contenir une et une seule tour. Une configuration des tours correspond alors à une application de* $f : [\![1,8]\!] \to [\![1,8]\!]$. *Soit* $i \in [\![1,8]\!]$. *Notons* $f(i)$ *la rangée où est placée la tour de la colonne* i. *L'hypothèse que les tours ne soient pas en prise se traduit en disant que* f *est bijective. Il y donc* $\boxed{8!}$ *placements possibles.*
2. *Remarquons que si on permute des lignes sur l'échiquier, si les tours ne sont pas en prises au départ, elles ne sont pas en prises après ces permutations (les tours restent solidaires de leur ligne) . Il se produit la même chose si on permute des colonnes. Par de telles permutations, on peut arriver à disposer les tours sur la diagonale de l'échiquier. Chaque tour reste évidemment sur une case de la même couleur que celle de départ. Remarquons qu'après permutations de lignes ou de colonnes, le nombre de case de couleur blanche sur la diagonale est toujours pair. Par suite, si aucune tour n'est en prise au départ, elles sont nécessairement en nombre pair à être sur des cases blanches.*

Chapitre 9

Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

Le réel, c'est quand on se cogne.
Jacques Lacan.

Pour bien aborder ce chapitre

Les mathématiciens de l'antiquité pensent pouvoir mesurer n'importe quelle grandeur comme un quotient de deux entiers, c'est-à-dire comme un rationnel. Les pythagoriciens vont même plus loin en affirmant que « tout est nombre », c'est à dire que chaque chose peut s'exprimer comme un entier ou un quotient de nombres entiers. Ils ne se relèveront jamais de la découverte qu'ils feront que la diagonale d'un carré de côté 1 est incommensurable (voir la proposition 9.1).
Plus récemment, au 17e siècle, des mathématiciens comme Mercator, Gregory, Leibniz ou les frères Bernoulli découvrent que certaines sommes infinies admettent des limites qui ne sont pas rationnelles. C'est le cas par exemple de la série de Mercator qui converge vers $\ln 2$ [1] :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

Toujours au 17e, Newton et Leibniz inventent le calcul infinitésimal, qu'on appelle maintenant l'analyse. Leur construction cependant manque de rigueur et le formalisme qu'ils emploient est très compliqué car ils ne disposent que des fractions pour parler des infiniment petits et la notion de limite est loin d'être formalisée.
Il faut attendre le 19e siècle pour que, grâce à Cauchy, cette notion commence à être bien comprise et ce n'est que vers la seconde moitié de ce siècle que les premières constructions des nombres réels apparaissent. On les doit aux mathématiciens Cantor, Méray et Dedekind.
L'adjectif « réel »apparaît pour la première fois au 17e siècle sous la plume de Descartes comme un rétronyme au terme « imaginaire »qui qualifie des nombres dont le carré est négatif (voir l'introduction du chapitre 1). C'est Georg Cantor qui introduisit en 1883 le terme de nombre réel.
Le cœur de ce premier chapitre d'analyse de la seconde période. est constitué de l'axiome de la borne supérieure duquel découleront des théorèmes fondamentaux en analyse (propriété d'Archimède, théorème de la limite monotone, construction de l'intégrale ...)
Un des enjeux de cette seconde période est l'apprentissage de la démonstration. Il est vivement conseillé de consulter dans un premier temps l'annexe A. On y apprendra à utiliser les quantificateurs ainsi que des rudiments de théorie des ensembles qui seront utilisés en permanence.

9.1 Introduction

PROPOSITION 9.1
Le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire comme quotient de deux entiers.

Démonstration *Remarquons tout d'abord que le carré d'un nombre pair est un nombre pair. De même, le carré d'un nombre impair est un nombre impair. Autrement dit, un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair.*
Supposons qu'il existe deux entiers non nuls p et q tels que $\sqrt{2}=p/q$. On peut supposer que la fraction p/q est irréductible. On a donc $2=p^2/q^2$ ou encore $p^2=2q^2$. Nécessairement 2 divise p^2. Ceci n'est possible, d'après ce qu'on vient d'expliquer, que si 2 divise p. Il existe donc $p'\in\mathbb{N}$ tel que $p=2p'$ et alors $4p'^2=2q^2$ ou encore $2p'^2=q^2$. On peut alors affirmer de la même façon que précédemment que 2 divise q^2 et donc que 2 divise q. L'entier 2 est donc un diviseur commun à p et q ce qui vient contredire le fait que la fraction p/q est irréductible. La proposition est ainsi prouvée par l'absurde.

1. Voir l'exercice 13.100 page 586

Remarque 9.1 Il existe donc des nombres irrationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ ne contient pas tous les nombres, d'où la nécessité d'introduire un nouvel ensemble $\mathbb{R}$ de nombres, les *réels*.

9.2 Le corps des réels

BIO 7 Georg Cantor, né le 3 mars 1845 Saint-Pétersbourg , mort le 6 janvier 1918 à Halle



Mathématicien Allemand. Les parents de Georg Cantor appartenaient à un milieu aisé, tant financièrement qu'intellectuellement. Son père était homme d'affaire et sa mère était issue d'une famille de musicien. Il jouait du violon de manière remarquable. Il reçut une excellente éducation et se montra très tôt doué en particulier pour les activités manuels. Mais son père rêve qu'il devienne ingénieur aussi il part faire ses études supérieures à Berlin. Il obtient son doctorat de mathématiques en 1867.
Les premiers travaux qu'il mène après sa thèse lui sont suggérés par Heine. Ils concernent l'unicité de la décomposition d'une fonction périodique d'une variable réelle comme série de fonctions trigonométriques (les fameuses séries de Fourier que vous découvrirez en deuxième année). Il parvient à prouver cette propriété pour les fonctions continues alors qu'elle échappait à des mathématiciens de la classe de Lejeune Dirichlet, Lipschitz, Riemann et Heine lui-même.
Afin de résoudre ce problème, il est amené à définir et étudier l'ensemble des points de discontinuité de ces fonctions. C'est alors qu'il commence à étudier des ensembles de cardinal infini et cela le conduit en 1872 à définir rigoureusement ce qu'est un nombre réel.
Il est le premier à comprendre que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, autrement dit qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Il y a beaucoup plus de réels que d'entiers et tous les ensembles infinis n'ont pas le même nombre d'éléments ...
Ces découvertes soulèvent évidemment des contestations, en particulier celles de Poincaré et Kronecker. Ce dernier n'hésita pas à bloquer non seulement les articles de Cantor mais aussi sa carrière.
Cantor est frappé de sa première dépression en 1884. Les attaques de Kronecker à son sujet n'y sont sûrement pas étrangères. Il ne retrouva plus alors sa puissance intellectuelle. En 1899 il perd son plus jeune fils et commence à souffrir de dépression chronique et de schizophrénie. Il est affecté à un poste administratif le dispensant de cours. Il prend sa retraite en 1913 et meurt dans la pauvreté en 1918.

PROPOSITION 9.2 $(\mathbb{R},+)$ **est un groupe commutatif.**
L'addition dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

- Elle est associative : $\forall x,y,z\in\mathbb{R},\quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
- Elle possède un élément neutre 0 : $\forall x\in\mathbb{R},\quad x+0=0+x=x$.
- Chaque réel possède un opposé : $\forall x\in\mathbb{R},\quad \exists y\in\mathbb{R}:\quad x+y=y+x=0$. Le nombre y opposé à x est noté $-x$.
- Elle est commutative : $\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x+y=y+x$.

Pour résumer ces 4 propriétés, on dit que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif.

PROPOSITION 9.3 $(\mathbb{R}^*,\times)$ **est un groupe commutatif.**
La multiplication dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

- Elle est associative : $\forall x,y,z\in\mathbb{R}^*,\quad (x\times y)\times z = x\times(y\times z)$.
- Elle possède un élément neutre 1 : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad x\times 1 = 1\times x = x$.
- Chaque réel possède un inverse : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad \exists y\in\mathbb{R}^*:\quad x\times y = y\times x = 1$. Le nombre y, inverse de x est noté x^{-1} ou encore $1/x$.
- Elle est commutative : $\forall x,y\in\mathbb{R}^*,\quad x\times y = y\times x$.

Pour résumer ces quatre propriétés, on dit que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

PROPOSITION 9.4 $(\mathbb{R},+,\times)$ **est un corps.**
La multiplication dans $\mathbb{R}$ est distributive relativement à l'addition : $\forall x,y,z\in\mathbb{R},\quad x\times(y+z) = x\times y + x\times z$. Pour résumer toutes ces propriétés, on dit que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps.

Dans la suite, nous noterons xy à la place de $x\times y$.
Considérons sur $\mathbb{R}$ la relation d'ordre usuelle $\leqslant$.

PROPOSITION 9.5 $(\mathbb{R},+,.)$ **est un corps totalement ordonné.**

- La relation d'ordre $\leqslant$ est totale : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x$
- La relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec l'addition : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \implies x+z \leqslant y+z$
- La relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec la multiplication : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad y \leqslant 0 \implies xy \geqslant 0$.

Pour résumer toutes ces propriétés, on dit que $(\mathbb{R},+,\times,\leqslant)$ est un corps totalement ordonné.

Remarque 9.2 $(\mathbb{Q},+,\times,\leqslant)$ est aussi un corps totalement ordonné.

9.3 Valeur absolue

DÉFINITION 9.1 **Valeur absolue**
Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x comme étant le nombre réel positif, noté $|x|$ donné par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Notation 9.1 Si $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\max(x, y)$ le plus grand de ces deux nombres.

PROPOSITION 9.6

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

1. $|x| = \max(x, -x)$
2. $|x| \geqslant 0$
3. $|x| = 0 \iff x = 0$
4. $|y-x| \leqslant r \iff x-r \leqslant y \leqslant x+r$
5. $|xy| = |x|\,|y|$, $|-x| = |x|$
6. $\sqrt{x^2} = |x|$
7. $\boxed{|x+y| \leqslant |x|+|y|}$
8. $\boxed{\big|\,|x|-|y|\,\big| \leqslant |x+y|}$

Les deux dernières inégalités sont appelées *inégalités triangulaires* et sont fondamentales en analyse.

Démonstration

1 *Il suffit d'étudier les cas* $x \geqslant 0$ *et* $x < 0$.

4 *Puisque* $|y-x| \leqslant r$, *d'après* (1), $y-x \leqslant r$ *et* $x-y \leqslant r$ *d'où l'encadrement souhaité.*

7 *Utilisons les propriétés* (1), (5) *et* (6), $|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+2xy+y^2} \leqslant \sqrt{|x|^2+|y|^2+2|x||y|} = \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x|+|y|$. *On remarque qu'il y a égalité dans cette majoration si et seulement si* $xy = |xy|$, *c'est-à-dire lorsque* x *et* y *sont de même signe.*

8 *Utilisons* (7) *et* (5) : $|x| = |x+y+(-y)| \leqslant |x+y|+|-y| = |x+y|+|y|$. *Par conséquent,* $|x|-|y| \leqslant |x+y|$. *En inversant le rôle de* x *et* y, *on obtient également* $|y|-|x| \leqslant |x+y|$ *d'où finalement (d'après* (1)*),* $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y|$.

Les autres preuves sont laissées en exercice.

PROPOSITION 9.7
Pour tout réel x, en notant $x^+ = \max\{x, 0\}$ et $x^- = \max\{-x, 0\}$, on a :

- $|x| = x^+ + x^-$
- $x = x^+ - x^-$
- $x^+ = \dfrac{1}{2}(|x|+x)$
- $x^- = \dfrac{1}{2}(|x|-x)$

Démonstration

- *Si* $x \geqslant 0$ *alors* $|x| = x$, $x^+ = x$ *et* $x^- = 0$.
- *Si* $x < 0$ *alors* $|x| = -x$, $x^+ = 0$ *et* $x^- = -x$.

Dans les deux cas, il est clair que $|x| = x^+ + x^-$ *et que* $x = x^+ - x^-$. *En additionnant et soustrayant ces deux relations, on obtient les deux dernières.*

DÉFINITION 9.2 **Distance entre deux réels**
Soit (x, y) un couple de réels. On appelle distance de x à y la quantité, notée $d(x, y)$ et donnée par : $d(x, y) = |x-y|$.

9.4 Majorant, minorant, borne supérieure

DÉFINITION 9.3 **Plus grand élément, plus petit élément**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$) et un réel a. On dit que a est :
- le *plus grand élément* de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leqslant a$.
- le *plus petit élément* de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A,\ a \leqslant x$.

S'il existe, le plus grand élément de A est unique. Nous le noterons $\max(A)$. De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique et nous le noterons $\min(A)$.

Démonstration *Supposons que a et a' soient deux plus grands éléments de A. Comme a est un plus grand élément de A et que $a' \in A$, on doit avoir $a' \leqslant a$. De façon symétrique, on a aussi $a' \leqslant a$. Il s'ensuit que $a = a'$.*

Exemple 9.2
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ n'ont pas de plus grand élément.
- $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément (0) mais pas $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}$.
- $[0,1]$ possède un plus grand et un plus petit élément.
- $]0,1[$ ne possède ni de plus grand ni de plus petit élément.
- $X = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\right\}$ ne possède pas de plus grand élément dans $\mathbb{Q}$ mais il en possède un dans $\mathbb{R}$ qui vaut $\sqrt{2}$.

DÉFINITION 9.4 **Majorant, minorant**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$) et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est
- un majorant de A si et seulement si $\forall x \in A, \quad x \leqslant a$.
- un minorant de A si et seulement si $\forall x \in A, \quad a \leqslant x$.

Remarque 9.3 Un majorant n'est pas unique. Le plus grand élément d'une partie, s'il existe, est un majorant de la partie qui, de plus, appartient à cette partie.

Exemple 9.3
- La partie $[0,1]$ possède par exemple comme majorants 2 et 3 et comme minorants -1 et 0.
- La partie $X = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\right\}$ admet par exemple 5 comme majorant.

DÉFINITION 9.5 **Borne supérieure**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$)
- La *borne supérieure* de A est, si elle existe, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. On la note $\sup(A)$.
- La *borne inférieure* de A est, si elle existe, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A. On la note $\inf(A)$.

Exemple 9.4
- 0 est la borne inférieure de $[0,1]$ ou de $]0,1[$.
- 1 est la borne supérieure de $[0,1]$ ou de $]0,1[$.
- $X = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\right\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. X possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ qui vaut $\sqrt{2}$.

PROPOSITION 9.8 **Unicité de la borne supérieure**
Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure alors celle-ci est unique.

Démonstration *Nous avons montré que le plus petit élément d'un ensemble (ici les majorants de A) était unique.*

Axiome de la borne supérieure

Toute partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Remarque 9.4 Cette propriété distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. En effet, la partie $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

THÉORÈME 9.9 ♡♡♡ **Caractérisation de la borne supérieure**
Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel. Il y a équivalence entre :

1. a est la borne supérieure de X.
2. $\forall x \in X,\ x \leqslant a$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X, \quad x \in]a - \varepsilon, a]$

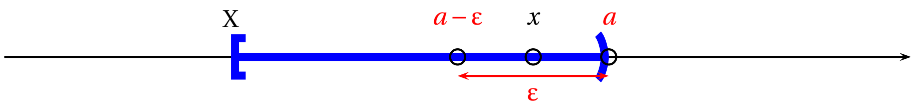


FIGURE 9.1 – Caractérisation de la borne supérieure

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que a est la borne supérieure de X. Par définition de celle ci, a est un majorant de X et la première affirmation de* (2) *est prouvée. Soit $\varepsilon > 0$, si $a-\varepsilon$ était un majorant de X, on aurait $a \leqslant a-\varepsilon$ ce qui est faux. Puisque $a-\varepsilon$ n'est pas un majorant de X, il existe $x \in X$ tel que $a-\varepsilon < x$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons maintenant que* (2) *est vraie et montrons que a est la borne supérieure de X. Il est clair que a est un majorant de X. Il faut montrer que c'est le plus petit des majorants de X. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors un réel a' qui majore X et qui est plus petit que a. On a donc :*

$$\forall x \in X, \quad x \leqslant a' < a$$

Posons $\varepsilon = a - a' > 0$. En appliquant (2)*, on peut affirmer qu'il existe un élément $x \in X$ tel que $x \in \left]a-\varepsilon, a\right] = \left]a', a\right]$. Mais alors $a' < x$ et a' ne peut être un majorant de X ce qui prouve la seconde implication par l'absurde.*

Remarque 9.5 Une erreur commise fréquemment dans la démonstration précédente : le réel $a-\varepsilon$ n'appartient pas nécessairement à la partie A. Si l'on considère la partie $A = [0,1[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, elle possède une borne supérieure $\sup A = 1$ et pour tout entier non nul n, avec $\varepsilon = 1/n$, $1-\varepsilon \notin A$. Cette erreur provient du fait que l'on fait souvent des dessins avec des parties A qui sont des intervalles ouverts lorsqu'on raisonne sur les propriétés de la borne supérieure. `Multimédia : représenter une partie A "à trous", faire glisser` $a-\varepsilon$ `et colorer un point` $x \in A$ `tel que` $\sup A - \varepsilon \leqslant x \leqslant \sup A$.

Il est conseillé de lire l'appendice C.3 page 1201 où l'on étudie une technique classique pour manipuler les bornes supérieures.

9.5 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

DÉFINITION 9.6 **Droite numérique achevée**
On appelle droite numérique achevée l'ensemble, noté $\overline{\mathbb{R}}$ obtenu en ajoutant deux éléments à $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Notation 9.5 On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x \leqslant +\infty \quad \text{et} \quad -\infty \leqslant x$$

Remarque 9.6 $\overline{\mathbb{R}}$ possède un plus grand élément : $+\infty$ et un plus petit élément : $-\infty$.

Notation 9.6 Si X est une partie non vide de $\mathbb{R}$, par convention, on pose :
- $\sup X = +\infty$ si X n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$.
- $\inf X = -\infty$ si X n'est pas une partie minorée de $\mathbb{R}$.

Avec ces notations, on a :

PROPOSITION 9.10
Toute partie *non vide* de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Démonstration *Soit X une partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\sup X \neq +\infty$ alors X est une partie majorée de $\mathbb{R}$ et lui appliquant la propriété de la borne supérieure, elle possède une borne supérieure. Si $\sup X = +\infty$ alors la borne supérieure de X est $+\infty$.*

On prolonge de même à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations sur $\mathbb{R}$:

Notation 9.7

La somme, le produit et le quotient de deux réels étendus sont définis d'après les tables suivantes. Une case noire correspond à une *forme indéterminée*.

$x+y$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	■
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	■	$+\infty$	$+\infty$

$x \times y$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0		0	0	0	
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

x	$1/x$
$x \in \mathbb{R}^\star$	$1/x$
$-\infty$	0
$+\infty$	0
0	

9.6 Intervalles de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 9.7 **Segment**
Soient a et b deux réels. On appelle *segment* $[a,b]$ l'ensemble des réels compris, au sens large, entre a et b :
- Si $a < b$, $[a,b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leqslant t \leqslant b\}$.
- Si $a = b$, $[a,a] = \{a\}$.
- Si $b < a$, $[a,b] = \{t \in \mathbb{R} \mid b \leqslant t \leqslant a\}$.

DÉFINITION 9.8 **Intervalle**
Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad [x,y] \subset \mathrm{I}$.

PROPOSITION 9.11 **Caractérisation des intervalles de** $\mathbb{R}$
Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

1. I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. $\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad \forall t \in [0,1], \quad (1-t)x + ty \in \mathrm{I}$

Remarque 9.7 Nous verrons plus tard que cela signifie que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties *convexes*.

Démonstration

$\Rightarrow$ *Supposons que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Soient* $x, y \in \mathrm{I}$ *tels que* $y > x$ *et soit* $t \in [0,1]$. *Posons* $z = (1-t)x + ty$. *Montrons que* $z \in \mathrm{I}$. *On a :*

$$z - x = (1-t)x + ty - x = t(y-x) \geqslant 0$$

Par conséquent $z \geqslant x$. *De même :*

$$y - z = y - (1-t)x - ty = (1-t)(y-x) \geqslant 0$$

donc $y \geqslant z$. *Ceci prouve que* $x \leqslant z \leqslant y$ *et que* $z \in [x,y]$. *Comme* I *est un intervalle,* $z \in \mathrm{I}$.

$\Leftarrow$ *Supposons que* (2) *est vraie et montrons que* I *est un intervalle. Soient* $x, y \in \mathrm{I}$. *Il faut montrer que :* $[x,y] \subset \mathrm{I}$. *Si* $x = y$ *alors* $[x,y] = \{x\}$ *et il est clair que* $x \in \mathrm{I}$. *Si* $x \neq y$, *on peut supposer* $x < y$. *Considérons* $z \in [x,y]$. *On a :* $x \leqslant z \leqslant y$. *Posons* $t = \dfrac{z-x}{y-x}$. *Il est clair que* $t \in [0,1]$ *et que*

$$z = (1-t)x + ty.$$

Par conséquent $z \in \mathrm{I}$. *Ceci étant vrai pour tout* $z \in [x,y]$ *on peut affirmer que* $[x,y] \subset \mathrm{I}$.

PROPOSITION 9.12
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme :

- $\mathbb{R}$
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
- $]a,a[= \varnothing$

où $a, b \in \mathbb{R}$

Démonstration *Admis...*

9.7 Propriété d'Archimède

THÉORÈME 9.13 $\mathbb{R}$ **est un corps archimèdien**

L'ensemble $\mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante, dite d'*Archimède* : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad nx \geqslant y$.

Démonstration *Supposons que la propriété d'Archimède ne soit pas vraie. Celle ci sera prouvée si on aboutit à une contradiction. Alors il existe* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $y \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N},\ nx < y$. *Définissons la partie de* $\mathbb{R}$ *suivante :* $\mathscr{A} = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Elle est non vide et majorée par* y. *D'après l'axiome de la borne supérieure,* $\mathscr{A}$ *possède une borne supérieure* $a \in \mathbb{R}$. *En particulier :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad nx \leqslant a$ *ce qui s'écrit aussi* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\,x \leqslant a$. *On en déduit que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $nx \leqslant a - x$. *Mais alors* $a - x$ *est un majorant de* $\mathscr{A}$ *et comme* $x > 0$, $a - x < a$. *Le réel* a *n'est donc pas le plus petit des majorants de* $\mathscr{A}$ *ce qui est en contradiction avec le fait que ce soit la borne supérieure de* $\mathscr{A}$.

9.8 Partie entière

PROPOSITION 9.14 ♡♡♡ **Partie entière d'un réel**
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif p tel que :

$$\boxed{p \leqslant x < p+1}.$$

Cet entier est appelé la *partie entière* de x et est noté $[x]$ ou $\mathrm{E}(x)$

Démonstration *Soit* $x \in \mathbb{R}$.
Analyse *Supposons qu'un tel entier relatif* p *existe alors* p *est le plus grand élément de l'ensemble* $\mathscr{A} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$. *Réciproquement, si* p *est le plus grand élément de cet ensemble, il vérifie* $p \leqslant x < p+1$ *et c'est la partie entière de* x.
Synthèse *Montrons que la partie entière* p *de* x *existe. Cela revient à montrer que l'ensemble* $\mathscr{A}$ *possède un plus grand élément. On a :*

- $\mathscr{A} \neq \varnothing$ *: en effet, si* x *est positif ou nul alors* $0 \leqslant x$ *et donc* $0 \in \mathscr{A}$. *Sinon, si* x *est strictement négatif alors* $-x \in \mathbb{R}_+^*$. *En appliquant la propriété d'Archimède à* $\mathrm{Y} = -x$ *et* $\mathrm{X} = 1$, *on peut affirmer qu'il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{N.X} \geqslant \mathrm{Y}$ *c'est-à-dire tel que* $\mathrm{N}.1 \geqslant -x$ *ou* $x \geqslant -\mathrm{N}$. *On a donc* $-\mathrm{N} \in \mathscr{A}$.
- *L'ensemble* $\mathscr{A}$ *est majoré par* x *et il existe, d'après la propriété d'Archimède un entier plus grand que* x. *Par conséquent* a *est une partie majorée de* $\mathbb{Z}$.

Nous verrons plus tard qu'un axiome des entiers permet d'affirmer que $\mathscr{A}$ *possède un plus grand élément.*

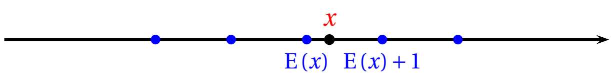


FIGURE 9.2 – Partie entière d'un réel

Remarque 9.8 Les deux majorations suivantes sont souvent utiles dans les exercices :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1} \quad \text{et} \quad \boxed{x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x}$$

9.9 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

DÉFINITION 9.9 **Partie dense**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathrm{A} \text{ tel que } |x - a| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 9.9 Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si on peut approché tout réel aussi près que l'on veut par un élément de A.

THÉORÈME 9.15 ♡♡♡ **$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$**
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et soit* $\varepsilon > 0$. *Considérons un entier* $q > 0$ *tel que* $1/q \leqslant \varepsilon$. *Posons* $p = \mathrm{E}(qx)$, *on a* $p \leqslant qx < p+1$ *d'où* $p/q \leqslant x < (p+1)/q$. *Posons* $r = p/q$, *le nombre* r *est bien rationnel et puisque* $0 \leqslant x - r < 1/q \leqslant \varepsilon$, *on a bien* $|x - r| \leqslant \varepsilon$.

Théorème 9.16 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ formé des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$.
- *si* x *est irrationnel, il suffit de poser* $\theta = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *et on a bien* $|x - \theta| = 0 \leqslant \varepsilon$.
- *si* $x \in \mathbb{Q}$ *est rationnel, on montre facilement par l'absurde que pour tout entier* $q > 0$, *le réel* $\theta_q = x + \sqrt{2}/q$ *est irrationnel. Puisque* $|x - \theta_q| = \sqrt{2}/q$, *il suffit de choisir un entier* q *suffisamment grand pour que* $\sqrt{2}/q \leqslant \varepsilon$.

En résumé

Les points suivants doivent être parfaitement connus :

1. l'axiome de la borne supérieure
2. la caractérisation de la borne supérieure
3. les inégalités triangulaires

Pour se familiariser avec les raisonnements d'analyse, il sera très profitable de passer du temps à comprendre et à refaire les démonstrations des théorèmes 9.9, 9.15.

9.10 Exercices

9.10.1 Inégalités

Exercice 9.1 ♡♡

Soient x_1, x_2, ..., x_n, n réels strictement positifs. Montrer que

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}\right) \geqslant n^2$$

Indication 9.7 : On montrera au préalable que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Solution : *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :*

$$x + 1/x \geqslant 2 \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \iff (x-1)^2 \geqslant 0$$

et donc on a toujours $x + 1/x \geqslant 2$. Par ailleurs :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}\right) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) + n$$

La somme $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i/x_j + x_j/x_i)$ contient $n^2/2 - n$ termes et d'après l'inégalité précédente, on peut affirmer que chacun de ces termes est $\geqslant 2$. Il vient donc :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}\right) \geqslant 2\left(\frac{n^2}{2} - n\right) + n = n^2 - n \geqslant n^2$$

Exercice 9.2 ♡♡

Montrer que :

1. *$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Étudier dans quel cas on a égalité.*
2. *$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.*

Indication 9.7 : Aidez-vous de la preuve de l'inégalité triangulaire page 341.

Solution :

1. *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. On a :*

   $$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \geqslant a + b$$

   et donc $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$. On a égalité si et seulement si $\sqrt{ab} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si a ou b est nul.
2. *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la première inégalité, on trouve que :*

   $$\sqrt{|a|} = \sqrt{|a-b+b|} \leqslant \sqrt{|a-b| + |b|} \leqslant \sqrt{|a-b|} - \sqrt{|b|}$$

   donc $\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \leqslant \sqrt{|a-b|}$. On montre de même que $\sqrt{|b|} \leqslant \sqrt{|a-b|} - \sqrt{|a|}$ et on en déduit que $\sqrt{|b|} - \sqrt{|a|} \leqslant \sqrt{|a-b|}$. En résumé : $\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$

Exercice 9.3 ♡♡

Majorer et minorer pour $n \geqslant n_0$ (à déterminer), les suites suivantes par des suites de la forme $c.n^p$ (avec le même exposant pour la majoration et la minoration).

1. $u_n = \dfrac{2n^5 - n^4 + n^2 - 1}{n^2 + n - 1}$
2. $u_n = \dfrac{n^2 + (n^2-1)/(n+1)}{n + (n^3-1)(n+1)}$

Solution :

1. *Pour $n \geqslant 1$, on a $n^5 - n^4 \geqslant 0$ et $n^2 - 1 \geqslant 0$ donc $2n^5 - n^4 + n^2 - 1 = n^5 + \left(n^5 - n^4\right) + \left(n^2 - 1\right) \geqslant n^5$. Par ailleurs, on a $-n^4 + n^2 \leqslant 0$ et donc $2n^5 - n^4 + n^2 - 1 \leqslant 2n^5$. On s'occupe maintenant du dénominateur. Si $n \geqslant 1$, $n - 1 \geqslant 0$ et $n^2 + n - 1 \geqslant n^2$. De même, si $n \geqslant 1$, $n^2 \geqslant n$ et donc $n^2 + n - 1 \leqslant 2n^2 - 1 \leqslant 2n^2$. En conclusion, si $n \geqslant 1$:*

   $$\frac{n^3}{2} = \frac{n^5}{2n^2} \leqslant \frac{2n^5 - n^4 + n^2 - 1}{n^2 + n - 1} \leqslant \frac{2n^5}{n^2} = 2n^3.$$

2. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n^4+n^3-1}$. D'après la première question, si $n \geqslant 1$, on sait que $n^2 \leqslant n^2+n-1 \leqslant 2n^2$. On montre facilement que si $n \geqslant 1$, $n^4 \leqslant n^4+n^3-1 \leqslant 2n^4$ donc il vient pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{n^2+n-1}{n^4+n^3-1} \leqslant \frac{2}{n^2}.$$

9.10.2 Borne supérieure

Exercice 9.4 ♡

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que la borne supérieure M de A vérifie $\mathrm{M} = \sup(\mathrm{A}) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Solution : Comme $\mathrm{M} > 0$ alors $\mathrm{M}/2 > 0$. D'après la propriété de caractérisation de la borne supérieure appliquée à $\varepsilon = \mathrm{M}/2$, il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $a \in]\mathrm{M}-\varepsilon, \mathrm{M}[$. Le réel a est strictement positif.

Exercice 9.5 ♡

Soit a un réel positif. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon \implies a = 0$$

Solution : Par l'absurde : supposons $a > 0$ et posons $\varepsilon = a/2 > 0$. Il vient alors $a \leqslant a/2$ ce qui n'est possible que si $a = 0$.

Exercice 9.6 ♡♡♡

Soit f une application croissante de $[0,1]$ dans lui même. On considère l'ensemble

$$\mathrm{E} = \left\{x \in [0,1],\ f(x) \geqslant x\right\}$$

1. *Montrer que E possède une borne supérieure b.*

2. *Montrer que $f(b) = b$.*

   Indication 9.7 : On pourra étudier les deux cas : $f(b) > b$ et $f(b) < b$

Solution :

1. E est une partie majorée de $\mathbb{R}$. En effet : $\forall x \in \mathrm{E}, \quad x \leqslant 1$. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$: $f(0) \geqslant 0$ donc $0 \in \mathrm{E}$. Par l'axiome de la borne supérieure, on peut affirmer que E admet une borne supérieure b.
2. – Si $\boxed{f(b) > b}$ alors, comme f est croissante, $f\left(f(b)\right) \geqslant f(b)$ et donc $f(b) \in \mathrm{E}$. Mais, comme $f(b) > b$ et que b est la borne supérieure de E, on aboutit à une contradiction. On ne peut donc avoir : $f(b) > b$.
   – Supposons maintenant que $\boxed{f(b) < b}$. Posons $\eta = b - f(b) > 0$. Comme b est la borne supérieure de E, il existe $c \in \mathrm{E}$ tel que : $b - \eta < c < b$. Par conséquent : $f(c) \geqslant c > b - \eta = b - b + f(b) = f(b)$, c'est-à-dire $f(c) > f(b)$. Mais f est croissante et cette inégalité est impossible.

   Par conséquent $f(b) = b$.

Exercice 9.7 ♡♡

On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$\mathrm{A} = \left\{\frac{x^2+2}{x^2+1} \ \mid\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Déterminer, s'ils existent, $\sup \mathrm{A}, \inf \mathrm{A}, \min \mathrm{A}, \max \mathrm{A}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. On écrit :

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

Alors on obtient immédiatement que A est minorée par 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant \varepsilon$. Il suffit en effet de choisir $x \geqslant \sqrt{1/\varepsilon - 1}$ si $\varepsilon \leqslant 1$ et $x = 0$ si $\varepsilon > 1$. Alors

$$1 \leqslant \frac{x^2+2}{x^2+1} \leqslant 1 + \varepsilon$$

et par conséquent, $\inf A = 1$. *De plus* A *ne possède pas de plus petit élément car* $\inf A \notin A$. *En effet, si* $1 \in A$ *alors il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x^2+2 = x^2+1$ *ce qui n'est pas le cas.*
Majorons ensuite pour $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1+1 \leqslant 2$$

(on a minoré le dénominateur car $x^2 \geqslant 0$*). Par conséquent,* A *possède une borne supérieure et c'est le plus grand élément de* A *(il suffit de prendre* $x = 0$*). En définitive,* $\sup A = \max A = 2$.

Exercice 9.8 ♡♡

On considère la partie de $\mathbb{R}$ *suivante :*

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Déterminer $\sup A$ *et* $\inf A$.

Indication 9.7 : *Faire un dessin représentant les points de* A.

Solution :

$$A = \left\{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots\right\}.$$

On montre facilement que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}.$$

En effet, c'est un majorant de A *qui appartient à* A.
Montrons que $\inf A = -1$ *en utilisant la propriété de caractérisation de la borne supérieure :*

1. -1 *est un minorant de* A *: Soit* $n \in \mathbb{N}*$, *on a* $(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1$.
2. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* n *est impair et* $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. *Posons* $x_\varepsilon = (-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n}$. *On a bien* $x_\varepsilon \in A$ *et* $-1 \leqslant x_\varepsilon \leqslant -1 + \varepsilon$.

Exercice 9.9 ♡

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ *et deux applications bornées* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. *Montrez que :*

$$\left|\sup_{x\in I} f(x) - \sup_{x\in I} g(x)\right| \leqslant \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|$$

Indication 9.7 : *Montrez que* $\sup_I f - \sup_I g \leqslant \sup_I |f-g|$ *et dans un deuxième temps que* $\sup_I g - \sup_I f \leqslant \sup_I |f-g|$. *Soit* $x \in I$, *écrire* $f(x) = f(x) - g(x) + g(x)$ *et majorer* $f(x) \leqslant |f(x) - g(x)| + g(x)$. *Utiliser ensuite le raisonnement de passage à la borne supérieure.*

Solution : *Soit* $x \in I$. *Majorons :*

$$f(x) = f(x) - g(x) + g(x) \leqslant |(f(x) - g(x)) + g(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x)| \leqslant \sup_I |(f-g)| + \sup_I |g|$$

Comme le membre de droite est un majorant indépendant de x, par passage à la borne sup, on en déduit que

$$\sup_I f \leqslant \sup_I |(f-g)| + \sup_I |g|$$

En écrivant de même

$$g(x) = g(x) - f(x) + f(x) \leqslant |f(x) - g(x)| + |f(x)| \leqslant \sup_I |(f-g)| + \sup_I |f|$$

on en déduit par passage à la borne supérieure que

$$\sup_I g \leqslant \sup_I |(f-g)| + \sup_I |f|$$

et alors $\left|\sup_{x\in I} f(x) - \sup_{x\in I} g(x)\right| \leqslant \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|$.

Exercice 9.10 ♡♡

Soient deux parties de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ *et* $B \subset \mathbb{R}$ *non-vides et majorées. Montrez que* $\sup(A \cup B)$ *existe et l'exprimer en fonction de* $\sup A$ *et* $\sup B$.

Solution : $A \cup B$ *est une partie de* $\mathbb{R}$ *non-vide. Montrons qu'elle est majorée. Puisque* A *est majorée, il existe* $M_A \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall a \in A$, $a \leqslant M_A$. *De même, il existe* $M_B \in \mathbb{R}$ *un majorant de* B. *Posons alors* $M = \max(M_A, M_B)$. *Alors si* $x \in A \cup B$, $x \leqslant M$. *En effet, si* $x \in A$, $x \leqslant M_A \leqslant M$ *et si* $x \in B$, $x \leqslant M_B \leqslant M$.
Montrons que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
On suppose que $\sup A \leqslant \sup B$. *Montrons alors que* $\sup(A \cup B) = \sup B$. *Utilisons pour cela la propriété de caractérisation de la borne supérieure :*

1. $\sup B$ *est un majorant de* $A \cup B$ *: Soit* $x \in A \cup B$ *: Si* $x \in B$, *alors* $x \leqslant \sup B$. *Si* $x \in A$, $x \leqslant \sup A \leqslant \sup B$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. *En utilisant la caractérisation de* $\sup B$, *il existe* $x_\varepsilon \in B$ *tel que*

$$\sup B - \varepsilon \leqslant x_\varepsilon \leqslant \sup B$$

Et $x_\varepsilon \in A \cup B$. *On montre ainsi que* $\sup B$ *est la borne supérieure de* $A \cup B$.
Si $\sup B \leqslant \sup A$, *on montre de la même façon que* $\sup A \cup B = \sup A$. *En résumé, on a :* $\boxed{\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)}$.

Exercice 9.11 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *une application croissante et* $A \subset \mathbb{R}$ *une partie non-vide majorée.*

1. *Montrez que* $\sup f(A) \leqslant f(\sup A)$.
2. *Trouvez un exemple où l'inégalité est stricte.*

Solution : *Il suffit de montrer que* $f(\sup A)$ *est un majorant de* $f(A)$. *Soit* $y \in f(A)$. *Il existe* $x \in A$ *tel que* $y = f(x)$. *Mais puisque* $x \leqslant \sup A$ *et que* f *est croissante,*

$$f(x) \leqslant f(\sup A)$$

Par conséquent, $f(A)$ *est majorée, admet donc une borne supérieure et* $\sup f(A) \leqslant f(\sup A)$.

Exercice 9.12 ♡♡

On considère une partie $A \subset \mathbb{R}$ *non-vide. On suppose qu'il existe* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\forall x \in A$, $0 < \alpha \leqslant x \leqslant \beta$. *Montrer que la partie* $A' = \{\frac{1}{x};\ x \in A\}$ *possède une borne supérieure et une borne inférieure et exprimer* $\sup A'$, $\inf A'$ *en fonction de* $\sup A$ *et* $\inf A$.

Solution : *On vérifie que* A' *est majorée par* $1/\alpha$ *et minorée par* $1/\beta$, *donc* $\sup A'$ *et* $\inf A'$ *existent. Montrons que* $\sup A' = 1/\inf A$.

- $\sup A' \leqslant \dfrac{1}{\inf A}$. *Soit* $y \in A'$, *il existe* $x \in A$ *tel que* $y = \dfrac{1}{x}$. *Puisque* $x \geqslant \sup A$, $y \leqslant \dfrac{1}{\inf A}$. *Par passage à la borne supérieure, on en déduit que* $\sup A' \leqslant 1/\inf A$.
- $\sup A' \geqslant \dfrac{1}{\inf A}$. *Montrons que* $\inf A \geqslant \dfrac{1}{\sup A'}$. *Soit* $x \in A$. *Écrivons* $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$. *Puisque* $1/x \in A'$, *on a* $1/x \leqslant \sup A'$ *et donc* $x \geqslant \dfrac{1}{\sup A'}$. *Par passage à la borne inférieure,* $\inf A \geqslant \dfrac{1}{\sup A'}$.

On montre de la même façon que $\inf A' = \dfrac{1}{\sup A}$.

9.10.3 Rationnels, irrationnels, densité

Exercice 9.13 ♡

Soient x *et* y *deux rationnels tels que* $\sqrt{x}$ *et* $\sqrt{y}$ *soient irrationnels. Démontrer que* $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ *est irrationnel.*

Indication 9.7 : Introduire la différence : $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

Solution : *On a :* $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. *Si* $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ *était rationnel alors il en serait de même de* $\sqrt{x}-\sqrt{y}$. *Mais comme* $\sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + (\sqrt{x}+\sqrt{y})}{2}$, *on aurait que* $\sqrt{x}$ *est rationnel.*

Exercice 9.14 ♡

On définit la fonction

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases}|x| & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ |x|+1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\end{cases}\end{array}\right.$$

Déterminez $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Solution : *Montrons que* 0 *est la borne inférieure de* $\operatorname{Im} f$.

– 0 *est clairement un minorant de* $\operatorname{Im} f$.

– *Soit* $\varepsilon>0$. *Comme* $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$, *il existe* $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *tel que* $0<x<\varepsilon$ *et* $f(x)=|x|=x$. *Donc* $x\in\operatorname{Im} f$.

On applique alors la propriété de caractérisation de la borne inférieure et $\boxed{0=\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)}$.

Exercice 9.15 ♡♡♡

Soit $f:\mathbb{R}+\mapsto\mathbb{R}$ *une fonction non-nulle vérifiant :*

$$(\star)\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$(\star\star)\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(xy)=f(x)f(y)$$

1. *Montrez que* $f(1)=1$ *et* $f(0)=0$.
2. *Montrez que* $\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=n$.
3. *Montrez que* $\forall r\in\mathbb{Q}+,\ f(r)=r$.
4. *Montrez que* $\forall x\in\mathbb{R}+,\ f(x)\geqslant 0$.
5. *Montrez que* f *est une fonction croissante.*
6. *Montrez que* $\forall x\in\mathbb{R}+,\ f(x)=x$. *(On raisonnera par l'absurde, en supposant par exemple que* $x<f(x)$ *et on introduira un rationnel* r *tel que* $x<r<f(x)$*).*

Solution :

1. *Comme* f *n'est pas la fonction nulle, il existe* $\alpha\in\mathbb{R}+$ *tel que* $f(\alpha)\neq 0$. *Alors, puisque*

$$f(\alpha)=f(1.\alpha)=f(1).f(\alpha)$$

on en déduit que

$$f(\alpha)\left[f(1)-1\right]=0$$

et puisque $f(\alpha)\neq 0$, *on obtient que* $f(1)=1$.
Puisque d'après $(\star)$,

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$$

on obtient que $f(0)=0$.

2. *Montrons la propriété par récurrence sur* n.

$$\mathscr{P}(n): f(n)=n$$

$\mathscr{P}(0)$ *est vraie d'après a).*
$\mathscr{P}(n)\implies\mathscr{P}(n+1)$ *: en utilisant* $(\star)$ *et* $\mathscr{P}(n)$ *:*

$$f(n+1)=f(n)+f(1)=f(n)+1=n+1$$

3. *Soit* $r\in\mathbb{Q}+$. *Il existe* $(p,q)\in\mathbb{Q}2$ *(*$p\geqslant 0$, $q>0$*) tels que*

$$r=\frac{p}{q}$$

Alors, en utilisant $(\star\star)$ *:*

$$qf\left(\frac{p}{q}\right)=f(q).f\left(\frac{p}{q}\right)=f(p)=p$$

On en tire donc que

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}+$. Écrivons en utilisant $(\star\star)$:

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}.\sqrt{x}\right) = \left[f\left(\sqrt{x}\right)\right]^2 \geqslant 0$$

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}+^2$, tels que $x \leqslant y$. Comme $y - x \geqslant 0$, d'après d), on en déduit que

$$f(y-x) \geqslant 0$$

et d'après $(\star)$ que

$$f(y) = f(y-x+x) = f(y-x) + f(x) \geqslant f(x)$$

Donc f est croissante.

6. Par l'absurde, si $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}+}$, il existerait $x \in \mathbb{R}+$ tel que $f(x) \neq x$. Distinguons les deux cas possibles :
   (a) $x < f(x)$: Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ vérifiant

$$x < r < f(x)$$

   Comme d'après c), $f(r) = r$, on aurait puisque f est croissante :

$$f(x) \leqslant f(r)$$

   et donc

$$x < r < f(x) \leqslant f(r) = r$$

   ce qui est absurde.

   (b) $f(x) < x$: ce cas se traite de la même façon.

Exercice 9.16 ♡♡♡ **Sous-groupes de** $(\mathbb{R}, +)$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. L'objet de cet exercice est de montrer que G est soit discret dans $\mathbb{R}$ de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{G} \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.
2. En déduire que $\mathrm{G} \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \geqslant 0$.
3. On suppose dans cette partie que $a > 0$.
   (a) Montrer que $a \in \mathrm{G}$.
   Indication 9.7 : On pourra faire un raisonnement par l'absurde en montrant que si a n'appartient pas à G alors il existe des éléments t_1 et t_2 de G tels que $a < t_2 < t_1 < 2a$ et en déduire une contradiction.
   (b) Prouver que $\mathrm{G} = a\mathbb{Z}$.
4. On suppose maintenant que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Comme G n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe $x \in \mathrm{G}$ tel que $x \neq 0$. Si x est positif, il est clair que $\mathrm{G} \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. Sinon, si x est négatif, G étant un groupe, $-x$ est élément de G et est positif. Pas suite, $\mathrm{G} \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.
2. $\mathrm{G} \cap \mathbb{R}_+^*$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$. Elle est minorée par 0. En appliquant l'axiome de la borne supérieure, elle admet une borne inférieure $a \geqslant 0$.
3. (a) Supposons que a n'est pas élément de G. En appliquant la propriété de caractérisation de la borne inférieure, il existe t_1, $t_2 \in \mathrm{G}$ tels que $0 < a < t_2 < t_1 < 2a$. Mais alors $0 < t_1 - t_2 < a$ car $t_1 > 0$. De plus, $t_1 - t_2 \in \mathrm{G}$. Donc a ne peut alors être la borne inférieure de G ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ. a est donc nécessairement élément de G.
   (b) a étant élément de G, il est clair que $a\mathbb{Z} \subset \mathrm{G}$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in \mathrm{G}$. Quitte à considérer $-x$ plutôt que x, on peut supposer que x est positif. D'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n.a > x$. Notons n_0 le plus petit entier vérifiant cette propriété. On a : $(n_0 - 1).a \leqslant x < n_0.a$ ce qui amène : $0 \leqslant x - (n_0 - 1).a \leqslant a$. Mais alors $x - (n_0 - 1).a$ est un élément positif de G plus petit que a. Comme a est la borne inférieure de G, ceci n'est possible que si $x - (n_0 - 1).a = 0$ c'est-à-dire que si $x = (n_0 - 1).a$. On prouve ainsi que $\mathrm{G} \subset a\mathbb{Z}$. Finalement : $\mathrm{G} = a\mathbb{Z}$.
4. Soit $x < y \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que $[x, y] \cap \mathrm{G} \neq \varnothing$. Comme précédemment, on peut supposer que x est positif. Posons : $\varepsilon = y - x > 0$. D'après la propriété de caractérisation de la borne inférieure, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $0 < g \leqslant \varepsilon$. Il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que : $y = qg + r$ et $0 \leqslant r < g$. Donc $x = y - (y - x) = y - \varepsilon \leqslant y - g \leqslant y - r \leqslant qg \leqslant y$. Donc $qg \in [x, y]$ et comme $qg \in \mathrm{G}$, G est dense dans $\mathbb{R}$.

9.10.4 Partie entière

Exercice 9.17 ♡

1. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

2. *En déduire la partie entière de*

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$$

Solution :

1. *On a :*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

On montre de même que :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. *On en déduit que*

$$\sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i+1} - \sqrt{i} < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < \sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i} - \sqrt{i-1}.$$

Mais les deux sommes extrêmes sont télescopiques et on trouve :

$$\sqrt{10001} - 1 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < \sqrt{10000}$$

Soit aussi :

$$99 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < 100.$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)\right) = 99}$

Chapitre 10

Suites de nombres réels

> On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut s'approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer...
> D'Alembert.

Pour bien aborder ce chapitre

Nous allons définir dans ce chapitre et le suivant une des notions les plus fondamentales en analyse, celle de *limite*.
Si on se pose les questions suivantes :
– Qu'est ce qu'une dérivée ?
– Qu'est ce qu'une intégrale ?
– Qu'est ce qu'une somme infinie ?
La réponse est la même : une limite.
Bien que les mathématiciens utilisent ces différents objets depuis la renaissance, ce n'est que vers la fin du 18e siècle et le début du 19e siècle que la notion de limite, grâce à D'Alembert (voir 51 page 778) et à Cauchy (voir 11 page 200), commence à être formalisée. Le cours d'analyse de Cauchy, alors qu'il professait à l'École Polytechnique, allait d'ailleurs devenir une référence pour tout travail en analyse au 19e siècle. Malgré la grande rigueur de son contenu, il subsistait des lacunes, comme une preuve, fausse, que la limite d'une série de fonctions continues est continue. Le mathématicien allemand Karl Weierstrass vers 1860 (voir 24 page 366) et ses élèves formalisèrent définitivement la notion de limite et parachevèrent l'œuvre de Cauchy. La forme actuelle de la définition d'une limite est exactement celle donnée par Weierstrass.
Il vous faudra prendre le temps dans ce chapitre de bien comprendre les nouvelles notions, de faire et refaire les démonstrations. Il fallut plusieurs siècles pour que les mathématiciens formalisent ces concepts correctement. Il est alors naturel que cela vous demande un travail approfondi. Vous êtes en train de préparer les fondations sur lesquelles seront construites toute votre connaissance en analyse.

10.1 Définitions

10.1.1 Vocabulaire

DÉFINITION 10.1 **Suite réelle**
Une *suite réelle* est une application $u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. On note cette application sous forme indicielle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n). L'ensemble des suites réelles est noté $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Remarque 10.1
– On appellera aussi suite réelle une application u définie à partir d'un certain $n_0\in\mathbb{N}$, $u:\{n\in\mathbb{N}\mid n\geqslant n_0\}\to\mathbb{R}$. On la note : $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
– Attention aux notations : la notation (u_n) désigne une suite, alors que u_n désigne le *terme* de rang n de la suite (u_n).

On adoptera une des visualisations suivantes pour une suite :

10.1.2 Opérations sur les suites

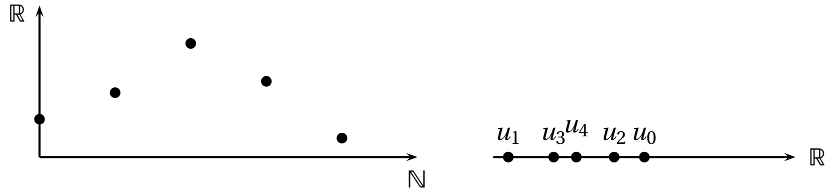


FIGURE 10.1 – Représentations d'une suite réelle

DÉFINITION 10.2 **Opérations sur les suites**
On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soient $(u_n),(v_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
- *Addition :* $(u_n)+(v_n) = (u_n + v_n)$
- *Multiplication par un scalaire :* $\lambda(u_n) = (\lambda\ u_n)$
- *Multiplication de deux suites :* $(u_n) \times (v_n) = (u_n.v_n)$

Remarque 10.2
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication précédemment définies a une structure d'anneau commutatif (que l'on verra plus tard).
  - Élément neutre de l'addition : la suite nulle.
  - Élément neutre de la multiplication : la suite constante égale à 1.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire précédemment définies a une structure d'espace vectoriel que l'on verra plus tard.

DÉFINITION 10.3 **Suite majorée, minorée, bornée**
On dit qu'une suite réelle (u_n) est :
- *majorée* lorsque le sous-ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$$

- *minorée* lorsque le sous-ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire lorsque :

$$\exists m \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$$

- *bornée* si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

PROPOSITION 10.1
Une suite $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

Démonstration
$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que la suite* (u_n) *est bornée. Alors il existe* $m, M \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$. *En notant* $K = \max(|m|,|M|)$, *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant K$. *La suite* $|u_n|$ *est majorée par le réel* K.
$\boxed{\Leftarrow}$ *Si la suite* $(|u_n|)$ *est majorée, il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$ *et donc* $\forall n \in \mathbb{N}$, $-M \leqslant u_n \leqslant M$ *ce qui prouve que la suite* (u_n) *est bornée.*

DÉFINITION 10.4 **Suite croissante, décroissante, monotone**
On dit qu'une suite réelle (u_n) est
- *croissante* si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$

- *décroissante* si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$

- *monotone* si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

On dit que (u_n) est *strictement croissante* , *strictement décroissante* ou *strictement monotone* si et seulement si l'inégalité correspondante est stricte.

DÉFINITION 10.5 **Suite constante**
Une suite $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dite *constante* lorsqu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha$.

DÉFINITION 10.6 **À partir d'un certain rang**
On dit qu'*une propriété* $P(n)$ *est vérifiée à partir d'un certain rang* $N \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, la propriété $P(n)$ est vraie.

10.2 Convergence d'une suite

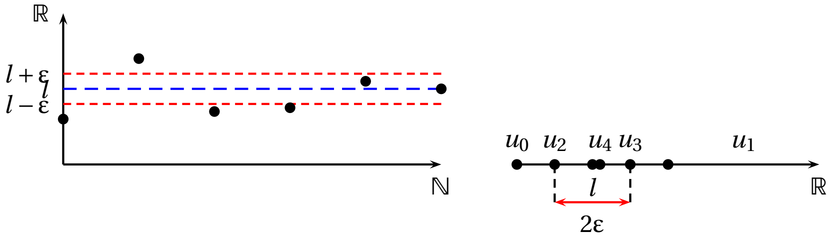
10.2.1 Suites convergentes, divergentes

DÉFINITION 10.7 ♡♡♡ **Limite, suite convergente, suite divergente**
On dit qu'une suite réelle (u_n) *converge* vers un réel $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon}$$

c'est-à dire, pour tout epsilon strictement positif, il existe un entier N qui dépend de epsilon tel que pour tout n plus grand que N, u_n est à une distance plus petite que ε de l.
On dit alors que l est la *limite* de la suite (u_n) et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
– S'il existe un tel l, on dit que la suite (u_n) est *convergente*.
– S'il n'existe pas de réel l vérifiant cette propriété, on dit que la suite (u_n) est *divergente*.

Remarque 10.3 Pour comprendre cette définition, étudiez le premier dessin de la figure ci-dessous. Imaginez qu'une clé à molette est centrée sur l'axe (Oy) en l. Vous pouvez choisir l'ouverture 2ε à votre guise aussi petite que vous le souhaitez. Chaque ouverture détermine une bande $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Si la suite converge vers l, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la bande $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. Une autre façon de comprendre cette définition consiste à interpréter n comme un temps. À l'instant n, on allume un point sur l'axe (Ox) d'abscisse u_n. Pour tout $\varepsilon > 0$, à partir de l'instant N, tous les points allumés seront dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$.



Multimédia : un pied à coulisse où l'on choisit ε avec le rang N à partir duquel tous les termes sont dans la bande $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$

PLAN 10.1 : Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

On utilise le plan

1. *Soit* $\varepsilon > 0$.
2. *On cherche à partir de quelle valeur* N, *on a* $|u_N - l| \leqslant l$ *en sorte de vérifier le point* 3. *Cela se ramène la plupart du temps à la résolution d'inéquations. C'est souvent la partie la partie la plus difficile de la preuve*
3. *Posons* N = ...
4. *Vérifions : soit* $n \geqslant N$, *on a bien* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
5. *Donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Exemple 10.1
Montrons que la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en utilisant le plan ci-dessus.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
2. On cherche N tel que $1/N \leqslant \varepsilon$. On obtient $N \geqslant 1/\varepsilon$.
3. On pose alors $N = E(1/\varepsilon) + 1$.
4. Vérifions. Soit $n \geqslant N$. On a $n \geqslant N \geqslant 1/\varepsilon$ ce qui s'écrit aussi $1/n \leqslant \varepsilon$ ou encore $|1/n - 0| \leqslant \varepsilon$.
5. Donc $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

PROPOSITION 10.2 **On peut utiliser une inégalité stricte dans la définition de convergence**
Une suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - l| < \varepsilon$$

Démonstration
$\Leftarrow$ *est évidente puisqu'une inégalité stricte est à fortiori large.*
$\Rightarrow$ *soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$ et à partir de ce rang, on a $|u_n - l| \leqslant \varepsilon' < \varepsilon$.*

Remarque 10.4 Nous allons voir cette année plusieurs définitions d'analyse faisant intervenir des inégalités. Par défaut, nous utiliserons des inégalités larges. On peut souvent remplacer dans les définitions ces inégalités larges par des inégalités strictes au besoin en utilisant l'idée de la démonstration précédente.

THÉORÈME 10.3 ♡♡♡ **Unicité de la limite**
La limite d'une suite réelle, si elle existe, est unique.

Démonstration ♡ *Supposons que (u_n) possède deux limites $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ et montrons par l'absurde que $l_1 = l_2$. Supposons $l_1 \neq l_2$ et posons $\varepsilon = |l_1 - l_2|/2 > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l_1| < \varepsilon$ et puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$, il existe un rang N_2 à partir duquel $|u_n - l_2| < \varepsilon$. Considérons l'entier $n = \max(N_1, N_2)$ supérieur à la fois à N_1 et N_2. On a $|u_n - l_1| < \varepsilon$ et $|u_n - l_2| < \varepsilon$ mais alors, en utilisant l'inégalité triangulaire,*

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \leqslant |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$$

ce qui est absurde.

THÉORÈME 10.4 **La valeur absolue d'une suite convergente est convergente**
Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. Alors $\boxed{|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|}$

Démonstration *Soit $\varepsilon > 0$, puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Alors pour $n \geqslant N$, en vertu de la minoration de l'inégalité triangulaire voir 9.6 page 341, $\big||u_n| - |l|\big| \leqslant |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.*

THÉORÈME 10.5 ♡ **Une suite convergente est bornée**
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration ♡♡♡ *Posons $\varepsilon = 1$. Puisque (u_n) converge, il existe $l \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Donc pour $n \geqslant N$, en vertu de la minoration de l'inégalité triangulaire, $|u_n| - |l| \leqslant |u_n - l| \leqslant 1$ et donc $|u_n| \leqslant 1 + |l|$. Les premiers termes sont en nombre fini, donc on peut poser $M = \max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |l|)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$ ce qui montre que la suite est bornée.*

On se sert souvent du résultat suivant pour transformer l'hypothèse sur une limite en inégalité à partir d'un certain rang.

THÉORÈME 10.6 ♡♡♡ **Transformation de limite en inégalités**
Soit (u_n) une suite et $k, k' \in \mathbb{R}$.. On suppose que

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$

(H2) $k < l < k'$.

Alors, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $k \leqslant u_n \leqslant k'$.

Démonstration ♡ *Posons $\varepsilon = \min(l - k, k' - l) > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe un rang N à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Alors, si $n \geqslant N$,*
- *$u_n - l \leqslant \varepsilon \leqslant k' - l$ d'où $u_n \leqslant k'$,*
- *$l - u_n \leqslant \varepsilon \leqslant l - k$ d'où $u_n \geqslant k$.*

10.3 Opérations sur les limites

10.3.1 Opérations algébriques sur les limites

Les démonstrations de ce paragraphe sont très instructives pour comprendre ce qu'est une preuve d'analyse. Nous les avons rédigées en deux étapes. La première étape (qui se fait au brouillon) consiste à comprendre l'idée de l'approximation. La deuxième étape consiste à rédiger rigoureusement une preuve qui s'appuie sur le plan de démonstration correspondant aux définitions. Étudiez en particulier l'ordre dans lequel les différents objets sont introduits dans ces preuves.

PROPOSITION 10.7
Soit (u_n) une suite réelle et l un réel. La suite (u_n) converge vers l si et seulement si la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.

Démonstration *Il suffit d'écrire $|u_n - l| = |(u_n - l) - 0|$ dans la définition.*

Pour montrer qu'une suite converge vers une limite l, il suffit donc de majorer $|u_n - l|$ comme le montre le résultat suivant.

PROPOSITION 10.8 **Théorème de majoration**
Soit (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite réelle (α_n) et un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

(H1) $\forall n \geqslant N_1, \quad |u_n - l| \leqslant \alpha_n,$

(H2) $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $|\alpha_n| \leqslant \varepsilon$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \geqslant N$. Puisque $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$,

$$|u_n - l| \leqslant \alpha_n \leqslant \varepsilon$$

THÉORÈME 10.9 **La somme de suites convergentes est convergente**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l,$

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'.$

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l + l'.$

Démonstration ♡♡♡ *Nous devons majorer $|(u_n + v_n) - (l + l')|$ à partir d'un certain rang. Notre hypothèse permet de majorer les quantités $|u_n - l|$ et $|v_n - l'|$ par un réel $\varepsilon' > 0$ arbitraire à partir d'un certain rang. Faisons donc apparaître ces groupements avant d'utiliser l'inégalité triangulaire :*

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| \leqslant 2\varepsilon'$$

Il ne reste plus qu'à rédiger rigoureusement la preuve en suivant le plan de démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$. De même, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon'$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \geqslant N$, comme $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$,

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leqslant |(u_n - l) + (v_n - l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| \leqslant 2\varepsilon' = \varepsilon$$

THÉORÈME 10.10 ♡ **Combinaison linéaire de suites convergentes**
Soient deux suites (u_n) et (v_n) convergentes : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$. Alors pour tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha l + \beta l'$$

Démonstration *Similaire à la preuve précédente et laissée en exercice. Utiliser* $\varepsilon' = \varepsilon/(|\alpha| + |\beta|)$ *lorsque* α *et* β *ne sont pas tous les deux nuls.*

THÉORÈME 10.11 ♡ **Produit de suites convergentes**
On considère deux suites (u_n) et (v_n) convergentes :

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$,

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l' \in \mathbb{R}$.

Alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ll'$.

Démonstration ♡♡♡ *Nous devons estimer la quantité* $|u_n v_n - ll'|$ *et utiliser notre hypothèse,* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$ *et* $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon'$*. Faisons donc apparaître ces groupements à l'intérieur des valeurs absolues avant de majorer grâce à l'inégalité triangulaire :*

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \leqslant |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l| \leqslant (|u_n| + |l'|)\varepsilon'$$

Il reste $|u_n|$ *qu'il nous faut majorer. Nous savons qu'une suite convergente est bornée, donc* $|u_n| \leqslant M$ *et alors* $|u_n v_n - ll'| \leqslant (|l'| + M)\varepsilon'$*. Reste à rédiger rigoureusement la preuve en suivant le plan de démonstration.*

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque la suite (u_n) *converge, elle est bornée. Il existe* $M > 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Posons $\varepsilon' = \varepsilon/(|l'| + M) > 0$. *Puisque* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_1$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$. *Puisque* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$, *il existe* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_2$, $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon'$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant N$, *on a*

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \leqslant |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l| \leqslant (M + |l'|)\varepsilon' = \varepsilon$$

PROPOSITION 10.12 **Inverse d'une suite convergente**
Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$,

(H2) $l \neq 0$.

Alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{l}$.

Démonstration ♡♡♡ *Nous devons estimer la quantité* $|1/u_n - 1/l|$ *en utilisant l'hypothèse* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$*. Écrivons*

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|l||u_n|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{|l||u_n|}$$

Il reste $|u_n|$ *au dénominateur qu'il nous faut minorer. Comme* $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|$, *et que* $k = |l|/2 < |l|$, *d'après la proposition 10.6, à partir d'un certain rang,* $|1/u_n - 1/l| \leqslant 2\varepsilon'/|l|^2$*. Il nous reste à rédiger rigoureusement cette idée en suivant le plan :*

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\varepsilon' = |l|^2\varepsilon/2$.

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, *il existe un rang* N_1 *à partir duquel* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon'$.

Puisque d'après la proposition 10.4, $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|$, *en utilisant la proposition 10.6 avec* $k = |l|/2 < |l|$, *il existe un rang* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_2$, $|u_n| \geqslant |l|/2$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \geqslant N$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|l||u_n|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{|l|^2/2} = \varepsilon$$

THÉORÈME 10.13 **Quotient de suites convergentes**
On considère deux suites (u_n) et (v_n) et on fait les hypothèses suivantes.

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$,

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$,

(H3) $l' \neq 0$.

Alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{l}{l'}$.

Démonstration *Il suffit d'appliquer les théorèmes 10.12 puis 10.11.*

Remarque 10.5 Les théorèmes précédents s'appellent les *théorèmes généraux* sur les suites.

10.3.2 Limites et relations d'ordre

Nous allons voir dans ce paragraphe les liens entre limites et inégalités. Ces résultats sont particuliers aux suites réelles et ne s'étendront pas aux suites complexes (il n'y a pas de relation d'ordre naturelle dans $\mathbb{C}$!).

PROPOSITION 10.14 ♡♡♡ **Passage à la limite dans une inégalité**
Soit (u_n) une suite réelle et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$,
- (H2) À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant k$.

Alors $l \leqslant k$.

Démonstration *Montrons le résultat par l'absurde. Supposons $l > k$ et posons $\varepsilon = l - k > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon$ (on peut utiliser une inégalité stricte dans la définition de la limite). D'après la deuxième hypothèse, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \leqslant k$. Considérons l'entier $n = \max(N_1, N_2)$. On devrait avoir d'une part $l - u_n < l - k$ d'où $u_n > k$ et d'autre part $u_n \leqslant k$ ce qui est absurde.*

Remarque 10.6 Attention aux hypothèses de ce théorème important : on *suppose* que la suite converge. En aucun cas un passage à la limite ne permet de justifier l'*existence* d'une limite. On obtient évidemment le théorème correspondant en remplaçant l'inégalité $\leqslant$ par $\geqslant$.

PROPOSITION 10.15 ♡♡♡ **Passage à la limite dans les inégalités**
Soient deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que :

- (H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$,
- (H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$,
- (H3) À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

Alors $l \leqslant l'$.

Démonstration *Il suffit d'utiliser le résultat précédent avec la suite $(w_n) = (u_n - v_n)$ et $k = 0$.*

`Multimédia : Une suite cv vers` l. `On choisit une barre de hauteur` $k < l$ `et on obtient le rang à partir duquel` $u_n \geqslant k$

THÉORÈME 10.16 ♡♡♡ **Théorème des gendarmes**

On considère trois suites : (u_n), (v_n) et (w_n) . On suppose que :

- (H1) À partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$,
- (H2) Les deux suites encadrantes (v_n) et (w_n) convergent vers une *même limite* $l \in \mathbb{R}$.

Alors la suite (u_n) converge vers l.

Démonstration ♡

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$. De même, il existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_3$, $|w_n - l| \leqslant \varepsilon$. D'après la première hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

Posons $N = \max(N_1, N_2, N_3)$.

Soit $n \geqslant N$. On a $u_n - l \leqslant w_n - l \leqslant \varepsilon$ et $l - u_n \leqslant l - v_n \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 10.7 Contrairement au passage à la limite dans les inégalités, le théorème des gendarmes garantit l'*existence* de la limite de (u_n). Bien distinguer les deux théorèmes.

THÉORÈME 10.17 ♡ **Caractérisation séquentielle de la borne supérieure**
On considère une partie X non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle possède une borne supérieure $\sup X$. Soit un réel $l \in \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $l = \sup X$.
2. l est un majorant de X et il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers l.

Démonstration ♡ *La preuve illustre bien l'utilisation des deux théorèmes précédents.*

$\Rightarrow$ *On sait que* $\sup X$ *est un majorant de la partie* X*. Nous allons utiliser pour la première fois une technique importante en analyse : la construction d'une suite à partir d'une propriété à quantificateurs de la forme* $\forall \varepsilon > 0, \exists x \dots$*. Utilisons la caractérisation à* ε *de la borne supérieure (théorème 9.9 page 342).*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X,\ \sup X - \varepsilon \leqslant x \leqslant \sup X$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$*, en prenant* $\varepsilon = 1/n > 0$ *dans la propriété ci-dessus, il existe un réel* $x_n \in X$ *vérifiant* $\sup X - 1/n \leqslant x_n \leqslant \sup X$*. On construit ainsi une suite de points* (x_n) *de* X *qui converge vers* $\sup X$ *d'après le théorème des gendarmes.*

$\Leftarrow$ *Montrons que* l *est le plus petit des majorants de la partie* X*. Soit* M *un majorant de* X*, on a* $\forall x \in X,\ x \leqslant M$ *d'où*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant M$$

Mais puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$*, par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que* $l \leqslant M$*.*

`Multimédia : illustrer cette construction séquentielle`

10.3.3 Limites infinies

Nous allons étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$.

DÉFINITION 10.8 ♡ **Suite divergeant vers** $+\infty$ **ou** $-\infty$

Soit (u_n) une suite réelle.

– On dit que (u_n) *diverge (ou tend)* vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R},\quad \exists N \in \mathbb{N} :\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant M$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

– On dit que (u_n) *diverge (ou tend)* vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{R},\quad \exists N \in \mathbb{N} :\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant m$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

PLAN 10.2 : Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

On utilise le plan :

1. *Soit* $M \in \mathbb{R}$.
2. *Posons* N = ...
3. *Vérifions : soit* $n \geqslant N$*, on a bien* $u_n \geqslant M$

Remarque 10.8 Attention, il existe des suites divergentes qui ne tendent pas vers $\pm\infty$, par exemple la suite de terme général $(-1)^n \dots$

On étend les théorèmes généraux aux suites qui divergent vers l'infini. Par exemple :

PROPOSITION 10.18
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$,

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration *On veut minorer $u_n + v_n$ à partir d'un certain rang. Avec nos hypothèses, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant l-1$ et $v_n \geqslant M'$ (avec M' aussi grand que l'on veut). Alors à partir d'un certain rang, $u_n + v_n \geqslant M' + l - 1$. Il suffit de rédiger rigoureusement cette idée :*

Soit $M \in \mathbb{R}$.

Posons $M' = M - l + 1$.

Puisque $v_n \to +\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_1,\ v_n \geqslant M'$.

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et que $k = l-1 < l$, d'après le théorème 10.6, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_2,\ u_n \geqslant l-1$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \geqslant N$, $u_n + v_n \geqslant l - 1 + M' = M$.

Plus généralement, on dispose des théorèmes généraux suivants qui utilisent les opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$ vues dans les tables 9.7 page 343.

THÉORÈME 10.19 **Théorèmes généraux étendus à $\overline{\mathbb{R}}$**
On considère deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que :

(H1) $u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$,

(H2) $v_n \to l' \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors,
- $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l + l'$ sauf si $(l + l')$ est une forme indéfinie.
- $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ll'$ sauf si (ll') est une forme indéfinie.
- $u_n / v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l/l'$ sauf si l/l' est une forme indéfinie.

On utilise souvent la variante suivante du théorème des gendarmes :

THÉORÈME 10.20 ♡♡♡ **Théorème des gendarmes étendu à $\overline{\mathbb{R}}$**
Soient deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que

(H1) À partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n$,

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
De même, si

(H1) À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$,

(H2) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$,

alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Démonstration

Soit $M \in \mathbb{N}$.

Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_1,\ v_n \geqslant M$.

D'après la première hypothèse, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant N_2,\ v_n \leqslant u_n$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \geqslant N$, $u_n \geqslant v_n \geqslant M$.

10.4 Suite extraite d'une suite

DÉFINITION 10.9 **Suite extraite**
On dit qu'un suite (v_n) est *une suite extraite* ou *une sous suite* d'une suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante* telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

LEMME 10.21 ♡
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n$$

Démonstration *Par récurrence :*

Si $n = 0$ alors comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a bien $\varphi(0) \geqslant 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\varphi(n) \geqslant n$. Montrons que $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. Comme φ est strictement croissante, on a nécessairement $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$. Par conséquent $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. (Si pour deux entiers x, y, on a $x > y$ alors $x \geqslant y+1$).

La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence.

PROPOSITION 10.22 ♡♡♡ **Une suite extraite d'une suite convergente est convergente**
Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite l est une suite convergeant vers l

Démonstration *Soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Montrons que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.*

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Soit $n \geqslant \mathrm{N}$. D'après le lemme précédent, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant \mathrm{N}$ et donc $|u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \varepsilon$.

COROLLAIRE 10.23 ♡ **Critère de divergence d'une suite**
Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe deux suites extraites $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\tilde\varphi(n)}$ telles que :

(H1) $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 \in \mathbb{R}$,

(H2) $u_{\tilde\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2 \in \mathbb{R}$,

(H3) $l_1 \neq l_2$.

Alors la suite (u_n) est divergente.

Démonstration *Par l'absurde, s'il existait $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, d'après le théorème précédent, on aurait $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $u_{\tilde\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Par unicité de la limite, on aurait alors $l_1 = l = l_2$ ce qui est absurde.*

Exemple 10.2 La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente. En effet, la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1 alors que la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1.

PROPOSITION 10.24 **Critère de convergence d'une suite**

Soit (u_n) une suite et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

(H1) $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

(H2) $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe un rang $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant \mathrm{N}_1$, $\left|u_{2p} - l\right| \leqslant \varepsilon$. Puisque $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe un rang $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant \mathrm{N}_2$, $\left|u_{2p+1} - l\right| \leqslant \varepsilon$.

Posons $\mathrm{N} = \max(2\mathrm{N}_1, 2\mathrm{N}_2 + 1)$.

Soit $n \geqslant \mathrm{N}$. Il y a deux possibilités.
- *Si n est pair, $n = 2p$ avec $2p \geqslant \mathrm{N} \geqslant 2\mathrm{N}_1$ d'où $p \geqslant \mathrm{N}_1$ et alors $\left|u_{2p} - l\right| \leqslant \varepsilon$.*
- *Si n est impair, $n = 2p+1$ avec $2p+1 \geqslant \mathrm{N} \geqslant 2\mathrm{N}_2 + 1$ d'où $p \geqslant \mathrm{N}_2$ et alors $\left|u_{2p+1} - l\right| \leqslant \varepsilon$.*

Dans les deux cas, on a vérifié que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

10.5 Suites monotones

10.5.1 Théorème de la limite monotone

THÉORÈME 10.25 ♡♡♡ **Théorème de la limite monotone**
Soit (u_n) une suite *croissante*. On a les deux possibilités suivantes.

1. Si la suite (u_n) est majorée alors elle converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ donnée par $l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si la suite (u_n) n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration ♡♡♡

1. *Supposons que (u_n) soit une suite croissante et majorée par un réel M. L'ensemble $\mathscr{A} = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. En appliquant la propriété de la borne supérieure 9.4, cet ensemble possède une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.*

   Soit $\varepsilon > 0$.

   D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in \mathscr{A}$ tel que $l - \varepsilon \leqslant x \leqslant l$. Il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_\mathrm{N}$ et on a $l - \varepsilon \leqslant u_\mathrm{N} \leqslant l$.

   Soit $n \geqslant \mathrm{N}$. Puisque la suite (u_n) est croissante, $u_\mathrm{N} \leqslant u_n$ et comme l est un majorant de $\mathscr{A}$, $u_n \leqslant l$. D'où $l - \varepsilon \leqslant u_\mathrm{N} \leqslant u_n \leqslant l$. Mais alors $-\varepsilon \leqslant u_n - l \leqslant 0$ ce qui montre que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.
2. *Supposons que (u_n) est croissante mais non majorée. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $u_\mathrm{N} \geqslant \mathrm{A}$. Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \geqslant u_\mathrm{N} \geqslant \mathrm{A}$. Par conséquent $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Remarque 10.9
- Ce théorème dit que toute suite croissante possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- La première partie de ce théorème est souvent formulée sous la forme suivante qu'il faut impérativement retenir :

  Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
- Si une suite (u_n) croissante converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant l$.
- Si un suite (u_n) décroissante converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ l \leqslant u_n$.

COROLLAIRE 10.26
Soit (u_n) une suite *décroissante*. On a les deux possibilités suivantes.

1. Si (u_n) est minorée alors (u_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ donnée par $l = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si (u_n) n'est pas minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Démonstration *Il suffit d'appliquer la propriété précédente à la suite $(-u_n)$.*

Remarque 10.10 Le théorème de la limite monotone permet de justifier l'*existence* d'une limite sans la connaître explicitement. C'est un théorème d'existence abstrait très important en analyse.

10.5.2 Suites adjacentes

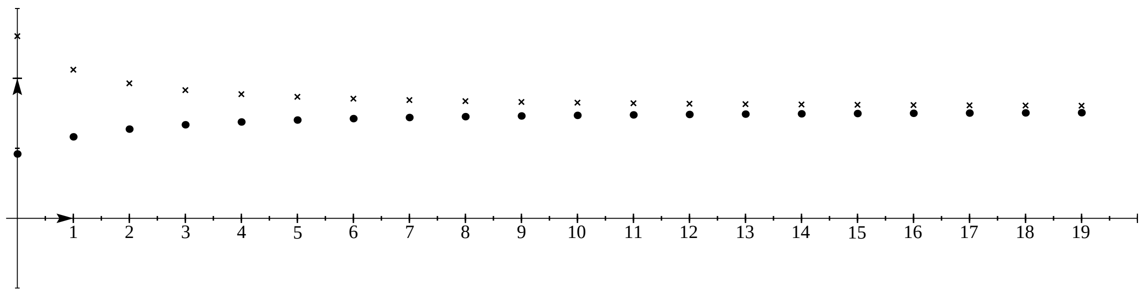


FIGURE 10.2 – Suites adjacentes

DÉFINITION 10.10 **Suites adjacentes**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si et seulement si

1. (u_n) est croissante
2. (v_n) est décroissante
3. $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

THÉORÈME 10.27 **Théorème de convergence des suites adjacentes**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que

(H1) les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Alors ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n$$

Démonstration

1. *Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $u_\mathrm{N} - v_\mathrm{N} > 0$. Mais alors, comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, il vient pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n - v_n \geqslant u_\mathrm{N} - v_\mathrm{N} > 0$ ce qui est en contradiction avec le fait que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ car (v_n) est décroissante et $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$ car (u_n) est croissante.*
2. *(u_n) est croissante et majorée par v_0. En vertu du théorème de la limite monotone 10.25, (u_n) converge vers une limite $l_1 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l_1$.*
3. *(v_n) est décroissante et minorée par u_0. En appliquant à nouveau le théorème de la limite monotone 10.25, (v_n) converge donc vers une limite $l_2 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geqslant l_2$.*
4. *Enfin : $0 = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = l_2 - l_1$. Par conséquent $l_1 = l_2$.*

Les deux suites convergent donc vers une même limite $l = l_1 = l_2$.

10.5.3 Approximation décimale des réels

Dans tout ce paragraphe x est un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n = \mathrm{E}\left(10^n x\right)$$

Par définition de la partie entière d'un réel, on a $p_n \leqslant 10^n x < p_n + 1$. Cette inégalité est équivalente à $\dfrac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \leqslant x < \dfrac{\mathrm{E}(10^n x) + 1}{10^n}$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x) + 1}{10^n}$$

Remarque 10.11
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = 10^{-n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des rationnels : $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.

DÉFINITION 10.11 **Valeur décimale approchée**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Les rationnels a_n et b_n sont appelés respectivement *valeurs décimales approchées* de x à 10^{-n} près respectivement *par défaut* et *par excès*.

Exemple 10.3

n		a_n	b_n	erreur= 10^{-n}
1	$1 < \sqrt{2} < 2$	1	2	1
2	$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$	1.4	1.5	0.1
3	$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$	1.41	1.42	0.01
4	$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$	1.414	1.415	0.001

THÉORÈME 10.28
Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune est x.

Démonstration *Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $p_n \leqslant 10^n x < p_n + 1$ où $p_n = \mathrm{E}\left(10^n x\right)$. En multipliant par 10 chaque membre de cette inégalité, on obtient*

$$10 p_n \leqslant 10^{n+1} x < 10\left(p_n + 1\right).$$

Or p_{n+1} est le plus grand entier inférieur à $10^{n+1} x$ et $1 + p_{n+1}$ est le plus petit entier supérieur à $10^{n+1} x$. Par conséquent, on a
- *$10 p_n \leqslant p_{n+1}$ ce qui donne $\dfrac{p_n}{10^n} \leqslant \dfrac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$ et donc $a_n \leqslant a_{n+1}$. La suite (a_n) est croissante.*

- $1+p_{n+1} < 10\left(p_n+1\right)$ *ce qui s'écrit aussi :* $\dfrac{1+p_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant \dfrac{p_n+1}{10^n}$. *La suite* (b_n) *est décroissante.*

Comme $b_n - a_n = 10^{-n}$, *on a bien* $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et on a prouvé que les deux suites* (a_n) *et* (b_n) *sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et convergent vers une même limite* $l \in \mathbb{R}$. *Comme* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \leqslant 10^n x < p_n+1$, *on a nécessairement* $l = x$ *par passage à la limite dans les inégalités*

10.5.4 Segments emboités et théorème de Bolzano-Weierstrass

COROLLAIRE 10.29 **Théorème des segments emboîtés**
Soit $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, $\mathrm{I}_n = [a_n, b_n]$ tels que

(H1) Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{n+1} \subset \mathrm{I}_n$;

(H2) Leur diamètre tend vers 0 : $(b_n - a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n = \{l\}$.

Démonstration *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Puisque* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, *on a* $a_n \leqslant a_{n+1}$ *et* $b_{n+1} \leqslant b_n$ *ce qui montre que la suite* (a_n) *est croissante et la suite* (b_n) *décroissante. La deuxième hypothèse montre que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite* $l \in \mathbb{R}$. *Montrons par double inclusion que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n = \{l\}$.

$\boxed{\supset}$ *Montrons que* l *appartient à l'intersection des intervalles* I_n. *Puisque les suites* (a_n) *et* (b_n) *sont adjacentes et convergent vers* l, *on sait que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant l \leqslant b_n$ *et donc* $\forall n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathrm{I}_n$ *ce qui montre que* $l \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$.

$\boxed{\subset}$ *Soit* $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$. *Montrons que* $x = l$. *Par définition de l'intersection d'une famille (voir l'appendice 1.12),* $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{I}_n$ *d'où*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant x \leqslant b_n$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on en tire que $l \leqslant x \leqslant l$ *d'où* $l = x$.

BIO 8 Karl Weierstrass, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin

Mathématicien Allemand. Karl Weierstrass est considéré comme le père de l'analyse moderne. Après des études secondaires brillantes, son père le force à étudier le droit à l'université de Bonn. Il ne fréquente guère les amphithéâtres et préfère s'adonner à l'escrime, aux mathématiques et à la boisson ... Tant et si bien qu'au bout de quatre ans il n'a toujours aucun diplôme. Son père consent à lui financer deux années supplémentaires afin qu'il décroche un poste d'enseignant dans le secondaire. Il rencontre alors Guddermann qui va le former aux mathématiques. Ce n'est qu'à 40 ans et alors qu'il enseigne dans le secondaire depuis une quinzaine d'année qu'il publie un article dans le fameux journal de Crelle sur les travaux qu'il a mené de façon isolée depuis plusieurs années. Il accède aussitôt à la célébrité et obtient rapidement un titre de docteur et une chaire à l'université de Berlin. Il s'est intéressé, entre autres aux fonctions analytiques et aux fonctions elliptiques. On lui doit le formalisme actuel en analyse.



THÉORÈME 10.30 ♡♡♡ **Théorème de Bolzano-Weierstrass**
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration *Vous pouvez la sauter en première lecture. Nous allons uniquement donner une idée de la construction en ne rédigeant pas les récurrences complètes.*

Considérons une suite (u_n) *bornée. Il existe* $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_0 \leqslant u_n \leqslant b_0$. *Nous allons utiliser un procédé standard d'analyse, la* dichotomie *pour construire une suite extraite de* (u_n) *qui va converger.*

- *Posons* $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ *et* $\mathrm{G}_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [a_0, c_0]\}$, $\mathrm{D}_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [c_0, b_0]\}$. *Puisque* $\mathrm{G}_0 \cup \mathrm{D}_0 = \mathbb{N}$, *l'un de ces deux ensembles est infini.*
- *Si* G_0 *est infini, puisque* G_0 *est une partie non vide de* $\mathbb{N}$, *elle possède un plus petit élément* n_0 *(c'est un axiome des entiers que nous verrons prochainement). Posons* $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$, $c_1 = (a_1 + b_1)/2$, $\mathrm{G}_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [a_1, c_1]\}$, $\mathrm{D}_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [c_1, b_1]\}$.
- *Si* G_0 *est fini, alors* D_0 *est infini et possède un plus petit élément* n_0. *On pose alors* $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$, $\mathrm{G}_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [a_1, c_1]\}$, $\mathrm{D}_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [c_1, b_1]\}$.

Dans les deux cas, $\mathrm{G}_1 \cup \mathrm{D}_1$ *est un ensemble infini. On construit par récurrence une suite d'entiers* $(n_k)_{k\in\mathbb{K}}$ *et deux suites réelles* (a_n), (b_n) *vérifiant :* $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$, $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant \cdots \leqslant b_k \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0$ *et* $a_k \leqslant u_{n_k} \leqslant b_k$. *Puisque* $(b_k - a_k) =$

$(b_0 - a_0)/2^k$, *on vérifie facilement que ce sont deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite* $l \in \mathbb{R}$. *On définit alors l'application*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & n_k \end{array} \right.$$

qui est strictement croissante. Puisque $a_k \leqslant u_{n_k} \leqslant b_k$, *d'après le théorème des gendarmes, la suite extraite* $u_{\varphi(k)}$ *converge vers* l.

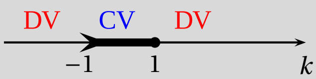
Multimédia : Animation qui explique cette construction.

10.6 Suites géométriques

THÉORÈME 10.31 ♡♡♡♡ **Convergence d'une suite géométrique**

Considérons la suite géométrique (k^n) de raison $k \in \mathbb{R}$ et de premier terme 1.
- Si $k > 1$, la suite (k^n) diverge vers $+\infty$.
- Si $k = 1$, la suite (k^n) est constante et tend vers 1.
- Si $|k| < 1$, la suite (k^n) converge vers 0.
- Si $k \leqslant -1$, la suite (k^n) diverge.

En résumé la suite géométrique (k^n) converge si et seulement si $|k| < 1$ ou bien $k = 1$.



Démonstration
- *Supposons* $k > 1$. *Nous allons utiliser l'inégalité suivante, dite de Bernoulli et qui se prouve aisément par récurrence (voir l'exercice 8.30 page 329) :*
$$\forall x \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$
Comme $k > 1$, *on a* $k - 1 > 0$ *et donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $k^n = (1 + (k-1))^n \geqslant 1 + n(k-1)$. *Comme* $k - 1 > 0$, $n(k-1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. *Par le théorème des gendarmes, on en déduit que* $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
- *Si* $k = 1$, *trivialement* $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
- *Si* $|k| < 1$, *alors en supposant que* k *est non nul et en posant* $b = 1/|k|$, *on a* $b > 1$. *D'après le premier point, on peut affirmer que* $b^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ *et alors la suite* $|k|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ *et donc* $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. *Si* $a = 0$, *le résultat est évident.*
- *Si* $k \leqslant -1$, *on peut extraire deux sous-suites de la suite* $\left(k^n\right)$, *les suites* (k^{2n}) *et* (k^{2n+1}). *Si* $k < -1$, *la première sous-suite diverge vers* $+\infty$ *et la seconde diverge vers* $-\infty$ *et si* $k = -1$, *la première sous-suite converge vers* 1 *et la seconde converge vers* -1. *Dans les deux cas, appliquant le théorème 10.23, on peut affirmer que* $\left(k^n\right)$ *est divergente.*

DÉFINITION 10.12 **Série géométrique**

Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit la *progression géométrique* (ou *série géométrique*) de raison k comme étant la suite de terme général
$$S_n = 1 + k + k^2 + \ldots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i$$

THÉORÈME 10.32 ♡♡♡♡ **Convergence d'une série géométrique**

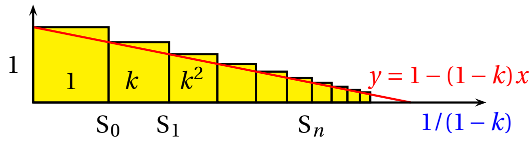
- On sait calculer une somme géométrique :

$$S_n = 1 + k + k^2 + \ldots + k^n = \begin{cases} \dfrac{1 - k^{n+1}}{1-k} & \text{si } k \neq 1 \\ n+1 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

- Si $|k| < 1$, la suite (S_n) converge vers le réel $\dfrac{1}{1-k}$ et si $|k| \geqslant 1$, la suite (S_n) diverge.

Démonstration *Si* $|k| < 1$, *puisque* $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $S_n = \dfrac{1 - k^{n+1}}{1-k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{1-k}$. *Si* $k = 1$, $S_n = n + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ *et donc* (S_n) *diverge. Pour* $|k| \geqslant 1$ *et* $k \neq 1$, *puisque* $(1-k)S_n = 1 - k^{n+1}$, *on tire* $k^n = (1 - (1-k)S_n)/k$. *Si la suite* (S_n) *convergeait vers* l, *d'après les théorèmes généraux, la suite* (k^n) *convergerait vers* $(1 - (1-k)l)/k$ *ce qui est faux d'après le théorème précédent.*

Remarque 10.12 Le dessin suivant permet de visualiser la limite de la somme géométrique dans le cas où $0 < k < 1$. On place les uns après les autres des cubes de côté k^i. `Multimédia : Faire varier k et la valeur de la somme`



Remarque 10.13 Les suites et séries géométriques sont très utilisées en analyse. On essaie souvent de majorer des suites par des suites géométriques dont on connaît bien le comportement.

10.7 Relations de comparaison

10.7.1 Introduction

Bien que deux suites puissent avoir la même limite, elles peuvent avoir des comportements très différents en l'infini. On s'en convaincra en observant les graphes des suites (n), (2^n) et $(n!/10)$. Une idée simple pour comparer le comportement asymptotique de deux suites (u_n) et (v_n) est d'étudier la nature de la suite quotient (u_n/v_n). Cette idée est à la base des notions de *domination*, *prépondérance* et *équivalence* que nous allons développer maintenant. Ainsi, on dira que (v_n) est prépondérante devant (u_n) si $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On dira aussi que (u_n) et (v_n) sont équivalentes si $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On verra que cette façon de comparer le comportement asymptotique des suites aura des conséquences utiles sur les méthodes de calcul de limites.

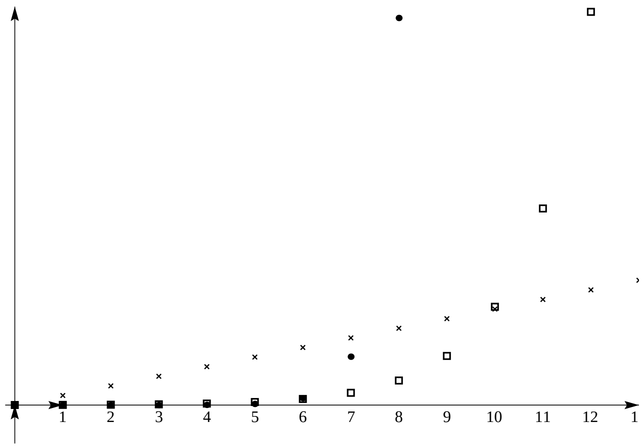


FIGURE 10.3 – × $(100n)$ - □ (2^n) - •$(n!/10)$

10.7.2 Suite dominée par une autre

DÉFINITION 10.13 Suite dominée par une autre
Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) si et seulement si il existe une suite (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

1. (B_n) est une suite bornée.
2. $\forall n \geqslant N, \quad u_n = B_n v_n$

On note alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$

PROPOSITION 10.33 Transitivité de la relation O
Le relation O est transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites, alors :

$$\left[u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)\right] \implies u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$$

Démonstration *Comme* $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$, *il existe des suites bornées* (B'_n) *et* (B''_n) *telles que à partir d'un certain rang* N' *et d'un certain autre* N'', *on a :* $\forall n \geqslant N', \quad u_n = B'_n v_n$ *et* $\forall n \geqslant N'', \quad v_n = B''_n w_n$. *Posons* $N = \max(N', N'')$ *et pour tout* $n \geqslant N$, *posons* $B_n = B'_n . B''_n$. *La suite* $(B_n)_{n\geqslant N}$ *est bornée et :*

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = B'_n v_n = B'_n B''_n w_n = B_n w_n.$$

Par conséquent, $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$.

THÉORÈME 10.34 **Une suite est dominée par une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième est borné**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}$$

Démonstration *Supposons que (v_n) ne s'annule pas à partir du rang $N \in \mathbb{N}$. La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ est donc bien définie. On peut supposer que (v_n) ne s'annule jamais (et donc que $N = 0$). Dire que : $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ revient à dire qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ et une suite bornée (B_n) tels que : $\forall n \geqslant N,\quad u_n = B_n v_n$, ce qui est équivalent à dire que : $\forall n \geqslant N,\quad \frac{u_n}{v_n} = B_n$ et donc que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.*

10.7.3 Suite négligeable devant une autre

DÉFINITION 10.14 **Suite négligeable devant une autre**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) et un rang N tels que

1. $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
2. $\forall n \geqslant N,\quad u_n = \varepsilon_n v_n$

On note alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Remarque 10.14 Écrire que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ revient à dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

PROPOSITION 10.35 **Transitivité de la relation o**
La relation o est transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles, alors :

$$\left[u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \quad \text{et} \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)\right] \quad \Longrightarrow \quad u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$$

Démonstration *Identique à la démonstration de la transitivité de* O.

THÉORÈME 10.36 **Une suite est négligeable devant une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième tend vers 0.**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration *Identique à la démonstration du théorème 10.34.*

Remarque 10.15 Vous rencontrerez deux façons d'utiliser la notation o.

– La première est celle de la définition. Par exemple, on peut écrire $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$, ce qui signifie que $\ln n / n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
– Mais vous rencontrerez aussi des écritures comme :

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

qui signifie que $1/(n-1) - \left(1/n + 1/n^2 + 1/n^3\right)$ est négligeable devant $1/n^3$ quand $n \to +\infty$. Autrement dit : $1/n + 1/n^2 + 1/n^3$ est une approximation de $1/(n-1)$ quand $n \to +\infty$ et l'erreur commise est un $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ c'est-à-dire est négligeable devant $1/n^3$ quand $n \to +\infty$.

10.7.4 Suites équivalentes

DÉFINITION 10.15 **Suite équivalentes**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) si et seulement si :

$$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

PROPOSITION 10.37
La relation « est équivalente à »est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On a :

- $\sim$ est réflexive : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- $\sim$ est symétrique : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- $\sim$ est transitive : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Démonstration *Montrons que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, à partir d'un certain rang N, $u_n - v_n = v_n\varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en tire $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$. Puisque $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, à partir d'un rang $N_2 \geqslant N$, $1-\varepsilon_n \neq 0$. Alors pour $n \geqslant N_2$, $v_n - u_n = -\varepsilon_n/(1-\varepsilon_n)v_n$. Définissons la suite (e_n) par $e_n = -\varepsilon_n/(1+\varepsilon_n)$. On a $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui montre que $v_n - u_n = o(u_n)$ d'où $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Les autres preuves sont laissées en exercice.*

THÉORÈME 10.38 **Une suite est équivalente à une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième tend vers 1.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

PLAN 10.3 : Pour montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

on peut au choix, montrer que

1. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
2. *À partir d'un certain rang,* $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ *avec* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. *À partir d'un certain rang,* $u_n = v_n + \varepsilon_n$ *avec* $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

THÉORÈME 10.39 **Équivalents et limites**
Soit (u_n) et (u_n) deux suites réelles . Alors :

– Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
– Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ avec $\boxed{l \neq 0}$, alors $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l}$.

Démonstration
– *Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe une suite (ε_n) telle que, à partir d'un certain rang : $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ et $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$, par opération sur les limites : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.*
– *Dire que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$ revient à dire que : $\dfrac{u_n}{l} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$.*

⚠ *Attention 10.4* Écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ revient à dire qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) sont tous nuls.

PROPOSITION 10.40 **Un équivalent simple permet de connaître le signe d'une suite**
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles équivalentes alors, il existe un rang à partir duquel elles sont de même signe

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies [\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n v_n \geqslant 0]$$

Démonstration *Comme* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *il existe une suite* (ε_n) *telle que, à partir d'un certain rang :* $u_n = (1+\varepsilon_n) v_n$ *et* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Le signe de* $(1+\varepsilon_n)v_n$ *est donc donné, à partir d'un certain rang, par celui de* v_n. *Par conséquent, à partir d'un certain rang, les deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont de me signe.*

THÉORÈME 10.41 **Produits, quotients, puissances d'équivalents**
Soit (a_n), (b_n), (u_n), (v_n) des suites vérifiant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \quad \text{et} \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Alors :

1. $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n b_n$
2. Si (v_n) et (b_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang : $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{b_n}$.
3. Si (u_n) et (a_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang : $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration *Démontrons le premier équivalent. Les autres se prouvent de même. Comme* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, *il existe des suites* (α_n) *et* (β_n) *toutes deux convergeant vers* 1 *telles que à partir d'un certain rang :* $u_n = \alpha_n a_n$ *et* $v_n = \beta_n b_n$. *Par conséquent, à partir d'un certain rang :* $u_n.v_n = (\alpha_n a_n).(\beta_n b_n) = \alpha_n\beta_n.a_n b_n$ *et par opération sur les limites* $\alpha_n\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. *On a donc bien :* $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n b_n$.

Remarque 10.16 **Attention, il ne faut pas**

1. Sommer des équivalents.
2. Composer des équivalents. En particulier, il ne faut pas
   - Prendre des logarithmes d'équivalents.
   - Prendre des exponentielles d'équivalents.

Exemple 10.5 Par exemple :
– $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n+2$ mais cela n'a pas de sens d'écrire : $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
– $2^n + n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$ mais par contre e^{2^n+n} n'est pas équivalent à e^{2^n}.

10.8 Comparaison des suites de référence

PROPOSITION 10.42 **Comparaison logarithmique**

1. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes *strictement positifs* et si, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

   alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.
2. Soit (u_n) est une suite à termes *strictement positifs*. On a :
   (a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l < 1 \implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l > 1 \implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration

1. *Si à partir d'un certain rang :* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ *alors, à partir d'un certain rang, on a :* $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$ *et donc la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ *est décroissante à partir de ce rang. Comme* (u_n) *et* (v_n) *sont à termes strictement positifs, cette suite est minorée par* 0. *On*

peut donc appliquer le théorème de la limite monotone 10.25, la suite $\frac{u_n}{v_n}$ *converge vers une limite* $l \geqslant 0$*. Par application du théorème 10.5, on peut affirmer que* $\frac{u_n}{v_n}$ *est bornée et donc que* $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$*.*

2. *Posons* $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$*.*
   (a) *Si* $l < 1$ *alors on peut trouver un réel* $r \in]l,1[$ *(par exemple* $r = (l+1)/2$*). D'après le théorème 10.6 page 357, à partir d'un certain rang* $N \in \mathbb{N}$*, on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$*. Par conséquent, si* $n \geqslant N$*,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_N} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}}\dots\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\frac{u_{N+1}}{u_N} \leqslant \underbrace{r\dots.r}_{n+1-N \text{ fois}} = r^{n+1-N}.$$

   Donc $u_n \leqslant r^{n+1-N}u_N$ *et comme* $0 \leqslant r < 1$*, la suite géométrique* (r^n) *converge vers* 0*. On en déduit que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*.*

   (b) *Si* $l > 1$ *alors en prenant* $r \in]1,l[$*, à partir d'un certain rang* $N \in \mathbb{N}$*, on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant r$*. La démonstration se termine comme la précédente.*

THÉORÈME 10.43 **Comparaison des suites de référence**

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

$$(\ln n)^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\alpha) \qquad n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(a^n) \qquad a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!) \qquad n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$$

Démonstration

- *Soit* (u_n) *la suite de terme général* $u_n = \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $u_n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\left(\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$*. Mais* $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$*. Par conséquent* $\frac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *ce qui prouve que* $(\ln n)^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\alpha)$*.*
- *Considérons maintenant la suite* (v_n) *de terme général* $v_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On a*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a}$$

  En appliquant le critère de comparaison logarithmique, on peut affirmer, puisque $0 < \frac{1}{a} < 1$*, que* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc que* $n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(a^n)$*.*
- *Considérons la suite* (w_n) *de terme général* $w_n = \frac{a^n}{n!}$*. On a*

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  En appliquant à nouveau le critère de comparaison logarithmique, on peut affirmer que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc que* $a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$*.*

– *Pour la dernière relation, si* $n \geqslant 1$ *on vérifie facilement que :*

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\times2\times3\times\dots\times n}{n\times n\times n\times\dots\times n} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

  On peut aussi appliquer le critère de comparaison logarithmique à la suite (x_n) *de terme général* $x_n = \frac{n!}{n^n}$*. On a :*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \in]0,1[.$$

THÉORÈME 10.44 **Équivalents usuels**

Soit (u_n) une suite telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. $\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
2. $\tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
3. $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
4. $[1-\cos u_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$
5. $[e^{u_n}-1] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
6. $\operatorname{sh} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
7. $[(1+u_n)^\alpha - 1] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*)$.

Démonstration

1. *La première équivalence est une conséquence de la limite usuelle* $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
2. $\dfrac{\tan u_n}{u_n} = \dfrac{\sin u_n}{u_n}\dfrac{1}{\cos u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. *La troisième équivalence est une conséquence de la limite usuelle* $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
4. *Par application des formules de trigonométrie,* $1-\cos u_n = 1-\cos\left(2\dfrac{u_n}{2}\right) = 2\sin^2\dfrac{u_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{u_n^2}{4} = \dfrac{u_n^2}{2}$ *par produit d'équivalents.*
5. *La cinquième équivalence est une conséquence de la limite usuelle* $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
6. $(1+u_n)^\alpha - 1 = e^{\alpha\ln(1+u_n)} - 1 = \alpha\ln(1+u_n)$ *par application de la formule* 5 *car* $\alpha\ln(1+u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Donc, en appliquant la formule* 3*,* $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$.

En conclusion à ce chapitre et avant d'aborder les exercices, il est vivement conseillé de prendre connaissance du paragraphe C.4 de l'annexe C. On y apprendra différentes méthodes permettant de calculer des équivalents. Il sera aussi très profitable de (re-)lire le paragraphe C.1 de cette même annexe.

En résumé

Les différents théorèmes et les différentes définitions de ce chapitre doivent être parfaitement compris et appris. Il faut pouvoir les illustrer par des dessins et savoir refaire les démonstrations marquées avec des ♡ . Pour la plupart, ces théorèmes et définitions seront re-formulés dans le cadre du prochain chapitre sur les fonctions réelles.
En accompagnement des exercices de ce chapitre, lisez la partie C.1 page 1189 sur les techniques de majoration-minoration et la partie C.4 page 1204 sur les équivalents. Le tout se trouve dans l'annexe C.
Enfin, en complément à ce chapitre, il faudra vous consacrer au paragraphe C.5 page 1219 toujours dans l'annexe C. On y traite des suites définies par récurrence un thème .... récurrent... dans les concours.

10.9 Exercices

10.9.1 Avec les définitions

Exercice 10.1 ♡

Soit (u_n) une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs :

1. *La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.*
2. *La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.*
3. *(u_n) ne converge pas vers 0.*
4. *la suite u_n n'est pas croissante à partir d'un certain rang.*

Solution :

1. $\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies u_n = u_{n+1}$
2. $\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies u_n \leqslant u_{n+1}$
3. $\exists \varepsilon > 0 : \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad n \geqslant N \text{ et } |u_n| \geqslant \varepsilon$
4. $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad n \geqslant N \text{ et } u_n \geqslant u_{n+1}$

Exercice 10.2 ♡

En utilisant les définitions 10.7 et 10.8, montrer que :

1. $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* $0\cdot$
2. $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* $0\cdot$
3. $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $0\cdot$
4. $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.
5. $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.
6. $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *tend vers* $+\infty$.

Solution :

1. *Voir l'exemple 10.1 page 356.*
2. *Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant N$ alors $1/n^2 \leqslant \varepsilon$ ou de manière équivalente $1/n \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Posons $N = E\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right) + 1$. On a $1/N \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$. On a bien : $1/n^2 \leqslant 1/N^2 \leqslant \varepsilon$ et donc $1/n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
3. *Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant N$ alors $1/2^n \leqslant \varepsilon$ ou de manière équivalente $n \geqslant \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1/2)}$. Posons $N = E\left(\frac{-\ln\varepsilon}{\ln(1/2)}\right) + 1$ (on peut supposer $\varepsilon \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant N$. Alors $1/2^n \leqslant 1/2^N < \varepsilon$ et donc $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*
4. *Soit $M \in \mathbb{R}$. On peut choisir M positif sans que cela ne particularise la démonstration. On cherche un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $n^2 \geqslant M$ ou de manière équivalente $n \geqslant \sqrt{M}$. Posons $N = E\left(\sqrt{M}\right) + 1$. On a $N^2 \geqslant M$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$. On a bien : $n^2 \geqslant N^2 \geqslant M$ et la suite tend donc vers $+\infty$.*
5. *Soit $M \in \mathbb{R}$. On cherche un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $\sqrt{n} \geqslant M$ ou de manière équivalente $n \geqslant M^2$. Posons $N = E\left(M^2\right) + 1$. On a $\sqrt{N} \geqslant M$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$. On a bien : $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{N} \geqslant M$ et la suite tend donc vers $+\infty$.*
6. *Soit $M \in \mathbb{R}$. On cherche un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $\ln n \geqslant M$ ou de manière équivalente $n \geqslant e^M$. Posons $N = E\left(e^M\right) + 1$. On a $\ln N \geqslant M$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$. On a bien : $\ln n \geqslant \ln N \geqslant M$ et la suite tend donc vers $+\infty$.*

Exercice 10.3 ♡♡

On considère une suite (u_n) qui converge vers 0. On définit la suite (v_n) de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

Montrer que (v_n) converge vers 0.

Solution : *Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) converge vers 0, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$ alors $|u_n| \leqslant \varepsilon/2$. Par*

application de l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$\begin{aligned}|v_n| &= \frac{1}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{N_1} ku_k + \sum_{k=N_1+1}^{n} ku_k\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N_1} k|u_k| + \frac{1}{n^2}\sum_{k=N_1+1}^{n} k\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N_1} k|u_k| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

car $\sum_{k=N_1+1}^{n} k \leqslant n^2$. *De plus, par opérations sur les limites,* $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N_1} k|u_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Il existe donc un rang* $N_2 \in \mathbb{N}^*$ *tel que si* $n \geqslant N_2$ *alors* $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N_1} k|u_k| \leqslant \varepsilon/2$. *Posons* $N = \max(N_1, N_2)$. *Soit* $n \geqslant N$. *On a alors* $|v_n| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, *ce qui prouve que* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 10.4 ♡♡

Soit une suite réelle (u_n) *telle que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z}$. *Montrer que si la suite* (u_n) *converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang.*

Indication 10.5 : On pourra envisager la suite (v_n) *définie par* $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Solution : *La suite* (v_n) *définie par* $v_n = u_{n+1} - u_n$ *converge vers* 0. *On pose* $\varepsilon = \frac{1}{2}$. *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$,

$$-\frac{1}{2} \leqslant v_n \leqslant +\frac{1}{2}.$$

Mais alors, pour $n \geqslant N$, $v_n = 0$, *puisque zéro est le seul entier compris entre* $-1/2$ *et et* $1/2$. *La suite* (u_n) *est donc constante à partir du rang* N.

Exercice 10.5 ♡♡♡

Soit un réel $\alpha \in]0,1[$ *et une suite* (u_n) *convergeant vers une limite* $l \in \mathbb{R}$. *Étudier la suite de terme général*

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k u_{n-k}$$

Solution : *Étudions d'abord le cas où* (u_n) *est constante :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a$ *où* $a \in \mathbb{R}$. *On obtient alors facilement que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ *et* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a}{1-\alpha}$. *Ce cas particulier nous invite à conjecturer que que si* (u_n) *converge vers* l, *la suite* (v_n) *converge vers* $l/(1-\alpha)$. *Écrivons pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = l + \varepsilon_n$ *avec* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Alors pour* $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = l\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$$

Définissons la suite de terme général

$$\theta_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$$

et montrons que $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Cela montrera que la suite* (v_n) *converge vers* $l/(1-\alpha)$.

Coupons, pour $n \in \mathbb{N}$, *la somme en deux sous-sommes :*

$$|\theta_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-N} |\alpha^k \varepsilon_{n-k}| + \sum_{k=n-N+1}^{n} |\alpha^k \varepsilon_{n-k}|$$

Soit $\varepsilon > 0$. *Posons* $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1-\alpha)/2 > 0$. *Comme* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$, *tel que* $\forall k \geqslant N$, $|\varepsilon_k| \leqslant \tilde{\varepsilon}$.

Donc pour la première somme, si $n \geqslant N$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n-N} |\alpha^k \varepsilon_{n-k}| \leqslant \tilde{\varepsilon}\frac{1-\alpha^{n-N+1}}{1-\alpha} \leqslant \frac{\tilde{\varepsilon}}{1-\alpha}.$$

En posant $M = \max(|\varepsilon_0|, \dots, |\varepsilon_{N-1}|)$, *on majore la deuxième somme :*

$$\sum_{k=n-N+1}^{n} |\alpha^k \varepsilon_{n-k}| \leqslant M\sum_{k=n-N+1}^{n} \alpha^k = \frac{M}{\alpha^{N-1}}\alpha^n\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \leqslant \frac{M}{\alpha^{N-1}(1-\alpha)}\alpha^n$$

car $\alpha \in]0,1[$. La suite $\left(\frac{M}{\alpha^{N-1}}\alpha^n\right)$ converge vers 0 (car c'est une suite géométrique de raison $\alpha \in]0,1[$) donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'$, $\frac{M\alpha^n}{\alpha^{N-1}} \leqslant \tilde{\varepsilon}$. Posons $N_1 = \max(N, N')$ et soit $n > N_1$.

Il vient finalement,

$$|\theta_n| \leqslant \frac{\tilde{\varepsilon}}{1-\alpha} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{1-\alpha} = \varepsilon.$$

10.9.2 Convergence, divergence de suites

Exercice 10.6 ♡

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n}$
2. $u_n = \frac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$
3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$
5. $u_n = (-1)^n$
6. $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$

Solution :

1. *Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. D'après le théorème des gendarmes : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{n^2}{n(n-1)} = \frac{n^2}{n^2}\frac{1}{1\left(1-\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $(0.7)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car il s'agit d'une suite géométrique de raison $0.7 \in]-1,1[$. Donc par opérations sur les limites $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.*
3. *$u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1 = n^3\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par opérations sur les limites.*
4. *$u_n = 3^n - n^2 2^n = 3^n\left(1 - \frac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par application des relations de comparaisons et par opérations sur les limites.*
5. *$u_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. On a ainsi extrait deux suites de la suite u_n qui admettent des limites différentes. Donc (u_n) diverge.*
6. *$u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n^2+n-n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n^2}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par opérations sur les limites.*

Exercice 10.7 ♡

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = (-3)^n + 3^n$
2. $u_n = \frac{2^{2n}+n3^n}{2^{2n}-n3^n}$
3. $u_n = \frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}$ *où $a, b \in \mathbb{R}$ et $0 < a < b$.*
4. $u_n = \frac{3^n-4}{3^n+2}$
5. $u_n = \frac{\cos n}{n}$
6. $u_n = \frac{-n^2+1}{n^2+3}$

Solution :

1. *$u_{2n} = 3^{2n} + 3^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $u_{2n+1} = -3^{2n+1} + 3^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a ainsi extrait deux suites de la suite (u_n) qui ne tendent pas vers une même limite. Par conséquent, (u_n) diverge.*
2. *$u_n = \frac{2^{2n}+n3^n}{2^{2n}-n3^n} = \frac{4^n+n3^n}{4^n-n3^n} = \frac{4^n}{4^n}\frac{1+\frac{n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}}{1-\frac{n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}}$. Par croissances comparées $\frac{n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.*
3. *$u_n = \frac{a^n+b^n}{a^n-b^n} = \frac{b^n}{b^n}\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}{-1+\left(\frac{a}{b}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ car $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{a}{b} \in]-1,1[$.*
4. *$u_n = \frac{3^n-4}{3^n+2} = \frac{3^n}{3^n}\frac{1-\frac{4}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par opérations sur les limites.*

5. *Pour tout réel* x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. *D'après le théorème des gendarmes :* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
6. $u_n = \frac{-n^2+1}{n^2+3} = \frac{n^2}{n^2} \frac{-1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ *par opérations sur les limites.*

Exercice 10.8 ♡

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{n^2-n\ln n}{n^2+n(\ln n)^2}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+3n} - n$
3. $u_n = \frac{n \sin n}{n^2+1}$
4. $u_n = 4^n - 3^n + 1$
5. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
6. $u_n = a^n - (-a)^n$ où $a \in \mathbb{R}$.

Solution :

1. $u_n = \frac{n^2-n\ln n}{n^2+n(\ln n)^2} = \frac{n^2}{n^2} \frac{1-\frac{\ln n}{n}}{1+\frac{(\ln n)^2}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *par application des relations de comparaisons et par opérations sur les limites.*
2. $u_n = \sqrt{n^2+3n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{n}{n} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$ *par opérations sur les limites.*
3. *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{n}{n^2+1} \leqslant \frac{n \sin n}{n^2+1} \leqslant \frac{n}{n^2+1}$ *et* $\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. $u_n = 4^n - 3^n + 1 = 4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par opérations sur les limites.*
5. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations sur les limites et car* $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ *et* $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ *sont des suites géométriques de raison élément de* $]-1,1[$.
6. $u_{2n} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $u_{2n+1} = 2a^{2n+1}$. *Si* $a \notin]-1,1[$, (u_{2n+1}) *diverge et les deux suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont de natures différentes donc* (u_n) *diverge. Si* $a \in]-1,1[$, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent toutes deux vers* 0. *D'après le cours,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 10.9 ♡

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{e^{-n\cos^2 n}}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+1}$
3. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$
4. $u_n = \sqrt{n^4+n^2} - n^2 - n$
5. $u_n = \frac{2+4(-1)^n}{n}$
6. $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$

Solution :

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $-n \leqslant -n\cos^2 n \leqslant 0$ *et donc :* $\frac{e^{-n}}{n+1} \leqslant \frac{e^{-n\cos^2 n}}{n+1} \leqslant 1$. *Mais* $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{n+1} = 0$. *Par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. $u_n = \sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+1} = \frac{\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}} = -\frac{n+1}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}} = -\frac{n}{n} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ *par opérations sur les limites.*
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n^2)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. $u_n = \sqrt{n^4+n^2} - n^2 - n = \frac{\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2-n\right)\left(\sqrt{n^4+n^2}+n^2+n\right)}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2+n} = \frac{-2n^3}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2+n}$
$= \frac{n^3}{n^2} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ *par opérations sur les limites.*

5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{2}{n} \leqslant \frac{2+4(-1)^n}{n} \leqslant \frac{6}{n}$ *et* $\lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n} = 0$. *Par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
6. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \sin(n\pi) = 0$ *et* $u_{2n+1} = (-1)^n$. *On extrait ainsi de* (u_n) *deux suites de nature différentes. Par conséquent,* (u_n) *diverge.*

Exercice 10.10 ♡

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = n\cos n + n^2$
2. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ où $n > 0$.
3. $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$
4. $u_n = \frac{3n+\cos n}{n-1}$, $\quad n \geqslant 2$
5. $u_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}$ où $n > 0$.
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

Solution :

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\cos n + n^2 \geqslant n^2 - n$ *et* $n^2 - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. *Mais* $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ *et* $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *donc* $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1 = e$ *par opérations sur les limites.*
3. $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par croissances comparées (voir le théorème 10.42 page 371) et opérations sur les limites.*
4. *Pour tout* $n \geqslant 2$, $\frac{3n-1}{n-1} \leqslant \frac{3n+\cos n}{n-1} \leqslant \frac{3n+1}{n-1}$ *et* $\frac{3n-1}{n-1} = \frac{n}{n}\frac{3-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$, $\frac{3n+1}{n-1} = \frac{n}{n}\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$.
5. $u_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3}{n^3} \dfrac{1+\frac{5}{n^2}}{5+\frac{\cos n}{n^3}+\frac{1}{n^5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{5}$ *par opérations sur les limites.*
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *car on a affaire à une somme géométrique de raison* $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ *(Attention à l'indice de départ de la somme qui n'est pas* 0*).*

Exercice 10.11 ♡

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n > 0$.
2. $u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ où $n > 0$.
3. $u_n = \sin\frac{2n\pi}{3}$
4. $u_n = \frac{4.(0.5)^n-2}{(0.5)^n+3}$
5. $u_n = \frac{n^5}{5^n}$
6. $u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$

Solution :

1. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$. *Mais* $n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) = a\dfrac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}}$ *et* $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *donc :* $n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ *et* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a$.
2. $u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations sur les limites et car* $\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\frac{1}{2} < 0$.
3. $u_n = \sin\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 0 & \text{si } 3|n \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } 3|n+1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } 3|n+2 \end{cases}$. *On peut donc extraire de* (u_n) *trois sous-suites qui convergent vers des valeurs différentes. Par conséquent,* (u_n) *diverge.*
4. $u_n = \frac{4.(0.5)^n-2}{(0.5)^n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{2}{3}$ *par opérations sur les limites et car* (0.5^n) *est une suite géométrique de raison* $0.5 \in]-1,1[$.

5. $u_n = \frac{n^5}{5^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par croissances comparées (voir le théorème 10.42 page 371).*

6. *On a* $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *et* $\frac{\pi}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc* $u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = \pi \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$

Exercice 10.12 ♡

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$ *où* $n > 0$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$ *où* $n > 0$.
4. $u_n = \frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ *où* $n > 0$.
5. $u_n = \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$ *où* $n > 0$.
6. $u_n = \ln(e^n+1) - n$

Solution :

1. $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} = \frac{n}{n}\frac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{5+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{5}$
2. $u_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *par opérations sur les limites.*
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations sur les limites.*
4. *On a déjà montré que* $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *donc, comme* $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos 0 = 1$, $u_n = \frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
5. $u_n = \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *par opérations sur les limites.*
6. $u_n = \ln(e^n+1) - n = \ln(e^n(1+e^{-n})) - n = \ln(1+e^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations sur les limites.*

Exercice 10.13 ♡

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \left(\frac{\sin n}{3}\right)^n$
2. $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n}\right)$ *où* $n > 0$
3. $u_n = \sqrt{1-3n+n^2}$ *où* $n > 2$.
4. $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$
5. $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$
6. $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Solution :

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left(\frac{|\sin n|}{3}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par opérations sur les limites.*
3. $u_n = \sqrt{1-3n+n^2} = n\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par opérations sur les limites.*
4. *Pour tout* $n > 1$, $-\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\sin n}{n+1} \leqslant \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}} \leqslant \frac{\sin n}{n-1} \leqslant \frac{1}{n-1}$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1} = 0$ *donc par application du théorème des gendarmes* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. *Pour tout* $n \geqslant 0$, $\sqrt[n]{1} \leqslant u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n} \leqslant \sqrt[n]{3}$ *et* $\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln 3}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ *donc par application du théorème des gendarmes* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
6. *Pour tout* $n \geqslant 2$, $\frac{n-1}{n+1} \leqslant u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} \leqslant \frac{n+1}{n-1}$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n+1} = 1$ *donc par application du théorème des gendarmes* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 10.14 ♡♡

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles telles que* $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Démontrer que (u_n) *et* (v_n) *convergent vers* 0.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = (u_n + v_n)^2 - u_n v_n = (u_n - v_n)^2 + 3u_n v_n$, la limite des deux dernières quantités existent et vaut 0. Par conséquent : $u_n v_n = \frac{1}{4}\left(\left((u_n + v_n)^2 + 3u_n v_n\right) - \left((u_n + v_n)^2 - u_n v_n\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $u_n^2 + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui n'est possible que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 10.15 ♡♡♡

Montrer que la suite $(\cos(n))$ diverge.

Solution : Supposons que $(\cos n)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. La sous-suite $(\cos(2n))$ converge donc vers la même limite ℓ. Or $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos 2n = 2\cos^2 n - 1$, donc en passant à la limite, on obtient : $\ell = 2\ell^2 - 1$. Donc on a nécessairement $\ell = -1/2$ ou $\ell = 1$. D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos n \cos 1$. Un nouveau passage à la limite donne cette fois : $2\ell = 2\cos 1.\ell$ donc $\ell = 0$, puisque $\cos 1 \neq 1$. On a donc d'une part $\ell = -1/2$ ou $\ell = 1$ et d'autre part $\ell = 0$. Ces deux conditions sont incompatibles, donc l'hypothèse de départ, à savoir $(\cos n)$ converge, ne tient pas.

10.9.3 Relations de comparaison

Exercice 10.16 ♡

Soient deux suites (u_n), (v_n) telles que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 1$
3. $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$. On peut alors affirmer , grâce au théorème des gendarmes, que (u_n) converge vers 1. De même pour (v_n) qui est positive à partir d'un certain rang.

Exercice 10.17 ♡

Étudier la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{2n}\left(2 - \frac{k}{2n}\right)$$

Solution : Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $2 - \dfrac{k}{2n} \geqslant \dfrac{3}{2}$ et pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a : $2 - \dfrac{k}{2n} \geqslant 1$. Par conséquent,

$$u_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Comme $(3/2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, par le théorème de majoration, on peut affirmer que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Exercice 10.18 ♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Solution : On a, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$ et $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc par comparaison, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Exercice 10.19 ♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$$

Solution : Pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par application du théorème des gendarmes, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

Exercice 10.20 ♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solution : *Pour tout $n \geqslant 1$:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

et $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *donc par comparaison,* $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Exercice 10.21 ♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

Solution : *Pour tout $n \geqslant 1$:*

$$\frac{n^2}{n^2+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2} = 1$$

et $\frac{n^2}{n^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *donc* $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ *par application du théorème des gendarmes.*

Exercice 10.22 ♡

Étudiez la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}$$

Solution : *Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Puisque $k \leqslant n$,* $\dfrac{k}{n+k} \geqslant \dfrac{k}{2n}$ *et donc*

$$u_n \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{4} \to +\infty$$

Donc par application du théorème des gendarmes $\boxed{u_n \to +\infty}$.

Exercice 10.23 ♡

Étudiez la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

Solution : *Soit $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1,n]\!]$.* $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+4n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ *d'où* $u_n \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{5}}$. *La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$ d'après le théorème des gendarmes.*

Exercice 10.24 ♡♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{\sqrt{n^9+k}}$$

Solution : *Pour tout $n \geqslant 1$:*

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{\sqrt{n^9+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{\sqrt{n^9}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2\sqrt{n^9}} = \frac{n^4}{2n^{\frac{9}{2}}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc par application du théorème des gendarmes, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

Exercice 10.25 ♡♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k^2}{n^3+k^2}$$

Solution : *Pour tout* $k \in [\![1, n^2]\!]$, $\frac{k^2}{n^3+k^2} \geqslant \frac{k^2}{n^3+n^4}$ *donc*

$$\frac{1}{n^3+n^4} \sum_{k=1}^{n^2} k^2 \leqslant u_n.$$

Mais d'après l'exercice 8.1, $\sum_{k=1}^{n^2} k^2 = \frac{n^2(n^2+1)(2n^2+1)}{6}$ *donc*

$$u_n \geqslant \frac{n^2(n^2+1)(2n^2+1)}{6(n^3+n^4)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

On en déduit grâce au théorème des gendarmes que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Exercice 10.26 ♡♡

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. *Étudiez les suites de terme général*

$$u_n = \frac{\mathrm{E}(nx)}{n} \text{ et } v_n = \frac{\mathrm{E}(nx)}{x}$$

Solution : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $\mathrm{E}(nx) \leqslant nx < \mathrm{E}(nx)+1$ *ce qui amène :* $nx-1 < \mathrm{E}(nx) \leqslant nx$. *Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on obtient l'encadrement suivant de* u_n *:*

$$x - \frac{1}{n} < u_n \leqslant x.$$

On conclut grâce au théorème des gendarmes que (u_n) *converge vers* x. *L'étude de* (v_n) *est similaire, mais il faut distinguer deux cas :*

1. *Si* $x > 0$, *alors*

$$v_n > n - \frac{1}{x}$$

   et donc (v_n) *diverge vers* $+\infty$ *d'après le théorème des gendarmes.*

2. *Si* $x < 0$, *alors*

$$\mathrm{E}(nx) \leqslant nx \implies \frac{\mathrm{E}(nx)}{x} \geqslant n$$

   (on change les inégalités en les multipliant par un réel négatif !) Ici aussi, (v_n) *diverge vers* $+\infty$.

Exercice 10.27 ♡♡

Soit x *un réel, étudier la suite de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx) \text{ avec } n \geqslant 1.$$

Solution : *Soit* $n \geqslant 1$. *De la même façon que dans l'exercice 10.26, on montre que pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $kx-1 \leqslant \mathrm{E}(kx) \leqslant kx$. *Il vient alors que :*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$$

ce qui s'écrit aussi, en reconnaîssant des sommes arithmétiques :

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx) \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2}x$$

On montre facilement que $\frac{n(n+1)}{2n^2}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}$. *Par application du théorème des gendarmes, on montre que* $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}}$.

Exercice 10.28

On considère deux suites à termes strictement positifs, (a_n) et (b_n) qui convergent vers 0. Étudiez la suite de terme général

$$u_n = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$$

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Majorons*

$$u_n = \frac{a_n^2}{a_n + b_n} + \frac{b_n^2}{a_n + b_n} \leqslant \frac{a_n^2}{a_n} + \frac{b_n^2}{b_n} = a_n + b_n$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = u_n \leqslant a_n + b_n$, par le théorème de majoration, il vient que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 10.29 ♡♡

1. *Montrer que : $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.*
2. *En déduire la limite de la suite de terme général*

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Solution :

1. *L'inégalité se montre en étudiant les deux fonctions f et g données par $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.*
2. *Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, introduisons la suite (v_n) de terme général $v_n = \ln u_n$. Alors*

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

et en utilisant l'encadrement construit dans la première question,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

et donc, comme $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ (voir exercice 8.1 page 318), il vient que :

$$\frac{(n+1)}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant v_n \leqslant \frac{(n+1)}{2n}$$

On conclut en appliquant le théorème des gendarmes, $\boxed{v_n \to \frac{1}{2}}$ et donc $\boxed{u_n \to \sqrt{e}}$.

Exercice 10.30 ♡

On considère la suite (u_n) donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{np}$$

où p est un entier strictement positif fixé.

1. *Montrer que :*
$$\forall x \in]0,1[, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$
2. *En déduire que :*
$$\forall x > 1, \quad \ln\frac{x+1}{x} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln\frac{x}{x-1}$$
3. *En déduire la limite de (u_n) puis qu'elle est convergente et donner sa limite.*

Solution :

1. *Il suffit d'étudier les fonctions* $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - (1+x) \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1-x)\, e^x - 1 \end{array} \right.$

2. *Soit $x>1$. On a donc $\frac{1}{x}\in\,]0,1[$ et, par application de l'inégalité précédente, il vient que :*

$$1+\frac{1}{x}\leqslant e^{\frac{1}{x}}\leqslant\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$
$$\iff\quad\frac{x+1}{x}\leqslant e^{\frac{1}{x}}\leqslant\frac{x}{x-1}$$
$$\iff\quad\ln\frac{x+1}{x}\leqslant\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\leqslant\ln\frac{x}{x-1}$$

3. *Pour tout $k\in[\![0,np-n]\!]$, en appliquant l'inégalité précédente à $x=n+k\geqslant 1$, on obtient :*

$$\ln\frac{n+k+1}{n+k}\leqslant\frac{1}{n+k}\leqslant\ln\frac{n+k}{n+k-1}$$

ce qui s'écrit aussi :
$$\ln(n+k+1)-\ln(n+k)\leqslant\frac{1}{n+k}\leqslant\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$$
Sommons maintenant ces inégalités pour k variant de 0 à $np-n$. On reconnaît des sommes télescopiques et on obtient :
$$\ln\left(np+1\right)-\ln n\leqslant u_n\leqslant\ln np-\ln(n-1)$$
Mais $\ln\left(np+1\right)-\ln n=\ln\left(p+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln p$ et $\ln np-\ln(n-1)=\ln\frac{np}{n-1}=\ln\frac{n}{n}\frac{p}{1-\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln p$. Enfin, par application du théorème des gendarmes, on obtient : $\boxed{u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln p}$

Exercice 10.31 ♡♡♡

On considère une suite (u_n) vérifiant :

$$\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leqslant u_n\leqslant\frac{k}{n}+\frac{1}{k}$$

Montrez que la suite (u_n) est convergente, et déterminez sa limite.

Solution : *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $k=\mathrm{E}(\sqrt{n})$. D'après l'énoncé, on obtient l'encadrement*

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\mathrm{E}(\sqrt{n})}{n}+\frac{1}{\mathrm{E}(\sqrt{n})}$$

Mais puisque $\mathrm{E}(\sqrt{n})\leqslant\sqrt{n}<\mathrm{E}(\sqrt{n})+1$, on obtient l'encadrement

$$\sqrt{n}-1<\mathrm{E}(\sqrt{n})\leqslant\sqrt{n}$$

Donc, on a l'encadrement suivant pour u_n valable pour $n\geqslant 2$:

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}-1}$$

Si $n\geqslant 4$, $\sqrt{n}-1\geqslant\sqrt{n}/2$ et donc,
$$\forall n\geqslant 4,\quad 0\leqslant u_n\leqslant\frac{3}{\sqrt{n}}$$
Puisque la suite $(3/\sqrt{n})$ converge vers 0, et que $\forall n\geqslant 4$, $|u_n|\leqslant 3/\sqrt{n}$, par le théorème de majoration, on en déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

10.9.4 Suites monotones et bornées

Exercice 10.32 ♡

En utilisant le théorème de la limite monotone, prouver la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Solution : *Soit $n\in\mathbb{N}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1-\frac{1}{2(n+1)+1}\right) < 1$ donc (u_n) est décroissante. De plus (u_n) est positive et donc minorée par 0. Par application du théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente et sa limite est positive.*

Exercice 10.33 ♡

Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Solution : *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculons*

$$u_{n+1}-u_n = \left(\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

Par conséquent, (u_n) est croissante. De plus

$$u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} \leqslant \frac{n}{n} = 1$$

donc (u_n) est minorée par 1. Cette suite converge d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 10.34 ♡♡

En utilisant le théorème de la limite monotone, prouver la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$$

Solution : *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :*

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\dots+\frac{1}{(n+1)(n+1)} - \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{n.n}\right)\\
&= \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\frac{-1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}\\
&\leqslant -\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}\\
&\leqslant -\frac{1}{n(n+1)^2}\\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

car $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \geqslant 1$. Donc (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 et donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 10.35 ♡

Étudiez la suite de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

Solution : *Majorons pour $n\in\mathbb{N}^*$,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 10.36 ♡

Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1!+2!+\dots+n!}{n!}$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1!+2!+...+n!+(n+1)!}{(n+1)!} - \frac{1!+2!+...+n!}{n!} = \frac{(n+1)n! - n(1!+...+n!)}{(n+1)!} = \frac{n! - n(1!+...+(n-1)!)}{(n+1)!} = \frac{-n(1!+...+(n-2)!)}{(n+1)!} \leqslant 0$$

donc (u_n) est décroissante. De plus (u_n) est positive et donc minorée par 0. Par application du théorème de la limite monotone, (u_n) est convergente et sa limite est positive.

Exercice 10.37 ♡

Soit (u_n) la suite de terme général : $u_n = (1+a)\left(1+a^2\right)\dots(1+a^n)$ avec $0 < a < 1$.

1. Étudier les variations de cette suite.
2. Prouver l'inégalité :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leqslant e^x$$
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + a^{n+1}\right) > 1$ donc (u_n) est croissante.
2. Il suffit d'étudier la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - (1+x) \end{array} \right.$.
3. Appliquant n fois l'inégalité précédente avec succssivement $x = a$, $x = a^2$, ...,$x = a^n$ on obtient :
$$u_n = (1+a)\left(1+a^2\right)\dots\left(1+a^n\right) < e^a e^{a^2} e^{a^3} \dots e^{a^n} = e^{a\frac{1-a^n}{1-a}} \leqslant e^{\frac{a}{1-a}}$$
La suite (u_n) est donc majorée et en appliquant le théorème de la limite monotone, on en déduit que (u_n) converge.

Exercice 10.38 ♡♡♡ **Moyennes de Cesáro**

Soit (u_n) une suite croissante de limite $l \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose
$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

1. Montrer que (v_n) est croissante.
2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire que (v_n) est convergente vers un réel L.
3. Établir que $\forall n \geqslant 1,\ v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
4. En déduire que $l = \mathrm{L}$.

La suite (v_n) s'appelle la suite des moyennes de Cesáro de la suite (u_n) et on vient de prouver le théorème de Cesáro dans le cas particulier où la suite (u_n) est croissante.

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$v_{n+1} - v_n = \frac{n u_{n+1} - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)}{n(n+1)} = \frac{(u_{n+1} - u_n) + (u_{n+1} - u_{n-1}) + \ldots + (u_{n+1} - u_2) + (u_{n+1} - u_0)}{n(n+1)}$$
Mais la suite (u_n) est croissante, et donc $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant u_2 \geqslant u_1$. Il s'ensuit que : $(u_{n+1} - u_n) + (u_{n+1} - u_{n-1}) + \ldots + (u_{n+1} - u_2) + (u_{n+1} - u_1) \geqslant 0$. Enfin : $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et (v_n) est bien croissante.
2. La suite (u_n) est croissante de limite $l \in \mathbb{R}$. Donc l majore (u_n). Il vient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} \leqslant \frac{nl}{n} = l.$$
(v_n) est donc majorée et comme elle est croissante, par application du théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\mathrm{L} \leqslant l$.
3. Soit $n \geqslant 1$.
$$v_{2n} = \frac{u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n}}{2n} = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \ldots + u_{2n}}{2n} = \frac{v_n}{2} + \frac{u_{n+1} + \ldots + u_{2n}}{2n}$$
Mais comme (u_n) est croissante, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_{n+i} \geqslant u_n$ et donc :
$$\frac{u_{n+1} + \ldots + u_{2n}}{2n} \geqslant \frac{u_n + \ldots + u_n}{2n} = \frac{n u_n}{2n} = \frac{u_n}{2}.$$
Finalement, on a bien : $\boxed{v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}}$.

4. *Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :* $L \geqslant \frac{L+l}{2}$ *ce qui amène* $L \geqslant l$ *et comme on sait que* $L \leqslant l$ *alors* $L = l$.

Exercice 10.39 ♡♡

Soit (u_n) *une suite réelle et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on considère* $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$. *La suite* (v_n) *est la suite des moyennes de Césaro de la suite* (u_n) *(voir l'exercice 10.38).*

1. *On suppose que* (v_n) *converge. Est-ce que* (u_n) *converge ?*
2. *Si on suppose que* (u_n) *est croissante, montrer que* (u_n) *converge si et seulement si* (v_n) *converge.*

Solution :

1. *Considérons la suite* (u_n) *de terme général* $u_n = (-1)^n$. *Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

   Il est clair que (v_n) *converge. Pourtant* (u_n) *ne converge pas. La convergence de* (v_n) *n'implique donc pas celle de* (u_n).

2. *Le sens direct consiste en le théorème de Cesáro (voir l'exercice 10.38). Prouvons la réciproque. Supposons que* (v_n) *converge vers une limite* $L \in \mathbb{R}$.
   Comme (u_n) *est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, il n'y a que deux possibilités :*
   (a) *Si la suite* (u_n) *est majorée, alors on sait que* (u_n) *converge vers une limite finie* $l' \in \mathbb{R}$. *Mais d'après le théorème de Cesáro,* (v_n) *converge également vers* l'. *Par unicité de la limite,* $l = l'$ *et donc* (u_n) *converge vers* l.
   (b) *Par l'absurde, si la suite* (u_n) *n'est pas majorée, alors* (u_n) *diverge vers* $+\infty$. *A partir d'un certain rang la suite* (v_n) *est donc positive. Mais d'après l'exercice* 10.38, *à partir d'un certain rang, on a :*

$$v_{2n} \geqslant \frac{u_n + v_n}{2} \geqslant \frac{u_n}{2}.$$

   Donc $v_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par application du théorème des gendarmes et nécessairement :* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *ce qui vient contredire notre hypothèse, donc* (u_n) *ne peut être majorée.*

Exercice 10.40 ♡

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}.$$

1. *Montrer que* (u_n) *converge.*
2. *On considère, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la suite* (v_n) *de terme général :* $v_n = (n+1)u_n^2$. *Montrer que* (v_n) *converge.*
3. *En déduire la limite de* (u_n).

Solution :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On vérifie facilement que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant 1$$

   par conséquent $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *et* (u_n) *est donc décroissante.* (u_n) *est de plus positive et donc minorée par* 0. *Il s'ensuit d'après le théorème de la limite monotone, que* (u_n) *est convergente.*

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{(2n+1)^2}{2^2\,(n+1)^2} = \frac{4n^3+12n^2+9n+2}{4n^3+12n^2+12n+4} \leqslant 1$$

   et (v_n) *est décroissante. Elle est aussi minorée par* 0 *et comme précédemment, on peut alors affirmer qu'elle est convergente.*

3. *En partant de l'égalité* $v_n = (n+1)u_n^2$, *on obtient que* $u_n = \sqrt{\dfrac{v_n}{n+1}}$. *Comme* (v_n) *converge, il en est de même de* (u_n) *et* $\boxed{\lim u_n = 0}$.

Exercice 10.41 ♡♡

Etudier la suite $u_n = \operatorname{th}1 + \operatorname{th}2 + \ldots + \operatorname{th}n - \ln\operatorname{ch}n$.

Solution : *On commence par remarquer que* $x \longmapsto \ln\operatorname{ch}x$ *est une primitive de* $\operatorname{th}x$. *La suite* u_n *est croissante :* $u_{n+1} - u_n = \operatorname{th}n+1 - \ln chn+1 + \ln\operatorname{ch}n = \operatorname{th}n+1 - \int_n^{n+1} \operatorname{th}x\,dx$. *Or* $x \longmapsto \operatorname{th}x$ *est croissante sur* $[n, n+1]$ *donc* $\forall x \in [n, n+1]$, $\operatorname{th}x \leqslant \operatorname{th}n+1$ *donc* $\int_n^{n+1} \operatorname{th}x\,dx \leqslant \int_n^{n+1} \operatorname{th}n+1\,dx$ *soit* $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ *: la suite* (u_n) *est croissante.*
Pour les mêmes raisons, $\operatorname{th}k \leqslant \int_k^{k+1} \operatorname{th}x\,dx$ *donc en sommant pour* k *variant de* 1 *à* n, $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{th}k \leqslant \int_1^{n+1} \operatorname{th}x\,dx$ *soit* $u_n \leqslant \ln\left(\frac{\operatorname{ch}n+1}{\operatorname{ch}n}\right) - \ln\operatorname{ch}1$. *La suite* $\dfrac{\operatorname{ch}n+1}{\operatorname{ch}n}$ *converge vers e, donc la suite* $\ln\left(\frac{\operatorname{ch}n+1}{\operatorname{ch}n}\right) - \ln\operatorname{ch}1$ *converge vers* $1 - \ln\operatorname{ch}1$. *Elle est donc majorée. La suite* u_n *est donc croissante et majorée, elle est convergente.*

Exercice 10.42 ♡♡

On considère une suite d'entiers (q_n) *strictement croissante avec* $q_0 \geqslant 1$. *On définit la suite* (u_n) *de terme général*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{q_j}.$$

Montrer que (u_n) *converge.*

Solution : *On vérifie que la suite est croissante. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$u_{n+1} - u_n = \prod_{j=0}^{n+1} \frac{1}{q_j} > 0.$$

Ensuite, comme (q_n) *est strictement croissante, on peut affirmer que pour tout* $k \geqslant 1$, *on a* $q_k \geqslant 2$. *Par conséquent,*

$$u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} \leqslant 2$$

La suite (u_n) *est croissante et majorée, elle converge d'après le théorème de la limite monotone.*

Exercice 10.43 ♡♡♡

Soit une suite (u_n) *bornée vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$$

On définit une suite (v_n) *en posant pour* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. *Montrez que la suite* (v_n) *converge et calculez sa limite.*

Indication 10.5 : Montrez que la suite (v_n) *est croissante et majorée. Montrez ensuite par l'absurde que sa limite vaut* 0. *(on pourra si* $l > 0$ *minorer* (u_n) *à partir d'un certain rang par une suite qui diverge vers* $+\infty$*).*

Solution : *On calcule pour* $n \geqslant 1$,

$$v_n - v_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \geqslant 0$$

et donc la suite (v_n) *est croissante. On suppose de plus que* (u_n) *est bornée :*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad -M \leqslant u_n \leqslant M$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n \leqslant M + M \leqslant 2M$$

La suite (v_n) *est donc croissante et majorée par* 2M.
D'après le théorème de la limite monotone, la suite (v_n) *converge vers une limite finie* $l \in \mathbb{R}$.
Montrons par l'absurde que $l = 0$. *Supposons que* $l \neq 0$ *et étudions les deux cas suivants :*

1. *Si* $l > 0$, *en posant* $k = \dfrac{l}{2}$, *puisque* $k < l$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$, $v_n \geqslant \dfrac{l}{2}$. *Mais alors pour* $n \geqslant N+1$, *on a :*

$$u_n \geqslant u_{n-1} + \frac{l}{2} \geqslant u_{n-2} + 2\frac{l}{2} \geqslant \cdots \geqslant u_N + (n - N)\frac{l}{2}$$

   On a alors $w_n = u_N - N\frac{l}{2} + n\frac{l}{2} \to +\infty$ *et donc* $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, *ce qui est impossible car on a supposé que la suite* (u_n) *était bornée.*

2. *Si* $l < 0$, *on montre qu'à partir d'un certain rang,* $v_n \leqslant -\dfrac{l}{2}$. *Mais on majore alors* (u_n) *par une suite qui diverge vers* $-\infty$ *ce qui est impossible.*

Multimédia : animation avec un exemple pour illustrer les suites de cet exercice précédent

Exercice 10.44 ♡♡♡

Soient deux réels $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$.*
2. *Montrer que (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, qu'elles convergent et qu'elles ont la même limite.*

Solution :

1. *On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$, ce qui montre que a_n et b_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}\sqrt{b_n} \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{a_n}^2 + \sqrt{b_n}^2) = b_{n+1}$$

ce qui montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$.

2. *Soit $n \geqslant 1$. Calculons*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{a_n}{a_n}} = 1 \text{ et } b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$$

(on a utilisé que $a_n \leqslant b_n$). Donc $\forall n \geqslant 1$, $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$. On a alors prouvé que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante. Puisque

$$a_1 \leqslant \dots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \dots b_1$$

La suite (a_n) est croissante et majorée par b_1. Donc elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_1, et donc elle converge vers $l' \in \mathbb{R}$. De plus, la suite (a_{n+1}) est extraite de (a_n) et elle converge donc vers l. De même, la suite extraite (b_{n+1}) converge vers l'. En passant à la limite dans les relations de récurrence, on obtient :

$$l = \sqrt{ll'} \text{ et } l = \frac{l + l'}{2}$$

De la deuxième, on tire que $l = l'$.
Les deux suites convergent donc vers la même limite.

Remarque 10.17 *Cette exercice peut être aussi traîté en montrant que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.*

10.9.5 Sommes géométriques

Exercice 10.45 ♡

Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + 1 + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right).$$

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :*

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + 1 + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$$

mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$ (voir exercice 2) et donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e - 1}$.

Exercice 10.46

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite (u_n) donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad u_1 = b \\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons de plus : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique.*
2. *Calculer, en fonction de* n*, la somme* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$.
3. *En déduire, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, u_n *en fonction de* n *ainsi que la limite de* (u_n).

Solution :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On a :* $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = \dfrac{\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n} = -\dfrac{1}{2}$*. La suite* (v_n) *est donc une suite géométrique de raison* $-\dfrac{1}{2}$*. Son premier terme est* $v_0 = u_1 - u_0 = b - a$.
2. *On en déduit que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (b-a)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On calcule :*
$S_n = (b-a)\dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2(b-a)}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
3. *Par télescopage, on a aussi* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$ *et donc* $u_n = \dfrac{2(b-a)}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + a$*. On en déduit que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\dfrac{a+2b}{3}}$.

10.9.6 Suites adjacentes

Exercice 10.47

Montrer que les suites suivantes (u_n) *et* (v_n)*, données par leur terme général, sont adjacentes :*

1. $u_n = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$
2. $u_n = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n\,n!}$

Solution :

1. *La suite* (u_n) *est clairement croissante et* $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*. Il reste à montrer que* (v_n) *est décroissante. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On a*
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = 2\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0$$
dés que $n > 1$ *et donc* (v_n) *est décroissante.*
2. *La suite* (u_n) *est clairement croissante et* $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*. Montrons que* (v_n) *est décroissante. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On a :*
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

Exercice 10.48 ♡

Montrer que les suites de terme général
$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$
$$v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$$
sont adjacentes.

Solution : *La suite* (u_n) *est clairement croissante. Montrons que* (v_n) *est décroissante. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} = \frac{3 + n^2 - (n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} = 2\frac{(-n+1)}{3n^2(n+1)^2}$$
et cette quantité est négative ou nulle dés que $n \geqslant 1$*. Par suite* (v_n) *est décroissante. Il est de plus clair que* $v_n - u_n = \dfrac{1}{3n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et les deux suites sont donc bien adjacentes.*

Exercice 10.49 ♡♡♡ **Constante d'Euler et développement asymptotique de la série harmonique**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le terme général H_n *de la série harmonique*

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. *En déduire que* $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. *Prouver l'inégalité :* $\forall t \in \left]-1,+\infty\right[, \quad \ln(1+t) \leqslant t$.
4. *On introduit les suites de terme général, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \mathrm{H}_n - \ln n$$

   Montrer que (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes.*

5. *Montrer qu'il existe un réel* $\gamma \in \left]0,1\right[$ *tel que :*

$$\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

   Le réel γ *est appelé constante d'Euler et cette égalité donne les deux premiers termes du développement asymptotique de la série harmonique.*

Solution :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

2. *La suite* (H_n) *est clairement croissante. Par application du théorème de la limite monotone, on peut affirmer que soit elle converge vers un réel* l *soit elle tend vers* $+\infty$. *Si* (H_n) *convergeait vers un réel* l *alors il en serait de même de toute suite extraite et donc* $\mathrm{H}_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. *Par opérations sur les limites, on aurait alors :*

$$0 = l - l = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}$$

   ce qui est absurde. Par conséquent (H_n) *diverge.*

3. *Il suffit d'étudier la fonction* $f : \begin{cases} \left]-1,+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t) - t \end{cases}$.
4. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \mathrm{H}_{n+1} - \ln(n+2) - \mathrm{H}_n + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

   donc (u_n) *est croissante. De la même façon :*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \leqslant 0$$

   et (v_n) *est décroissante. De plus :*

$$v_n - u_n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Les deux suites sont donc bien adjacentes et elles convergent vers une même limite $\gamma \in \mathbb{R}$.

5. *Comme* $u_1 = 1 - \ln(2) > 0$ *et* $v_1 = 1 - \ln 1 = 1$, *on a nécessairement* $\gamma \in \left]0,1\right[$. *Par ailleurs, comme* (v_n) *admet* γ *comme limite, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{H}_n - \ln n - \gamma = v_n - \gamma \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   et donc : $\boxed{\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}$.

Exercice 10.50 ♡♡

On considère la suite de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Montrez que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (u_n) converge.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Donc

$$u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2(2n+2))!} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2(2n+1))!} = \frac{1}{(4n+4)!} - \frac{1}{(4n+2)!} \leqslant 0$$

et (u_{2n}) est alors décroissante. De même :

$$u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{(2(2n+3))!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2(2n+2))!} = \frac{1}{(4n+4)!} - \frac{1}{(4n+6)!} \geqslant 0$$

et (u_{2n+1}) est croissante. De plus :

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2(2n+1))!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc bien adjacentes et elles convergent donc vers une même limite. D'après le cours, on en déduit que (u_n) converge aussi vers cette limite.

Exercice 10.51 ♡♡

1. *Montrez que les deux suites de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

sont convergentes de même limite.

2. *En déduire un équivalent simple de la suite de terme général*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solution :

1. On calcule pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

et puisque $\sqrt{n+2} \geqslant \sqrt{n+1}$, il vient que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Donc (u_n) est croissante. On montre de même que (v_n) est décroissante. On calcule

$$0 \leqslant d_n = v_n - u_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

et donc (d_n) converge vers 0. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes et convergent donc vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

2. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = v_n + 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$, il vient que $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$. En effet, comme (v_n) est convergente, on sait que $\frac{v_n}{2\sqrt{n}} \to 0$.

Exercice 10.52 ♡♡

1. *Montrer que les suites de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

sont adjacentes.

2. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\frac{n+1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.
3. *En déduire que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \ln 2 \leqslant v_n$.
4. *Que peut-on en conclure ?*

Solution :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculons :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+1+1} + \frac{1}{n+1+2} + \ldots + \frac{1}{n+1+n-1} + \frac{1}{n+1+n} + \frac{1}{n+1+n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

donc (u_n) *est croissante. De même :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

et (v_n) *est décroissante. Enfin :* $v_n - u_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite.*

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On sait que* $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$. *Donc :* $\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$. *De même*

$$\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\frac{n+1-1}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

3. *On utilise les inégalités précédentes :*

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \leqslant \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \ldots + \ln\frac{n+n}{n+n-1} = \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \ldots \times \frac{n+n}{n+n-1}\right) = \ln\frac{2n}{n} = \ln 2.$$

$$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \ldots + \ln\frac{2n+1}{2n} = \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \ldots \times \frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\frac{2n+1}{n} \geqslant \ln 2$$

4. *Notons* l *la limite commune aux deux suites. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $u_n \leqslant \ln 2 \leqslant v_n$ *donc par passage à la limite* $l \leqslant \ln 2 \leqslant l$ *et donc* $l = \ln 2$.

Exercice 10.53 ♡♡♡

1. *Étudiez les suites de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k k!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n^2 n!}$$

2. *Montrez que leur limite commune est irrationnelle.*

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *La suite* (u_n) *est clairement croissante. On montre de plus que :*

$$v_{n+1} - v_n == \frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)^2(n+1)!} - \frac{1}{n^2 n!} = -\frac{n^2+3n+1}{(n+1)^2(n+1)!n^2}.$$

Donc (v_n) *est décroissante. Comme* $v_n - u_n = 1/(n^2 n!) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *les deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite* $l \in \mathbb{R}$.

2. *Remarquons que comme $u_2 = 5/4$, $v_2 = 11/8$, et que $5/4 \leqslant l \leqslant 11/8$, l ne peut être un entier. Si l était rationnelle, notons la $\dfrac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, on aurait $u_q < \dfrac{p}{q} < v_q$ et en multipliant par $qq!$, il viendrait $qq!u_q < pq! < qq!u_q + \dfrac{1}{q}$, ce qui est une absurdité car $pq!$ est un entier.*

10.9.7 Suites extraites

Exercice 10.54 ♡

Soit (u_n) une suite croissante.

1. *On suppose qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui diverge. Montrer que (u_n) diverge.*
2. *On suppose qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge. Montrer que (u_n) converge.*

Solution :

1. *Si (u_n) convergeait alors il en serait de même de toute suite extraite, donc (u_n) diverge.*
2. *Comme (u_n) est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors toute suite extraite de (u_n) tend vers $+\infty$ (cette propriété se démontre aisément à l'aide de la définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc (u_n) converge.*

Exercice 10.55 ♡

La suite définie par $0 < u_0 < 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^n u_n}$ est-elle convergente ?

Solution : *Supposons que oui et appelons λ la limite. On a $\lim_{n\to\infty} u_{2n} = \lambda$ et $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lambda$. D'ou $\lambda = \sqrt{2+\lambda}$ et $\lambda = \sqrt{2-\lambda}$. De $\sqrt{2+\lambda} = \sqrt{2-\lambda}$ on tire $\lambda = 0$, ce qui contredit $\lambda = \sqrt{2+\lambda}$. La suite u_n n'est pas convergente.*

Exercice 10.56 ♡♡

Soit une suite (u_n) telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrez que la suite (u_n) converge.

Solution : *Il existe $(l, l', l'') \in \mathbb{R}^3$ tels que $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$ et $u_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l''$. Montrons que $l = l' = l''$. Comme la suite (u_{6n}) est extraite de la suite (u_{2n}), elle converge vers l (toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite). Mais la suite (u_{6n}) est également extraite de la suite (u_{3n}) et elle converge donc vers l''. Par unicité de la limite, $l = l''$. Considérons la suite (u_{6n+3}). Comme elle est extraite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}), par le même raisonnement, on obtient que $l' = l''$. Par conséquent, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, et d'après le cours, on en déduit que la suite (u_n) converge.*

Exercice 10.57 ♡♡ **Vrai ou Faux**

Soit une suite (u_n) telle que $\forall k \geqslant 2$ les suites extraites (u_{kn}) convergent.
Est-il vrai que la suite (u_n) converge ?

Solution : *Faux : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1$ si n est premier et $u_n = 0$ sinon. Toutes les suites extraites (u_{kn}) convergent vers 0 mais la suite (u_n) n'a pas de limite puisqu'il y a une infinité de nombres premiers. Ce que nous verrons à la proposition 20.16 p. 757.*

Exercice 10.58 ♡

Etudiez la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Indication 10.5 : Étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et montrer qu'elles sont adjacentes.

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :*

$$\alpha_n = u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{et} \quad \beta_n = u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La suite (α_n) est décroissante. En effet :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{(2n+2)!} = -\frac{2n+1}{(2n+2)!}$$

et (β_n) est croissante :

$$\beta_{n+1}-\beta_n = \sum_{k=0}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} = (-1)^{2n+2}\frac{2n+2}{(2n+3)!} = \frac{2n+2}{(2n+3)!}.$$

De plus, $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Les deux suites sont donc adjacentes. Elles convergent alors vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ et donc, d'après le cours comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite l, la suite (u_n) converge vers l.

Exercice 10.59 ♡♡

1. *Montrer que la suite de terme général*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$
converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.
Indication 10.5 : Étudier les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) et montrer qu'elles sont adjacentes.
2. *Calculer une valeur approchée de l à 10^{-1} près.*

Solution :

1. *Définissons les deux suites extraites $(u_n) = (S_{2n})$ et $(v_n) = (S_{2n+1})$. On calcule pour $n \in \mathbb{N}^*$:*
$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leqslant 0$$
$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \geqslant 0$$
donc (u_n) est décroissante et (v_n) croissante. Si $(d_n) = (u_n - v_n)$,
$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Les deux suites (S_{2n}) et $S_{2n+1})$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite finie l.
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l est toujours compris entre S_n et S_{n+1}. Il vient donc que*
$$|S_n - l| \leqslant |S_n - S_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
Pour que S_n soit une valeur approchée de l à 10^{-1} près, il suffit que $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 10^{-1}$, c'est-à-dire $\boxed{n \geqslant 99}$.
On calcule alors $S_{99} = -0.6$.

10.9.8 Suites équivalentes

Exercice 10.60 ♡

Soient (u_n), (a_n) et (b_n) des suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.

Solution : *Comme $b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$, il existe une suite (ε_n) tel que à partir d'un certain rang $b_n = \varepsilon_n a_n$ et tel que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, à partir d'un certain rang, $u_n = (1+\varepsilon_n)\,a_n$. Comme $(1+\varepsilon_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.*

Exercice 10.61 ♡

Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de terme général :

1. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$
2. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}+1}{\tan\frac{1}{n^2}}$
3. $u_n = \ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)$
4. $u_n = (n+3\ln n)e^{-(n+1)}$
5. $u_n = \dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n}$
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Solution :

1. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{\ln n}{n}}$ *par application des formules usuelles sur les équivalents et car* $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}+1}{\tan\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sin\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n^2}} = n^2\left(\sin\frac{1}{n}+1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{n^2}$ *car* $\sin\frac{1}{n}+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. $u_n = \ln\left(n+\sqrt{n^2+1}\right) = \ln n + \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$ *mais* $\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc $\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln n)$ *et donc d'après l'exercice 10.60,* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$.
4. $u_n = (n+3\ln n)e^{-(n+1)} = ne^{-(n+1)}\left(1+3\frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{ne^{-(n+1)}}$ *car* $1+3\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
5. $u_n = \dfrac{n!+e^n}{2^n+3^n} = \dfrac{n!}{3^n}\dfrac{1+\frac{e^n}{n!}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{n!}{3^n}}$ *car* $\dfrac{1+\frac{e^n}{n!}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{n^2-1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}$
$= \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}}$ *car* $\dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 10.62 ♡♡

Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\tan\frac{1}{n}}$
4. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
5. $u_n = n\sin\frac{1}{n^2}$
6. $u_n = \dfrac{\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}-1}{\left(\tan\frac{1}{n}\right)^{\tan\frac{1}{n}}-1}$

Solution :

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{2}{n^2}}$ *car* $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
2. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ *car* $\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. $\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\tan\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{n}} = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{1}$ *par quotient et produit d'équivalents.*
4. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1} = \dfrac{\ln n^2+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n+1} = \dfrac{\ln n^2}{n}\dfrac{1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n^2}}{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{2\ln n}{n}}$ *car* $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ *et donc* $\dfrac{1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n^2}}{1+\dfrac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
5. $u_n = n\sin\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{1}{n}}$ *par produit d'équivalents.*

6. *Considérons*

$$a_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}} - 1 = e^{\sin\frac{1}{n}\ln\sin\frac{1}{n}} - 1.$$

Comme $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et que* $\sin\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *il vient que :* $\sin\frac{1}{n}\ln\sin\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\frac{1}{n}\ln\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln\sin\frac{1}{n}}{n}$. *On montre de même que*

$$b_n = \left(\tan\frac{1}{n}\right)^{\tan\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\tan\frac{1}{n}}{n}.$$

Comme $u_n = a_n/b_n$, *il vient :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\tan\frac{1}{n}} = \frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\sin\frac{1}{n} - \ln\cos\frac{1}{n}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\ln\cos\frac{1}{n}}{\ln\sin\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{1}.$$

Exercice 10.63 ♡♡

Donner des équivalents simples lorsque n *tend vers* $+\infty$ *pour les suites de terme général :*

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \sqrt{e^{n^2+n} - 1} - e^n$
3. $u_n = \left(\frac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$
5. $u_n = \ln(n! + n^n + 3^n)$
6. $u_n = \dbinom{n}{p}$ *avec* $p \in [\![0, n]\!]$

Solution :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}$.
2. $u_n = e^{\frac{n^2+n}{2}}\left(\sqrt{1 - e^{-n-n^2}} - e^{\frac{n-n^2}{2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{e^{\frac{n^2+n}{2}}}$ *car* $\left(\sqrt{1-e^{-n-n^2}} - e^{\frac{n-n^2}{2}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. $u_n = \left(\frac{e^n}{1+e^{-n}}\right)^n = e^{n^2}(1+e^{-n})^{-n} = e^{n^2}e^{-n\ln(1+e^{-n})}$ *mais* $n\ln(1+e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc* $e^{-n\ln(1+e^{-n})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}}$.
4. $u_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2} = -\dfrac{n^3}{2n^2}\dfrac{1 - \sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}}{-\frac{\ln n}{2n^2}+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{-\dfrac{n}{2}}$ *car* $\dfrac{1-\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}}}{-\frac{\ln n}{2n^2}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
5. $u_n = \ln(n! + n^n + 3^n) = \ln\left(n^n\left(1 + \frac{n!}{n^n} + \frac{3^n}{n^n}\right)\right) = n\ln n + \ln\left(1 + \frac{n!}{n^n} + \frac{3^n}{n^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{n\ln n}$ *car* $\ln\left(1+\frac{n!}{n^n}+\frac{3^n}{n^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{n^n} + \frac{3^n}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
6. $u_n = \dbinom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n^p}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{n^p}{p!}}$ *car* $\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Exercice 10.64 ♡♡

Donner des équivalents simples lorsque n *tend vers* $+\infty$ *pour les suites de terme général :*

1. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$
2. $u_n = \frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2+1}$
3. $u_n = (n+1)^\alpha - (n-1)^\alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $u_n = \dfrac{n^2 + n\ln(1-e^{-n})}{n^2+1}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$
6. $u_n = \dfrac{e^{2n} + n^2 + \frac{1}{n}}{e^{n^2}\tan\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$

Solution :

1. $u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

2. $u_n = \frac{2n^3-\ln n+1}{n^2+1} = \frac{2n^3}{n^2}\dfrac{1-\frac{\ln n}{2n^3}+\frac{1}{2n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ *car* $\dfrac{1-\frac{\ln n}{2n^3}+\frac{1}{2n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

3. $u_n = (n+1)^\alpha - (n-1)^\alpha = (n-1)^\alpha\left(\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^\alpha - 1\right) = (n-1)^\alpha\left(\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^\alpha - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)^\alpha \frac{2\alpha}{n-1} = \boxed{2\alpha(n-1)^{\alpha-1}}$. *Remarquons que si on factorise ainsi :* $u_n = (n+1)^\alpha\left(1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^\alpha\right)$, *on trouve que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\alpha(n+1)^{\alpha-1}$ *qui est bien entendu équivalent à l'équivalent trouvé avant.*

4. $u_n = \dfrac{n^2+n\ln(1-e^{-n})}{n^2+1} = \dfrac{1+\frac{\ln(1-e^{-n})}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{1}$ *car* $\dfrac{\ln(1-e^{-n})}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e^{-n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

5. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} = \dfrac{n}{n^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{n^{\frac{1}{3}}}$ *car* $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

6. *En appliquant les formules usuelles pour les équivalents :* $\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

   Par conséquent : $u_n = \dfrac{e^{2n}+n^2+\frac{1}{n}}{e^{n^2}\tan\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\dfrac{e^{2n}+n^2+\frac{1}{n}}{e^{n^2}\tan\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\dfrac{e^{2n}+n^2+\frac{1}{n}}{e^{n^2}\frac{1}{n}} = \frac{e^{2n-n^2}}{2}\left(1+\dfrac{n^2}{e^{2n}}+\dfrac{1}{ne^{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{e^{2n-n^2}}{2}}$ *car* $1+\dfrac{n^2}{e^{2n}}+\dfrac{1}{ne^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Exercice 10.65 ♡♡

Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de terme général :

1. $u_n = 2n^4\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. $u_n = \ln(5+n^2+n) - \ln(n^2-n+3)$
3. $u_n = \frac{1+(-1)^n n}{n+\sqrt{n}}$
4. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$
5. $u_n = \dbinom{n+k}{k}, \quad (k\in\mathbb{N})$
6. $u_n = e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$

Solution :

1. $u_n = 2n^4\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^4 \times \frac{1}{2n^2}\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ *par applications des formules usuelles.*

2. *Écrivons en utilisant les propriétés du logarithme :*

$$u_n = \ln\frac{n^2+n+5}{n^2-n+3} = \ln\frac{n^2-n+3+2n+2}{n^2-n+3} = \ln\left(1+\frac{2n+2}{n^2-n+3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n+2}{n^2-n+3}$$

   car $\dfrac{2n+2}{n^2-n+3} = \dfrac{2n}{n^2}\dfrac{1+1/n}{1-1/n+3/n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et on peut utiliser l'équivalent usuel* $\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *lorsque* $v_n \to 0$. *Finalement* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}}$

3. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n n}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{(-1)^n n}{n}\dfrac{1+\frac{1}{(-1)^n n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{(-1)^n}$ *car* $\dfrac{1+\frac{1}{(-1)^n n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

4. *En utilisant deux fois les quantités conjuguées, écrivons :*

$$u_n = \frac{2}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} = \frac{2}{v_n w_n}$$

   Ensuite, on cherche un équivalent de chaque facteur du produit. En factorisant les termes dominants dans les sommes, écrivons

$$v_n = \sqrt{n}\left[\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\right]$$

   Comme le crochet tend vers $2\sqrt{2}$, il est équivalent à cette limite non-nulle et finalement $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2n}$.

De la même façon,

$$w_n = n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$$

et finalement, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{2n}}}$.

5. $u_n = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{k!n!} = \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+2)(n+1)}{k!}$

$= \frac{n^k}{k!}\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\left(1+\frac{k-1}{n}\right)\times\dots\times\left(1+\frac{2}{n}\right)\times\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{n^k}{k!}}$ *car* $\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\left(1+\frac{k-1}{n}\right)\times\dots\times\left(1+\frac{2}{n}\right)\times\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ 1.

6. *Écrivons d'abord*

$$u_n = \left(e^{\theta_n}-1\right)+\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) = a_n + b_n$$

Comme $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\theta_n = \sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et d'après l'équivalent classique de l'exponentielle, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$. *En utilisant l'équivalent classique du cosinus,* $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. *Mais puisque* $\frac{b_n}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\ln n}} \to 0$, $b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$ *et donc, par application du résultat prouvé dans l'exercice 10.60 :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\sqrt{\frac{\ln n}{n}}}$$

Exercice 10.66 ♡

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{5^n - n^4}{n!}$
2. $u_n = n\sin\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
3. $u_n = \left(e^{1/n}\right)^{n\ln\left(\cos(1/n)\right)}$
4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$
5. $u_n = n\left(\sqrt{1+\sin(1/n)}-\cos(1/n)\right)$
6. $u_n = n^{2\frac{\sin n}{n}}$

Solution :

1. *Comme* $5^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$ *et* $n^4 = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$, *on a :* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}$.
2. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ *et donc :* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *ce qui permet d'écrire :*
   $u_n = n\sin\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$ *et* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$.
3. $u_n = \left(e^{1/n}\right)^{n\ln\left(\cos(1/n)\right)} = e^{\ln(\cos(1/n))} = \cos(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$.
4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}} = e^{\frac{\ln n}{\ln n}} = e$.
5. *Ecrivons*

$$u_n = n(a_n + b_n)$$

avec

$$a_n = \sqrt{1+\sin(1/n)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

et

$$b_n = 1-\cos(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Donc puisque $b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$, *, par application du résultat prouvé dans l'exercice 10.60,*

$b_n + a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. *Par conséquent* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}}$ *et donc* $u_n \to \frac{1}{2}$.

6. $u_n = n^{2\frac{\sin n}{n}} = e^{2\frac{\sin n}{n}\ln n}$ mais pour tout $n>0$, $-\frac{\ln n}{n} \leqslant \sin n \frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{\ln n}{n}$ (car sin est à image dans $[-1,1]$ et que $\ln n/n \geqslant 0$ si $n \geqslant 1$) et $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$. Donc par application du théorème des gendarmes, $\sin n \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par composition, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = \boxed{1}$.

Exercice 10.67 ♡

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n$
2. $u_n = (5n+1)^2 \ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)$
3. $u_n = n^2\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^4+n^2+1}\right)}$
4. $u_n = 5^n \tan\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$
5. $u_n = \sqrt[n]{n}$
6. $u_n = n\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$

Solution :

1. $u_n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$ mais $\sin\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et

$$n\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n} = 1$$

Par conséquent $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{e}$.

2. $u_n = (5n+1)^2\ln\left(1+\frac{1}{3n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(5n+1)^2}{3n^2} = \frac{n^2}{n^2}\frac{\left(5+\frac{1}{n}\right)^2}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\dfrac{25}{3}}$

3. $u_n = n^2\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^4+n^2+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$

4. $u_n = 5^n\tan\left(\frac{\pi}{5^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 5^n\frac{\pi}{5^n} = \pi$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\pi}$.

5. $u_n = \sqrt[n]{n} = e^{\frac{lnn}{n}}$ mais $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ donc $\frac{lnn}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par composition $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = \boxed{1}$.

6. Écrivons pour $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$

Comme $\dfrac{2}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln(1+\dfrac{2}{n-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}$.

Exercice 10.68 ♡

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = n^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right)$
2. $u_n = \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$ où $x\in\mathbb{R}$.
3. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ où $a\in\mathbb{R}$.
4. $u_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$
5. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}$
6. $u_n = \frac{2^{n+4}-5^{n+4}}{2^n-5^n}$

Solution :

1. $u_n = n^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1\right) = n^2\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\times\frac{-1}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

2. La suite est définie à partir d'un certain rang ($n\geqslant \mathrm{E}(x)+1$). Écrivons-la sous forme exponentielle :

$$u_n = e^{n\ln\left(\dfrac{n}{n-x}\right)} = e^{-n\ln\left(\dfrac{n-x}{n}\right)} = e^{-n\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)}$$

Comme $\dfrac{x}{n}\to 0$, on peut utiliser les équivalents classiques et alors $-n\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{e^x}$.

3. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$ mais $n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{a}{n} = a$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{e^a}$.

4. Pour tout $n\geqslant 1$,

$$u_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n = e^{n\ln\frac{2n-1}{2n+1}} = e^{n\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)}$$

mais $n\ln\left(1-\frac{2}{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2n}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1/e}$.

5. En utilisant les quantités conjuguées, puis en factorisant en haut et en bas par $\sqrt{n}$, on trouve que $\forall n>0$,

$$u_n = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}}}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}$$

6. $u_n = \frac{2^{n+4}-5^{n+4}}{2^n-5^n} = \frac{5^{n+4}}{5^n}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+4}-1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}$ mais $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$ et $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+4}\right)$ sont des suites géométriques de raison $\frac{2}{5}\in\,]-1,1[$ et donc elles convergent vers 0. On obtient alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{5^4}$.

Exercice 10.69 ♡

Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes.

1. $u_n = n\left(e^{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}-1\right)+(\ln n)^{\frac{1}{n}}$
2. $u_n = \sqrt{n^4+4}-n^2$
3. $u_n = \sqrt[4]{n^4+4}-n$
4. $u_n = \dfrac{\cos n - n^2}{2^n+n\sin n}$
5. $u_n = \left(\dfrac{1-1/n}{\cos(1/n)}\right)^n$
6. $u_n = \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^n$

Solution :

1. D'une part, $n\left(e^{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{\pi}{n}=\pi$. D'autre part : $(\ln n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(\ln n)}{n}}$ et $\frac{\ln(\ln n)}{n} = \frac{\ln n}{n}\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement $(\ln n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0=1$ et : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\pi+1}$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_n = \sqrt{n^4+4}-n^2 = \frac{\left(\sqrt{n^4+4}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+4}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+4}+n^2} = \frac{4}{\sqrt{n^4+4}+n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}$$
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_n = \sqrt[4]{n^4+4}-n = \frac{\left(\sqrt[4]{n^4+4}-n\right)\left(\sqrt[4]{n^4+4}+n\right)}{\sqrt[4]{n^4+4}+n} = \frac{\sqrt{n^4+4}-n^2}{\sqrt[4]{n^4+4}+n}.$$
En utilisant la question précédente, le numérateur tend vers 0 et il est facile de montrer que le dénominateur tend vers $+\infty$. La suite tend donc vers $\boxed{0}$.
4. $u_n = \dfrac{\cos n - n^2}{2^n+n\sin n} = \dfrac{n^2}{2^n}\dfrac{\frac{\cos n}{n^2}-1}{1+\frac{n\sin n}{n^2}}$. Mais, en utilisant le théorème des gendarmes et les croissances comparées, on montre facilement que $\frac{\cos n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{n\sin n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent, comme $n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$, il est clair que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}$.
5. Écrivons $u_n = e^{a_n}$ avec
$$a_n = n\ln\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}\right) = n\ln\left(1+\frac{1-\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}\right)$$
et comme $1-\cos\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$, il vient que
$$\frac{1-\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Et par conséquent,

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \text{ et } \boxed{u_n \to \boxed{\frac{1}{e}}}$$

6. $u_n = \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}$ *et* $1+\sqrt{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ *donc* $n\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *et il en est de même de* u_n.

Exercice 10.70 ♡♡

1. *Soit la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k^2}.$$

Montrez que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}$.

2. *Trouvez un équivalent de* $v_n = \sum_{k=0}^{n} k!$.

Solution :

1. *On met* e^{n^2} *en facteur dans la somme :*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k^2} = e^{n^2}\left(e^{-n^2} + e^{1-n^2} + e^{2^2-n^2} + \ldots + e^{(n-1)^2-n^2} + 1\right).$$

Mais

$$0 \leqslant e^{-n^2} + e^{1-n^2} + e^{2^2-n^2} + \ldots + e^{(n-1)^2-n^2} \leqslant ne^{(n-1)^2-n^2} = ne^{-2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}}$

2. *On écrit :*

$$\sum_{k=0}^{n} k! = n!\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{n!}\right).$$

Mais pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $\dfrac{(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} < \dfrac{1}{n(n-1)}$ *donc*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{n!} = \frac{0!}{n!} + \ldots + \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} \leqslant \frac{n-1}{n(n-1)} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

et d'après le théorème des gendarmes, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *En conclusion* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!}$.

Exercice 10.71 ♡♡

Trouver un équivalent de

$$u_n = \sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$

Solution : *Écrivons*

$$u_n = a_n + b_n$$

avec $a_n = \sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ *et* $b_n = \sqrt{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}$. *On trouve les équivalents*

$$b_n = \sqrt{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$a_n = n^{\frac{1}{4}}\left((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}}$$

car $\left((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Donc $u_n = a_n + b_n$ *avec* $b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$ *et il vient que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{1}{4}}}}$.

Exercice 10.72 ♡♡

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

En étudiant la suite $(1/u_n)$, montrez que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$.

Solution : *La suite (v_n) de terme général $1/u_n$ est arithmétique puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 1$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n$ et il vient que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. En prenant l'inverse, on obtient que : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n}$.*

Exercice 10.73 ♡♡

On considère la suite définie par :

$$S_n = 1 + 11 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ fois}}$$

Trouver un équivalent simple de (S_n) lorsque $n \to +\infty$.

Solution : *On calcule pour $1 \leqslant p \leqslant n$,*

$$\underbrace{11\ldots1}_{p \text{ fois}} = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{p-1} = \frac{10^p - 1}{9}$$

Par conséquent, pour $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{1}{9}\sum_{p=1}^{n} 10^p - \frac{n}{9} = \frac{10}{9}\frac{10^n - 1}{10-1} - \frac{n}{9}$$

Finalement,

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{10^{n+1}}{9^2}}$$

Exercice 10.74 ♡♡♡

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \left[\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right]^n$$

Solution : *Sous forme exponentielle :*

$$u_n = e^{n\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)\right)}$$

puis avec les formules d'addition :

$$u_n = e^{n\ln\frac{\sqrt{3}+\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}} = e^{n\ln\left(\sqrt{3}\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} = e^{n\ln\sqrt{3}}e^{n\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} = \left(\sqrt{3}\right)^n e^{n\ln\left(1+\frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)}.$$

On cherche alors la limite de $a_n = n\ln\left(1+\frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$. Avec les équivalents usuels :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{n} = 4\frac{\sqrt{3}}{3}$$

donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4\sqrt{3}/3$. Il vient alors par composition de limite :

$$e^{n\ln\left(1+\frac{4\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{3})^n e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}}$$

Exercice 10.75 ♡♡♡

Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites à termes strictement positifs. On note* $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *et* $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$*. Si* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ *et si la série* $\sum b_k$ *diverge, montrer que* $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$*.*

Solution : Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, $a_n/b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_0$, on a :

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

et donc puisque (b_n) est strictement positive :

$$(1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n.$$

Donc :

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=N_0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=N_0}^{n} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=N_0}^{n} b_k,$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(1-\varepsilon)\left(B_n - B_{N_0-1}\right) \leqslant A_n - A_{N_0-1} \leqslant (1+\varepsilon)\left(B_n - B_{N_0-1}\right)$$

ou encore

$$\left(1-\varepsilon - \frac{(1-\varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n}\right)B_n \leqslant A_n \leqslant \left(1+\varepsilon - \frac{(1+\varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n}\right)B_n$$

Mais comme $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon)B_{N_0-1} - A_{N_0-1}}{B_n} = 0$. Il existe alors des rangs $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geqslant N_1 \implies -\varepsilon \leqslant \frac{(1-\varepsilon)B_{N-1} - A_{N-1}}{B_n} \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geqslant N_2 \implies -\varepsilon \leqslant \frac{(1+\varepsilon)B_{N-1} - A_{N-1}}{B_n} \leqslant \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. On a alors, pour $n \geqslant N$:

$$(1-2\varepsilon)B_n \leqslant A_n \leqslant (1+2\varepsilon)B_n$$

ce qui prouve que $\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n}$.

Exercice 10.76 ♡♡♡

Soit (u_n) *une suite qui converge vers* 0 *et telle que* $u_n + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$*. Trouver un équivalent de* u_n*.*

Indication 10.5 :
- *Si* $u_n = \frac{l}{n}$*, et vérifie l'hypothèse, que vaut* l*?.*
- *On fera intervenir une somme télescopique.*

Solution : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n + u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $\frac{(1-\varepsilon)}{n} \leqslant u_n + u_{2n} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)}{n}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire :

$$\frac{(1-\varepsilon)}{2^p n} \leqslant u_{2^p n} + u_{2^{p+1} n} \leqslant \frac{(1-\varepsilon)}{2^p n}.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(1-\varepsilon)}{2^k n} \leqslant \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(u_{2^k n} + u_{2^{k+1} n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(1+\varepsilon)}{2^k n}$$

ce qui amène :

$$\frac{(1-\varepsilon)}{n}\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2^k} \leqslant u_n + (-1)^p u_{2^{p+1} n} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)}{n}\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2^k}.$$

En utilisant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et en prenant la limite quand p tend vers $+\infty$ dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$\frac{2(1-\varepsilon)}{3n} \leqslant u_n \leqslant \frac{2(1+\varepsilon)}{3n}$$

et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3n}}$.

Exercice 10.77 ♡♡♡ **Formule de Stirling**

1. *Étudier les variations de la fonction* $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ *pour* $x > 0$.
2. *Étudier la fonction définie par* $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right).\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{12x(x+1)}$ *pour* $x \geqslant 1$.
   Indication 10.5 : (On pourra, pour étudier le signe de la dérivée seconde, introduire $t = (x+1).x$ *)*
3. *Démontrer que les deux suites* $u_n = \dfrac{n^{n+1/2}}{e^n n!}$ *et* $v_n = u_n.\exp\left(\frac{1}{12n}\right)$ *sont adjacentes. On appelle* ℓ *la limite commune.*
4. *On pose* $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$. *Démontrer que la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante. Trouver une relation entre* w_n *et* w_{n+2}. *Calculer* w_n. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(2.4.\ldots.2n)^2}{(3.5.\ldots.(2n-1))^2(2n+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{(2.4.\ldots.(2n-2))^2 2n}{(3.5.\ldots.(2n-1))^2}$ *En déduire l'existence de* $\mathrm{L} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n\left[(2n)!\right]^2}$, *et calculer* L.
5. *Calculer* ℓ.
6. *En déduire un encadrement de* $n!$ *pour* $n \geqslant 1$
7. *En déduire un équivalent simple* z_n *de* $n!$. *Donner des valeurs approchées pour* $1000!$ *et pour* z_{1000}
8. *Démontrer que* $w_n \simeq w_{n+1}$.
9. *Calculer* $(n+1).w_n.w_{n+1}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
10. *Donner un équivalent de* w_n.

Solution :

1. *Pour* $x > 0$, $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \dfrac{x + \frac{1}{2}}{x(x+1)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2(x+1)}$.
   $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2} = \dfrac{-2x(x+1) + (x+1)^2 + x^2}{2x^2(x+1)^2} = \dfrac{(x+1-x)^2}{2x^2(x+1)^2} = \dfrac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$.
   On en déduit que f' *est croissante sur* $]0, +\infty[$. *Comme* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, *on en déduit que* $\forall x > 0, f'(x) < 0$ *et par suite que* f *est décroissante sur* $]0, +\infty[$.
   De plus, on a en $+\infty$ $f(x) \sim (x + \frac{1}{2}).\frac{1}{x} \sim 1$. *Donc* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. *En particulier,* $\forall x > 0, f(x) > 1$.
2. *On a* $\forall x > 0, g'(x) = f'(x) + \dfrac{2x+1}{12x^2(x+1)^2} = f'(x) + \dfrac{1}{12x(x+1)^2} + \dfrac{1}{12x^2(x+1)}$.
   $$g''(x) = f''(x) - \dfrac{1}{12x^2(x+1)^2} - \dfrac{2}{12x(x+1)^3} - \dfrac{1}{12x^2(x+1)^2} - \dfrac{2}{12x^3(x+1)}$$
   $$= \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{x^2(x+1)^2} - \dfrac{1}{x(x+1)^3} - \dfrac{1}{x^3(x+1)}\right) = \dfrac{1}{6}\,\dfrac{2x(x+1) - (x+1)^2 - x^2}{x^3(x+1)^3} = -\dfrac{1}{6x^3(x+1)^3} < 0.$$
   On en déduit que g' *est décroissante sur* $]0, +\infty[$. *Comme* $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = 0$, *on en déduit que* $\forall x > 0, g'(x) > 0$ *et par suite que* g *est croissante sur* $]0, +\infty[$.
   Comme $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$. *En particulier,* $\forall x > 0, g(x) < 1$.
3. *On a, pour* $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+3/2}}{e^{n+1}(n+1)!}\,\dfrac{e^n n!}{n^{n+1/2}} = \dfrac{(n+1)^{n+1/2}}{e}$.
   Donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = f(n) - 1 > 0$. *Donc* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *et donc la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est croissante.*
   On a, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)^{n+3/2}}{e^{n+1}(n+1)!}\,\dfrac{e^n n!}{n^{n+1/2}}\,\dfrac{\exp\left(\frac{1}{12(n+1)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{12n}\right)} = \dfrac{(n+1)^{n+1/2}}{e}\exp\left(\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}\right)$. *Donc* $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = f(n) - 1 - \frac{1}{12n(n+1)} = g(n) - 1 < 0$. *Donc* $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ *et donc la suite* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *est décroissante.*
   Soit enfin $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, *puisque* $u_n = v_n.\exp\left(-\frac{1}{12n}\right)$, *on en déduit que* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *converge vers la même limite.*
4. **Intégrales de Wallis.** *On a* $w_{n+1} - w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x(\cos x - 1)\,dx$. *Comme* $\cos^n x(\cos x - 1) \leqslant 0$ *on en déduit* $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$ *ce qu'il fallait vérifier.*

$w_n - w_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^n x(1-\cos^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin^2 x\,dx$. *On intègre par parties :* $\begin{cases} u'(x) = \sin x \cos^n x & u(x) = -\dfrac{1}{n+1}\cos^{n+1} x \\ v(x) = \sin x & v'(x) = \cos x \end{cases}$ *D'où* $w_n - w_{n+2} = \left[-\dfrac{1}{n+1}\cos^{n+1} x \sin x\right]_0^{\pi/2} + \dfrac{1}{n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x\,dx = 0 + \dfrac{1}{n+1} w_{n+2}$.

D'où $w_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) w_{n+2}$ *soit* $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.

On peut ainsi calculer les w_n *de deux en deux, en partant de* $w_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *ou* $w_1 = 1$.

Donc $w_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} w_{2n-2} = \ldots = \dfrac{2n-1}{2n}\dfrac{2n-3}{2n-2}\ldots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}$.

et $w_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} w_{2n-1} = \ldots = \dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{2n-2}{2n-1}\ldots\dfrac{2}{3}1$.

En écrivant $w_{2n+1} \leqslant w_{2n} \leqslant w_{2n-1}$ *on obtient*

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\ldots\frac{2}{3} \leqslant \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\ldots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{2n-2}{2n-1}\ldots\frac{2}{3}$$

Soit en multipliant chaque expression par $\dfrac{2n}{2n-1}\dfrac{2n-2}{2n-3}\ldots 2$ *on trouve bien le résultat annoncé.*

Maintenant on multiplie en haut et en bas par les facteurs pairs $2, 4, \ldots, 2n$ *(au carré) pour reconstituer les factorielles de* $2n$ *au dénominateur. On obtient alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{(2.4.\ldots.2n)^4}{(2.3.4.5.\ldots.(2n-1)(2n))^2(2n+1)} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2.4.\ldots.(2n-2))^4(2n)^3}{((2.3.4.5.\ldots.(2n-1)(2n))^2}$$

On extrait ensuite les facteurs 2 *pour obtenir les factorielles de* n *au numérateur. On obtient alors :*

$$\frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n)}$$

En posant $\mathrm{W}_n = \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n[(2n)!]^2}$, *la première inégalité s'écrit* $\mathrm{W}_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}\dfrac{2n+1}{n}$ *et la deuxième* $2\dfrac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{W}_n$ *d'après le théorème des gendarmes,* L *existe et vaut* π.

5. *On sait que* $n! \sim \dfrac{1}{\ell}\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$ *d'où* $(2n)! \sim \dfrac{1}{\ell}\dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}}$, *donc, d'après la question précédente,* $\pi \sim \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n[(2n)!]^2} \sim 2^{4n}\dfrac{1}{\ell^4}\dfrac{n^{4n+2}}{e^{4n}}\dfrac{1}{n}\dfrac{\ell^2 e^{4n}}{(2n)^{4n+1}} \sim \dfrac{2^{4n}}{2^{4n+1}}\dfrac{n^{4n+2}}{n^{4n+1}n}\dfrac{e^{4n}}{e^{4n}}\dfrac{1}{\ell^2} \sim \dfrac{1}{2\ell^2}$. *Puisque* $\ell > 0$, $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
6. *Puisque les suites* u_n *et* v_n *sont adjacentes, on a* $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$, *on a*

$$\frac{n^{n+1/2}}{e^n n!} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \frac{n^{n+1/2}}{e^n n!}\exp\left(\tfrac{1}{12n}\right).$$

Soit

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\tfrac{1}{12n}\right).$$

7. *On en déduit que* $z_n = \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ *est un équivalent (simple) de* $n!$. *(formule de Stirling)*

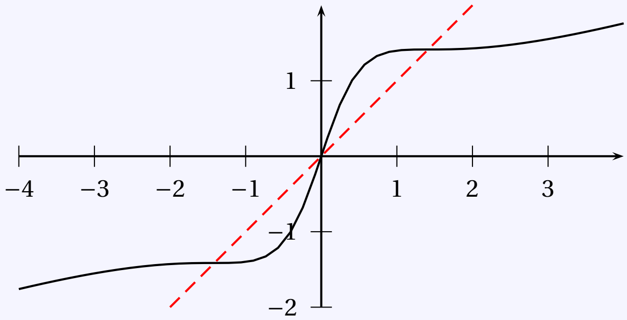
On a $\log_{10}(z_{1000}) = 2567,60461$ *à* 10^{-5} *près. Donc* $z_{1000} = 10^{2567} \times 10^{0,6046} = 4,0235 \times 10^{2567}$. *De même on calcule* $\sum_{k=2}^{1000} \log_{10} k = 2567,60464$ *à* 10^{-5} *près, puis* $1000! = 4,0239 \times 10^{2567}$. *Le facteur correctif vaut* $\exp\left(\frac{1}{12000}\right) = 1+\varepsilon$, *avec* ε *à peu près égal à* $\frac{1}{12000}$ *de l'ordre de* 10^{-4}. *On est donc (largement) dans les clous.*
8. *On a* $w_{n+2} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ *soit* $\dfrac{n+1}{n+2} w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$ *ou encore* $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant 1$ *donc* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1$ *soit encore* $w_{n+1} \sim w_n$.
9. *Pour* $n = 0$, $(n+1).w_n.w_{n+1} = 1 \times \dfrac{\pi}{2} \times 1 = \dfrac{\pi}{2}$. *Par ailleurs* $(n+2).w_{n+1}.w_{n+2} = (n+2).w_{n+1}.\dfrac{n+1}{n+2} w_n = (n+1).w_n.w_{n+1}$. *Donc* $(n+1).w_n.w_{n+1}$ *est une suite constante, égale à* $\dfrac{\pi}{2}$.
10. *On a* $\dfrac{\pi}{2} \sim (n+1).w_n.w_{n+1} \sim n w_n^2$. *Donc* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} w_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. *On en déduit* $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

10.9.9 Étude de suites données par une relation de récurrence

Exercice 10.78 ♡♡

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$.

Solution : *Introduisons la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3+6x}{3x^2+2} \end{array} \right.$. *La suite* (u_n) *est donnée par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. *On montre que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3\left(x^2-2\right)^2}{\left(3x^2+2\right)^2}$. *Donc* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *On trouve les points fixes de* f *en résolvant l'équation* $f(x) = x$. *Ce sont les nombres :* $\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}$.



Appliquons maintenant le cours. Les intervalles $I_1 = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$, $I_2 = \left[-\sqrt{2}, 0\right]$, $I_3 = \left[0, \sqrt{2}\right]$ *et* $I_4 = \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ *sont stables par* f. *Soit* $k \in [\![1,4]\!]$. *Prenons* $u_0 \in I_k$. *La suite* (u_n) *est donc bien définie et à valeurs dans* I_k. *En résolvant l'inéquation* $f(x) \leqslant x$ *sur* $\mathbb{R}$, *on vérifie facilement que*

$$\begin{cases} f(x) \geqslant x & \text{si } x \in I_1 \\ f(x) \leqslant x & \text{si } x \in I_2 \\ f(x) \geqslant x & \text{si } x \in I_3 \\ f(x) \leqslant x & \text{si } x \in I_4 \end{cases}$$

et donc que (u_n) *est croissante si* $u_0 \in I_1 \cup I_3$, *décroissante si* $u_0 \in I_2 \cup I_4$. *Elle est donc à chaque fois soit décroissante et minorée, soit croissante et majorée. La suite* (u_n) *est donc, d'après le théorème de la limite monotone, dans chaque cas convergente et comme sa limite est nécessairement un point fixe de* f, *on obtient :*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} -\sqrt{2} & \text{si } u_0 \in I_1 \cup I_2 \\ \sqrt{2} & \text{si } u_0 \in I_3 \cup I_4 \end{cases}.$$

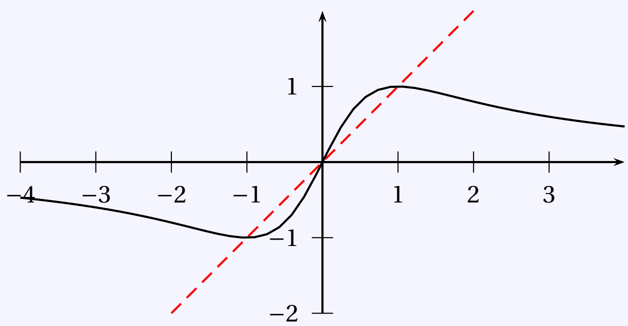
Exercice 10.79 ♡

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$$

Solution : *Introduisons la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$. *La suite* (u_n) *est donnée par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$. *On montre que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. *On en déduit les variations de* f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	-1	↗	1	↘	0



On va donc travailler dans un premier temps sur l'intervalle stable $\mathrm{I} = [-1,1]$. Sur I, la fonction f est strictement croissante et ses points fixes sont -1, 0 et 1. En résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant x$ sur I on montre que $f(x) \leqslant x$ si $x \in \mathrm{I}_1 = [-1,0]$ et que $f(x) \geqslant x$ si $x \in \mathrm{I}_2 = [0,1]$. Remarquons que les intervalles I_1 et I_2 sont aussi stables par f. On en déduit alors que :

- *si $u_0 \in \mathrm{I}_1$ alors la suite est bien définie et à valeurs dans I_1. De plus, comme $u_0 \geqslant f(u_0)$ et que f est croissante alors (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par -1, d'après le théorème de la limite monotone elle est convergente. Sa limite est forcément un point fixe de f, donc dans ce cas $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.*
- *si $u_0 \in \mathrm{I}_2$ alors la suite est bien définie et à valeurs dans I_2. Comme $u_0 \leqslant f(u_0)$ et que f est croissante alors (u_n) est croissante. Cette suite est majorée par 1. On termine alors comme précédemment, et on montre que dans ce cas $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.*

Si $u_0\,]-\infty,-1[$ alors $u_1 \in \mathrm{I}_1$ et donc on est ramené au premier cas. Si $u_0\,]1,+\infty[$ alors $u_1 \in \mathrm{I}_2$ et on est ramené au second cas.

Exercice 10.80 ♡

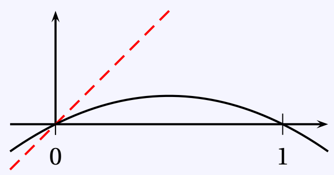
Soit $u_0 \in [0,1]$. Étudiez la suite définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n (1 - u_n)$$

Solution : *Introduisons la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2} x(1-x) \end{array} \right.$. *On montre que pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 1/2 - x$. On en déduit les variations de f sur $[0,1]$.*

L'intervalle $[0,1]$ est stable donc la suite est bien définie et à valeurs dans $[0,1]$. On vérifie facilement que 0 est le seul point fixe de f, que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant x$ et que f est croissante sur $[0,1/2]$, décroissante sur $[1/2,1]$. Supposons que $u_0 \in [0,1/2]$ alors la suite (u_n) est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Sa limite est un point fixe de f donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si $u_0 \in]1/2,1]$ alors $u_1 = f(u_0) \in [0,1/2]$ car $f \leqslant 1/8$ sur $[0,1]$ et on retombe sur le premier cas.

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$1/8$	$\searrow$	0



Exercice 10.81 ♡♡

Soient $0 < u_0 < v_0$, et $p > q > 0$. On définit deux suites par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{p u_n + q v_n}{p+q} \qquad v_{n+1} = \frac{p v_n + q u_n}{p+q}$$

1. *Montrez que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.*
2. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour quelles valeurs de n est-on sûr que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$?*

Solution :

1. *Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$, car*

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{p-q}{p+q}(v_n - u_n)$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{q}{p+q}(v_n - u_n) \geqslant 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{q}{p+q}(u_n - v_n) \leqslant 0$$

Donc (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. En notant $d_n = v_n - u_n$, on a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = k d_n$$

où $k = \dfrac{p-q}{p+q}$ et donc on a $0 < k < 1$. Par conséquent, comme (d_n) est géométrique $d_n = k^n d_0 \to 0$. En conclusion, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers la même limite.

2. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$, il vient $|u_n - l| \leqslant v_n - u_n = d_n = k^n(v_0 - u_0)$. Pour avoir $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, il suffit que $d_n \leqslant \varepsilon$. C'est à dire

$$n \geqslant \frac{\ln \dfrac{\varepsilon}{v_0 - u_0)}}{\ln k}$$

Exercice 10.82

Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

1. Trouver une relation de récurrence simple entre deux termes successifs u_{n+1} et u_n de la suite.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante
3. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Solution :

1. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Introduisons alors $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1, +\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 + x} \end{array} \right.$. On a affaire à une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. On vérifie par récurrence que si $u_0 > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ ce qui permet de définir u_{n+1}. Donc la suite (u_n) est bien définie.

2. Calculons alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

3. Par l'absurde, si la suite (u_n) convergeait vers $l \in \mathbb{R}$, alors l devrait être un point fixe de f et on devrait avoir $l = f(l)$, c'est-à-dire $l = \sqrt{l^2 + l}$ et donc $l = 0$. Mais c'est impossible car $u_0 > 0$ et (u_n) est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 10.83 ♡

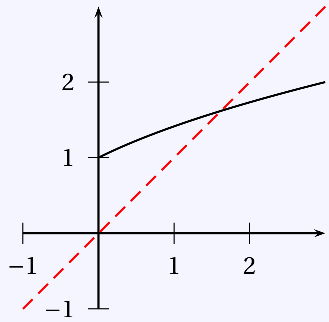
Étudiez la suite récurrente définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

Solution : On vérifie par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et donc que la suite (u_n) est bien définie.
Introduisons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \right.$. Cette fonction est croissante comme composée de fonctions croissantes. Étudions la position de son graphe par rapport à la bissectrice principale. Pour ce faire, considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$, et cherchons son signe. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) = \frac{1 + x - x^2}{\sqrt{1+x} + x} = -\frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{1+x} + x}$$

Notons $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. La fonction g est positive sur $[0, \alpha]$, négative sur $[\alpha, +\infty[$. En particulier, la fonction f possède un unique point fixe $\alpha \in [0, +\infty[$.



Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, si $u_n \leqslant \alpha$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ et si $u_n \geqslant \alpha$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
On vérifie en utilisant les variations de f que les intervalles $[0,\alpha]$ et $[\alpha,+\infty[$ sont stables. On étudie alors deux cas :

1. *Si $u_0 \in]0,\alpha]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,\alpha]$ et la suite (u_n) est croissante et majorée par α. Elle converge alors vers l'unique point fixe de f, α.*
2. *Si $u_0 \in [\alpha,+\infty[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\alpha,+\infty[$ et la suite (u_n) est décroissante et minorée par α. Elle converge donc vers l'unique point fixe de f, α.*

On a donc montré que $\forall u_0 > 0$, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice 10.84 ♡♡♡

Soit $a > 0$. Étudiez la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$$

Indication 10.5 : Aidez-vous de l'exercice précédent.

Solution : *Introduisons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{a+x} \end{array} \right.$. La suite (u_n) est définie par récurrence par :*

$$\left\{ \begin{array}{rl} & u_0 = \sqrt{a} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right. .$$

Comme f est strictement croissante et que $u_1 = \sqrt{a+\sqrt{a}} > \sqrt{a} = u_0$, la suite (u_n) est strictement croissante. Un point fixe positif de f est une solution positive de $x^2 - x - a = 0$. La seule possibilité est $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. On en déduit que l'intervalle $[0,\alpha]$ est stable pour f. De plus $u_0 = \sqrt{a} \in [0,\alpha]$. Par conséquent $(u_n \in [0,\alpha])$ et la suite est majorée. On applique le théorème de la limite monotone et on en déduit qu'elle converge vers l'unique point fixe positif de f. Il vient alors que : $\boxed{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$

10.9.10 Étude de suites définies implicitement

Exercice 10.85 ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation (E_n) : $xe^x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$. On la notera x_n.*
2. *Déterminer la limite de (x_n).*

Solution :

1. *Posons $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array} \right.$. La fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et si $x \in \mathbb{R}_+$, $\theta'(x) = (x+1)e^x$. On en déduit que θ' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et que θ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On peut alors affirmer que θ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un unique réel positif noté x_n tel que $\theta(x_n) = n$. Ce réel est donné par : $x_n = \theta^{-1}(n)$.*
2. *Comme $\theta^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, en appliquant le théorème de composition d'une suite par une fonction on obtient : $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \theta^{-1}(n) = +\infty$ car $\theta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.*

Exercice 10.86 ♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation (E_n) : $\quad x + \ln x = n$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. *Montrer que l'équation* E_n *possède une solution unique notée* x_n.
2. *Montrer que la suite* (x_n) *diverge vers* $+\infty$.
3. *Donner un équivalent simple de la suite* (x_n).

Solution :

1. *Posons* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x + \ln x \end{array} \right.$. *La fonction* θ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et si* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta'(x) = \frac{x+1}{x}$. *On en déduit que* θ' *est strictement positive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et que* θ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$. *La fonction* θ *réalise donc une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe donc un unique réel positif noté* x_n *tel que* $\theta(x_n) = n$. *Ce réel est donné par :* $x_n = \theta^{-1}(n)$.
2. *Comme* $\theta^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, *appliquant le théorème de composition d'une suite par une fonction on obtient :* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \theta^{-1}(n) = +\infty$.
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *En partant de* $x_n + \ln x_n = n$ *on obtient :* $x_n = n\dfrac{1}{1 + \dfrac{\ln x_n}{x_n}}$. *Mais comme* $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, *on a :* $\dfrac{\ln x_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc* $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$.

Exercice 10.87 ♡♡♡

1. *Montrer que l'équation*
$$x^n + x - 1 = 0$$
possède une unique solution $u_n \in [0,1]$.
2. *Montrer que la suite* (u_n) *converge vers* 1.
3. *En posant* $y_n = 1 - u_n$, *montrer que* $n\ln(1 - y_n) = \ln y_n$, *et que*
$$\frac{\ln n}{2n} \leqslant y_n \leqslant \frac{2\ln n}{n}.$$
4. *En déduire un équivalent de la suite* (y_n).

Solution : *On va se servir de trois inégalités :*

$$\forall u \in [0,1], -u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1-u) \leqslant -u \quad \forall t \in]0,+\infty[, \frac{\ln t}{t} \leqslant \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \forall t \in]1,+\infty[, \frac{\ln^2 t}{t} \leqslant \frac{4}{e^2}.$$

La deuxième inégalité se démontre en étudiant les variations de $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ *qui obtient son maximum en* $t = e$ *et la troisième se démontre de même en étudiant les variations de* $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ *(sur* $]1,+\infty[$*) qui obtient son maximum en* $t = e^2$.

1. *Soit* $f_n(x) = x^n + x - 1$ *pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$. *On a* $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$, $f_n(0) = -1$ *et* $f_n(1) = 1$. *De ce fait l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une unique solution (sur* $[0,1]$.*)*
2. *On a* $f_{n+1}(u_n) = u_n u_n^n + u_n - 1$. *Comme* $u_n \in [0,1]$, *on a* $f_{n+1}(u_n) < u_n^n + u_n - 1 = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. *D'après la croissance stricte de* f_n *sur* $[0,1]$, *on en déduit que* $u_n < u_{n+1}$. *La suite* (u_n) *est donc strictement croissante et majorée, elle converge donc vers* $\ell \in [0,1]$. *Comme la suite* (u_n) *est strictement croissante, on a* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$ *et donc* $f_n(u_n) = 0 < \ell^n + \ell - 1$. *Si on suppose,* $\ell < 1$, *en passant à la limite on aurait* $0 \leqslant \ell - 1$. *Impossible. Donc* $\ell = 1$.
3. *À partir de* $u_n^n = 1 - u_n$ *on obtient* $(1 - y_n)^n = y_n$ *et comme* $1 - y_n$ *est positif,* $n\ln(1 - y_n) = \ln y_n$. *Soit* $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$ *pour* $0 < x < 1$. *On a* $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{1-x}\ln x - \frac{1}{x}\ln(1-x)}{\ln^2 x} > 0$. *Donc* f *est strictement croissante sur* $]0,1[$.

   On prend $n \geqslant 1$. *En partant de* $\ln(1-u) \leqslant -u$ *pour* $0 \leqslant u < 1$ *on obtient, en prenant* $u = \dfrac{2\ln n}{n} < \dfrac{2}{e} < 1$, $\ln\left(1 - \frac{2\ln n}{n}\right) \leqslant -\dfrac{2\ln n}{n}$ *donc puisque* $\ln\left(\frac{2\ln n}{n}\right) < 0$,

$$f\left(\frac{2\ln n}{n}\right) \geqslant -\frac{\frac{2\ln n}{n}}{\ln\ln n + \ln 2 - \ln(n)} \geqslant \frac{2}{n}\frac{1}{1 - \frac{\ln(2\ln n)}{\ln n}} \geqslant \frac{2}{n} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Comme on a $f(y_n) = \dfrac{1}{n}$*, la croissance de* f *assure que* $\frac{2\ln n}{n} \geqslant y_n$.

On prend $n \geqslant 2$*. En partant de* $-u - \dfrac{u^2}{2} \leqslant \ln(1-u)$ *pour* $0 \leqslant u < 1$ *on obtient, en prenant* $u = \dfrac{\ln n}{2n} < \dfrac{1}{2e} < 1$, $\ln\left(1 - \frac{\ln n}{2n}\right) \geqslant -\dfrac{\ln n}{2n} - \dfrac{\ln^2 n}{8n^2}$ *donc puisque* $\ln\left(\frac{\ln n}{2n}\right) < 0$,

$$f\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \leqslant -\frac{\frac{\ln n}{2n} + \dfrac{\ln^2 n}{8n^2}}{\ln\ln n - \ln 2 - \ln(n)} \leqslant \frac{1}{2n}\,\frac{1 + \frac{\ln^2 n}{4n}}{1 + \frac{\ln 2}{\ln n} - \frac{\ln\ln n}{\ln n}}.$$

Au numérateur, on majore $\frac{\ln^2 n}{n}$ *par* $\frac{4}{e^2}$ *et au dénominateur on minore* $\frac{\ln 2}{\ln n} - \frac{\ln\ln n}{\ln n}$ *par* $0 - \frac{1}{e}$.

Ainsi $f\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1 + \frac{1}{e^2}}{2\left(1 - \frac{1}{e}\right)} \leqslant \dfrac{1}{n} = f(y_n)$.

On en déduit, toujours grâce à la croissance de f*, que* $\frac{\ln n}{2n} \leqslant y_n$ *et ce pour* $n \geqslant 2$.

4. *On va remplacer les facteurs* $\frac{1}{2}$ *et* 2 *de la question précédente par* $1-\varepsilon$ *et* $1+\varepsilon$*. On n'obtiendra plus des inégalités globales, mais des inégalités à partir d'un certain rang.*

   Soit $\varepsilon > 0$ *et soit* $n \geqslant 2$*. On a* $\ln\left(1 - \frac{(1+\varepsilon)\ln n}{n}\right) \leqslant -\dfrac{(1+\varepsilon)\ln n}{n}$ *donc*

$$f\left(\frac{(1+\varepsilon)\ln n}{n}\right) \geqslant -\frac{\frac{(1+\varepsilon)\ln n}{n}}{\ln\ln n + \ln(1+\varepsilon) - \ln(n)} \geqslant \frac{1+\varepsilon}{n}\,\frac{1}{1 - \frac{\ln((1+\varepsilon)\ln n)}{\ln n}} \geqslant \frac{(1+\varepsilon)}{n} \geqslant \frac{1}{n}.$$

   On en déduit que $\frac{(1+\varepsilon)\ln n}{n} \geqslant y_n$.

   Dans l'autre sens, $\ln\left(1 - \frac{(1-\varepsilon)\ln n}{n}\right) \geqslant -\dfrac{(1-\varepsilon)\ln n}{n} - \dfrac{(1-\varepsilon)^2\ln^2 n}{2n^2}$ *donc*

$$f\left(\frac{(1-\varepsilon)\ln n}{n}\right) \leqslant -\frac{\frac{(1-\varepsilon)\ln n}{n} + \dfrac{(1-\varepsilon)^2\ln^2 n}{2n^2}}{\ln\ln n - \ln(1-\varepsilon) - \ln(n)} \leqslant \frac{(1-\varepsilon)}{n}\,\frac{1 + (1-\varepsilon)\frac{\ln n}{2n}}{1 - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln n} - \frac{\ln\ln n}{\ln n}}.$$

   Or $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\varepsilon)\dfrac{1 + (1-\varepsilon)\frac{\ln n}{2n}}{1 - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln n} - \frac{\ln\ln n}{\ln n}} = 1-\varepsilon$*, donc à partir d'un certain rang* N_ε*, on a* $(1-\varepsilon)\dfrac{1 + (1-\varepsilon)\frac{\ln n}{2n}}{1 - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln n} - \frac{\ln\ln n}{\ln n}} = 1-\varepsilon \leqslant 1$.

   On en déduit que pour $n \geqslant N_\varepsilon$, $\dfrac{(1-\varepsilon)\ln n}{n} \leqslant y_n$.

   En résumé pour $n \geqslant N_\varepsilon$, $1-\varepsilon \leqslant y_n \dfrac{n}{\ln n} \leqslant 1+\varepsilon$*. On a bien démontré que* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \dfrac{n}{\ln n} = 1$ *c'est-à-dire que* $y_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 10.88 ♡♡♡

Pour $n \geqslant 1$*, on considère l'équation*

$$(x-n)\ln n = x\ln(x-n).$$

1. *Montrer que pour* n *assez grand, cette équation admet une unique racine* $x_n \in]n+1, n+2[$.
2. *Montrer que* $(x_n - n - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Solution :

1. *On pose* $y = x - n - 1 \in [0,1]$*. On considère donc l'équation* $(y+1)\ln n = (y+n+1)\ln(y+1)$*, soit* $(y+1)\ln(y+1) - (y+1)\ln n + n\ln(y+1) - n\ln n + n\ln n = 0$ *ou encore* $(y+1+n)\ln\frac{y+1}{n} + n\ln n = 0$.

   Soit $F(y) = (y+1+n)\ln\frac{y+1}{n} + n\ln n$*. On a* $F(0) = (1+n)\ln\frac{1}{n} + n\ln n = -\ln n \leqslant 0$*. On a* $F(1) = (2+n)\ln\frac{2}{n} + n\ln n = 2\ln 2 - 2\ln n + n\ln 2 = \ln\dfrac{2^{n+2}}{n^2}$.

   Soit $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{n^2}$*. On a* $u_1 = 8; u_2 = 4; u_3 = \dfrac{32}{9}$*. Comme* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \geqslant 1$ *pour* $n \geqslant 3$*. Donc la suite* u_n *est croissante, et par suite,* $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$*. Ainsi* $F(1) \geqslant 0$*. Comme* F *est continue sur* $[0,1]$*, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,* F *s'annule au moins une fois sur* $[0,1]$.

De plus, $F'(y) = \ln \frac{y+1}{n} + \dfrac{y+1+n}{y+1} = \ln \frac{y+1}{n} + 1 + \dfrac{n}{y+1}$. *Soit* $z = \frac{y+1}{n} \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \subset]0,2]$. *On a* $F'(y) = \ln z + 1 + \frac{1}{z} = G(z)$. *On a* $G'(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{z-1}{z^2}$. *La fonction* G *admet donc un minimum en* 1*, et comme* $G(1) = 2$*, on en déduit que* $G(z)$*, comme* $F'(y)$ *est strictement positif. On en déduit que* F *est strictement croissante sur* $[0,1]$*, ce qui assure l'unicité de* $y_n = x_n - n - 1$ *et donc celle de* x_n.

2. *À partir de* $(y_n + 1 + n)\ln(y_n + 1) = (1 + y_n)\ln n$*, on a* $\ln(y_n + 1) = \dfrac{1 + y_n}{y_n + 1 + n} \ln n \sim (1 + y_n)\dfrac{\ln n}{n}$ *puisque la suite* (y_n) *est bornée. Toujours parce que* (y_n) *est bornée, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(y_n + 1) = 0$*. Donc* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$*. Donc* $\ln(y_n + 1) \sim y_n$ *d'une part et* $(1 + y_n)\dfrac{\ln n}{n} \sim \dfrac{\ln n}{n}$ *d'autre part, on en conclut que* $y_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$ *ce qu'il fallait démontrer.*

Chapitre 11

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Pour bien aborder ce chapitre

Nous poursuivons dans ce chapitre le travail commencé dans le précédent et nous allons étendre la notion de limite aux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.
Après avoir introduit les notions de limite et de continuité en un point, nous réaliserons l'étude des propriétés locales des fonctions, c'est à dire des propriétés vraies dans un « voisinage suffisamment petit »d'un point donné. A l'opposée, dans la seconde partie du chapitre, nous énoncerons des théorèmes globaux, c'est à dire vrais sur un intervalle tout entier. Parmi ces théorèmes, quatre sont fondamentaux :

1. L'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle (ce théorème est équivalent au théorème des valeurs intermédiaires).
2. L'image d'un segment par une application continue est un segment. (Ce théorème est équivalent au théorème du maximum, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes).
3. Le théorème de Heine qui aura des conséquences importantes dans la suite du cours.
4. Le théorème de continuité de la bijection réciproque.

11.1 Vocabulaire

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point). On considère l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

11.1.1 L'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$

DÉFINITION 11.1 **Opérations sur les fonctions**
Dans $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, on définit les lois suivantes.

– *Addition.* Si $(f,g)\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$, on définit l'application $(f+g)\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par

$$\forall x\in \mathrm{I},\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

– *Multiplication par un réel.* Si $(\lambda,f)\in\mathbb{R}\times\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, on définit l'application $(\lambda f)\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par

$$\forall x\in \mathrm{I},\quad (\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

– *Multiplication de deux fonctions.* Si $(f,g)\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$, on définit l'application $(fg)\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par

$$\forall x\in \mathrm{I},\quad (fg)(x)=f(x)g(x)$$

– *Valeur absolue d'une fonction.* Si $f\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, on définit l'application $|f|\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par

$$\forall x\in \mathrm{I},\quad |f|(x)=|f(x)|$$

– *Maximum, Minimum de deux fonctions.* Si $(f,g)\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})^2$, on définit les deux applications $\sup(f+g)\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $\inf(f+g)\in\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par

$$\forall x\in \mathrm{I},\quad \sup(f+g)(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$
$$\forall x\in \mathrm{I},\quad \inf(f+g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

Remarque 11.1 La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ en posant, pour $(f,g)\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})^2$

$$f\leqslant g \Longleftrightarrow \forall x\in I,\quad f(x)\leqslant g(x)$$

PROPOSITION 11.1
Soit $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On a

- $|f|=\sup(f,-f)$
- $\sup(f,g)=\dfrac{f+g+|f-g|}{2}$
- $\inf(f,g)=\dfrac{f+g-|f-g|}{2}$

Remarque 11.2 En posant $\begin{cases} f^+=\sup(f,0)\\ f^-=\sup(-f,0)\end{cases}$, on vérifie que $\begin{cases} f^+=\frac{|f|+f}{2}\\ f^-=\frac{|f|-f}{2}\end{cases}$ et $\begin{cases} f=f^+-f^-\\ |f|=f^++f^-\end{cases}$

Remarque 11.3
- $(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}),+,.)$ (où « . » désigne la multiplication par un scalaire) possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- $(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}),+,\times)$ (où « $\times$ »désigne le produit entre deux fonctions) possède une structure d'anneau.
- L'élément neutre pour l'addition est la fonction identiquement nulle, $0_{\mathscr{F}(I,\mathbb{R})}:\begin{cases} I &\longrightarrow& \mathbb{R}\\ x&\longmapsto& 0\end{cases}$ et l'élément neutre pour la multiplication est la fonction constante $1_{\mathscr{F}(,\mathbb{R})}:\begin{cases} I &\longrightarrow& \mathbb{R}\\ x&\longmapsto& 1\end{cases}$.

11.1.2 Fonctions bornées

DÉFINITION 11.2 **Fonction majorée, minorée, bornée**
Soit $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est :
- *Majorée* si et seulement si $\exists M\in\mathbb{R},\quad \forall x\in I,\quad f(x)\leqslant M$.
- *Minorée* si et seulement si $\exists m\in\mathbb{R},\quad \forall x\in I,\quad f(x)\geqslant m$.
- *Bornée* si elle est majorée et minorée.

PROPOSITION 11.2 **Pour montrer qu'une fonction est bornée sur I, il suffit de la majorer, sur I, en valeur absolue**
Une fonction $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue, c'est à dire

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}\ \forall x\in I,\quad |f(x)|\leqslant\alpha$$

PROPOSITION 11.3
- Toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée (l'ensemble des fonctions bornées forme un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$).
- Tout produit de deux fonctions bornées est encore borné.

Notation 11.1
- Dire que $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est majorée revient à dire que $\{f(x)\mid x\in I\}$ est un sous ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Comme ce sous ensemble est non vide, d'après l'axiome de la borne supérieure, il possède une borne supérieure qu'on note $\sup_I f$.
- De même, si $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est minorée alors ce sous ensemble est minoré. On note $\inf_I f$ sa borne inférieure.
- Si une fonction f est bornée, puisque $|f|$ est majorée, la partie $\{|f(x)|;\ x\in I\}$ possède une borne supérieure que l'on notera $\sup_I|f|=\|f\|_\infty$.

DÉFINITION 11.3 **Extremum, Extremum local**
Soit $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et soit $a\in I$
- On dit que f admet un *maximum* en a si et seulement si $\forall x\in I,\quad f(x)\leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un *maximum local* en a si et seulement si $\exists h>0,\ \forall x\in I,\ |x-a|\leqslant h \implies \quad f(x)\leqslant f(a)$.
- On définit de manière analogue la notion de *minimum* et de *minimum local*.
- On dit que f admet un *extrémum* (respectivement un *extremum local*) si f admet un maximum (respectivement un maximum local) ou un minimum (respectivement un minimum local).

Notation 11.2 Soit $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$
- Si f possède un maximum sur I, on le note $\max_I f$
- De même, si f possède un minimum sur I, on le note $\min_I f$

11.1.3 Monotonie

DÉFINITION 11.4 **Fonction croissante, décroissante, strictement croissante, ...**
Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. On dit que :

- f est *croissante* si et seulement si $\forall x, y \in \mathrm{I},\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$.
- f est *décroissante* si et seulement si $\forall x, y \in \mathrm{I},\ x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$.
- f est *monotone* si et seulement si f est croissante ou décroissante.

On dit de plus que f est *strictement croissante* , *strictement décroissante* ou *strictement monotone* si et seulement si l'inégalité correspondante est stricte.

PROPOSITION 11.4 **Règle des signes**
Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ toutes deux monotones et telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. On peut alors définir la fonction composée $g \circ f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ qui est également monotone et l'on a la règle des signes pour la monotonie de $g \circ f$.

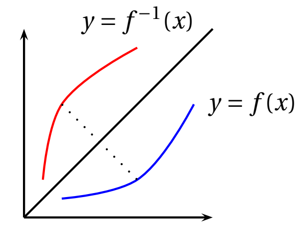
f \ g	↗	↘
↗	↗	↘
↘	↘	↗

Démonstration *Supposons par exemple f croissante sur I et g décroissante sur J. Montrons que $g \circ f$ est décroissante. Soient $(x, y) \in \mathrm{I}$ tels que $x \leqslant y$. Comme f est croissante, $f(x) \leqslant f(y)$ et puisque g est décroissante, $g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(y)\big)$ et donc $g \circ f(x) \geqslant g \circ f(x)$.*

PROPOSITION 11.5
Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ strictement monotone sur I et soit $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ alors f réalise une bijection de I sur J et sa bijection réciproque $f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ est strictement monotone de même sens que f.

Démonstration *Supposons par exemple la fonction f strictement croissante sur I. Montrons qu'alors f est injective. Soient $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tels que $f(x) = f(y)$, montrons que $x = y$ par l'absurde. Si l'on avait $x \neq y$, on aurait $x < y$ ou $y < x$, mais alors, puisque f est strictement croissante, on aurait $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$ ce qui est absurde. Puisque $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$, par définition de l'image directe d'une fonction, la fonction f est surjective de I vers J. Elle réalise donc une bijection de I vers J. Vérifions que la fonction f^{-1} est également strictement croissante. Soient $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{J}^2$ tels que $\mathrm{X} < \mathrm{Y}$. Notons $x = f^{-1}(x)$ et $y = f^{-1}(\mathrm{Y})$. Si l'on avait $y \leqslant x$, puisque f est croissante, on aurait $f(y) \leqslant f(x)$ et donc $\mathrm{Y} \leqslant \mathrm{X}$ ce qui est faux. On en déduit que $x < y$ donc que $f^{-1}(\mathrm{X}) < f^{-1}(\mathrm{Y})$.*

Remarque 11.4 Soit f une fonction bijective sur I. Le graphe de f^{-1}, dans un repère orthonormé, se déduit de celui de f par une symétrie d'axe la première bissectrice.



11.1.4 Parité périodicité

DÉFINITION 11.5 **Fonction paire, impaire**
Soit une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. On suppose que l'intervalle I est symétrique par rapport à l'origine (c'est-à-dire que si $x \in \mathrm{I}$ alors $-x \in \mathrm{I}$). On dit que

- La fonction f est *paire* si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f(-x) = f(x)$
- La fonction f est *impaire* si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I},\ f(-x) = -f(x)$.

Remarque 11.5 Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque 11.6 L'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) est stable par combinaison linéaire. C'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Les sous-espaces de $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ formés par les fonctions paires et par les fonctions impaires sont de plus supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

DÉFINITION 11.6 **Fonction périodique**
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique si et seulement s'il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall x \in I,\ f(x+T) = f(x)$. On dit que T est une période de f et que f est T-périodique.

Remarque 11.7 Soit $T > 0$. L'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire et par produit. En particulier, c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

11.1.5 Fonctions Lipschitziennes

BIO 9 Rudolf Lipschitz, né le 14 mai 1832 à Königsberg, mort le 07 octobre 1903 à Bonn

Mathématicien Allemand. Rudolf Lipschitz se caractérise par la grande diversité de ses contributions : fonctions de Bessel, séries de Fourier (il est à l'origine d'un critère pour tester leur convergence), géométrie Riemannienne, mécanique (il travailla à résoudre les équations du mouvement dans le formalisme d'Hamilton-Jacobi), théorie des nombres (il étudia les quaternions et, plus généralement, les algèbres de Clifford qu'il redécouvra et qu'il appliqua à la représentation des rotations d'un espace euclidien). Il est en particulier célèbre pour son amélioration du théorème de Cauchy quant à l'existence des solutions d'une équation différentielle. C'est lors de ce travail qu'il introduisit les fonctions qui maintenant portent son nom et que nous allons étudier dans ce paragraphe.



DÉFINITION 11.7 **Fonctions lipschitziennes**
Soit un réel $k \geqslant 0$.
– On dit qu'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est *k-lipschitzienne* sur l'intervalle I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k|x - y|$$

– On dit qu'une fonction est *lipschitzienne* sur l'intervalle I s'il existe $k \geqslant 0$ telle que f soit k-lipschitzienne.
– On note $\mathscr{L}(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur l'intervalle I.

Remarque 11.8 On comprend mieux cette définition en écrivant la propriété équivalente,

$$\exists k \geqslant 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ x \neq y,\ \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant k$$

Une fonction est lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si l'ensemble des pentes de toutes ses cordes est borné.

PROPOSITION 11.6 **Opérations sur les fonctions lipschitziennes**

1. Une combinaison linéaire de deux fonctions lipschitzienne est encore lipschitzienne. Si $f, g \in \mathscr{L}(I)$, alors $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(I)$.
2. La composée de deux fonctions lipschitziennes est encore lipschitzienne. Si $f \in \mathscr{L}(I)$ et $g \in \mathscr{L}(J)$ avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(I)$.
3. Soit $c \in I$, on note $I_1 = I \cap]-\infty, c]$ et $I_2 = I \cap [c, +\infty[$. Si f est lipschitzienne sur I_1 et sur I_2, alors elle est lipschitzienne sur I.

Démonstration

1. *Puisque f et g sont lipschitziennes sur I, il existe deux constantes $k_1, k_2 \geqslant 0$ telles que $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k_1|x - y|$ et $|g(x) - g(y)| \leqslant k_2|x - y|$. Posons $k = |\alpha|k_1 + |\beta|k_2$ et vérifions que $\alpha f + \beta g$ est k-lipschitzienne. Soit $(x, y) \in I^2$, utilisons l'inégalité triangulaire*

$$|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(y)| = \left|\alpha\big(f(x) - f(y)\big) + \beta\big(g(x) - g(y)\big)\right| \leqslant |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)| \leqslant (|\alpha|k_1 + |\beta|k_2)|x - y|$$

2. *Comme f est lipschitzienne sur I, il existe $k_1 \geqslant 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k_1|x - y|$. Puisque g est lipschitzienne sur J, il existe $k_2 \geqslant 0$ tel que $\forall (X, Y) \in J^2$, $|g(X) - g(Y)| \leqslant k_2|X - Y|$. Posons $k = k_1 k_2$ et vérifions que $g \circ f$ est k-lipschitzienne sur I. Soient $(x, y) \in I^2$, puisque $X = f(x) \in J$ et $Y = f(y) \in J$,*

$$|g \circ f(x) - g \circ f(y)| = |g(X) - g(Y)| \leqslant k_2|X - Y| = k_2|f(x) - f(y)| \leqslant k_1 k_2|x - y|$$

3. *Puisque f est lipschitzienne sur I_1, il existe $k_1 \geqslant 0$ tel que $\forall (x,y) \in I_1^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant k_1|x-y|$ et puisque f est lipschitzienne sur I_2, il existe $k_2 \geqslant 0$ tel que $\forall (x,y) \in I_2^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant k_2|x-y|$. Posons $k = \max(k_1,k_2)$ et vérifions que f est k-lipschitzienne sur I. Soient $(x,y) \in I^2$. Étudions trois cas ,*
   – *Si $x, y \in I_1$, alors $|f(x)-f(y)| \leqslant k_1|x-y| \leqslant k|x-y|$.*
   – *Si $x, y \in I_2$, alors $|f(x)-f(y)| \leqslant k_2|x-y| \leqslant k|x-y|$.*
   – *Si $x \in I_1$ et $y \in I_2$ (l'autre cas est similaire), puisque $(x,c) \in I_1^2$ et $(c,y) \in I_2^2$ et que $x < c < y$,*

$$|f(x)-f(y)| = \left|\left[f(x)-f(c)\right]+\left[f(c)-f(y)\right]\right| \leqslant |f(x)-f(c)| \leqslant k_1|c-x|+k_2|y-c|$$
$$= k_1(c-x)+k_2(y-c) \leqslant k(c-x)+k(y-c) = k(y-x) = k|y-x|$$

11.2 Limite et continuité en un point

11.2.1 Voisinage

DÉFINITION 11.8 **Point adhérent**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel x est *adhérent* à la partie A lorsque $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $|x-a| \leqslant \varepsilon$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de la partie A.

Remarque 11.9 On dira également que $+\infty$ est un point adhérent à la partie A lorsque $\forall M > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \geqslant M$ et que $-\infty$ est adhérent à la partie A lorsque $\forall m < 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \leqslant m$.

DÉFINITION 11.9 **Voisinage d'un point**
Soit V une partie de $\mathbb{R}$ et un point adhérent $a \in \overline{V}$. On dit que
– V est un *voisinage de a* si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$.
– V est un *voisinage de $+\infty$* si et seulement si il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]B, +\infty[\subset V$.
– V est un *voisinage de $-\infty$* si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, A[\subset V$.
On note V_a l'ensemble des voisinages du point a.

DÉFINITION 11.10 **Propriété vraie au voisinage d'un point**
Soient f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
– On dit que la fonction f est définie *au voisinage* du point a si et seulement s'il existe un voisinage V de a telle que $V \subset I$.
– On dit que f vérifie la propriété $\mathscr{P}$ *au voisinage* du point a si et seulement s'il existe un voisinage $V \subset I$ de a tel que la restriction de f à V vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

11.2.2 Notion de limite

DÉFINITION 11.11 ♡♡♡ **Limite d'une fonction en un point**
Soient une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, un point adhérent $a \in \overline{I}$ et un réel $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f *admet pour limite* le réel l en a lorsque
– Si $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \implies \left|f(x)-l\right| \leqslant \varepsilon$.
– Si $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant M \implies \left|f(x)-l\right| \leqslant \varepsilon$.
– Si $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant m \implies \left|f(x)-l\right| \leqslant \varepsilon$.
On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

PLAN 11.1 : Pour montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$

on utilise le plan
1. *Soit $\varepsilon > 0$.*
2. *Posons $\eta = \cdots > 0$.*
3. *Vérifions : soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$ ...on a bien $|f(x)-l| \leqslant \varepsilon$.*

Remarque 11.10 Comme pour les suites, on peut utiliser des inégalités strictes $|f(x)-l| < \varepsilon$, $|x-a| < \eta$, $x > M$ ...dans ces définitions.

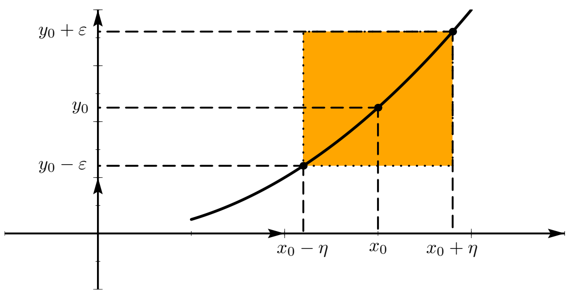


FIGURE 11.1 – Avec $\varepsilon = 0.4$

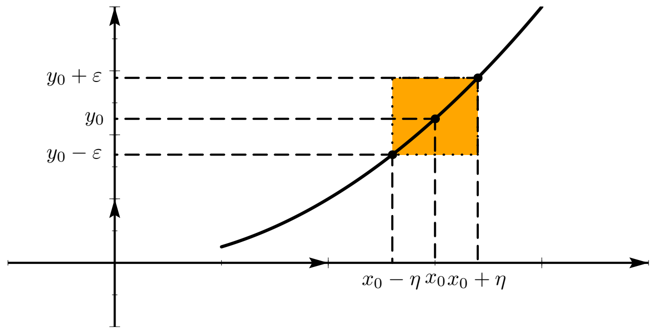


FIGURE 11.2 – Avec $\varepsilon = 0.2$

PROPOSITION 11.7 Unicité de la limite
Si f admet pour limites en $a \in \bar{I}$ les réels l et l' alors $l = l'$. On dira que l est *la* limite de f en a et on écrira $l = \lim_{x\to a} f(x)$ ou $l = \lim_a f$.

Démonstration *Démontrons le résultat par exemple lorsque $a \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $l \neq l'$, et posons $\varepsilon = |l'-l|/2 > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta_1 \implies |f(x)-l| < \varepsilon$. De même, puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l'$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta_2 \implies |f(x)-l'| < \varepsilon$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$. Puisque a est adhérent à I, il existe $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$ mais alors $|f(x)-l| < \varepsilon$ et $|f(x)-l'| < \varepsilon$ et donc*

$$|l-l'| = |(l-f(x)) + (f(x)-l)| \leqslant |f(x)-l| + |f(x)-l'| < 2\varepsilon = |l'-l|$$

ce qui est absurde.

DÉFINITION 11.12 Limite infinie
Soit une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et un point adhérent $a \in I$. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a lorsque

- Si $a \in \mathbb{R}$: $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant B$ (respectivement $f(x) \leqslant B$).
- Si $a = +\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$ $\forall x \in I$, $x \geqslant A \implies f(x) \geqslant B$ (respectivement $f(x) \leqslant B$).
- Si $a = -\infty$: $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$ $\forall x \in I$, $x \leqslant A \implies f(x) \geqslant B$ (respectivement $f(x) \leqslant B$).

On notera alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$).

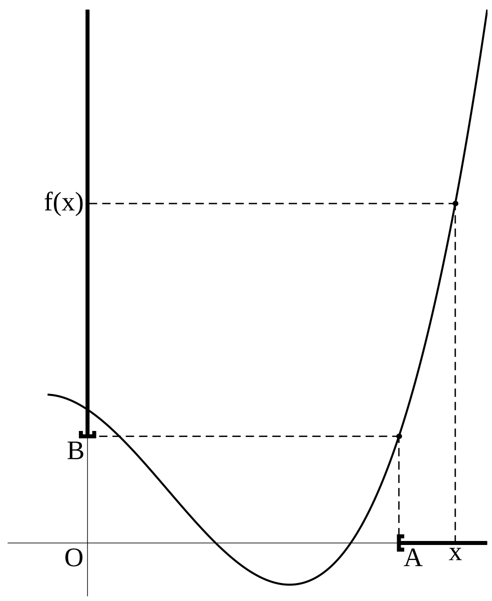


FIGURE 11.3 – $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

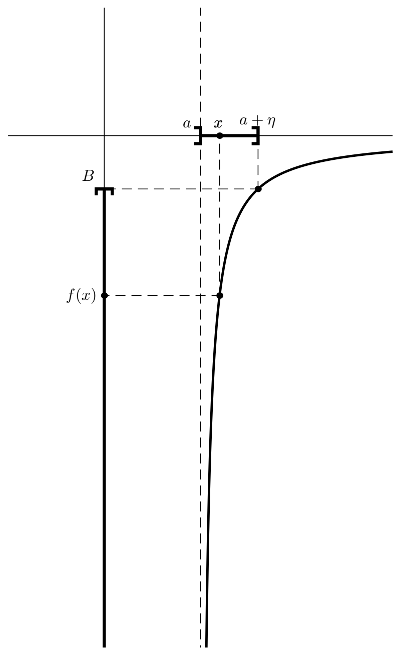


FIGURE 11.4 – $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} -\infty$

PLAN 11.2 : Pour montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

Dans le cas où a est fini, on utilise le plan

1. *Soit* $B \in \mathbb{R}$.
2. *Posons* $\eta = \cdots > 0$.
3. *Soit* $x \in I$ *tel que* $|x-a| \leqslant \eta$.
4. *On a bien* $f(x) \geqslant B$.

Pour montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$,

1. *Soit* $B \in \mathbb{R}$.
2. *Posons* $A = \dots$
3. *Soit* $x \in I$ *tel que* $x \geqslant A$.
4. *On a bien* $f(x) \leqslant B$.

Voici une formulation équivalente de la notion de limite (finie et infinie) qui ne fait intervenir que la notion de voisinages.

PROPOSITION 11.8 Définition de la limite à l'aide des voisinages
Soient $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \iff \forall W \in V_l,\ \exists V \in V_a,\ f(V \cap I) \subset W$$

Démonstration *Démontrons le résultat dans le cas où a et l sont finis.*

$\Rightarrow$ *Soit* W *un voisinage de* l*, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset W$. *Puisque* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\forall x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-l| < \varepsilon$. *Posons donc* $V =]a-\eta, a+\eta[$ *qui est un voisinage du point* a. *Soit* $y \in f(V\cap I)$, *il existe* $x \in V \cap I$ *tel que* $y = f(x)$ *et puisque* $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, *on a* $|f(x)-l| < \varepsilon$ *et donc* $y = f(x) \in W$.

$\Leftarrow$ *Soit* $\varepsilon > 0$. *Posons* $W =]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ *qui est un voisinage du point* l. *Il existe donc un voisinage* V *du point* a *tel que* $f(V\cap I) \subset W$. *D'après la définition d'un voisinage, il existe* $\eta > 0$ *tel que* $]a-\eta, a+\eta[\subset V$. *Soit alors* $x \in I$ *tel que* $|x-a| < \eta$, *puisque* $x \in V \cap I$, $f(x) \in W$ *d'où* $|f(x)-l| < \varepsilon$.

PROPOSITION 11.9 Limite finie $\implies$ localement bornée
Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction admettant une limite finie en $a \in \bar{I}$. Alors il existe un voisinage V du point a sur lequel la fonction f est bornée. a.

Démonstration *Démontrons le résultat lorsque* $a \in \mathbb{R}$. *Prenons* $\varepsilon = 1$ *dans la définition de la limite, il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\forall x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-l| \leqslant 1$. *Notons* $V =]a-\eta, a+\eta[$ *qui est un voisinage du point* a *et* $M = |l|+1$. *Pour* $x \in V \cap I$, *d'après la minoration de l'inégalité triangulaire,* $|f(x)|-|l| \leqslant |f(x)-l| \leqslant 1$ *d'où* $|f(x)| \leqslant M$.

PROPOSITION 11.10 ♡ Transformation de limite en inégalité
Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$ et deux réels $k, k' \in \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.
- (H2) $k < l < k'$.

Alors il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in V \cap I$, $k \leqslant f(x) \leqslant k'$.

Démonstration *Posons* $\varepsilon = \min(l-k, k'-l)$. *Puisque* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, *il existe un voisinage* V *du point* a *tel que* $\forall x \in V \cap I$, $|f(x)-l| \leqslant \varepsilon$ *d'où si* $x \in V \cap I$, $f(x)-l \leqslant \varepsilon$ *ce qui donne* $f(x) \leqslant l+\varepsilon \leqslant l+(k'-l) \leqslant k'$ *et aussi* $l-f(x) \leqslant \varepsilon$ *ce qui donne* $f(x) \geqslant l-\varepsilon \geqslant k$.

Pour montrer qu'une fonction tend vers l lorsque x tend vers a, on majore en pratique $|f(x)-l|$ par une fonction qui tend vers zéro.

PROPOSITION 11.11 Théorème de majoration

Soient
– une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l \in \mathbb{R}$.
– θ une fonction définie sur un voisinage V de a

On suppose que

- (H1) $\forall x \in V, \quad \left|f(x)-l\right| \leqslant \theta(x)$.
- (H2) $\theta(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Démonstration *Remarquons qu'en vertu de l'inégalité énoncée dans la première hypothèse, θ est nécessairement positive. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\theta(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, il existe un voisinage V_2 de a tel que : $\forall x \in V, \quad |\theta(x)| = \theta(x) \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in V$, en appliquant la première hypothèse : $|f(x) - l| \leqslant \theta(x) \leqslant \varepsilon$. Ce qui prouve que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.*

11.2.3 Opérations algébriques sur les limites

Les démonstrations de ce paragraphe sont typiques des démonstrations à ε d'analyse. Il est important de les étudier en détail et de les comparer aux démonstrations correspondantes sur les suites.

THÉORÈME 11.12 **Limite d'une somme**
Soient $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{I}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$ et que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2$.
Alors, $(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1 + l_2$.

Démonstration ♡ *Notre hypothèse permet de majorer $|f(x) - l_1|$ et $|g(x) - l_2|$ par ε' aussi petit que l'on veut pour x suffisamment proche de a. Faisons apparaître cette quantité sous la valeur absolue avant de majorer à l'aide de l'inégalité triangulaire :*

$$|(f+g)(x) - (l_1 + l_2)| = \left|\big(f(x) - l_1\big) + \big(g(x) - l_2\big)\right| \leqslant |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| \leqslant 2\varepsilon'$$

Il nous reste à rédiger une démonstration rigoureuse en suivant le plan de démonstration correspondant à la définition de la limite.

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta_1 \implies |f(x) - l_1| \leqslant \varepsilon'$. De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta_2 \implies |g(x) - l_2| \leqslant \varepsilon'$.

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$.

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$, on a bien

$$|(f+g)(x) - (l_1 + l_2)| = \left|\big(f(x) - l_1\big) + \big(g(x) - l_2\big)\right| \leqslant |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| \leqslant \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$$

Remarque 11.11 On montre de même que pour tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ tend vers la combinaison linéaire des limites : $(\alpha f + \beta g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha l_1 + \beta l_2$.

THÉORÈME 11.13 **Limite d'un produit**
Soient $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2$. Alors $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1 l_2$.

Démonstration ♡ *Estimons la différence en faisant apparaître notre hypothèse $|f(x) - l_1| \leqslant \varepsilon'$ et $|g(x) - l_2| \leqslant \varepsilon'$.*

$$|(fg)(x) - l_1 l_2| = \left|f(x)\left[g(x) - l_2\right] + l_2\left[f(x) - l_1\right]\right| \leqslant |f(x)||g(x) - l_2| + |l_2||f(x) - l_1|$$

Il reste $|f(x)|$ que l'on peut majorer puisque f est bornée sur un voisinage de a. Maintenant que nous avons compris pourquoi le résultat est vrai, écrivons une preuve rigoureuse qui utilise le plan de démonstration de limite.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f admet une limite finie au point a, elle est bornée sur un voisinage de a donc il existe $\eta_3 > 0$ et $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta_3 \implies |f(x)| \leqslant M$.

Notons $\varepsilon' = \varepsilon/(|l_2| + M)$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta_1 \implies |f(x) - l_1| \leqslant \varepsilon'$. Puisque $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta_2 \implies |g(x) - l_2| \leqslant \varepsilon'$.

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3) > 0$.

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$, en recopiant la majoration précédente,

$$|(fg)(x) - l_1 l_2| \leqslant |f(x)||g(x) - l_2| + |l_2||f(x) - l_1| \leqslant (M + |l_2|)\varepsilon' = \varepsilon$$

Remarquez l'ordre dans lequel les différents objets sont introduits dans la démonstration. Pour définir ε', il fallait avoir défini M auparavant.

THÉORÈME 11.14 **Limite d'une valeur absolue**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, alors $|f|(x) \xrightarrow[x\to a]{} |l|$.

Démonstration ♡

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$, grâce à la minoration de l'inégalité triangulaire,

$$\big||f(x)| - |l|\big| \leqslant |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

THÉORÈME 11.15 Limite de l'inverse
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que

(H1) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

(H2) $l \neq 0$.

Alors $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1/l$.

Démonstration ♡ *Nous savons majorer $|f(x) - l|$ par un réel $\varepsilon' > 0$ aussi petit que l'on veut sur un voisinage de a. Estimons la quantité*

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|f(x) - l|}{|f(x)||l|}$$

Il nous faut minorer $|f(x)|$ au dénominateur. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, on a vu que $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |l|$ et puisque $|l| > 0$, en notant $k = |l|/2$, puisque $k < |l|$, d'après la proposition 11.10, il existe un voisinage de a sur lequel $|f(x)| \geqslant k$ et alors $\big|1/f(x) - 1/l\big| \leqslant \varepsilon'/k|l|$. Rédigeons maintenant une preuve rigoureuse.

Soit $\varepsilon > 0$.

Notons $k = |l|/2$. Puisque $l \neq 0$, $k < |l|$ et comme $|f|(x) \xrightarrow[x\to a]{} |l|$, d'après la transformation d'une limite en inégalité, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta_1 \implies k < |f(x)|$.

Notons $\varepsilon' = k|l| > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta_2 \implies |f(x) - l| \leqslant \varepsilon'$.

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$.

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|f(x) - l|}{|f(x)||l|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{k|l|} = \varepsilon$$

Remarque 11.12 D'après les deux théorèmes précédents, si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2$ avec $l_2 \neq 0$, $(f/g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1/l_2$. On invoque souvent les théorèmes de ce paragraphe pour justifier l'existence d'une limite sous le nom de « théorèmes généraux » sur les limites.

On peut étendre les théorèmes généraux aux limites infinies. Soient $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{I}$, éventuellement infini et un réel α. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l' \in \overline{\mathbb{R}}$. Nous avons résumé dans les tableaux suivants les limites de la somme, produit et quotient des deux fonctions dans tous les cas de figure. Les cases noires correspondent à des « formes indéterminées » où l'on ne peut rien dire de général.

– Somme $f+g$

l \ l'	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	■
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l + l'$	$+\infty$
$+\infty$	■	$+\infty$	$+\infty$

– Produit fg

l \ l'	$-\infty$	$l' < 0$	$l' = 0$	$l' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	■	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	ll'	0	ll'	$-\infty$
$l = 0$	■	0	0	0	■
$l > 0$	$-\infty$	ll'	0	ll'	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	■	$+\infty$	$+\infty$

– Inverse $\dfrac{1}{f}$

l	$-\infty$	$l < 0$	$l = 0^-$	$l = 0$	$l = 0^+$	$l > 0$	$+\infty$
$\dfrac{1}{f}$	0	$1/l$	$-\infty$	■	$+\infty$	$1/l$	0

11.2.4 Continuité

DÉFINITION 11.13 ♡♡♡ **Continuité en un point**
Soit f une fonction définie sur I et $a \in \mathrm{I}$. On dit que la fonction f est *continue au point a* si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ ce qui se traduit avec des quantificateurs par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I},\ |x-a| \leqslant \eta \implies \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

THÉORÈME 11.16 ♡ **Théorèmes généraux**
Soient $f, g : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in \mathrm{I}$, alors

1. la fonction $(f+g)$ est continue au point a,
2. la fonction (fg) est continue au point a,
3. si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g est définie sur un voisinage du point a est est continue au point a.

Démonstration *(1) et (2) sont une conséquence directe des théorèmes généraux sur les limites. Vérifions (3). Puisque $|g(a)| \neq 0$ et que g est continue au point a, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} g(a)$ donc $|g(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |g(a)|$. Posons $k = |g(a)|/2$, on a $0 < k < |g(a)|$ donc d'après le théorème 11.10, il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{V}$, $0 < |g(a)/2| < |g(x)|$ et donc la fonction g ne s'annule pas sur V. La fonction f/g est donc définie sur $\mathrm{I} \cap \mathrm{V}$ et d'après les théorèmes généraux sur les limites, $(f/g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} (f/g)(a)$.*

11.2.5 Limite à gauche, à droite, continuité à gauche, à droite

DÉFINITION 11.14 **Voisinages à gauche, à droite**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est
– un *voisinage à droite de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a, a+\varepsilon] \subset \mathrm{V}$,
– un *voisinage à gauche de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a] \subset \mathrm{V}$,
– un *voisinage strict à droite de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a, a+\varepsilon] \subset \mathrm{V}$,
– un *voisinage strict à gauche de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a[\subset \mathrm{V}$,
– un *voisinage pointé de a* lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a[\cup]a, a+\varepsilon] \subset \mathrm{V}$.

DÉFINITION 11.15 **Limite à gauche, à droite**

Soit une fonction $f : \mathrm{I} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit qu'un réel l est la *limite à droite* (resp. à *gauche*) de f si il existe un voisinage strict à droite de a (resp. un voisinage strict à gauche de a) tel que la restriction de f à ce voisinage admet l pour limite en a. Lorqu'elle existe, la limite à droite de f est unique et est notée $l = \lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $l = l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x)$ ou $l = \lim_{a^+} f$. Nous noterons également $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} l$. On a des notations identiques pour la limite à gauche.

Remarque 11.13 En termes de quantificateurs, f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite à gauche en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I},\ a - \eta \leqslant x < a \implies \left|f(x) - l\right| \leqslant \varepsilon$$

Remarque 11.14 Une fonction f possède une limite en a lorsque
– f admet une limite à gauche $l_1 \in \mathbb{R}$.
– f admet une limite à droite $l_2 \in \mathbb{R}$.
– $l_1 = l_2$.

DÉFINITION 11.16 **Continuité à gauche, à droite**

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f est *continue à droite en a* (respectivement *à gauche en a*) si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} f(a)$ (respectivement $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} f(a)$.

Remarque 11.15 Soit $a \in \mathrm{I}$ un point intérieur (il existe $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset \mathrm{I}$). Une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a.

Exemple 11.3 La fonction $\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$ n'est pas continue au point 0. On a bien $\lim_{x\to 0^-} \delta(x) = \lim_{x\to 0^+} \delta(x) = 0$ mais $\delta(0) = 1$.

DÉFINITION 11.17 **Prolongement par continuité**

Soit une fonction f définie sur I et un point adhérent $a \in \bar{\mathrm{I}}$ qui n'appartient pas à I. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \mathbb{R}$. On définit alors la fonction $\tilde{f}$ sur $\tilde{\mathrm{I}} = \mathrm{I} \cup \{a\}$ par :

$$\forall x \in \tilde{\mathrm{I}} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

Cette fonction $\tilde{f}$ est continue au point a et est appelée *prolongement de f par continuité au point a*.

Exemple 11.4 Considérons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x / x \end{array} \right.$. Puisque $\sin x/x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, on peut la prolonger par continuité en une fonction définie sur $\mathbb{R}$, $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin x/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$.

11.2.6 Limites et relation d'ordre

THÉORÈME 11.17 ♡♡♡ **Passage à la limite dans les inégalités**
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \bar{\mathrm{I}}$ (éventuellement infini) et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.
- (H2) Il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{I}$, $k \leqslant f(x)$.

Alors $k \leqslant l$.

Démonstration *Écrivons la démonstration dans le cas où a est l sont finis. Supposons par l'absurde que $l < k$ et posons $\varepsilon = k - l > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{I}$, $|x - a| \leqslant \eta_1 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$. Puisque V est un voisinage du point a, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $]a - \eta_2, a + \eta_2[\subset \mathrm{V}$. Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Puisque le point a est adhérent à I, il existe $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$ et on doit avoir d'une part $k \leqslant f(x)$ et $|f(x) - l| < \varepsilon$ mais alors,*

$$k \leqslant f(x) < l + \varepsilon = l + (k - l) = k$$

ce qui est absurde.

Remarque 11.16 Le passage à la limite dans les inégalités ne conserve pas les inégalités strictes. Si sur un voisinage V de a on a $k < f(x)$, on ne peut pas garantir que $k < l$. Par exemple pour la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = x$, $\forall x \in]0,1]$, $k = 0 < f(x)$, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = l$ et $k = l = 0$.
On dispose bien sûr du théorème correspondant en remplaçant $\leqslant$ par $\geqslant$.

COROLLAIRE 11.18 **Passage à la limite dans les inégalités**
Soient deux fonctions $f, g : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}}$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$,
- (H2) $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2$,
- (H3) il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Alors $l_1 \leqslant l_2$.

Démonstration *Définissons la fonction $h = g - f$. D'après les théorèmes généraux, $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2 - l_1$. D'après l'hypothèse (3), sur un voisinage de a, on a $k = 0 \leqslant h(x)$. D'après le théorème précédent, $0 \leqslant l_2 - l_1$ d'où $l_1 \leqslant l_2$.*

THÉORÈME 11.19 ♡♡♡ **Théorème des gendarmes**
Soient α, f, β trois fonctions définies sur un voisinage V d'un point adhérent $a \in \bar{\mathrm{I}}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que

(H1) $\forall x \in \mathrm{V}, \quad \alpha(x) \leqslant f(x) \leqslant \beta(x)$

(H2) $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$ et $\beta(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$

alors la fonction f admet une limite au point a et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Démonstration *Écrivons la preuve dans le cas où a est fini.*

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$*, il existe* $\eta_1 > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathrm{I}, |x-a| \leqslant \eta_1 \implies |\alpha(x) - l| \leqslant \varepsilon$*. De même, puisque* $\beta(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$*, il existe* $\eta_2 > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathrm{I}, |x-a| \leqslant \eta_2 \implies |\beta(x) - l| \leqslant \varepsilon$*. Comme* V *est un voisinage du point a, il existe* $\eta_3 > 0$ *tel que* $]a-\eta_3, a+\eta_3[\subset \mathrm{V}$.

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$.

Soit $x \in \mathrm{I}$ *tel que* $|x-a| \leqslant \eta$*. Puisque* $|x-a| \leqslant \eta \leqslant \eta_1$, $l - \varepsilon \leqslant \alpha(x)$*. Puisque* $|x-a| \leqslant \eta \leqslant \eta_2$, $\beta(x) \leqslant l + \varepsilon$ *et puisque* $|x-a| \leqslant \eta \leqslant \eta_3$, $\alpha(x) \leqslant f(x) \leqslant \beta(x)$*. On a finalement* $l - \varepsilon \leqslant \alpha(x) \leqslant f(x) \leqslant \beta(x) \leqslant l + \varepsilon$ *d'où* $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 11.17 Le théorème des gendarmes se généralise aux limites infinies. Par exemple, si au voisinage de $a \in \bar{\mathrm{I}}$, on a

(H1) $f(x) \geqslant \alpha(x)$.

(H2) $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

Remarque 11.18 Attention, il ne faut pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les inégalités. Le second permet d'affirmer l'existence d'une limite tandis que dans le premier l'existence de cette limite est présupposée.

11.2.7 Théorème de composition des limites

THÉORÈME 11.20 **Composition de limites**
Soient deux intervalles $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Soient $a \in \bar{\mathrm{I}}$ et $b \in \bar{\mathrm{J}}$. On suppose que

(H1) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$

(H2) $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\boxed{(g \circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} l}$.

Démonstration ♡ *Écrivons la preuve dans le cas où a et l sont finis.*

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $g(y) \xrightarrow[x\to b]{} l$*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall y \in \mathrm{J}, |y-b| \leqslant \alpha \implies |g(y) - l| \leqslant \varepsilon$.

Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathrm{I}, |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x) - b| \leqslant \alpha$.

Soit $x \in \mathrm{I}$ *tel que* $|x-a| \leqslant \eta$*. Comme* $y = f(x) \in \mathrm{J}$ *et que* $|f(x) - b| \leqslant \alpha$*, on a* $\left|g\left(f(x)\right) - l\right| \leqslant \varepsilon$ *d'où* $|g \circ f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 11.19 On déduit du théorème précédent les règles de passage à la limite dans une exponentiation $f^g = e^{g \ln f}$. On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent comme limites respectives l et l'.

l \ l'	$-\infty$	$l' < 0$	$l' = 0$	$0 < l'$	$+\infty$
$l = 0$	$+\infty$	$+\infty$		0	0
$0 < l < 1$	$+\infty$	$l^{l'}$	1	$l^{l'}$	0
$l = 1$		1	1	1	
$1 < l$	0	$l^{l'}$	1	$l^{l'}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0		$+\infty$	$+\infty$

Remarque 11.20

– $\boxed{0^0 \text{ est une forme indéterminée.}}$ Par exemple,
  - Lorsque $x \to 0$, $x^x = e^{x\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ car $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
  - Lorsque $x \to 0$, $x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln x}{\ln x}} = e \xrightarrow[x\to 0]{} e$.

– $\boxed{1^{+\infty} \text{ est une forme indéterminée.}}$ Par exemple,
  - Lorsque $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} e$ car $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.
  - Lorsque $x \to +\infty$, $1^x = 1 \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1$

COROLLAIRE 11.21 **Continuité de la composée de deux applications**
Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que

(H1) f est continue en a.

(H2) g est continue en $b = f(a)$.

alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration *C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.*

11.2.8 Image d'une suite par une fonction

THÉORÈME 11.22 ♡♡♡ **Théorème de la limite séquentielle**
On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Soit une suite (u_n) de points de I et $l \in \bar{l}$. On suppose que

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

(H2) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$

alors $\boxed{f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l}$.

Démonstration *Supposons que l et a sont finis.*

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x-a| \leqslant \eta_1 \implies |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$.

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \implies |u_n - a| \leqslant \eta$.

Soit $n \geqslant N$, puisque $u_n \in I$ et $|u_n - a| \leqslant \eta$, on a $\left|f(u_n) - l\right| \leqslant \varepsilon$.

COROLLAIRE 11.23 ♡ **Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) de points de I vérifiant

(H1) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

(H2) $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$, $f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$

(H3) $l_1 \neq l_2$

alors f n'admet pas de limite au point a.

Démonstration *Par l'absurde, s'il existait $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, d'après le théorème de limite séquentielle, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et par unicité de la limite d'une suite, on aurait $l = l_1$. De même, on aurait $l = l_2$ et donc $l_1 = l_2$ ce qui est faux.*

Exemple 11.5 Considérons la fonction $f : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(1/x) \end{cases}$ et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0. Par l'absurde, supposons que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} l$. Introduisons les deux suites $(u_n) = (1/(n\pi))$ et $(v_n) = (1/(2n\pi + \pi/2)$. On calcule $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $f(u_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f(v_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et on aurait $0 = 1$ ce qui est faux.

THÉORÈME 11.24 ♡♡♡ **Caractérisation séquentielle de la continuité en un point**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. La fonction f est continue au point a si et seulement si pour *toute* suite (x_n) de points de I convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

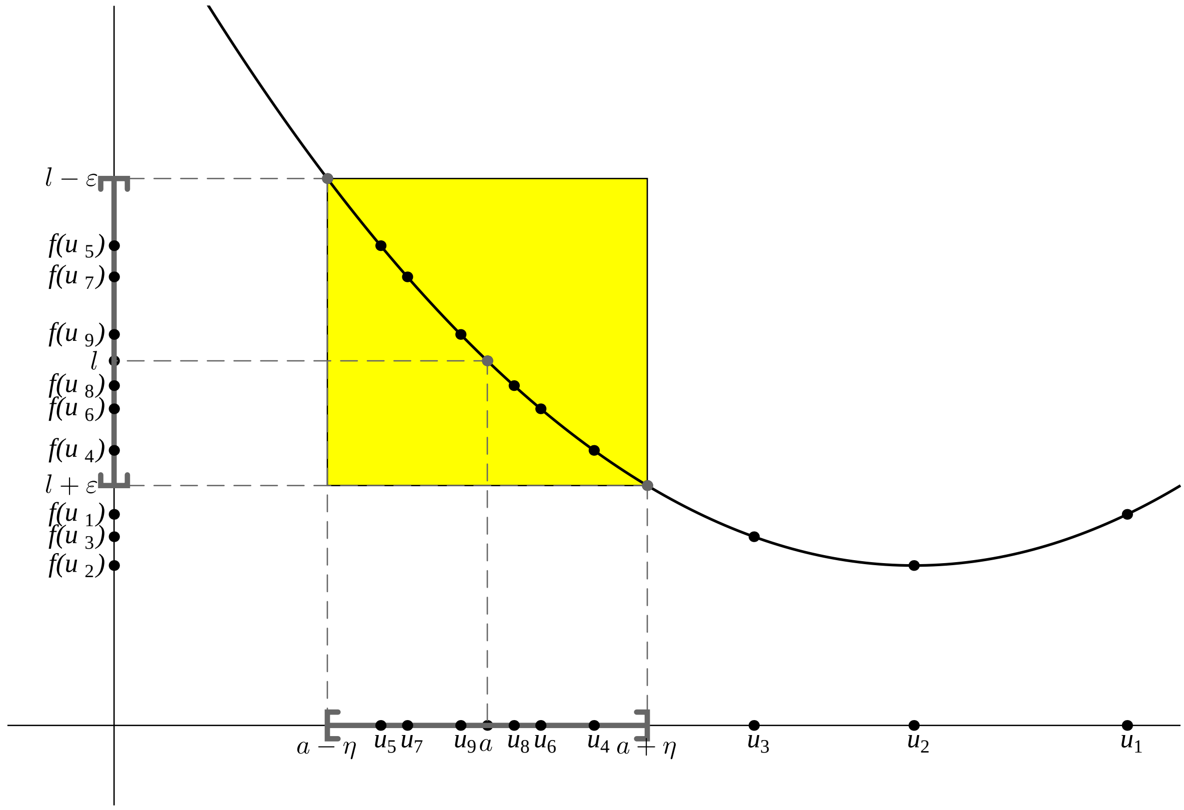


FIGURE 11.5 – Si $n \geqslant 4$ alors $|u_n - a| \leqslant \eta$ et $\left|f(u_n) - l\right| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration

$\Rightarrow$ *Soit* (x_n) *une suite de points de* I *telle que* $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. *Puisque* f *est continue au point* a, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ *et d'après le théorème de la limite séquentielle,* $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

$\Leftarrow$ *Cette démonstration peut être sautée en première lecture. Elle sera revue en deuxième année. Nous allons utiliser une technique classique en analyse : la construction d'une suite à partir d'une propriété de la forme*

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathrm{I}\ldots$$

En prenant $\eta = 1/n$, *on associe un élément* $x_n \in \mathrm{I}$ *et l'on construit ainsi une suite de points de* I. *Pour obtenir une telle propriété, nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc que la fonction* f *n'est pas continue au point* a. *La propriété* f *est continue au point* a *s'écrit à l'aide des quantificateurs :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I},\ |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

La traduction « f n'est pas continue au point a » s'écrit en niant cette phrase :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathrm{I},\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon$$

Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\boxed{\forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathrm{I},\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \varepsilon}$$

Pour tout entier n *non nul, en prenant* $\eta = 1/n$, *il existe un réel* $x_n \in \mathrm{I}$ *vérifiant* $|x_n - a| \leqslant 1/n$ *et* $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$. *On construit ainsi une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *qui converge vers* a *puisque* $|x_n - a| \leqslant 1/n$. *D'après (ii), notre suite image doit converger vers* $f(a)$: $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. *Mais alors puisque* $\forall n \geqslant 1$, $\varepsilon < |f(x_n) - f(a)|$, *par passage à la limite dans l'inégalité on devrait avoir* $\varepsilon \leqslant |f(a) - f(a)| = 0$ *ce qui est absurde.*

11.2.9 Théorème de la limite monotone

THÉORÈME 11.25 ♡♡♡ **Théorème de la limite monotone (fonction croissante)**
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $\mathrm{I} =]a,b[$.
Si une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est *croissante*, alors il y a deux possibilités.

1. Si f est *majorée*, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers b et on a alors $l = \sup_{\mathrm{I}} f$.

2. Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$.

De même,

1. Si f est minorée, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers a et $l = \inf_I f$.
2. Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

Démonstration ♡ *Posons* $\mathscr{E} = \{f(x)\,;\ x \in\,]a,b[\}$. *La partie* $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ *est non vide. Étudions les deux cas.*

1. *Si la fonction f est majorée, alors la partie* E *est majorée et d'après l'axiome de la borne supérieurs, elle possède une borne supérieure* $l \in \mathbb{R}$. *Montrons qu'alors* $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} l$.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   D'après le théorème de caractérisation de la borne supérieure (9.9), il existe $y \in \mathscr{E}$ *tel que* $l - \varepsilon \leqslant y \leqslant l$. *Puisque* $y \in \mathscr{E}$, *il existe* $x_0 \in\,]a,b[$ *tel que* $y = f(x_0)$.

   Posons $\eta = b - x_0 > 0$.

   Soit $x \in \mathrm{I}$ *tel que* $|x-b| \leqslant \eta$, *on a* $x_0 \leqslant x \leqslant b$. *Puisque la fonction f est croissante,* $f(x_0) \leqslant f(x)$ *et comme l est un majorant de* $\mathscr{E}$, *on a également* $f(x) \leqslant l$. *Finalement,* $l - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant l$ *d'où* $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.

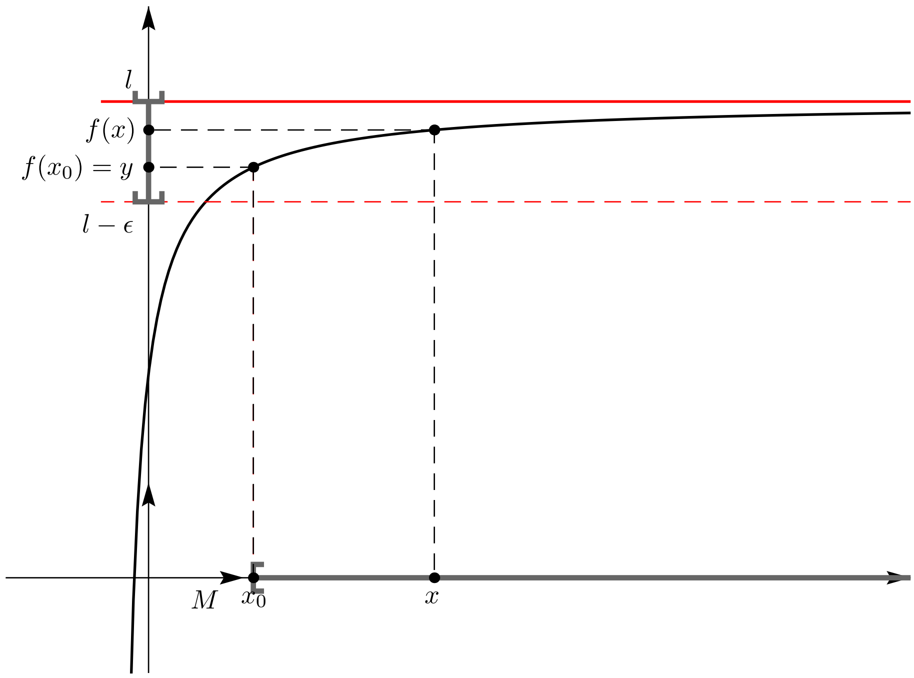


FIGURE 11.6 – $x > x_0 \implies l - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant l$

2. *Si la fonction f n'est pas majorée, montrons que* $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$.

   Soit $\mathrm{M} > 0$.

   Puisque f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in\,]a,b[$ *tel que* $\mathrm{M} \leqslant f(x_0)$.

   Posons $\eta = b - x_0 > 0$.

   Soit $x \in \mathrm{I}$ *tel que* $|x-b| \leqslant \eta$.

   Puisque $x_0 \leqslant x$ *et que f est croissante, on a* $\mathrm{M} \leqslant f(x_0) \leqslant f(x)$.

Multimédia : Comme pour les suites, l'utilisateur fixe son ε,B... et on obtient le η,A...

Remarque 11.21 Si f est croissante et si $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} l \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in]a,b[$, $f(x) \leqslant l$. En effet, d'après le théorème précédent, on est dans le premier cas et l est la borne supérieure de f donc un majorant de f. Ce résultat est bien entendu faux si la fonction n'est pas croissante.

On a le théorème correspondant pour une fonction décroissante.

THÉORÈME 11.26 ♡♡♡ **Théorème de la limite monotone (fonction décroissante)**
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $I =]a,b[$.
Si une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est *décroissante*, alors il y a deux possibilités.

1. Si f est *majorée*, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers a et on a alors $l = \sup_I f$.
2. Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

De même,

1. Si f est minorée, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers b et $l = \inf_I f$.
2. Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} -\infty$.

Remarque 11.22 Le théorème de la limite monotone permet de justifier l'*existence* d'une limite sans la connaître explicitement. C'est un théorème d'existence abstrait très important en analyse.

11.3 Étude locale d'une fonction

11.3.1 Domination, prépondérance

Définitions

DÉFINITION 11.18 **Fonction dominée par une autre**
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si et seulement si existe une fonction B définie au voisinage de a telle que

1. $f(x) = B(x)\,g(x)$ au voisinage de a
2. B est bornée au voisinage de a

On note alors $f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big)$.

DÉFINITION 11.19 **Fonction négligeable devant une autre**

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a si et seulement si il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que

1. $f(x) = \varepsilon(x)\,g(x)$ au voisinage de a
2. $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

On note alors : $f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$

Remarque 11.23 f une fonction définie au voisinage de a. Alors,
– $f(x) = \underset{x\to a}{O}(1) \iff f(x)$ est bornée au voisinage de a
– $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1) \iff f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

Propriétés

PROPOSITION 11.27 **Caractérisation pratique de** $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$
Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$. Alors

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big) \iff \text{la fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Démonstration
⇒ *Comme* $f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big)$ *il existe une fonction* B *bornée définie sur un voisinage* V' *de* a *(que l'on peut, quitte à travailler sur* $V \cap V'$ *supposer égal à* V*) et vérifiant pour tout* $x \in V'$, $f(x) = B(x)\,g(x)$. *L'application* f/g *est donc définie sur* $V \setminus \{a\}$ *et coincide avec* B *sur ce voisinage. Elle est donc bornée au voisinage de* a.
⇐ *Réciproquement, si* f/g *est bornée au voisinage de* a, *considérons un voisinage* V *de* a *sur lequel* g *ne s'annule pas sauf peut être en* a. *Si* $x \in V \setminus \{a\}$, *posons* $B(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *et posons* $B(a) = 1$. *La fonction* α *est bien définie sur* V, *et* $\forall x \in V \setminus \{a\}$, $f(x) = B(x)\,g(x)$. *De plus* B *est bornée au voisinage de* a. *Par conséquent* $f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big)$.

PROPOSITION 11.28 Caractérisation pratique de $f(x) = o(g(x))$

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$. Alors

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Démonstration

[$\Rightarrow$] *Comme $f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$, il existe une fonction ε définie sur un voisinage V' de a (que l'on peut, quitte à travailler sur $V\cap V'$, supposer égal à V) vérifiant, pour tout $x \in V$, $f(x) = \varepsilon(x)\,g(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. L'application f/g est définie sur $V\setminus\{a\}$ et $f(x)/g(x) = \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.*

[$\Leftarrow$] *Réciproquement, si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$, posons $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $x \in V\setminus\{a\}$ et posons $\varepsilon(a) = 0$. La fonction ε est bien définie sur V, et on a : $\forall x \in V\setminus\{a\}$, $f(x) = \varepsilon(x)\,g(x)$. De plus $\varepsilon(x) = f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Par conséquent $f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$.*

Opérations sur les relations de comparaison

PROPOSITION 11.29 Les relations o et O sont transitives

Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

– $\left[f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \quad\text{et}\quad g(x) = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big)\right] \implies f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big)$

– $\left[f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big) \quad\text{et}\quad g(x) = \underset{x\to a}{O}\big(h(x)\big)\right] \implies f(x) = \underset{x\to a}{O}\big(h(x)\big)$

PROPOSITION 11.30 Opérations sur les relations de comparaison

Soient f, f_1, f_2, g, g_1 et g_2 des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$:

- 1. $f_1 = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \quad\text{et}\quad f_2 = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \implies f_1+f_2 = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$

  2. $f_1 = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big) \quad\text{et}\quad f_2 = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big) \implies f_1+f_2 = \underset{x\to a}{O}\big(g(x)\big)$
- 1. $f_1 = \underset{x\to a}{o}\big(g_1(x)\big) \quad\text{et}\quad f_2 = \underset{x\to a}{o}\big(g_2(x)\big) \implies f_1 f_2 = \underset{x\to a}{o}\big(g_1 g_2(x)\big)$

  2. $f_1 = \underset{x\to a}{O}\big(g_1(x)\big) \quad\text{et}\quad f_2 = \underset{x\to a}{O}\big(g_2(x)\big) \implies f_1 f_2 = \underset{x\to a}{O}\big(g_1 g_2(x)\big)$

Démonstration *Les preuves sont laissées en exercice. Vous pouvez supposer que les fonctions ne s'annulent pas sur un voisiange du point a pour utiliser les caractérisations précédentes.*

Exemples fondamentaux

PROPOSITION 11.31 Comparaison des fonctions usuelles

Soient α, β et γ des *réels strictement positifs*.

- En $+\infty$:

$$(\ln x)^\gamma = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\alpha\right) \quad\text{et}\quad x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\beta x}\right)$$

- En 0 et en $-\infty$:

$$|\ln x|^\gamma = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad\text{et}\quad e^{\beta x} = \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

Autrement dit

Aux bornes de l'intervalle de définition,
– « l'exponentielle l'emporte sur la puissance »,
– « la puissance l'emporte sur le logarithme ».

11.3.2 Fonctions équivalentes

Définitions

DÉFINITION 11.20 Fonctions équivalentes
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si

$$f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big)$$

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Remarque 11.24 On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $f(x) = (1+\varepsilon(x))\,g(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

THÉORÈME 11.32 Caractérisation pratique de $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Comme $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, il existe une fonction α définie sur un voisinage V' de a (que l'on peut supposer égal à V, quitte à considérer le voisinage $V\cap V'$) vérifiant, pour tout $x\in V$, $f(x) = \alpha(x)\,g(x)$ et telle que $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. L'application f/g est définie sur $V\setminus\{a\}$ et $f(x)/g(x) = \alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$, pour tout $x\in V\setminus\{a\}$, posons $\alpha(x) = f(x)/g(x)$ et $\alpha(a) = 1$. On définit ainsi une fonction α sur le voisinage V avec $\forall x\in V\setminus\{a\},\ f(x) = \alpha(x)\,g(x)$. De plus, $\alpha(x) = f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ donc $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.*

Propriétés

PROPOSITION 11.33 Un équivalent donne localement le signe
Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont de même signe.

Démonstration *Comme $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, il existe une fonction α définie sur un voisinage V' de a vérifiant $\forall x\in V',\quad f(x) = \alpha(x)\,g(x)$ avec $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. Puisque $k = 1/2 < 1$, d'après la transformation de limite en inégalité (théorème 11.10), il existe un voisinage V' de a sur lequel $\alpha(x) \geqslant 1/2 > 0$ et alors $\forall x\in V$, $f(x)$ est de même signe que $g(x)$.*

PROPOSITION 11.34 Une fonction est équivalente à sa limite si celle-ci est non nulle et finie
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Alors

$$\Big[f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \quad \text{et} \quad l \neq 0\Big] \implies f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$$

Démonstration *Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, d'après les théorèmes généraux, $f(x)/l \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ce qui signifie que la fonction f est équivalente à la fonction constante égale à l au voisinage du point a.*

PROPOSITION 11.35 Deux fonctions équivalentes ont même limite
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Alors :

$$\Big[f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l\Big] \implies f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

Démonstration *Puisque $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, il existe un voisinage V du point a et une fonction α définie sur ce voisinage vérifiant $\forall x\in V$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$ et $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. D'après les théorèmes généraux sur les limites, $f(x) = \alpha(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.*

Remarque 11.25 Attention, écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ signifie que la fonction f est nulle sur un voisinage de a, ce qui est possible, mais en général, lorsque vous écrivez 0 à droite d'un équivalent, vous commetez une erreur !

PROPOSITION 11.36
Soient $a \in I$ et une fonction f définie sur I. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors, au voisinage de a,

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

Démonstration *Comme f est dérivable en a, son taux d'accroissement en a vérifie $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$. Par conséquent, comme $f'(a)\neq 0$, par opération sur les limites, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)(x-a)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ce qui montre que $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.*

PROPOSITION 11.37
Soient u une fonction définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de $b\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

H1 $u(t) \xrightarrow[t\to a]{} b$

H2 $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$

alors $f(u(t)) \underset{t\to a}{\sim} g(u(t))$.

Démonstration *Comme $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, il existe une fonction α définie sur un voisinage V' de b telle que $\forall x\in V'$, $f(x)=\alpha(x)\,g(x)$ et $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. Soit V un voisinage de a tel que $\forall t\in V$, $u(t)\in V'$. On a alors $\forall t\in V$, $f(u(t))=\alpha(u(t))\,g(u(t))$. De plus, comme $u(t) \xrightarrow[t\to a]{} b$ et $\alpha(x) \xrightarrow[x\to b]{} 1$, d'après le théorème de composition de limites (11.20 page 425), $\alpha(u(t)) \xrightarrow[t\to a]{} 1$ ce qui montre que $f(u(t)) \underset{t\to a}{\sim} g(u(t))$.*

THÉORÈME 11.38 ♡ **Opérations sur les équivalents**
Soient $f, g, \tilde f, \tilde g$ des fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ telles que

H1 $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

H2 $\tilde f(x) \underset{x\to a}{\sim} \tilde g(x)$.

Alors

1. $\boxed{f(x)g(x) \underset{x\to a}{\sim} \tilde f(x)\tilde g(x)}$.
2. Si la fonction $\tilde f$ ne s'annule pas sur un voisinage du point a, il en est de même pour la fonction $\tilde g$ et alors $\boxed{\dfrac{f(x)}{\tilde f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{\tilde g(x)}}$.
3. Pour tout réel s, si les fonctions f et g sont strictement positives au voisinage du point a, $\boxed{[f(x)]^s \underset{x\to a}{\sim} [g(x)]^s}$.

Démonstration *Puisque $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\tilde f(x) \underset{x\to a}{\sim} \tilde g(x)$, il existe un voisinage V du point a et deux fonctions α, $\tilde\alpha$ définies sur ce voisinage vérifiant $f(x)=\alpha(x)g(x)$, $\tilde f(x)=\tilde\alpha(x)\tilde g(x)$ avec $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et $\tilde\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. Nous pouvons alors écrire*

1. *$f(x)g(x)=\alpha(x)\tilde\alpha(x)\tilde f(x)\tilde g(x)$ avec $\alpha(x)\tilde\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ce qui montre que $f(x)\tilde f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\tilde g(x)$.*
2. *Puisque $\tilde\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$, il existe un voisinage V' du point a sur lequel les fonctions $\tilde\alpha$ et $\tilde f$ ne s'annulent pas. Puisque $\tilde f(x) = \tilde\alpha(x)\ \tilde g(x)$, la fonction $\tilde g$ ne s'annule pas sur V' et $\forall x\in V'$, $\dfrac{f(x)}{\tilde f(x)} = \dfrac{\alpha(x)}{\tilde\alpha(x)}\dfrac{g(x)}{\tilde g(x)}$. D'après les théorèmes généraux, $\alpha(x)/\tilde\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ce qui prouve le résultat.*
3. *On peut écrire sur un voisinge du point a, $[f(x)]^s = [\alpha(x)]^s\,[g(x)]^s$ et puisque $y^s \xrightarrow[y\to 1]{} 1$, par composition de limites, $[\alpha(x)]^s \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ce qui prouve le résultat.*

⚠ *Attention 11.6* *Il ne faut jamais*

1. Sommer des équivalents.
2. Composer des équivalents. En particulier, il ne faut pas :
   (a) Prendre des logarithmes d'équivalents.
   (b) Prendre des exponentielles d'équivalents.

Exemple 11.7 Par exemple $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$ mais e^x et e^{x+1} ne sont pas équivalents quand x tends vers $+\infty$ puisque $\dfrac{e^x}{e^{x+1}} = e^{x-x-1} = e^{-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{-1}\neq 1$.

PROPOSITION 11.39 **Équivalents classiques en** 0

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \tanh x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{argsh} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{argth} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \arccos x - \frac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Démonstration *Les dix premières se démontrent en utilisant un taux d'accroissement, ou en utilisant la proposition 11.36. Pour la onzième,*

$$\cos x - 1 = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -2\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2}$$

d'après l'équivalent usuel du sinus et par puissance d'équivalent. La douzième se prouve de même. Les deux dernières se prouvent encore en utilisant un taux d'accroissement. Pour l'avant dernière, on peut aussi utiliser la formule $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos x + \arcsin x = \pi/2$ *et l'équivalent usuel d'arcsinus. La dernière peut encore se démontrer en passant en* $\exp - \ln$ *et en utilisant les équivalents usuels pour* exp *et* ln..

Remarque 11.26 Attention, n'écrivez pas $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 - x^2/2$. Le résultat est vrai, mais on a plus simplement $\cos(x) \underset{x\to x}{\sim} 1$! Il est conseillé de lire l'appendice C.4.1 page 1204 pour comprendre ce qu'est un équivalent.

De manière plus générale,

PROPOSITION 11.40
Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, au voisinage du point a

$$\ln\big(1+f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \sin\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \tan\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

$$\cos\big(f(x)\big) - 1 \underset{x\to a}{\sim} -\frac{(f(x))^2}{2} \qquad e^{f(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \big(1+f(x)\big)^\alpha - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha f(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Démonstration *Il suffit de combiner les résultats précédents et la proposition 11.37.*

Une fois que vous avez assimilé les définitions de ce paragraphe, il est conseillé de lire l'appendice C.4 page 1204 pour apprendre à utiliser *en pratique* les équivalents.

11.4 Propriétés globales des fonctions continues

11.4.1 Définitions et propriétés de base

Définitions

DÉFINITION 11.21 **Fonction continue sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est *continue sur un intervalle* I si et seulement si la fonction f est continue en chaque point de I. Cette définition s'écrit avec les quantificateurs sous la forme suivante :

$$\forall a \in \mathrm{I}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{I} \quad |x-a| \leqslant \eta \implies \big|f(x) - f(a)\big| \leqslant \varepsilon$$

On note $\mathscr{C}(\mathrm{I})$ (ou $\mathscr{C}^0(\mathrm{I})$, $\mathscr{C}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle I.

Remarque 11.27
– La continuité en un point est une notion *locale*.
– La continuité sur un intervalle est une notion *globable*.
– Intuitivement, « une fonction est continue sur un intervalle si et seulement si on peut tracer son graphe sans lever le crayon ».

THÉORÈME 11.41 **Une fonction lipschitzienne est continue**
Si une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur l'intervalle I, alors f est continue sur l'intervalle I.

Démonstration *Puisque f est lipschitzienne sur l'intervalle* I*, il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$. Soit $a \in I$. Montrons que la fonction f est continue au point a.*

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\eta = \varepsilon / k > 0$.

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(a)| \leqslant k|x-a| \leqslant k\eta = \varepsilon$

Opérations sur les fonctions continues

THÉORÈME 11.42 **Théorème d'opérations sur les fonctions continues**
- Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.
- Une combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I.
- La fonction produit de deux fonctions continues sur I est continue sur I.
- Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Démonstration *Les affirmations précédentes sont vraies en chaque point de* I *d'après les théorèmes généraux donc elles sont vraies sur* I.

Remarque 11.28 $\mathscr{C}(I)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

THÉORÈME 11.43 **La composée de fonctions continues est continue**
Soient deux intervalles I et J. Soit une application f continue sur I telle que $f(I) \subset J$ et g une application continue sur J. Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration *la proposition est vraie en chaque point de* I *donc elle est vraie sur* I.

11.4.2 Les théorèmes fondamentaux

Le théorème des valeurs intermédiaires

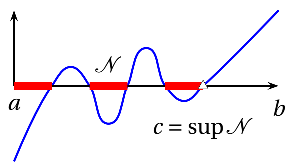
THÉORÈME 11.44 ♡♡♡ **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)**
Soient I un *intervalle* de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Soient deux points $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$. On suppose que

(H1) la fonction f est continue sur l'*intervalle* I.

(H2) $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.

Alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $\boxed{f(c) = 0}$.

Démonstration *Puisque* I *est un intervalle et que $a, b \in I$, on a $[a,b] \subset I$. Notons $\mathscr{N} = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant 0\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}$. Puisque $a \in \mathscr{N}$, cette partie est non vide. De plus elle est majorée par b donc elle admet une borne supérieure $c = \sup \mathscr{N}$. Montrons que $f(c) = 0$.*



– *D'après la caractérisation de la borne supérieure,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathcal{N},\ c - \varepsilon \leqslant x \leqslant c$$

En prenant pour tout entier n non nul $\varepsilon = 1/n$, il existe donc un réel $x_n \in [c - 1/n, c]$ vérifiant $f(x_n) \leqslant 0$. On construit ainsi une suite de points de $[a,b]$ vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ et $f(x_n) \leqslant 0$. Puisque la fonction f est continue au point c, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et par passage à la limite dans les inégalités, on a $f(c) \leqslant 0$.

– *Puisque c est un majorant de E, $\forall x \in]c,b]$, $f(x) > 0$ et puisque f est continue à droite au point c, $f(x) \xrightarrow[x\to c^+]{} f(c)$. Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que $f(c) \geqslant 0$.*

En conclusion, $f(c) = 0$.

Remarque 11.29 Le résultat est faux si la fonction est définie sur un ensemble A qui n'est pas un *intervalle*. Par exemple, la fonction f définie sur $[-2,-1] \cup [1,2]$ par $f(x) = -1$ si $x \in [-2,-1]$ et $f(x) = 1$ lorsque $x \in [1,2]$ est continue en tout point de A, vérifie la deuxième hypothèse, puisque $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$ mais ne s'annule pas sur A.

Remarque 11.30 Plus généralement, on peut remplacer l'hypothèse H1 par $f(a)f(b) \leqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires est (comme le théorème de la limite monotone) un théorème qui permet de montrer l'*existence* d'objets de façon abstraite sans préciser leur valeur. On utilise pour cela une fonction auxiliaire bien choisie et on applique le TVI à cette fonction.

Exemple 11.8 Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ une fonction continue. Cette fonction admet au moins un point fixe $x_0 \in [0,1]$. Définissons la fonction auxiliaire $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$. D'après les théorèmes généraux, la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$. Puisque la fonction est à valeurs dans $[0,1]$, $f(0) \geqslant 0$ et $f(1) \leqslant 1$ d'où $g(0) \leqslant 0$ et $g(1) \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, c'est à dire $f(x_0) = x_0$.

Exemple 11.9 Soit $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction polynômiale de degré impair. Vérifions qu'elle s'annule au moins une fois. En notant $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots + a_0$, avec $a_{2n+1} \neq 0$, on obtient un équivalent simple de la fonction au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_{2n+1}x^{2n+1}$. Si $a_{2n+1} > 0$, $P(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. La transformation de limite en inégalités donne l'existence d'un réel $a < 0$ tel que $P(a) \leqslant 0$ et d'un réel $b > 0$ tel que $P(b) \geqslant 0$. Puisque P est une fonction continue sur $[a,b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $P(c) = 0$.

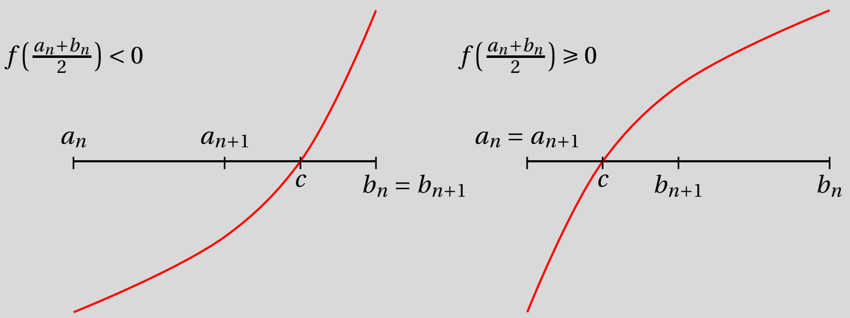
THÉORÈME 11.45 **Recherche d'un zéro par dichotomie**

On considère une fonction continue $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$. On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant 0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant 0 \\ b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Alors les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers une même limite c qui est un zéro de la fonction f. Si l'on choisit de prendre a_n comme valeur approchée de c, on obtient la majoration de l'erreur

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |c - a_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n}$$



Démonstration *On vérifie par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, que $a_n \leqslant b_n$ et que $(b_n - a_n) = (b-a)/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Les deux suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et convergent vers la même limite $c \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction f est continue au point c, d'après le théorème de la limite séquentielle, $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. On vérifie également par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$. Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient alors que $f(c) \leqslant 0$ et $f(c) \geqslant 0$ ce qui montre que $f(c) = 0$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, $|c - a_n| \leqslant (b_n - a_n) \leqslant (b-a)/2^n$ ce qui montre que a_n est une valeur approchée par défaut de c à $(b-a)/2^n$ près. De même, b_n est une valeur approchée par exces de c à $(b-a)/2^n$ près.*

Remarque 11.31 La preuve précédente fournit une autre démonstration plus constructive du théorème des valeurs intermédiaires. Elle fournit un algorithme simple et efficace qui permet de déterminer une valeur approchée d'un zéro de la fonction f.

MAPLE

```
dicho := proc(f, a, b, eps)
   # f : une fonction définie sur le segment [a,b]
   # eps : une précision souhaitée
   # On suppose f continue sur [a,b] avec f(a) <= 0 et f(b) >=0
   local A, B, C;
   A := a;
   B := b;
   C := (A + B)/2;
   while (B-A) > eps do
   # tant que la précision souhaitée n'est pas atteinte, calculer les termes suivants
      if f(C) < 0 then
         A := C;
      else
         B := C;
      fi;
      C := (A+B)/2;
      # après le n-ième passage dans cette boucle, A=a_n, B=b_n et C=(a_n+b_n)/2
   od;
   # on sort de la boucle donc (B-A) <= eps
   C; #C est une valeur approchée de c à eps près
 end;

f := x -> exp(x) - 2; dicho(f, -1., 2., 0.0001);
```

Multimédia : voir les segments de taille moitié qui encadrent le zéro au cours du temps

On dispose d'un énoncé équivalent du théorème des valeurs intermédiaires qui justifie son nom.

THÉORÈME 11.46 **Théorème des valeurs intermédiaires (deuxième forme)**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que :

(H1) f est continue sur $[a, b]$.

alors $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ quand x parcourt $[a, b]$. Autrement dit, si $y_0 \in \left[f(a), f(b)\right]$, alors il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $\boxed{f(x_0) = y_0}$.

Démonstration *Supposons pour fixer les idées que $f(a) \leqslant f(b)$, alors $f(a) \leqslant y_0 \leqslant f(b)$. Définissons la fonction auxiliaire*

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - y_0 \end{array} \right.$$

Elle est continue sur $[a, b]$ d'après les théorèmes généraux et $g(a) = f(a) - y_0 \leqslant 0$, $g(b) = f(b) - y_0 \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$ et alors $f(x_0) = y_0$.

COROLLAIRE 11.47
Image d'un intervalle par une application continue L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Démonstration *On suppose que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et que f est continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle de I. Nous allons montrer que $f(\mathrm{J})$ est encore un intervalle de $\mathbb{R}$. Cela revient à prouver que pour tout $y_1, y_2 \in f(\mathrm{J})$, on a $\left[y_1, y_2\right] \subset f(\mathrm{J})$. Soit $y_1, y_2 \in f(\mathrm{J})$. Il existe $x_1, x_2 \in \mathrm{J}$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Soit $y \in \left[y_1, y_2\right]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (deuxième forme), il existe $x \in [x_1, x_2]$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $y \in f(\mathrm{I})$. On prouve ainsi que $\left[y_1, y_2\right] \subset f(\mathrm{J})$.*

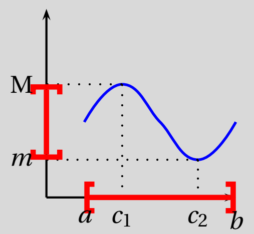
Fonction continue sur un segment

Le théorème suivant est fondamental en analyse.

THÉORÈME 11.48 ♡♡♡ **Théorème du maximum : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes**

Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur un *segment*. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes

$$\exists (c_1, c_2) \in [a,b]^2 : \quad f(c_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } f(c_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$



Démonstration ♡ *La preuve utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il nous faut donc construire des suites. Pour cela nous allons utiliser la même technique que dans la démonstration du théorème 11.24 page 426.*

– *Montrons que la fonction f est majorée :*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [a,b], \ f(x) \leqslant M$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que la fonction n'est pas majorée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in [a,b], \ f(x) > M$$

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. En prenant $M = n$, il existe $x_n \in [a,b]$ vérifiant $f(x_n) > n$. On construit ainsi une suite de points (x_n) du segment $[a,b]$ telle que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Puisque la suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (10.30 page 366), il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $c \in \mathbb{R}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant x_n \leqslant b$, par passage à la limite dans les inégalités, $a \leqslant c \leqslant b$. Mais la fonction f est continue au point c donc d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. On obtient une contradiction puisque $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

– *Définissons la partie de $\mathbb{R}$, $\mathscr{F} = \{f(x);\ x \in [a,b]\}$. Elle est non vide puisque $f(a) \in \mathscr{F}$. De plus, elle est majorée puisqu'on a vu que f était majorée. Elle admet donc une borne supérieure, $M = \sup \mathscr{F} = \sup_I f$. Montrons que cette borne supérieure est atteinte.*

D'après la caractérisation de la borne supérieure,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in [a,b], \ \text{ tel que } \quad M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M$$

Pour tout entier n non nul, en prenant $\varepsilon = 1/n$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant M$$

La suite (x_n) étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $c_1 \in [a,b]$. Puisque la fonction f est continue au point c_1, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c_1)$. On a d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad M - \frac{1}{n} \leqslant M - \frac{1}{\varphi(n)} \leqslant f(x_{\varphi(n)}) \leqslant M$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient que $M \leqslant f(c_1) \leqslant M$ d'où $M = f(c_1)$.

– *Pour montrer que f possède une borne inférieure et que cette borne inférieure est atteinte, on utilise les mêmes techniques. Vérifiez que vous avez bien compris la démonstration écrivant cette preuve.*

Remarque 11.32 En d'autres termes, une fonction continue sur un segment possède un maximum et un minimum :

$$\sup_{x\in I} f(x) = \max_{x\in I} f(x) = f(c_1) \qquad \inf_{x\in I} f(x) = \min_{x\in I} f(x) = f(c_2)$$

On se sert souvent de ce théorème en analyse sous la forme suivante. Si f est une fonction continue sur un segment, la fonction $|f|$ est également continue sur ce segment donc elle possède un maximum. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$ ce maximum et il est atteint. Il existe $c \in [a,b]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(c)|$.

COROLLAIRE 11.49 **Image d'un segment par une application continue**

L'image d'un segment $[a,b]$ par une application continue est un segment et si $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$ alors $f([a,b]) = [m, M]$.

Démonstration *Puisque* M *est un majorant de* $f([a,b])$ *et* m *un minorant de* $f([a,b])$*, on a* $f([a,b]) \subset [m,\mathrm{M}]$*. Montrons que* $[m,\mathrm{M}] \subset f([a,b])$*. Soit* $y \in [m,\mathrm{M}]$*. Comme les bornes sont atteintes, il existe* $c_1, c_2 \in [a,b]$ *tel que* $\mathrm{M} = f(c_1)$ *et* $m = f(c_2)$*. Un segment est un intervalle, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (deuxième forme), puisque* $y \in [f(c_1), f(c_2)]$*, il existe* $x \in [c_1, c_2] \subset [a,b]$ *tel que* $y = f(x)$ *ce qui montre que* $y \in f([a,b])$*.*

Fonctions uniformément continues

DÉFINITION 11.22 ♡♡ **Fonction uniformément continue**
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est *uniformément continue* sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Le nombre η est indépendant des réels (x,y) et s'appelle un *module d'uniforme continuité*.

PROPOSITION 11.50 **Lipschitz ⟹ uniformément continue ⟹ continue**
Soit $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

$$f \text{ lipschitzienne sur} \mathrm{I} \implies f \text{ uniformément continue sur I} \implies f \text{ continue sur I}$$

Démonstration

1. *Supposons* f *lispchitzienne sur* I*, il existe* $k \geqslant 0$ *tel que* $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$*. Montrons que* f *est uniformément continue sur* I*.*
   Soit $\varepsilon > 0$*.*
   Posons $\eta = \varepsilon / k > 0$*.*
   Soient $(x,y) \in \mathrm{I}^2$ *tels que* $|x-y| \leqslant \eta$*, on a*
   $$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| \leqslant k\eta = \varepsilon$$
2. *Supposons* f *uniformément continue sur* I *et montrons que* f *est continue sur* I*. Soit* $a \in \mathrm{I}$*, montrons que la fonction* f *est continue au point* a*.*
   Soit $\varepsilon > 0$*,*
   Puisque f *est uniformément continue sur* I*, il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2$, $|x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$*.*
   Soit $x \in \mathrm{I}$ *tel que* $|x-a| \leqslant \eta$*, on a bien* $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$*.*

Le théorème suivant est un résultat important d'analyse.

THÉORÈME 11.51 ♡♡♡ **Théorème de Heine**
Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration *Nous allons contstruire des suites et utiliser le théorème de Bolzano-Weirstrass. Nous devons montrer que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que cette propriété est fausse :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in [a,b]^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in [a,b]^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$*, en prenant* $\eta = 1/n$*, on peut trouver deux réels* $(x_n, y_n) \in [a,b]^2$ *vérifiant* $|x_n - y_n| \leqslant 1/n$ *et* $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$*. On construit ainsi deux suites* (x_n) *et* (y_n) *de points du segment* $[a,b]$*. Puisque la suite* (x_n) *est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente,* $(x_{\varphi(n)})$ *vers une limite* $c \in [a,b]$*. Puisque*

$$|y_{\varphi(n)} - c| = \left|\left(y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right) + \left(x_{\varphi(n)} - c\right)\right| \leqslant \left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| + \left|x_{\varphi(n)} - c\right| \leqslant \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \leqslant \frac{1}{n} + |x_{\varphi(n)} - c| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

la suite $(y_{\varphi(n)})$ *converge également vers la même limite* c*. Puisque la fonction* f *est continue au point* c*, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité,* $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ *et* $f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$*. Mais comme* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon < \left|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right|$*, par passage à la limite dans les inégalités, on obtient que* $0 < \varepsilon \leqslant \left|f(c) - f(c)\right| = 0$ *ce qui est absurde.*

Théorème de la bijection

THÉORÈME 11.52 ♡♡♡ **Théorème de la bijection**
Soit une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On note $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. On suppose que la fonction f est

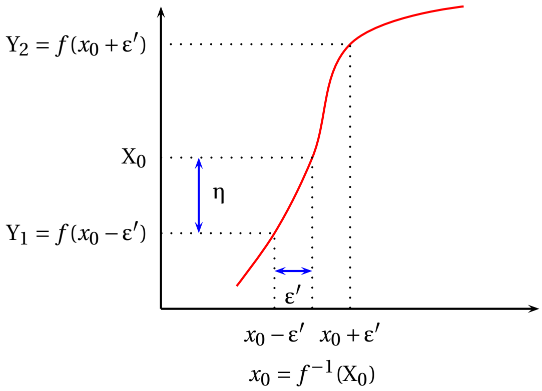
(H1) continue sur I,

(H2) strictement monotone sur I.

Alors,

1. J est un intervalle,
2. f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J,
3. la bijection réciproque $f^{-1} : \mathrm{J} \mapsto \mathrm{I}$ est une fonction continue sur I, strictement monotone de même sens que f.

Démonstration *D'après le théorème 11.47 page 436, on sait déjà que* J *est un intervalle. D'après le théorème 11.5 page 416, on sait déjà que f est bijective, strictement monotone de même sens que f. Il nous reste à montrer que la bijection réciproque f^{-1} est continue sur* J*. Soit $\mathrm{X}_0 \in \mathrm{J}$, montrons que f^{-1} est continue au point X_0. Notons $x_0 = f^{-1}(\mathrm{X}_0)$. Pour simplifier la preuve, nous supposerons que f est strictement croissante sur* I *et que x_0 est un point intérieur à* I *(le cas où x_0 est une borne de l'intervalle se traite de même).*



Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque x_0 est un point intérieur de I*, il existe un réel ε', $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon$ tel que $[x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'] \subset \mathrm{I}$. Posons $\mathrm{Y}_1 = f(x_0 - \varepsilon')$ et $\mathrm{Y}_2 = f(x_0 + \varepsilon')$. Puisque f est strictement croissante sur* I*, $\mathrm{Y}_1 < \mathrm{X}_0 < \mathrm{Y}_2$. Posons alors $\eta = \min(\mathrm{X}_0 - \mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2 - \mathrm{X}_0) > 0$.*

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{J}$ tel que $|\mathrm{X} - \mathrm{X}_0| \leqslant \eta$, on a $\mathrm{Y}_1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}_2$ et puisque f^{-1} est croissante sur J*, $f^{-1}(\mathrm{Y}_1) \leqslant f^{-1}(\mathrm{X}) \leqslant f^{-1}(\mathrm{Y}_2)$, c'est à dire $f^{-1}(\mathrm{X}_0) - \varepsilon' \leqslant f^{-1}(\mathrm{X}) \leqslant f^{-1}(\mathrm{X}_0) + \varepsilon'$ ou encore $|f^{-1}(\mathrm{X}) - f^{-1}(\mathrm{X}_0)| \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon$.*

En résumé

Les parties C.1 page 1189 sur les techniques de majoration-minoration et la partie C.4 page 1204 sur les équivalents dans l'annexe C sont, comme dans le chapitre précédent, toujours d'actualité.
Il faudra être capable de distinguer une propriété locale (vraie dans le voisinage d'un point) d'une propriété globale (vraie sur un intervalle).
Les énoncés suivants devront être parfaitement connus et quand on les utilisera, on vérifiera avec rigueur leurs hypothèses :

1. Théorème des gendarmes.
2. Théorème de la limite monotone.
3. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
4. Théorème d'opérations sur les limites.
5. Théorème d'opérations sur les fonctions continues.
6. Équivalents usuels, relations de comparaison.
7. Théorèmes des valeurs intermédiaires (sous ses différentes formes).
8. Théorème du maximum.
9. Théorème de Heine.
10. Théorème de continuité de la bijection réciproque.

11.5 Exercices

11.5.1 Avec les définitions

Exercice 11.1 ♡

En utilisant la définition de la notion de limite en un point, montrer que :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
2. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
3. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$
4. $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution :

1. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On cherche* $m \in \mathbb{R}$ *tel que si* $x \in]m, +\infty[$ *alors on a :* $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$. *Cette inéquation est équivalente à* $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. *En posant* $m = \frac{1}{\varepsilon}$, *on a bien pour tout* $x \in]m, +\infty[$: $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. *Voilà qui prouve que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
2. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$. *On peut supposer que* $\mathrm{M} \geqslant 1$. *On cherche* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *si* $|x - 0| = |x| = x < \eta$ *alors* $\frac{1}{x} > \mathrm{M}$. *Cette inéquation est équivalente à* $\frac{1}{\mathrm{M}} > x$. *Il suffit alors de poser* $\eta = \frac{1}{\mathrm{M}}$. *On montre ainsi que* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
3. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*$. *On cherche* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que pour tout* $x > 0$, *si* $1 - x < \eta$ *alors* $\frac{1}{1-x^2} > \mathrm{M}$. *On a :*
$$\frac{1}{1-x^2} > \mathrm{M} \iff x \geqslant \sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{M}}} \iff 1 - x \leqslant 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{M}}}.$$
Avec $\eta = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{M}}}$, *on répond au problème posé. Ainsi* $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$.
4. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On cherche* $\eta \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, *si* $|x - a| < \eta$ *alors* $\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \varepsilon$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, *tel que* $x > a$ *on a :*
$$\sqrt{x} - \sqrt{a} < \varepsilon \iff x < \left(\varepsilon + \sqrt{a}\right)^2 \iff x - a < \left(\varepsilon + \sqrt{a}\right)^2 - a = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a}.$$
Si $x < a$, *on montre que :*
$$\sqrt{a} - \sqrt{x} < \varepsilon \iff a - x < 2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2.$$
Par suite, avec $\eta = \min\left\{2\varepsilon\sqrt{a} + \varepsilon^2, 2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2\right\}$ *(il faut au départ avoir choisi* ε *suffisamment petit pour que* $\sqrt{a} - \varepsilon > 0$*), on répond au problème posé et on a bien :* $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ *avec* $a \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 11.2 ♡♡

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *admettant une limite finie* l *lorsque* $x \to +\infty$. *Montrez que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} > 0 : \forall (x, x') \in [\mathrm{A}, +\infty[,\ |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$$

Solution : *Soit* $\varepsilon > 0$. *Posons* $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/2 > 0$. *En utilisant la définition de* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$, *on peut affirmer qu'il existe* $\mathrm{A} > 0$ *tel que :* $\forall x \geqslant \mathrm{A}$, $|f(x) - l| \leqslant \widetilde{\varepsilon}$. *Soit alors* $(x, x') \in [\mathrm{A}, +\infty[$, *majorons en utilisant l'inégalité triangulaire :*

$$|f(x) - f(x')| = |[f(x) - l] + [l - f(x')]| \leqslant |f(x) - l| + |f(x') - l| \leqslant 2\widetilde{\varepsilon} \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat.

11.5.2 Limites d'une fonction à valeurs réelles

Exercice 11.3 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
3. $\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x}$
4. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-3x-1}{x^2+x-2}$

6. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x^2}{x}$

Solution :

1. $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{x^4}{x^2}\dfrac{1+\frac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{1-\dfrac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{+\infty}$
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \sin' 0 = \boxed{1}$.
3. $x-\sqrt{x^2-2x} = \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}{x+\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{x^2-\left(x^2-2x\right)}{x+\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{x}{x}\dfrac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$
4. $x^x = e^{x\ln x} = e^{\mathrm{X}}$ avec $\mathrm{X} = x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc $x^x \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{1}$.
5. $\dfrac{x^3+3x^2-3x-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{(x-1)(x+2)} \xrightarrow[x\to 1]{} \boxed{2}$
6. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos x^2}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ donc par application du théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x^2}{x} = \boxed{0}$

Exercice 11.4 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos\left(e^x\right)}{x^2+1}$
2. $\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(\ln x)$
3. $\lim_{x\to 0} 2x-1+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+x^2e^{-x}\right)$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Solution :

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \left|\dfrac{x\cos\left(e^x\right)}{x^2+1}\right| \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$ donc par application du théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos\left(e^x\right)}{x^2+1} = \boxed{0}$
2. $\ln x\ln(\ln x) = \mathrm{X}\ln\mathrm{X}$ avec $\mathrm{X} = \ln x \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0$ donc $\lim_{x\to 1^+} \ln x\ln(\ln x) = \boxed{0}$
3. $2x-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 2x-1+\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 2x-1+1 & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^* \\ 2x-1-1 & \text{si } x\in\mathbb{R}_-^* \end{cases}$ et $\lim_{x\to 0^+} 2x-1+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \boxed{0}$, $\lim_{x\to 0^-} 2x-1+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \boxed{-2}$
4. $x^2e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc par composition de limites : $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+x^2e^{-x}\right) = \boxed{0}$
5. $\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \dfrac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
6. On reconnaît le taux d'accroissement de $x\mapsto \ln(1+x)$ en 0. Cette fonction étant dérivable en 0, on obtient : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{1}$.

Exercice 11.5 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{-x}}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x+1}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \cos(7x)\,e^{-3x}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$
5. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-2}$

Solution :

1. $\dfrac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{-x}} \underset{}{\overset{\mathrm{X}=e^{-x}}{=\!=}} \dfrac{\sin\mathrm{X}}{\mathrm{X}} \xrightarrow[\mathrm{X}\to 0]{} \boxed{1}$

2. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}$
3. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $-e^{-3x}\leqslant\cos(7x)\,e^{-3x}\leqslant e^{-3x}$ *et* $e^{-3x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim_{x\to+\infty}\cos(7x)\,e^{-3x}=\boxed{0}$
4. *On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en* 0. *Celle ci étant dérivable en* 0, *on obtient :* $\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x-e^0}{x-0}\xrightarrow[x\to0]{}\boxed{1}$.
5. $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\mathrm{X}}$ *avec* $\mathrm{X}=\dfrac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1$ *donc* $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\boxed{e}$
6. $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-1)\left(x^2-x-2\right)}{(x-1)(x+2)}\xrightarrow[x\to1]{}\boxed{-\frac{2}{3}}$.

Exercice 11.6 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{e^{-x}}$
2. $\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$
3. $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$
4. $\lim_{x\to-1}\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+3x+2}$
5. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+10}{x^2+2x+2}$
6. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-1}-x\sqrt{x}$

Solution :

1. *On a :* $\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{e^{-x}}=x^2\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{x^2e^{-x}}$ *et* $\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{x^2e^{-x}}\underset{}{\overset{\mathrm{X}=x^2e^{-x}}{=\!=\!=}}\dfrac{\operatorname{sh}\mathrm{X}}{\mathrm{X}}\xrightarrow[\mathrm{X}\to0]{}1$. *Donc* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{e^{-x}}=\boxed{+\infty}$
2. *On reconnaît le taux d'accroissement de* $x\mapsto\sqrt{x}$ *en* $x=3$. *Cette fonction est dérivable en* $x=3$ *donc on obtient :* $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$
3.

$$\begin{aligned}
&x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\\
=\;&x\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}\\
=\;&x\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}=x\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
=\;&x\frac{2}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
=\;&x\frac{2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\\
=\;&\frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

4. $\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+3x+2}=\dfrac{(x+1)\left(x^2-5x+6\right)}{(x+1)(x+2)}\xrightarrow[x\to-1]{}\boxed{12}$
5. $\dfrac{2x^3-5x+10}{x^2+2x+2}=\dfrac{x^3}{x^2}\dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{10}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{+\infty}$
6. $\sqrt{x^2+x-1}-x\sqrt{x}=x\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}-1\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{-\infty}$

Exercice 11.7 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
3. $\lim_{x\to0^+} \left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)\ln x$
4. $\lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
5. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(3x)}{x}$
6. $\lim_{x\to0} \frac{x}{\arccos x-\frac{\pi}{2}}$

Solution :

1. $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{x\ln\ln x}} = e^{\ln^2 x - x\ln\ln x} = e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x}-\ln\ln x\right)}$ *mais* $\frac{\ln^2 x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $\ln\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *donc* $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$ *par opérations sur les limites.*
2. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$
3. $\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)\ln x \leqslant 2\ln x$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim_{x\to0^+}\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)\ln x = \boxed{-\infty}$.
4. $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{0}$
5. $\frac{\sin(3x)}{x} \overset{X=3x}{=\!=} 3\frac{\sin X}{X} \xrightarrow[X\to0]{} 3$ *car* $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$ *donc* $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x} = \boxed{3}$.
6. *Comme* $x \mapsto \frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x}$ *est le taux d'accroissement de* $\arccos$ *en* $x=0$, *cette fonction étant dérivable en* 0, *on a :* $\frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x} \xrightarrow[x\to0]{} -1$ *donc* $\lim_{x\to0}\frac{x}{\arccos x-\frac{\pi}{2}} = \boxed{-1}$

Exercice 11.8 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}+2x}{x^2+x+1}$
2. $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$
3. $\lim_{x\to2} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}$
4. $\lim_{x\to0^+} \left(2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$
5. $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$

Solution :

1. $\frac{x\sqrt{x}+2x}{x^2+x+1} = \frac{x\sqrt{x}}{x^2}\frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$
2. *On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction* sh *en* 0. *Cette fonction étant dérivable en* 0, *on obtient :* $\frac{\operatorname{sh} x}{x} \xrightarrow[x\to0]{} \operatorname{ch} 0 = \boxed{1}$.
3. *On a :* $\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)\left(x^2-2x+1\right)}{(x-2)(x-1)} \xrightarrow[x\to2]{} \boxed{1}$.
4. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$: $2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \leqslant 6+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} = 6+\frac{1}{x^2}(x-1) \xrightarrow[x\to0]{} -\infty$. *Donc par application du théorème des gendarmes* $\lim_{x\to0^+}\left(2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{-\infty}$
5. $x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = x\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x} = \frac{x}{x}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{\frac{3}{2}}$
6. $\frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x} = \frac{x}{x}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\ln x}{x}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$ *car* $\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$

Exercice 11.9 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$
2. $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim_{x\to 0} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-1}}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$
6. $\lim_{x\to+\infty} (\ln x+2x+1-\mathrm{E}(x))$

Solution :

1. $e^{x-\sin x}\geqslant e^{x-1}$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}=\boxed{+\infty}$
2. $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{1}$ *par composition et car* $\ln x=\underset{x\to+\infty}{o}(x)$.
3. $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{X=\frac{1}{x}}{=\!=}\frac{\ln(1+X)}{X}$ *et* $\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$ *donc* $\lim_{x\to 0} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\boxed{1}$ *par utilisation des limites usuelles.*
4. $\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{x}\frac{3-\frac{5}{x}}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{3}$
5. $\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=-\frac{2+x}{x^2+x+1}\xrightarrow[x\to 1]{}\boxed{-1}$
6. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $x-1\leqslant \mathrm{E}(x)<x$. *Donc :* $\ln x+x+1\leqslant \ln x+2x+1-\mathrm{E}(x)$ *et comme* $\ln x+x+1\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ *par application du théorème des gendarmes :* $\lim_{x\to+\infty}(\ln x+2x+1-\mathrm{E}(x))=\boxed{+\infty}$

Exercice 11.10 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{E}(x)}{\sqrt{|x|}}$
3. $\lim_{x\to 0} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}$
5. $\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{1-x^2}$
6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\arctan x}{x}$

Solution :

1. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}=\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}\right)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}=\frac{10}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}$.
2. *Pour* $x>0$, $0\leqslant\frac{x-\mathrm{E}(x)}{\sqrt{|x|}}\leqslant\frac{x}{\sqrt{|x|}}=\sqrt{|x|}$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\mathrm{E}(x)}{\sqrt{|x|}}=\boxed{0}$.
   Mais $\lim_{x\to 0^-}\frac{x-\mathrm{E}(x)}{\sqrt{|x|}}=\boxed{+\infty}$.
3. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$, $x(1/x-1)\leqslant x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant x.1/x$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim_{x\to 0}x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)=\boxed{1}$.
4. *Si* $x>0$, $\frac{x^2+2|x|}{x}=\frac{x^2+2x}{x}=x+2\xrightarrow[x\to 0^+]{}\boxed{2}$. *Si* $x<0$, $\frac{x^2+2|x|}{x}=\frac{x^2-2x}{x}=x-2\xrightarrow[x\to 0^-]{}\boxed{-2}$
5. $\frac{1+x}{1-x^2}=\frac{1+x}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x}\xrightarrow[x\to -1]{}\boxed{\frac{1}{2}}$
6. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $1-\frac{\pi}{2x}\leqslant\frac{x+\arctan x}{x}\leqslant 1+\frac{\pi}{2x}$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=\boxed{1}$

Exercice 11.11 ♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3}{x+\sqrt{x}}$
2. $\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$
3. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$
6. $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Solution :

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$: $2 \leqslant 2\cos^2\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} + 3$ *donc par application du théorème des gendarmes :* $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3}{x+\sqrt{x}} = +\infty$
2. $(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln \sin x}{\ln x}} = e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}-\ln x}{\ln x}} = e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x}-1}$ *mais* $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *donc* $\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = \boxed{e^{-1}}$
3. $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \frac{(x+1)\left(x^2-1\right)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{x-1}{x-2} \xrightarrow[x\to -1]{} \boxed{-2}$
4. $\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)} = \frac{2\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{1}$ *car* $\sin x/x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
5. *On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction tangente en* 0. *Cette fonction étant dérivable en* 0, *on obtient :* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \tan' 0 = 1$
6. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \overset{X=\frac{1}{x}}{=\!=} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} \xrightarrow[X\to 0]{} e$ *donc* $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \boxed{e}$.

Exercice 11.12 ♡

Déterminer

$$l = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$$

Solution : *On a :*

$$\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{2}{1-\cos^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1+\cos x}$$

d'où $\boxed{l = \frac{1}{2}}$.

Exercice 11.13 ♡

Soit la fonction g *donnée sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $g(x) = \sin\frac{1}{x}$. *Montrer que* g *n'a pas de limite en* 0.

Solution : *Considérons la suite* (x_n) *de terme général donné par, pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $g(x_n) = (-1)^n$. *La suite* $\left(g(x_n)\right)$ *est donc divergente alors que la suite* $x_n \xrightarrow[n\to +\infty]{} 0$. *Donc par le théorème de composition d'une suite par une fonction,* g *ne peut admettre de limite en* 0.

Exercice 11.14 ♡

Montrer que la fonction f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $f(x) = \cos(ln(x))$ *n'admet pas de limite en* $+\infty$.

Solution : *Définissons les suites* (x_n) *et* (y_n) *par, pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $x_n = e^{2n\pi}$ *et* $y_n = e^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$. *Elles tendent toutes les deux vers* $+\infty$. *Supposons que* $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} l$. *Alors* $f(x_n) \xrightarrow[n\to +\infty]{} l$ *or pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 1$. *Donc* $l = 1$. *Mais de même, puisque* $f(y_n) = 0$, *on devrait avoir* $l = 0$, *ce qui rentre en contradiction avec l'unicité de la limite. Donc* f *n'admet pas de limite en* $+\infty$.

Exercice 11.15 ♡♡

Calculer $\lim_{x\to 0^+} \frac{E(1/x)+x}{E(1/x)-x}$

Solution : *La fonction*

$$f(x) = \frac{\mathrm{E}(\frac{1}{x}) + x}{\mathrm{E}(\frac{1}{x}) - x}$$

est bien définie pour $x \in]0,1[$, *car* $\mathrm{E}(\frac{1}{x}) \geqslant 1 > x$. *Encadrons*

$$\frac{1}{x} - 1 < \mathrm{E}(\frac{1}{x}) \leqslant \frac{1}{x}$$

et donc

$$\frac{\frac{1}{x} + x - 1}{\frac{1}{x} - x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x} - x - 1}$$

$$\implies \frac{1 + x^2 - x}{1 - x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1 + x^2}{1 - x^2 - x}$$

et par le théorème des gendarmes, on obtient que $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$.

11.5.3 Comparaison des fonctions numériques

Exercice 11.16 ♡

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1 + \tan x)}{\sqrt{\sin x}}$ *en* 0^+
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 2}}$ *en* $+\infty$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x$ *en* $\frac{\pi}{2}$.
4. $f(x) = \cos(\sin x)$ *en* 0.
5. $f(x) = x^x - 1$ *en* 0^+.
6. $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$ *en* 1.

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1 + \tan x)}{\sqrt{\sin x}} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{\tan x}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \boxed{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} \dfrac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^2}}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \boxed{x^{\frac{5}{6}}}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x = \dfrac{1 - \sin x}{\cos x} \overset{\mathrm{X} = x - \frac{\pi}{2}}{=\!=} \dfrac{1 - \sin\left(\mathrm{X} + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\mathrm{X} + \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1 - \cos\mathrm{X}}{-\sin\mathrm{X}} \underset{\mathrm{X} \to 0}{\sim} -\dfrac{\mathrm{X}}{2}$. *Donc* $f(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \boxed{-\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}}$
4. $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \boxed{1}$ *car* $\cos(\sin x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.
5. $f(x) = x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \underset{x \to 0^+}{\sim} \boxed{x \ln x}$ *car* $x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$..
6. $\cos(\pi x) \underset{x \to 1}{\sim} -1$ *et* $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ *donc* $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \boxed{-\dfrac{1}{|x-1|}}$

Exercice 11.17 ♡

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{|x-2|} - \dfrac{x-1}{\left|x^2 - 4\right|}$ *en* 2.
2. $f(x) = x^2 \operatorname{argsh} \frac{1}{x}$ *en* $+\infty$
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^5}{2x + 5}}$ *en* $+\infty$.
4. $f(x) = \ln(\cos x)$ *en* $x = 0$
5. $f(x) = \ln(\sin x)$ *en* 0^+.
6. $f(x) = \dfrac{(2 + x)\ln\left(1 + \sqrt{x}\right)}{\sin^2 x}$ *en* 0^+.

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{|x-2|} - \dfrac{x-1}{\left|x^2-4\right|} = \dfrac{1}{|x-2|}\left(2x - \dfrac{x-1}{|x+2|}\right) \underset{x\to 2}{\sim} \boxed{\dfrac{15}{4|x-2|}}$
2. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = \boxed{x}$ *par produit d'équivalents.*
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^5}{2x+5}} = \dfrac{x^{\frac52}}{x^{\frac12}} \dfrac{1}{\sqrt{2+\frac5x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{x^2}{\sqrt2}}$
4. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ *car* $\ln(\cos x) = \ln(1-(1-\cos x)) \underset{x\to 0}{\sim} 1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{x^2}{2}}$.
5. $f(x) = \ln(\sin x) = \ln\dfrac{\sin x}{x} + \ln x = \ln x\left(\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x} + 1\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \boxed{\ln x}$ *car* $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ *et* $\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
6. $f(x) = \dfrac{(2+x)\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sin^2 x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2} = \boxed{2x^{-\frac32}}$

Exercice 11.18 ♡

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré :

1. $f(x) = \ln(\cos x)$ *en* $\frac{\pi}{2}^-$
2. $f(x) = \ln(1+\sin x)$ *en* 0
3. $f(x) = \frac{x}{1-\sin x} - x$ *en* 0.
4. $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)}$ *en* $+\infty$
5. $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-1}{2x^5+x^2}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ *en* 0^+.
6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin x}\right)$ *en* $x=0$.

Solution :

1. $f(x) = \ln(\cos x) \overset{X=\frac{\pi}{2}-x}{=\!=\!=} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-X\right)\right) = \ln(\sin X) = \ln\frac{\sin X}{X} + \ln X = \ln(X)\left(\dfrac{\ln\frac{\sin X}{X}}{\ln(X)}+1\right) \underset{X\to 0^+}{\sim} \ln X$. *Donc* $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \boxed{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$.
2. $f(x) = \ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{1-\sin x} - x = \dfrac{x\sin x}{1-\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x^2}$. *On peut aussi remarquer que* $f(x) = x\left((1-\sin x)^{-1}-1\right) \underset{x\to 0}{\sim} x\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x^2}$.
4. $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac1x\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-1}{2x^5+x^2}\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{\sqrt{x}}{x^2\left(2x^3+1\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \boxed{-x^{-\frac32}}$ *car* $2x^3+1 \underset{x\to 0^+}{\sim} 1$.
6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin x}\right) = \dfrac12\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sin x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\dfrac{x}{2}}$

Exercice 11.19 ♡

Déterminer lorsqu'elles existent les limites des fonctions suivantes en le nombre indiqué :

1. $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin 3x}{\ln(1+x)}$ *en* $x=0$.
2. $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\arcsin^2 x}$ *en* $x=0$.
3. $f(x) = \dfrac{2x+\sin 3x}{x\sin x}$ *en* $x=0^+$.
4. $f(x) = \dfrac{2\tan x + \operatorname{sh} 5x}{\sin^3 x}$ *en* $x=0$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$ *en* $x=1$.
6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x}\right) - \dfrac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh} x}$ *en* $x=0$

Solution :

1. $f(x)=\dfrac{\tan x-\sin 3x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\tan x-\sin 3x}{x}$ *et* $\dfrac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x}=1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\dfrac{\sin 3x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3x}{x}=3 \xrightarrow[x\to 0]{} 3$. *Donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-2}$.
2. $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{\arcsin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\dfrac{1}{2}}$.
3. *On a :* $\dfrac{2x}{x\sin x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ *et* $\dfrac{\sin 3x}{x\sin x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{3x}{x^2}=\dfrac{3}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{+\infty}$.
4. *On a :* $\dfrac{2\tan x}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ *et* $\dfrac{\operatorname{sh} 5x}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{5}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{+\infty}$.
5. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \overset{X=x-1}{=\!=} \dfrac{\ln(1+X)}{\sqrt{1+X}-1} \underset{X\to 0}{\sim} \dfrac{X}{\frac{X}{2}}=2$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \boxed{2}$.
6. $\dfrac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh} x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{x}=-1$. *De plus :* $\ln\left(\sqrt{1+x}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{1}$.

Exercice 11.20 ♡

Déterminer lorsqu'elles existent les limites en le nombre indiqué des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x\ln x)}-1}{\sin x\ln x}$ *en* $x=0^+$.
2. $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ *en* $x=+\infty$ *et pour* $a\in\mathbb{R}$.
3. $f(x)=\left(1+\sin\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}$ *en* $x=+\infty$
4. $f(x)=\dfrac{\arctan(x-1)}{x^2-1}-\dfrac{\sin\left(e^{(x-1)}-1\right)}{\ln x}$ *en* $x=1$
5. $f(x)=\operatorname{ch} x^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$ *en* $x=0$
6. $f(x)=\dfrac{x^{\frac{x+1}{x}}-x}{\ln\left(1+x^2\right)}$ *en* $x=+\infty$

Solution :

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x\ln x)}-1}{\sin x\ln x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{x\ln x}{\sin x\ln x}$ *car* $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ *et* $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{2}$. *Donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{\dfrac{1}{2}}$.
2. $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^{x\left(1+\frac{a}{x}\right)}$ *mais* $x\left(1+\frac{a}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} a$ *donc par opérations sur les limites :* $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \boxed{e^a}$.
3. $f(x)=\left(1+\sin\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}=e^{\dfrac{x\ln\left(1+\sin\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x}}$ *mais* $\sin\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ *donc* $\dfrac{x\ln\left(1+\sin\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{x\sin\frac{\ln x}{x}}{\ln x} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{\ln x}=1$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \boxed{e}$.
4. *D'une part :* $\dfrac{\arctan(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{\arctan(x-1)}{(x-1)(x+1)} \overset{X=x-1}{=\!=} \dfrac{\arctan X}{X(X+2)} \underset{X\to 0}{\sim} \dfrac{X}{2X}=\dfrac{1}{2}$. *D'autre part :* $\dfrac{\sin\left(e^{(x-1)}-1\right)}{\ln x} \overset{X=x-1}{=\!=} \dfrac{\sin\left(e^{(X)}-1\right)}{\ln(1+X)} \underset{X\to 0}{\sim} \dfrac{\left(e^{(X)}-1\right)}{X} \underset{X\to 0}{\sim} \dfrac{X}{X}=1$ *donc* $\dfrac{\sin\left(e^{(x-1)}-1\right)}{\ln x} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \boxed{-\dfrac{1}{2}}$.
5. $f(x)=\operatorname{ch} x^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}=e^{\dfrac{\ln\operatorname{ch} x}{\arcsin^2 x}}=e^{\dfrac{\ln(1+(\operatorname{ch} x-1))}{\arcsin^2 x}}$ *et* $\ln(1+(\operatorname{ch} x-1)) \underset{x\to 0}{\sim} (\operatorname{ch} x-1) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ *donc* $\dfrac{\ln(1+(\operatorname{ch} x-1))}{\arcsin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$. *On en déduit que* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\sqrt{e}}$.
6. $\dfrac{x^{\frac{x+1}{x}}-x}{\ln\left(1+x^2\right)}=x\dfrac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\ln\left(1+x^2\right)}=x\dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\ln\left(1+x^2\right)} \underset{x\to +\infty}{\sim} x\dfrac{\frac{\ln x}{x}}{\ln\left(1+x^2\right)}=\dfrac{\ln x}{\ln\left(1+x^2\right)}=\dfrac{\ln x}{\ln x^2+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} \xrightarrow[x\to +\infty]{} \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

Exercice 11.21 ♡

Déterminer lorsqu'elles existent les limites en le nombre indiqué des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ *en* $x=0$.
2. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ *en* $x=1$.
3. $f(x)=\dfrac{\sin(e^x)}{\tan\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}$ *en* $x=-\infty$.
4. $f(x)=\dfrac{\arctan x-\arctan a}{\log_a x-1}$ *en* $x=a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$
5. $f(x)=\dfrac{\operatorname{argsh} x}{\ln x}$ *en* $x=+\infty$
6. $f(x)=(\ln x-1)(\ln(x-e))$ *en* $x=e$

Solution :

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\frac12 x}{\frac13 x}=\dfrac32$ *donc* $f(x)\xrightarrow[x\to0]{}\boxed{\dfrac32}$.
2. *Posant* $h=x-1$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\dfrac{\ln(1+h)}{h+h^2}\underset{h\to0}{\sim}1\xrightarrow[h\to0]{}\boxed{1}$
3. *Comme* $e^x\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$, *on a :* $f(x)=\dfrac{\sin(e^x)}{\tan\left(\ln\left(1+\frac1x\right)\right)}\underset{x\to-\infty}{\sim}\dfrac{e^x}{\ln\left(1+\frac1x\right)}\underset{x\to-\infty}{\sim}\dfrac{e^x}{\frac1x}=xe^x$ *donc* $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}\boxed{0}$
4. $f(x)=\dfrac{\arctan x-\arctan a}{\log_a x-1}=\dfrac{\arctan x-\arctan a}{x-a}\,\dfrac{x-a}{\log_a x-1}$. *Mais, en reconnaissant des taux d'accroissements :* $\dfrac{\arctan x-\arctan a}{x-a}\xrightarrow[x\to a]{}\dfrac{1}{a^2+1}$ *et* $\dfrac{\log_a x-1}{x-a}\xrightarrow[x\to a]{}\dfrac{1}{a\ln a}$ *donc* $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\boxed{\dfrac{a\ln a}{a^2+1}}$
5. $f(x)=\dfrac{\operatorname{argsh} x}{\ln x}=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}=\dfrac{\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\ln x}=1+\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\ln x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{1}$ *car* $\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ln 2$. *On peut aussi effectuer ce calcul par un changement de variable :* $\dfrac{\operatorname{argsh} x}{\ln x}\overset{x=\operatorname{sh}X}{=\!=}\dfrac{X}{\ln\operatorname{sh}X}=\dfrac{X}{X+\ln\left(\frac{1-e^{-2X}}{2}\right)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\ln\left(\frac{1-e^{-2X}}{2}\right)}{X}}\xrightarrow[X\to+\infty]{}\boxed{1}$
6. $f(x)=(\ln x-1)\ln(x-e)=\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}(x-e)\ln(x-e)$. *Mais, en reconnaissant le taux d'accroissement de la fonction* $\ln$ *en* e *:* $\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}\xrightarrow[x\to e]{}\dfrac1e$ *et* $(x-e)\ln(x-e)\overset{X=x-e}{=\!=}X\ln X\xrightarrow[X\to0]{}0$. *Donc* $f(x)\xrightarrow[x\to e]{}\boxed{0}$.

Exercice 11.22 ♡♡

Trouver la limite lorsque $x\to\pi^+$ *de la fonction*

$$f(x)=(1+\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Solution : *Par le changement de variables* $h=x-\pi$, *on se ramène à trouver la limite lorsque* $h\to0^+$ *de la fonction*

$$g(h)=f(\pi+h)=(1-\cos h)^{-\frac{1}{\sin h}}=e^{-\frac{1}{\sin h}\ln(1-\cos h)}$$

Posons $\alpha(h)=-\dfrac{1}{\sin h}\ln(1-\cos h)$. *D'après l'équivalent classique pour le cosinus, on a* $1-\cos h\underset{h\to0}{\sim}\dfrac{h^2}{2}$ *donc on peut écrire* $1-\cos h=\dfrac{h^2}{2}\theta(h)$ *avec* θ *une fonction vérifiant :* $\theta(h)\to1$. *Alors*

$$\ln(1-\cos h)=\ln\left(\frac{h^2}{2}\theta(h)\right)=2\ln h-\ln 2+\ln\theta(h)$$

et donc

$$\ln(1-\cos h)\underset{h\to0}{\sim}2\ln h$$

Par suite, il vient que

$$\alpha(h)\underset{h\to0}{\sim}-\frac{2\ln h}{h}\xrightarrow[h\to0]{}-\infty$$

et par conséquent $g(h)\to0$ *et donc* $\boxed{f(x)\xrightarrow[x\to\pi^+]{}0}$.

Exercice 11.23 ♡

Trouver un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de la fonction

$$f(x) = x^{\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)} - 1$$

Solution : *Mettons $f(x)$ sous forme exponentielle :*

$$f(x) = e^{\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\ln x} - 1$$

En posant $\alpha(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)\ln x$, on a :

$$\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Et donc on peut utiliser l'équivalent classique pour l'exponentielle et il vient que : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\dfrac{\ln x}{x^2}}$.

Exercice 11.24 ♡♡

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(e^{x^2+1} - x^2\right) + \ln\left(x^2 - 1\right)$$

Solution : *Écrivons :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left[e^{x^2+1}\left(1 - \frac{x^2}{e^{x^2+1}}\right)\right] + \ln\left[x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= x^2 + 2\ln x + 1 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{e^{x^2+1}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} x^2 \end{aligned}$$

Car $\dfrac{\ln x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\dfrac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{e^{x^2+1}}\right)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2}$.

Exercice 11.25 ♡♡

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(2x^2-1\right)}{\ln\left(x^3+1\right) - \ln\left(x^3-1\right)}$$

Solution : *Cherchons un équivalent du numérateur $n(x)$ puis du dénominateur $d(x)$ de cette expression :*

$$\begin{aligned} n(x) &= \ln(x^2+1) - \ln(2x^2-1) = \ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \ln(2x^2) - \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \\ &= 2\ln x - \ln 2 - 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) = -\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x) &= \ln(x^3+1) - \ln(x^3-1) = \ln\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}\right) = \ln\left(1 + \frac{\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\ln 2}{2} x^3}$$

Exercice 11.26 ♡♡

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to \pi$ *de*

$$f(x) = e^{\sin x} + \cos x$$

Solution : *Effectuons le changement de variables* $h = x - \pi$. *On obtient :*

$$\tilde{f}(h) = f(\pi + h) = e^{-\sin h} - \cos h = \left(e^{-\sin h} - 1\right) + (1 - \cos h) = \alpha(h) + \beta(h)$$

Puisque $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\sim} -\sin h \sim -h$ *et que* $\beta(h) \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h^2}{2}$, *il vient que* $\beta(h) = o(\alpha(h))$ *et donc que* $\tilde{f}(h) \sim \alpha(h) \sim -h$. *Par conséquent,* $\boxed{f(x) \underset{x\to\pi}{\sim} (\pi - x)}$.

Exercice 11.27 ♡♡

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to 1$ *de la fonction*

$$f(x) = e^{x\ln(x^2)} - e^{\sin(\pi x)}$$

Solution : *Effectuons le changement de variables* $h = x - 1$ *:*

$$\tilde{f}(h) = f(1 + h) = e^{2(1+h)\ln(1+h)} - e^{-\sin(\pi h)} = \alpha(h) - \beta(h)$$

où

$$\alpha(h) = e^{2(1+h)\ln(1+h)} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} 2h \quad \text{et} \quad \beta(h) = e^{-\sin(\pi h)} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} -\sin(\pi h) \underset{h\to 0}{\sim} -\pi h$$

Montrons alors que $\tilde{f}(h) \underset{h\to 0}{\sim} (2+\pi)h$ *:*

$$\frac{\tilde{f}(h)}{(2+\pi)h} = \frac{\alpha(h)}{(2+\pi)h} - \frac{\beta(h)}{(2+\pi)h}$$

avec $\dfrac{\alpha(h)}{(2+\pi)h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{2}{(2+\pi)}$ *et* $\dfrac{\beta(h)}{(2+\pi)h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{-\pi}{2+\pi}$. *On a bien que* $\dfrac{\tilde{f}(h)}{(2+\pi)h} \to 1$. *Par conséquent,*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (2+\pi)(x-1)}$$

Exercice 11.28 ♡♡

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to 0^+$ *de la fonction*

$$f(x) = \frac{(1+x)^{x^x}}{\sin(\pi x^x)}$$

Solution : *Soit* $g(x) = (1+x)^{x^x} = e^{\ln(1+x)e^{x\ln x}}$. *Comme* $x\ln x \to 0$, *lorsque* $x \to 0$, $e^{x\ln x} \to 1$ *et donc* $e^{x\ln x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$. *Par conséquent,* $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
D'autre part, $h(x) = \sin(\pi x^x) = \sin(\pi(e^{x\ln x} - 1) + \pi) = -\sin(\pi(e^{x\ln x} - 1)) \underset{x\to 0}{\sim} -\pi(e^{x\ln x} - 1) \underset{x\to 0}{\sim} -\pi(x\ln x)$. *Finalement,* $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{\pi x\ln x}}$.

Exercice 11.29 ♡♡

Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{x^x}{\mathrm{E}(x)^{\mathrm{E}(x)}}$$

n'admet pas de limite lorsque $x \to +\infty$.

Indication 11.9 : *On pourra pour cela introduire deux suites* (u_n) *et* (v_n) *de terme général* $u_n = n$ et $v_n = n + a_n$ *avec* (a_n) *telle que :* $\forall n \geqslant 1,\ 0 < a_n < 1$ *avec* $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il vient que $f(u_n) = 1$ et que $f(v_n) = e^{(n+a_n)\ln(n+a_n)-n\ln n} = e^{\alpha_n}$. Posons $\alpha_n = (n+a_n)\ln(n+a_n) - n\ln n$ et développons cette expression :

$$\alpha_n = a_n \ln n + (n+a_n)\ln(1+\frac{a_n}{n})$$

Comme $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $\frac{a_n}{n} \to 0$ et donc $(n+a_n)\ln(1+\frac{a_n}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+a_n)a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. D'autre part, $a_n \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et finalement $\alpha_n \to +\infty$.
En conclusion, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par conséquent, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 11.30 ♡
Calculer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - (x+1)$$

Solution : Ecrivons

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - (x+1) = x\left[\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] - 1$$

mais lorsque $x \to +\infty$, $\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3x^3}$, et donc $\boxed{f(x) \to -1}$.

Exercice 11.31 ♡♡
Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - ax$$

Solution : Remarquons que si $a \leqslant 0$, alors $f(x) \to +\infty$. Supposons donc $a > 0$. En utilisant les quantités conjuguées, il vient que :

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{a^2x^2} = \frac{(1-a^2)x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{a^2x^2}}$$

Si $a \neq 1$, on a alors :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(1-a^2)}{1+a}x$$

et si $a = 1$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{2x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$. On peut alors conclure :
– si $a \in]-\infty, 1[$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
– si $a = 1$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
– si $a > 1$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

Exercice 11.32 ♡♡
Soient $a, b > 0$. Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = \left(a^x + b^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

Solution :
– Si $a \neq b$. On peut supposer par exemple que $a > b$. Alors

$$f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} = a(1+x)^{\frac{1}{x}} = ae^{\alpha(x)}$$

où $\alpha(x) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$. Mais puisque $\frac{b}{a} < 1$, $\left(\frac{b}{a}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{e^{x\ln\frac{b}{a}}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a}$$

– Si $a = b$, alors

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}a = ae^{\frac{1}{x}\ln 2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{a}$$

Dans tous les cas,

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{\max(a,b)}$$

11.5.4 Continuité des fonctions numériques

Exercice 11.33 ♡

Déterminer sur quel(s) intervalle(s) les fonctions suivantes sont continues :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

2. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

4. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

Solution :

1. f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme quotient de fonctions continues sur* $\mathbb{R}^*$. *De plus :* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f(0)$ *et* f *est aussi continue en* 0. *En conclusion,* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme quotient et produit de fonctions continues sur* $\mathbb{R}^*$. *De plus :* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{\dfrac{x^2}{2}} = 2$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2 = f(0)$ *et* f *est aussi continue en* 0. *En conclusion,* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
3. f *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ *comme produit de fonctions continues sur cet intervalle. De plus,* $x \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$ *donc* f *est aussi continue en* 0. *En conclusion,* f *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.
4. f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme composée de fonctions continues. Par opérations sur les limites :* $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$ *et* $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$ *donc* f *n'est que continue à droite en* 0.

Exercice 11.34 ♡

Déterminer sur quel(s) intervalle(s) les fonctions suivantes sont continues :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$

2. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

3. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

4. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1 - x}{1 - x^2} & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases} \end{cases}$

Solution :

1. f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *comme quotient de fonctions polynomiales. Si* $x \neq 1$, $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \xrightarrow[x\to 1]{} (n+1) = f(1)$ *donc est aussi continue en* 1. *En conclusion,* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme composée de fonctions continues.* f *n'est par contre pas continue en* 0. *Considérons la suite de terme général :* $u_n = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *Cette suite converge vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$ *et pourtant la suite* $\left(f(u_n)\right)$ *est divergente car elle admet deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes.*
3. f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme composée et produit de fonctions continues. De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \leqslant x \sin \frac{1}{x} \leqslant x$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$. *On en déduit que* f *est aussi continue en* 0. *En conclusion,* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
4. f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *comme quotient de fonctions polynomiales. Mais, si* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ *et donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2} = f(1)$. f *est donc continue en* 1. *Par contre* $f(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} +\infty$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to -1^-]{} -\infty$ *donc* f *n'est pas continue en* $x = -1$. *En conclusion,* f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 11.35 ♡

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. *Déterminer où elle est définie.*
2. *Déterminer là où elle est continue.*
3. *La prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.*

1. $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\sin x}{\arctan x}$
2. $f(x) = \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1-x}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2\ln x}{\sin x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)\operatorname{sh} x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$

Solution :

1. f est définie sur $\mathrm{I} = [-1,1]\setminus\{0\}$. f est continue sur I comme produit et quotient de fonctions continues sur I. De plus, si $x \in \mathrm{I}$: $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x\frac{x^2}{2}}{x} = -\dfrac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
2. f est définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$. f est continue sur I comme produit, somme et composée de fonctions continues. En appliquant le théorème des gendarmes, on montre que $\sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et donc que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$. On prolonge f par continuité à droite de 0 en posant $f(0) = 0$. Comme $\left|f(x)\right| \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$, f n'est pas prolongeable par continuité en 1.
3. f est définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+\setminus\pi\mathbb{N}$. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur I. De plus $\frac{x^2\ln x}{\sin x} \underset{x\to 0^+}{\sim} x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité à droite de 0. f est par contre divergente en tout $x \in \pi\mathbb{N}^*$.
4. f est définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur I. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)\operatorname{sh} x}$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. On peut alors prolonger f par continuité en 0 en posant : $f(0) = 1$. On a aussi : $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)\operatorname{sh} 1}$ qui est divergente en 1. f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1.

Exercice 11.36 ♡

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. *Déterminer où elle est définie.*
2. *Déterminer là où elle est continue.*
3. *La prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.*

1. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $f(x) = \operatorname{argth} x \sin\frac{1}{x}$
3. $f(x) = (x-1)(\ln(x-1))$
4. $f(x) = \arctan\ln(1+x) - \dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\operatorname{sh} x}$

Solution :

1. f est définie sur $\mathbb{R}^*$. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues. Par opérations sur les limites : $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On prolonge donc f par continuité en 0 en posant : $f(0) = 0$.
2. f est définie sur $\mathrm{I} =]-1,1[\setminus\{0\}$. f est continue sur I comme produit de fonctions continues sur I. De plus : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\sin\frac{1}{x}$ et utilisant le théorème des gendarmes, on montre que $x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Il en est alors de même de f et on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On vérifie facilement que f est divergente en 1^- et en -1^+.
3. f est définie et continue sur $\mathrm{I} =]1,+\infty[$. De plus : $f(x) \overset{\mathrm{X}=x-1}{=\!=} \mathrm{X}\ln\mathrm{X} \xrightarrow[\mathrm{X}\to 0^+]{}= 0$ donc f est prolongeable par continuité en 1^+ en posant $f(1) = 0$.
4. f est définie sur $\mathrm{I} =]-1,+\infty[\setminus\{0\}$. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur I. Par opérations sur les limites, $f(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}(-1)-1}}{\operatorname{sh}(-1)}$ et donc f est prolongeable par continuité en -1. De plus : $\arctan\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x-1}}{\operatorname{sh} x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{|x|}{2x}$. Donc $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x-1}}{\operatorname{sh} x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x-1}}{\operatorname{sh} x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. f n'est donc pas prolongeable par continuité en 0 par contre elle admet une limite à gauche et à droite de 0.

Exercice 11.37 ♡

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. *Déterminer où elle est définie.*
2. *Déterminer là où elle est continue.*
3. *La prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.*

1. $f(x) = \dfrac{\operatorname{argsh} x}{x - x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\operatorname{argsh} x}$
3. $f(x) = \operatorname{argth} x - \dfrac{1}{x-2}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\arctan\left(x^2-1\right)}}{\operatorname{sh}(x-1)}$

Solution :

1. f est définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. f est continue sur I comme quotient de fonctions continues sur I. On a : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 si on pose $f(0) = 1$. f est par contre divergente en 1.
2. f est définie sur $I = [-1,1] \setminus \{0\}$. f est continue sur I comme quotient de fonctions continues sur I. De plus $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc on prolonge f par cntinuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
3. f est définie et continue sur $]-1,1[$.
4. f est définie sur $I =]1,+\infty[$ (mais aussi sur $]+\infty,-1[$). Elle est continue sur I comme composée et quotient de fonctions continues. De plus : $f(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{2(x-1)}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$ donc f est divergente en 1.

Exercice 11.38 ♡

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des applications :

$$f : x \mapsto \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)} \qquad g : x \mapsto \mathrm{E}(x) - (x - \mathrm{E}(x))^2$$

Aide : *on distinguera les cas : $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$.*

Solution :

1. (a) Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \in]k, k+1[$. Par suite, pour x pris dans un voisinage suffisamment petit du point a, on a : $f(x) = k + \sqrt{x-k}$ qui est continue en a.
   (b) Si $a = k \in \mathbb{Z}$ alors
      i. à gauche de a : $f(x) = k - 1 + \sqrt{x-k+1} \xrightarrow[x\to a^-]{} k = x = f(x)$ donc f est continue à gauche de a.
      ii. à droite de a : $f(x) = k + \sqrt{x-k} \xrightarrow[x\to a^+]{} k = x = f(x)$ donc f est continue à droite de a.

   En conclusion f est continue sur R.
2. (a) Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a \in]k, k+1[$. Pour x pris dans un voisinage suffisamment petit du point a, $f(x) = k + (x-k)^2$ qui est continue en a.
   (b) Si $a = k \in \mathbb{Z}$ alors
      i. à gauche de a : $f(x) = k - 1 + (x-k+1)^2 \xrightarrow[x\to a^-]{} k = a = f(a)$ donc f est continue à gauche de a.
      ii. à droite de a : $f(x) = k + (x-k)^2 \xrightarrow[x\to a^+]{} k = a = f(a)$ donc f est continue à droite de a.

   En conclusion f est continue sur R.

Exercice 11.39 ♡♡

Soit la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est discontinue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{Q}\ :\quad |x-a| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on trouve $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|x-a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$. On construit ainsi une suite (a_n) de rationnels vérifiant : $\forall n \geqslant 1$, $|x-a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$. La suite (a_n) converge vers x. De la même façon, puisque $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on construit une suite (b_n) de nombres irrationnels qui converge vers x. Mais alors si l'on suppose que f est continue au point x, $\forall n \geqslant 1$, $f(a_n) = 1$ et donc $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, mais puisque f est continue au point x, $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, ce qui montre que $f(x) = 1$. D'autre part, $\forall n \geqslant 1$, $f(b_n) = 0$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ ce qui montre que $f(x) = 0$, une absurdité. Par conséquent, la fonction f n'est pas continue au point x.

Exercice 11.40 ♡♡♡

Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur $[0,1]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \sup_{t\in[0,x]} f(t) \end{cases}$$

1. *Montrer que φ est croissante.*
2. *Soit $x_0 \in [0,1]$. Montrer que φ est continue en x_0.*

Indication 11.9 : Pour la deuxième question, considérer $\varepsilon > 0$ et utiliser la continuité de f en x_0. Il existe $\alpha > 0$ tel que si $|t-x_0| \leqslant \alpha$ alors $\left|f(t)-f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$. Supposer que $x_0 \leqslant x \leqslant x+\alpha$ et montrer que $\sup_{t\in[0,x]} f(t) \leqslant \sup_{t\in[0,x_0]} f(t)+\varepsilon$.

Solution :

1. *Soit $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$. Soit $t \in [0,x]$. Puisque $t \in [0,y]$, $f(t) \leqslant \sup_{t\in[0,y]} f(t)$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit que $\varphi(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t) \leqslant \sup_{t\in[0,y]} f(t) = \varphi(y)$ (le nombre $\varphi(y)$ est un majorant de $\{f(t); t \in [0,y]\}$)*
2. *Soit alors $x_0 \in [0,1]$. Montrons que φ est continue en x_0 : Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0,1]$, $|t-x_0| \leqslant \alpha \implies \left|f(t)-f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$.*
   Soit alors $x \in [0,1]$ tel que $|x-x_0| \leqslant \alpha$. Supposons dans un premier temps que $x_0 \leqslant x$. On sait déjà que $\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x)$. Soit $t \in [0,x]$, si $t \in [x_0,x]$, alors $f(t) \leqslant f(x_0)+\varepsilon \leqslant \sup_{t\in[0,x_0]} f(t)+\varepsilon \leqslant \varphi(x_0)+\varepsilon$. Et si $t \in [0,x_0]$, alors $f(t) \leqslant \sup_{t\in[0,x_0]} f(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(t)+\varepsilon$.
   On a donc montré que $\forall t \in [0,x]$, $f(t) \leqslant \varphi(x_0)+\varepsilon$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit que $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)+\varepsilon$.
   Donc, on obtient que
   $$\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)+\varepsilon \implies \left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$
   Dans le deuxième cas, si $x \leqslant x_0$, on sait déjà que $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)$. Minorons alors $\varphi(x)$: Par passage à la borne sup comme précédemment, on obtient que $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)+\varepsilon$. Donc
   $$\varphi(x_0)-\varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) \implies \left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$
   En conclusion φ est continue en x_0.

Exercice 11.41 ♡♡♡

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Montrer que $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Indication 11.9 : Une des hypothèses fait intervenir $f(2x)$ et $f(x)$. On cherche à obtenir un résultat sur $f(x)$ seulement. Ecrire la définition de la limite : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha[$, ...Remarquer que $\dfrac{x}{2} \leqslant \alpha$ et donc $-\varepsilon\dfrac{x}{2} \leqslant f(x)-f(\dfrac{x}{2}) \leqslant \varepsilon\dfrac{x}{2}$. Ecrire ce que l'on obtient avec $\dfrac{x}{4}$... $\dfrac{x}{2^p}$. Si on additionne ces inégalités et on fait tendre p vers $+\infty$, qu'obtient-on ?

Solution : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} \to 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,\alpha],\quad -\varepsilon \leqslant \frac{f(2x)-f(x)}{x} \leqslant \varepsilon$$

Soit alors $x \in [0,\alpha]$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \dots, \frac{x}{2^p} \in [0,\alpha]$, on a la série d'inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ccc} -\varepsilon\frac{x}{2} & \leqslant f(x) - f(\frac{x}{2}) & \leqslant \varepsilon\frac{x}{2} \\ -\varepsilon\frac{x}{2^2} & \leqslant f(\frac{x}{2}) - f(\frac{x}{2^2}) & \leqslant \varepsilon\frac{x}{2^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varepsilon\frac{x}{2^p} & \leqslant f(\frac{x}{2^{p-1}}) - f(\frac{x}{2^p}) & \leqslant \varepsilon\frac{x}{2^p} \end{array}$$

En sommant ces inégalités, on trouve que :

$$-\varepsilon\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{p-1}}\right) \leqslant f(x) - f(\frac{x}{2^p}) \leqslant \varepsilon\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)$$

On calcule alors la somme géométrique

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{p-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{2^p})$$

On a donc montré que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$-\varepsilon x(1-\frac{1}{2^p}) \leqslant f(x) - f(\frac{x}{2^p}) \leqslant \varepsilon x(1-\frac{1}{2^p})$$

Comme ces inégalités sont valables quel que soit p, on peut passer à la limite lorsque x est fixé et $p \to +\infty$. Puisque $\frac{1}{2^p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et que f est continue en 0, $f(\frac{x}{2^p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(0) = 0$. On obtient donc que

$$-\varepsilon x \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon x \implies \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

On a bien montré que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

11.5.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 11.42 ♡

Soit f une fonction polynomiale de degré impair. Montrer que f possède au moins une racine réelle.

Solution : *Supposons que le coefficient du terme dominant de P soit positif. Comme P est de degré impair, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Comme f est polynomiale, elle est continue et donc, par application du théorème des valeurs intermédiaires $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{f(c) = 0}$. On raisonne de même si le coefficient du terme dominant de P est négatif.*

Exercice 11.43 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +1$. Prouver que f s'annule

Solution : *Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 0$. De même, comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +1$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) > 0$. f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur le segment $[a,b]$, on en déduit qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Exercice 11.44 ♡

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Prouver que f possède au moins un point fixe.

Solution : *Introduisons la fonction g donnée par $\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[0,1]$, $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[0,1]$.*

Exercice 11.45 ♡

Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les applications constantes.

Solution : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, Suposons que f n'est pas constante. Il existe alors des réels $a<b$ tels que $f(a)\neq f(b)$. Soit y un nombre non entier strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x\in]a,b[$ tel que $f(x)=y$ et donc f n'est pas à valeurs dans $\mathbb{Z}$. f est donc forcément constante.

Exercice 11.46 ♡♡

On considère un méridien terrestre et l'on suppose que la température au sol varie continument sur ce méridien. Montrez l'existence de deux points antipodaux sur ce méridien où la température est la même.

Solution : À chaque point du méridien, on associe l'angle θ entre le pôle nord et ce point. Considérons la fonction $f:[0,2\pi]\mapsto\mathbb{R}$ où $f(\theta)$ représente la température au point d'angle θ. Par hypothèse, cette fonction est continue et $f(0)=f(2\pi)=\mathrm{T}$ où T est la température au pôle nord. Considérons la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $g(\theta)=f(\theta+\pi)-f(\theta)$. Comme g est continue et que $g(0)=f(\pi)-f(0)=f(\pi)-f(2\pi)=-g(\pi)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha\in]0,\pi[$ tel que $g(\alpha)=0$, c'est-à-dire $f(\alpha+\pi)=f(\alpha)$.

Exercice 11.47 ♡♡

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Solution :
Introduisons la fonction g donnée par $\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=f(x)-x$. g est strictement décroissante et donc injective et ne s'annule donc qu'une fois au plus. Supposons que g ne s'annule pas. Alors g est ou strictement positive ou strictement négative.

1. Si $g>0$ alors $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)>x$ et donc $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ ce qui est absurde car $\lim_{+\infty} f=\inf_{\mathbb{R}} f$.
2. Si $g<0$ alors $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)<x$ et donc $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$ ce qui est absurde car $\lim_{-\infty} f=\sup_{\mathbb{R}} f$.

On aboutit dans les deux cas à une contradiction et nécessairement g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f admet un et un seul point fixe.

Exercice 11.48 ♡♡

Soit une fonction $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ continue sur le segment $[0,1]$. Soient deux réels $p,q>0$. Montrer qu'il existe $x_0\in[0,1]$ tel que

$$pf(0)+qf(1)=(p+q)f(x_0)$$

Solution : Introduisons la fonction définie par $\varphi(x)=(p+q)f(x)-pf(0)-qf(1)$.
Cette fonction φ est continue sur le segment $[0,1]$ et

$$\varphi(0)=q(f(0)-f(1)),\quad \varphi(1)=p(f(1)-f(0))$$

Comme $p,q>0$, $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ sont de signes opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0\in[0,1]$ tel que $\varphi(x_0)=0$, ce qui prouve le résultat.

Exercice 11.49 ♡♡

Soit une fonction $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ continue et croissante. On suppose qu'il existe un réel $a>0$ tel que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \left|f(x)-f(y)\right|\geqslant a\left|x-y\right|$$

Montrer que la fonction f est bijective.

Solution :

1. Montrons que f est injective : soient deux réels $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $f(x)=f(y)$. Alors
$$|x-y|\leqslant\frac{1}{a}\left|f(x)-f(y)\right|\leqslant 0$$
et donc $x=y$.
2. Montrons que la fonction f n'est pas majorée. Par l'absurde : si f était majorée alors d'après le théorème de la limite monotone, elle tendrait vers une limite finie l lorsque $x\to+\infty$. Mais alors, il existerait $c>0$ tel que $\forall x\geqslant c$, $l-1\leqslant f(x)\leqslant l$. On aurait alors ,
$$\forall x\geqslant c,\quad |f(x)-f(c)|\geqslant a|x-c|\implies |x-c|\leqslant\frac{1}{a}|f(x)-f(c)|\leqslant\frac{1}{a}$$
ce qui est impossible car pour x assez grand, $|x-c|>\dfrac{1}{a}$. On montre de même que f n'est pas minorée.

3. *Par conséquent, la fonction f est surjective. En effet, Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) \leqslant t \leqslant f(b)$. Mais alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = t$.*

Exercice 11.50 ♡♡

Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ une fonction continue.

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $f(a_n) = a_n^n$;*
2. *On suppose maintenant que f est décroissante strictement. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $a_n \in [0,1]$ trouvé dans la question précédente est unique à vérifier $f(a_n) = a_n^n$ et étudier la suite (a_n).*

Solution :

1. *Soit $n > 0$. Posons $g_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x^n \end{cases}$. Alors la fonction g_n est continue sur $[0,1]$ et $g_n(0) = f(0) \geqslant 0$, $g_n(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $g_n(a_n) = 0$ et donc $f(a_n) = a_n^n$.*
2. *Si f est continue et strictement décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue et strictement décroissante également. Par conséquent, g_n réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[f(1)-1, f(0)]$. Comme $0 \in [f(1)-1, f(0)]$, 0 possède un unique antécédent a_n par g_n. Calculons $g_{n+1}(a_n) = f(a_n) - a_n^{n+1} = a_n^n - a_n^{n+1} = a_n^n(1-a_n) \geqslant 0$ (car $g_n(a_n) = 0 \implies f(a_n) = a_n^n$). Comme g_{n+1} est décroissante, $a_n \leqslant a_{n+1}$ (par l'absurde, si $a_{n+1} < a_n$, on aurait $0 = g_{n+1}(a_{n+1}) > g_{n+1}(a_n) \geqslant 0$). (Un petit coup d'œil sur le tableau de variations "évite" un raisonnement par l'absurde).*

   La suite (a_n) est croissante et majorée par 1, elle converge donc d'après le théorème de la limite monotone vers un réel $l \in [0,1]$.

Exercice 11.51 ♡♡♡

Soient deux fonctions continues $f, g : [0,1] \mapsto [0,1]$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. On note K l'ensemble des points fixes de f.

1. *Montrer que K est stable par g.*
2. *Montrer que K possède un plus petit élément x_0.*
3. *On suppose que $\forall x \in \mathrm{K}$, $g(x) \geqslant x$. Montrer que la suite définie par x_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers un point fixe commun à f et g.*

Solution :

1. *Soit $x \in \mathrm{K}$. Montrons que $g(x) \in \mathrm{K}$. Calculons pour cela $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$.*
2. *K est non vide, voir l'exercice 11.44 et minoré par 0 donc K possède une borne inférieure x_0. Montrons que $x_0 \in \mathrm{K}$. En appliquant la propriété de caractérisation de la borne inférieure, on construit une suite (x_n) de points de K qui converge vers x_0. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n$, et que f est continue au point x_0, il vient en passant à la limite que $f(x_0) = x_0$, donc $x_0 \in \mathrm{K}$.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+1} = g(x_n) \geqslant x_n$ et donc la suite (x_n) est croissante majorée par 1. Elle converge d'après le théorème de la limite monotone vers $\ell \in [0,1]$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n$ (démonstration facile par récurrence), et que f est continue au point ℓ, on trouve que $f(\ell) = \ell$. Comme également $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$, on a aussi $g(\ell) = \ell$ et donc ℓ est un point fixe commun à f et g.*

Remarque : On pourrait se poser la question de savoir si dans le cas général il existe toujours un point fixe commun à f et g. Cette conjecture a été émise en 1954. La réponse (négative) a été apportée en 1969. Le lecteur curieux pourra se reporter à la (longue) discussion : http ://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php ?4,546479

Exercice 11.52 ♡♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

Indication 11.9 : Résoudre d'abord l'exercice pour $n = 2$ en faisant un dessin. Passer ensuite au cas général.

Solution : Notons

$$t = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Montrons qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $t \leqslant f(x_i)$. Par l'absurde, si $\forall k \in [1,n], f(x_k) < t$, en additionnant ces inégalités, on aurait

$$nt = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) < nt$$

ce qui est absurde. On montre de même qu'il existe $j \in [1,n]$ tel que $t \geqslant f(x_j)$.
Par conséquent, $t \in [f(x_j), f(x_i)]$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, il existe $c \in [x_j, x_i]$ tel que $t = f(c)$.

Exercice 11.53 ♡♡♡

Soit une fonction $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0$. On suppose que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$ avec $0 < l < 1$. Montrez que la fonction f admet un point fixe.

Solution : Considérons un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que $l < k < 1$. Comme $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $\frac{f(x)}{x} \leqslant k$. Donc pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant kx$. Considérons la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. On a $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$, et puisque $\varphi(x) \leqslant (k-1)x$ pour $x \geqslant A$, et que $(k-1) < 0$, $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Donc il existe $B > A$ tel que $\varphi(B) < 0$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et B, on montre l'existence d'un zéro de la fonction φ et donc d'un point fixe de la fonction f.

Exercice 11.54 ♡♡♡

On considère une fonction contractante f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k|x-y|$$

avec $0 \leqslant k < 1$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + k|x|$$
2. On considère la fonction
$$g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}\right.$$
Montrer que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et que $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que f possède un unique point fixe :
$$\exists! x_0 \in \mathbb{R} \ \text{ tq } f(x_0) = x_0$$

Solution :

1. Utilisons la minoration de l'inégalité triangulaire et le fait que f est contractante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|f(x)| - |f(0)| \leqslant k|x-0|$$
2. En utilisant la majoration précédente, pour $x > 0$, on obtient que :
$$g(x) \leqslant |f(0)| + (k-1)x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$
et pour $x < 0$,
$$g(x) \geqslant -|f(0)| + (k-1)x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$$
On conclut alors grâce au théorème des gendarmes.
3. Comme $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et que $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $g(A) < 0$ et $g(B) > 0$. On applique alors le théorème des valeurs intermédiaires à g sur le segment $[A,B]$ et on montre qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$. Le réel x_0 est un point fixe de f. Il est unique car si x_0' est un autre point fixe de f alors comme f est une fonction contractante, il vient que
$$\left|x_0 - x_0'\right| = \left|f(x_0) - f\left(x_0'\right)\right| \leqslant k\left|x_0 - x_0'\right|$$
ce qui est impossible, à moins que $x_0 = x_0'$, car $k \in [0,1[$.

11.5.6 Continuité sur un segment

Exercice 11.55 ♡

Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continues telles que* $\forall x\in[a,b],\quad f(x)<g(x)$. *Montrer qu'il existe* $\alpha>0$ *tel que*

$$\forall x\in[a,b],\quad f(x)\leqslant g(x)-\alpha.$$

Solution :
Considérons la fonction définie sur $[a,b]$ *par* $\theta=g-f$.*La fonction* θ *est continue et strictement positive sur* $[a,b]$. *Elle possède donc un minimum strictement positif atteint en un certain point* $c\in[a,b]$. *Posons :* $\alpha=\theta(c)=g(c)-f(c)>0$. *Il est clair que :* $\forall x\in[a,b],\quad f(x)\leqslant g(x)-\alpha$.

Exercice 11.56 ♡

Soient deux fonctions $f,g:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ *continues telles que*

$$\forall x\in[0,1],\ 0<f(x)<g(x)$$

Montrez qu'il existe un réel $k>1$ *tel que*

$$\forall x\in[0,1],\ g(x)\geqslant kf(x)$$

Solution : *Considérons la fonction* φ *définie sur le segment* $[0,1]$ *par* $\varphi(x)=g(x)/f(x)$. *Comme la fonction* f *ne s'annule pas,* φ *est définie et continue sur le segment* $[0,1]$ *et possède donc un minimum. Il existe* $x_0\in[0,1]$ *tel que* $\forall x\in[0,1],\ \varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)$. *Posons* $k=\varphi(x_0)$. *Comme* $f(x_0)<g(x_0)$, $k>1$ *et alors* $\forall x\in[0,1],\ g(x)/f(x)\geqslant k$ *d'où le résultat.*

Exercice 11.57 ♡

Soit une fonction f *continue sur* $\mathbb{R}$. *On suppose que*

$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty \text{ et } f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$$

Montrez que la fonction f *possède un minimum.*

Solution : *Soit* $x_0\in\mathbb{R}$. *Posons* $\mathrm{A}=f(x_0)$. *Comme* $f(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}+\infty$, *d'après la définition de la limite, il existe* $\mathrm{B}>0$ *tel que* $\forall x\in\mathbb{R},\ |x|\geqslant\mathrm{B}\implies f(x)\geqslant\mathrm{A}$. *On a en particulier* $x_0\in[-\mathrm{B},\mathrm{B}]$. *La fonction* f *est continue sur le segment* $[-\mathrm{B},\mathrm{B}]$ *et donc possède un minimum sur ce segment :*

$$\exists c\in[-\mathrm{B},\mathrm{B}]\mid\forall x\in[-\mathrm{B},\mathrm{B}],\ f(c)\leqslant f(x)$$

Montrons que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geqslant f(c)$ *ce qui montrera que* $f(c)$ *est un minimum de* f *sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $x\in\mathbb{R}$. *Si* $x\in[-\mathrm{B},\mathrm{B}]$, *on a bien* $f(c)\leqslant f(x)$. *Si* $x\not\in[-\mathrm{B},\mathrm{B}]$, *alors* $f(x)\geqslant\mathrm{A}=f(x_0)$ *et comme* $x_0\in[-\mathrm{B},\mathrm{B}]$, *il vient que* $f(x)\geqslant f(x_0)\geqslant f(c)$.

Exercice 11.58 ♡

Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ *une application T-périodique* $(\mathrm{T}>0)$ *et continue. Montrer que* f *est bornée.*

Solution : *Considérons la restriction de* f *au segment* $[0,\mathrm{T}]$. *Elle est continue sur ce segment, et donc est bornée :* $\exists\mathrm{M}>0:\quad\forall x\in[0,\mathrm{T}],\quad\left|f(x)\right|\leqslant\mathrm{M}$. *Mais alors, si* $x\in\mathbb{R}$, *avec* $y=\mathrm{E}(\frac{x}{\mathrm{T}})$, *on a* $n\mathrm{T}\leqslant x<(n+1)\mathrm{T}$ *et donc* $f(x)=f(x-n\mathrm{T})$ *et puisque* $x-n\mathrm{T}\in[0,\mathrm{T}]$, $\left|f(x)\right|\leqslant\mathrm{M}$.

Exercice 11.59 ♡

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *bornée et* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continue. Montrer que* $g\circ f$ *et* $f\circ g$ *sont bornées.*

Solution :
Comme f *est bornée sur* $\mathbb{R}$, *il existe* $\mathrm{M}>0$ *tel que pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\left|f(x)\right|\leqslant\mathrm{M}$. *En particulier,* $\forall x\in\mathbb{R},\quad f\big(g(x)\big)\leqslant\mathrm{M}$ *donc* $f\circ g$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$. *Par ailleurs* $f(\mathbb{R})\subset[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$ *et* g *est continue sur* $[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$ *donc* g *est majorée et minorée sur* $[-\mathrm{M},\mathrm{M}]$ *et* $g\circ f$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 11.60 ♡♡

Soient deux fonctions continues f *et* g *sur le segment* $[0,1]$ *vérifiant :*

$$\forall x\in[0,1],\quad 0<f(x)<g(x)$$

On considère une suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$ et l'on définit la suite (a_n) par

$$a_n = \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)^n$$

Déterminer la limite de la suite (a_n).

Indication 11.9 : En utilisant le fait que $[0,1]$ est un segment*, montrer que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant k < 1$ sur $[0,1]$.*

Solution : *La fonction $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur ce segment : il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $\sup_{x\in[0,1]} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = k < 1$. Donc*

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 < \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant k < 1$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant k^n$ et comme $k < 1$, la suite géométrique (k^n) converge vers 0. D'après le théorème des gendarmes, la suite (a_n) converge vers 0.

Exercice 11.61 ♡♡

On considère une réunion de deux segments $\mathrm{K} = [a,b] \cup [c,d]$ avec $a < b < c < d$. Soit $f : \mathrm{K} \mapsto \mathrm{K}$ une fonction continue sur l'ensemble K. On suppose que $\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2$,

$$x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

On considère la fonction φ définie sur K par $\varphi(x) = |f(x) - x|$. Montrez que la fonction φ possède un minimum sur K. Montrez par l'absurde que ce minimum est nul. En déduire que la fonction f admet un unique point fixe $x_0 \in \mathrm{K}$.

Solution : *La fonction φ est continue comme somme et valeur absolue de fonctions continues. Elle est donc continue en tout point de l'ensemble K. Comme la fonction φ est continue sur le segment $[a,b]$, elle possède un minimum $\mathrm{M}_1 = \varphi(x_1)$ sur $[a,b]$ avec $x_1 \in [a,b]$. De même, elle possède un minimum M_2 sur le segment $[c,d]$ avec $\mathrm{M}_2 = \varphi(x_2)$ où $x_2 \in [c,d]$. On pose $m = \min\{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2\}$ et on vérifie que M est un minimum de la fonction φ sur K. Donc on a montré que*

$$\exists x_0 \in \mathrm{K} : \quad \forall x \in \mathrm{K},\ \varphi(x_0) \leqslant \varphi(x)$$

Si par l'absurde, $\varphi(x_0) \neq 0$, en utilisant l'inégalité de l'énoncé, puisque $f(x_0) \neq x_0$, et $f(x_0) \in \mathrm{K}$, on aurait

$$\left| f\big(f(x_0)\big) - f(x_0) \right| < |f(x_0) - x_0|$$

et donc $\varphi\big(f(x_0)\big) < \varphi(x_0)$ ce qui est impossible. Par conséquent, $\varphi(x_0) = 0$ et donc $f(x_0) = x_0$. Montrons l'unicité du point fixe. S'il existait deux points fixes $x_1 \in \mathrm{K}$ et $x_2 \in \mathrm{K}$, avec $x_1 \neq x_2$ on aurait

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$$

et donc $|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$ une absurdité.

Remarque : l'hypothèse f continue est superflue, puisque f est lipschitzienne.

11.5.7 Fonctions Lipschitziennes

Exercice 11.62 ♡♡

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et une constante $\mathrm{K} > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leqslant 1 \implies \left| f(x) - f(y) \right| \leqslant \mathrm{K}|x - y|$$

Montrer que f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Solution : *Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $x < y$. On peut considérer $x_0 = x$, $x_1 = x + 1$, …, $x_k = x + k$, $x_n = y$ avec $y - x_{n-1} \leqslant 1$. Alors*

$$\left|f(y)-f(x)\right| = \left|f(y)-f(x_{n-1})+f(x_{n-1})-f(x_{n-2})+\dots+f(x_1)-f(x)\right| \leqslant \left|f(y)-f(x_{n-1})\right|+\left|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})\right|+\dots+\left|f(x_1)-f(x)\right|$$

et donc

$$\left| f(y) - f(x) \right| \leqslant \mathrm{K}\big[(x_1 - x) + (x_2 - x_1) + \dots + (y - x_n)\big] = \mathrm{K}(y - x)$$

Exercice 11.63 ♡♡

Soit un réel $a>0$ et une fonction $f:[a,+\infty[\mapsto\mathbb{R}$ croissante. On suppose que la fonction f admet une limite finie l lorsque $x\to+\infty$ et que la fonction

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}[a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{array}\right.$$

est croissante. Montrez que la fonction f est constante.

Solution : *Montrons que f est constante par l'absurde. S'il existe $b>a$ tel que $f(b)\neq f(a)$, puisque la fonction f est croissante, on aurait $f(b)>f(a)$. Soit $x\geqslant b$. Comme la fonction g est croissante,*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Donc $f(x)\geqslant(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}+f(a)$. Posons $\alpha=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$. On a $\forall x\geqslant b$, $f(x)\geqslant\alpha(x-a)+f(a)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et donc $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, une absurdité.

Exercice 11.64 ♡♡

On considère des fonctions réelles f et g définies et continues sur $[0,1]$. On définit une fonction φ par :

$$\varphi(t)=\sup_{x\in[0,1]}\big(f(x)+tg(x)\big).$$

1. *Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que φ est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

Solution :

1. *Soit $t\in\mathbb{R}$. Comme f et g sont continues sur le segment $[0,1]$, la fonction $\theta:x\mapsto f(x)+tg(x)$ est continue sur $[0,1]$. θ est donc bornée sur $[0,1]$ et atteint ses bornes. On note x_t un réel élément de $[0,1]$ tel que $\theta(x_t)=\sup_{x\in[0,1]}\theta(t)$. On a alors : $\varphi(t)=\theta(x_t)$ et φ est définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soient $t,t'\in\mathbb{R}$. On a :*

$$\varphi(t)-\varphi(t')=tg(xt)-t'g(xt)+(f(xt)-f(xt')+t'g(xt')-t'g(xt))=tg(xt)-t'g(xt)$$

et de même

$$\varphi(t')-\varphi(t)=t'g(xt')-tg(xt')$$

Donc

$$|\varphi(t)-\varphi(t')|=\max(|tg(xt)-t'g(xt)|,|t'g(xt')-tg(xt')|)=\mathrm{M}|t-t'|.$$

On prouve ainsi que φ est Lipschitzienne de rapport M.

Exercice 11.65 ♡♡

Soient deux fonctions $f,g:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ lipschitziennes. Montrez que la fonction fg est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Solution : *Comme les fonctions f et g sont continues sur le segment $[a,b]$, elles sont bornées. Notons $\mathrm{M}_f=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ et $\mathrm{M}_g=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Comme f et g sont lipschitziennes sur $[a,b]$, il existe deux constantes k_f et k_g telles que*

$$\forall(x,y)\in[a,b]^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant k_f|x-y|\text{ et }|g(x)-g(y)|\leqslant k_g|x-y|$$

Posons alors

$$\mathrm{K}=\mathrm{M}_g k_f+\mathrm{M}_f\mathrm{K}_g$$

Vérifions que fg est K-lipschitzienne. Soit $(x,y)\in[a,b]^2$. Écrivons

$$\begin{aligned}|fg(x)-fg(y)|&=\Big|g(x)\big[f(x)-f(y)\big]+f(y)\big[g(x)-g(y)\big]\Big|\\&\leqslant|g(x)||f(x)-f(y)|+|f(y)||g(x)-g(y)|\\&\leqslant\mathrm{M}_g k_f|x-y|+\mathrm{M}_f k_g|x-y|\\&\leqslant\mathrm{K}|x-y|\end{aligned}$$

11.5.8 Continuité uniforme

Exercice 11.66 ♡

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *continue et périodique. Montrez que la fonction* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Solution : *Comme la fonction* f *est périodique, il existe* $T > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$. *Considérons le segment* $[0, 2T]$. *Comme la fonction* f *est continue sur ce segment, d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur ce segment. Donc il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$\forall (x, y) \in [0, 2T]^2, \quad |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\eta' = \min(\eta, T) > 0$. *Considérons maintenant* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $|x - y| \leqslant \eta'$, *avec pour simplifier* $x \leqslant y$. *Il existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tels que* $x - nT \in [0, T]$ *et* $y - nT \in [0, 2T]$ *(il suffit de poser* $n = E(x/T)$*). Alors puisque* $(x - nT, y - nT) \in [0, 2T]^2$ *et* $|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| \leqslant \eta$, *on a* $|f(x - nT) - f(y - nT)| \leqslant \varepsilon$. *Mais puisque* $f(x - nT) = f(x)$ *et* $f(y - nT) = f(y)$, *il vient finalement que* $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 11.67 ♡♡

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ *continue sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$$

Montrez que la fonction f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Solution : *Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, *il existe* $A > 0$ *tel que* $\forall x \geqslant A,\ |f(x) - l| \leqslant \varepsilon/2$. *La fonction* f *est continue sur le segment* $[0, A+2]$ *et donc d'après le théorème de Heine, est uniformément continue sur ce segment. Donc il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$\forall (x, y) \in [0, A+1]^2 \ |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\eta' = \min(\eta, 1)$. *Soit maintenant* $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ *tels que* $|x - y| \leqslant \eta'$. *Étudions les cas suivants :*

– *si* $(x, y) \in [0, A+1]^2$, *on a bien puisque* $|x - y| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ *;*
– *si par exemple* $x \in [0, A+1]$ *et* $y \in [A+1, +\infty[$. *Comme* $|x - y| \leqslant \eta' \leqslant 1$, *on a* $x \in [A, A+1]$ *et* $y \in [A+1, +\infty[$, *donc* $x, y \in [A, +\infty[$ *et donc*

$$|f(x) - f(y)| = |[f(x) - l] + [l - f(y)]| \leqslant |f(x) - l| + |f(y) - l| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Donc dans tous les cas, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. *La fonction est bien uniformément continue.*

Exercice 11.68 ♡♡♡

Soit une fonction $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$. *On définit la suite de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrez que cette suite converge vers 0.

Solution : *Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme la fonction* f *est continue sur le segment* $[0, 1]$, *elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Donc il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \ |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $N = E(1/\eta) + 1$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant N$. *Écrivons* u_n *en groupant deux termes successifs : Lorsque* n *est pair* $(n = 2p)$*, on peut écrire*

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \left[f\left(\frac{2k}{n}\right) - f\left(\frac{2k+1}{n}\right) \right]$$

Or puisque $n \geqslant N$, $|(2k+1)/n - 2k/n| \leqslant \eta$ *et par conséquent,*

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

Lorsque n *est impair, il reste un terme solitaire, que l'on peut majorer en introduisant* $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ *(la fonction* f *est continue sur le segment* $[0, 1]$ *donc* M *existe). Notons* $n = 2p + 1$. *Alors*

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \left[f\left(\frac{2k}{n}\right) - f\left(\frac{2k+1}{n}\right) \right] + \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

et donc

$$|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{n}$$

et ici aussi lorsque $n \geqslant N'$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$.

11.5.9 Equations fonctionnelles

Exercice 11.69 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et soit $k \in \mathbb{N}^*$, $k \neq 1$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(kx) = f(x).$$

Montrer que f est une fonction constante.

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par une récurrence facile que $f(x) = f\left(\frac{x}{k^n}\right)$. De plus, comme f est continue en 0, en appliquant le théorème de composition d'une suite par une fonction, on montre que : $f\left(\frac{x}{k^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$ donc par unicité de la limite $f(x) = f(0)$. On en déduit que f est constante. Réciproquement, on vérifie que les fonctions constantes sont solutions.

Exercice 11.70 ♡

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = -f(x)$$

Solution : *Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Considérons la suite $x_n = \dfrac{x}{2^n}$. On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = (-1)^n f(x)$. Mais puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que f est continue en 0, $f(x) = (-1)^n f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$. Donc $f(x) = f(0)$. De plus, comme $f(0) = -f(0)$, on a $f(0) = 0$ et $f = 0$. Réciproquement la fonction nulle vérifie l'hypothèse.*

Exercice 11.71 ♡♡

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x^2) = f(x)$$

Déterminer la fonction f.
Indication 11.9 : Soit $x > 0$, considérer la suite récurrente

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Solution : *La suite récurrente de l'énoncé s'étudie classiquement : si $x > 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Comme la fonction f est supposée continue, si $x > 0$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$. Mais puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_{n+1}) = f(u_{n+1}^2) = f(u_n)$, la suite $\big(f(u_n)\big)$ est constante. Par conséquent, $f(x) = f(1)$.*
On a montré que la fonction f est constante sur $]0, +\infty[$. Ensuite, puisque la fonction f est continue en 0, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et comme $\forall x > 0$, $f(x) = f(1)$, il vient que $f(0) = f(1)$. Par conséquent les seules fonctions vérifiant l'hypothèse de l'énoncé sont les fonctions constantes.
Réciproquement, les fonctions constantes conviennent.

Exercice 11.72 ♡

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier la suite*

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$$

2. *Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x+1) = f(x)$$

Solution :

1. *La suite s'étudie classiquement. La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x-1}{2}$ est strictement croissante, admet comme seul point fixe $x_0 = -1$ et vérifie $h(x) \geqslant x$ si $x \in]-\infty, -1]$ et $h(x) \leqslant x$ si $x \in [-1, +\infty[$. Donc si $u_0 \in]-\infty, -1]$, la suite (u_n) est croissante et majorée par -1. Elle converge alors vers l'unique point fixe de h. De même, si $u_0 \in [-1, +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par -1 et converge aussi vers -1. En résumé : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.*

2. Puisque f est continue en -1, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(-1)$. Mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_{n+1}) = f(2u_{n+1}+1) = f(u_n)$ et par conséquent, la suite $f(u_n)$ est constante. On en déduit que $f(x) = f(-1)$ et donc f est une fonction constante. Réciproquement, les fonctions constantes vérifient la propriété de l'énoncé.

Exercice 11.73 ♡♡

On considère une fonction $f :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue au point 1. On suppose que

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[,\ f(xy) = f(x) + f(y)$$

Déterminez toutes les fonctions f vérifiant ces propriétés.

Solution : Considérons une fonction f vérifiant les propriétés de l'énoncé. Définissons alors la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\circ\exp(x) \end{cases}$$

La fonction g est continue au point 0 et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+y) = g(x) + g(y)$$

en prenant $x = y = 0$, on montre que $g(0) = 0$. Si $m \in \mathbb{N}^*$ alors, en posant $a = g(1)$, on a : $g(m) = ma$ et $a = g(1) = g\left(m.\frac{1}{m}\right) = mg\left(\frac{1}{m}\right)$ donc $g\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{a}{m}$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, $g(r) = ar$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est clair que comme $0 = g(x-x) = g(x) + g(-x)$, alors $g(-x) = -g(x)$. Donc : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = a.r$. Montrons que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}$. Puisque $g(x_0+h) = g(x_0) + g(h)$, on a

$$|g(x_0+h) - g(x_0)| = |g(h) - g(0)|$$

et la continuité en x_0 s'obtient facilement de la continuité de g en 0. Comme les rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$, il existe $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Mais comme g est continue en x, il vient que $g(x) = g(\lim r_n) = \lim g(r_n) = \lim ar_n = ax$. Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax$ et alors $\forall y \in]0,+\infty[$, $f(x) = a\ln x$. On vérifie réciproquement que toutes ces fonctions vérifient les conditions de l'énoncé.

Exercice 11.74 ♡♡

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$.*
2. *On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.*
3. *On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Déterminer la fonction f.*

Solution :

1. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$, il vient que la fonction f est positive.
2. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors si $z \in \mathbb{R}$, $f(z) = f(x)f(z-x) = 0$, et donc f est la fonction nulle.
3. Supposons donc que $f \neq 0$. Posons alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$. Alors g vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) = g(x) + g(y)$$

On sait alors qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ (voir l'exercice 11.73) tel que $g(x) = ax$. Mais alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax} = a^x$. On vérifie réciproquement qu'une telle fonction vérifie les hypothèses de l'énoncé.

Exercice 11.75 ♡♡♡

On définit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

1. *Montrer que si $(f,g) \in \mathrm{E}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $\lambda f + \mu g \in \mathrm{E}$.*
2. *On suppose que $f \in \mathrm{E}$ vérifie $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $f = 0$.*
3. *Montrer que les éléments de E sont les fonctions affines.*

Indication 11.9 : *Pour la seconde question, déterminer un ensemble* A *sur lequel on peut dire que* f *s'annule. Montrer que cet ensemble est dense et utiliser le raisonnement par densité.*
Pour la troisième question, considérer $g(x) = f(x) - [f(0) + x(f(1) - f(0)]$.

Solution :

1. *Soit* $(f,g) \in E^2$ *et* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, *alors*

$$(\lambda f + \mu g)\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\lambda\left(f(x) + f(y)\right) + \mu\left(g(x) + g(y)\right)}{2} = \frac{(\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(y)}{2}$$

et donc $\lambda f + \mu g \in E$.

2. *On montre que* $f(\frac{1}{2}) = 0$, *puis que* $f(\frac{1}{4}) = f(\frac{3}{4}) = 0$, *et ensuite, que* f *s'annule sur l'ensemble*

$$Z = \{\frac{k}{2^n}; n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant k \leqslant 2^n\}$$

Cet ensemble est dense dans $[0,1]$. *En effet, considérons* $x, y \in [0,1]$ *tels que* $x < y$. *Comme* $1/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $1/2^n < y - x$. *Considérons l'ensemble* $A = \left\{k \in [\![0, 2^n]\!] \mid k/2^n \geqslant x\right\}$. *L'ensemble* A *est non vide et possède un plus petit élément* k_0. *Alors*

$$y - \frac{k_0}{2^n} > x + \frac{1}{2^n} - \frac{k_0}{2^n} = x - \frac{k_0 - 1}{2^n} > 0$$

par définition de k_0. *Donc* $x \leqslant \frac{k_0}{2^n} < y$ *et* Z *est bien dense dans* $[0,1]$. *Si alors* $x \in [0,1]$, *on peut construire une suite* x_n *de points de* Z *qui converge vers* x. *Mais puisque* $\forall n \geqslant 1$, $f(x_n) = 0$, *et que* f *est continue au point* x, *on obtient par l'image continue d'une suite que* $f(x) = 0$. *Donc* f *est la fonction identiquement nulle sur* $[0,1]$.

3. *Si* $f \in E$, *alors d'après la première question, la fonction* $\varphi(x) = f(x) - [f(0) + x(f(1) - f(0))]$ *est encore dans* E *(car une fonction affine est dans* E *et la différence de deux fonctions de* E *est encore une fonction de* E*). Puisque* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, *d'après la seconde question, il vient que* $\varphi = 0$, *et donc que* f *est affine. Réciproquement, toute fonction affine est bien une fonction de* E.

11.5.10 Bijection continue

Exercice 11.76 ♡

Soit $f : \begin{cases} [2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - 4x + 8} \end{cases}$.

1. *Prouver que* f *réalise une bijection de* $I = [2,+\infty[$ *sur son image (que l'on précisera).*
2. *Prouver que la bijection réciproque de* f *est continue.*
3. *Déterminer cette bijection réciproque.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que sur* $[2,+\infty[$, *la fonction* $x \mapsto x^2 - 4x + 8$ *est strictement croissante. Comme* f *est la composée cette fonction par la fonction racine carrée qui est elle aussi strictement croissante,* f *strictement croissante sur* $I = [2,+\infty[$. *De plus* $f(I) = [2,+\infty] = I$. *On en déduit que* f *réalise une bijection de* I *sur* I.
2. *La fonction* f *est polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}$. *On a montré que* f *est strictement croissante sur* I. *Par application du théorème de la bijection, on en déduit que* f^{-1} *est continue sur* $[2,+\infty[$
3. *Soit* $y \in [4,+\infty[$. *On a :* $y = x^2 - 4x + 8 \iff y = (x-2)^2 + 4 \iff x = 2 \pm \sqrt{y^2 - 4}$. *Si* $x \in [2,+\infty[$, *nécessairement* $x = 2 + \sqrt{y^2 - 4}$ *et* $\boxed{f^{-1} : \begin{cases} [2,+\infty[& \longrightarrow & [2,+\infty[\\ y & \longmapsto & 2 + \sqrt{y^2 - 4} \end{cases}}$

Exercice 11.77 ♡♡

Soit une fonction définie sur $\mathbb{R}$ *telle qu'il existe* $k > 0$ *tel que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

1. *Montrez que* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *;*
2. *On définit la fonction* φ *sur* $\mathbb{R}$ *par* $\varphi(x) = f(x) - kx$. *Montrez que la fonction* φ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$ *;*

3. *On suppose qu'il existe deux réels $a < b$ tels que*

$$\forall x \in [a,b],\ ka < f(x) < kb$$

Montrez qu'il existe un unique réel α dans $[a,b]$ vérifiant

$$f(\alpha) = k\alpha$$

Solution :

1. *Comme f est k-lipschitzienne (l'hypothèse de l'énoncé est plus forte), on montre facilement (voir le cours) que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$. Calculons :*

$$\begin{aligned}\varphi(y) - \varphi(x) &= f(y) - f(x) - k(y-x)\\ &\leqslant |f(y) - f(x)| - k(y-x)\\ &< k|y-x| - k(y-x)\\ &< 0\end{aligned}$$

   Donc la fonction φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. *La fonction φ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a,b]$. D'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de l'intervalle $[a,b]$ vers l'intervalle $[\varphi(b),\varphi(a)]$. Mais $\varphi(a) = f(a) - ka > 0$ et $\varphi(b) = f(b) - kb < 0$ par hypothèse. Donc puisque $0 \in [\varphi(b),\varphi(a)]$, 0 possède un unique antécédent α par φ dans $[a,b]$. En conclusion, il existe un unique $\alpha \in [a,b]$ tel que $\varphi(\alpha) = k\alpha$.*

Chapitre 12

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

Pour bien aborder ce chapitre

Ce chapitre est une introduction à l'une des plus fabuleuses invention de l'homme, celle du calcul différentiel, dans le cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.
L'histoire du calcul différentiel débute en grande partie avec Galilée et Newton qui avaient besoin de nouveaux outils mathématiques pour développer les notions de vitesse et d'accélération d'un mouvement. Mais la possibilité de calculer la pente de la tangente à une courbe était essentielle dans d'autres problèmes comme dans ceux d'extremum ou pour des questions plus appliquées. Newton et Leibniz furent les premiers à tenter de formaliser la notion de dérivée. Ils se disputèrent la paternité de cette invention mais il semble certain maintenant qu'ils l'ont découvert de manière indépendante et chacun via des formalismes différents. Comme expliqué dans l'introduction du chapitre 10, la notion de limite n'a été développée que bien plus tard, au $19^{\text{ème}}$ siècle par Cauchy et Weierstrass aussi la formalisation de la dérivation par Newton et Leibniz souffrait de nombreuses lacunes. Newton refusa d'ailleurs de publier son travail et les écrits de Leibniz étaient obscurs et difficiles à comprendre. Lagrange, un siècle plus tard introduit le terme de « dérivée » ainsi que la notation f'.
Après avoir défini ce qu'est une fonction dérivable ainsi que sa dérivée, nous démontrerons les règles de calcul des dérivées que vous connaissez depuis le lycée. Nous verrons en particulier que la dérivée permet d'approcher une fonction donnée par une fonction affine (voir le théorème

page 471). Nous nous intéresserons aux propriétés globales des fonctions dérivables. Le théorème de Rolle 12.9 page 475 et celui des accroissements finis 12.10 page 476 seront d'un usage constant en analyse. L'inégalité des accroissements finis 12.11 page 477 qui découle du théorème du même nom est une véritable « machine » à fabriquer des inégalités. Des accroissements finis découle aussi le caractère k-Lipschitzien des fonctions dérivables, ce qui permet d'appliquer à celles pour qui $k \in]0,1[$ le très important théorème du point fixe 3.6 page 1224. Le théorème de dérivation de la bijection réciproque 12.7 page 474 permettra de justifier les démonstrations effectuées dans le chapitre sur les fonctions usuelles. Nous continuerons cette section par une étude des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$ et nous la terminerons par une introduction aux fonctions convexes. Ce dernier outil servira aussi à construire de nombreuses inégalités.

12.1 Dérivée en un point, fonction dérivée

Dans tout ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Les fonctions considérées sont définies sur I et à valeurs réelles.

12.1.1 Définitions

DÉFINITION 12.1 **Taux d'accroissement**
Soient $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$. On définit le *taux d'accroissement* de la fonction f au point a comme étant la fonction $\Delta_{a,f}$ définie par

$$\Delta_{a,f} : \begin{cases} \mathrm{I}\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

DÉFINITION 12.2 **Fonction dérivable à droite, à gauche**
Soient $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, $a \in \mathrm{I}$ et $\Delta_{a,f}$ le taux d'accroissement de f au point a. On dit que

– f est *dérivable à droite au point a* si et seulement si $\Delta_{a,f}$ admet une limite finie quand x tend vers a à droite de a.
– f est *dérivable à gauche au point a* si et seulement si $\Delta_{a,f}$ admet une limite finie quand x tend vers a à gauche de a.
On note $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$) la limite à droite (respectivement à gauche) de $\Delta_{a,f}$ quand celle ci existe.

DÉFINITION 12.3 **Dérivée en un point**
Soient $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$. On dit que f *est dérivable au point a* si et seulement si son taux d'accroissement $\Delta_{a,f}$ possède une limite finie quand x tend vers a. Cette limite s'appelle le nombre dérivée de f au point a et est noté :

$$f'(a) \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(a)$$

Remarque 12.1 Pour un point a intérieur à I (c'est-à-dire tel qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant $]a-\alpha, a+\alpha[\subset \mathrm{I}$) alors f est dérivable au point a si et seulement si on a simultanément :

1. f est dérivable à droite en a,
2. f est dérivable à gauche en a,
3. $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple 12.1
– Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha x + \beta \end{cases}$. f est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}, \quad f'(a) = \alpha$.
– La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, dérivable à droite et à gauche en 0 mais pas dérivable en 0.
– Par contre la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
– la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
– La fonction racine carrée : $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$ alors

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

par opérations sur les limites. Donc f est bien dérivable en a et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Par contre, cette fonction n'est pas dérivable à droite en 0. En effet, si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$

12.1.2 Interprétations de la dérivée

Interprétation géométrique

Soient $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$. Le plan étant ramené à un repère orthonormé, pour $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$, considérons la droite joignant les points $\mathrm{A}\left|\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}\right.$ et $\mathrm{M}\left|\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix}\right.$. La pente de la droite (AM) est donnée par

$$\Delta_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si la fonction f est dérivable au point $a \in \mathrm{I}$, cette pente a pour limite $f'(a)$ quand x tend vers a. Le vecteur de composante $\left|\begin{matrix} 1 \\ \Delta_a(x) \end{matrix}\right.$ dirige la corde (AM) et tend vers $\left|\begin{matrix} 1 \\ f'(a) \end{matrix}\right.$. La droite passant par A et de pente $f'(a)$ est donc tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$. C'est la position limite des cordes (AM) quand M tend vers A.

Remarque 12.2
– La tangente en a est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.

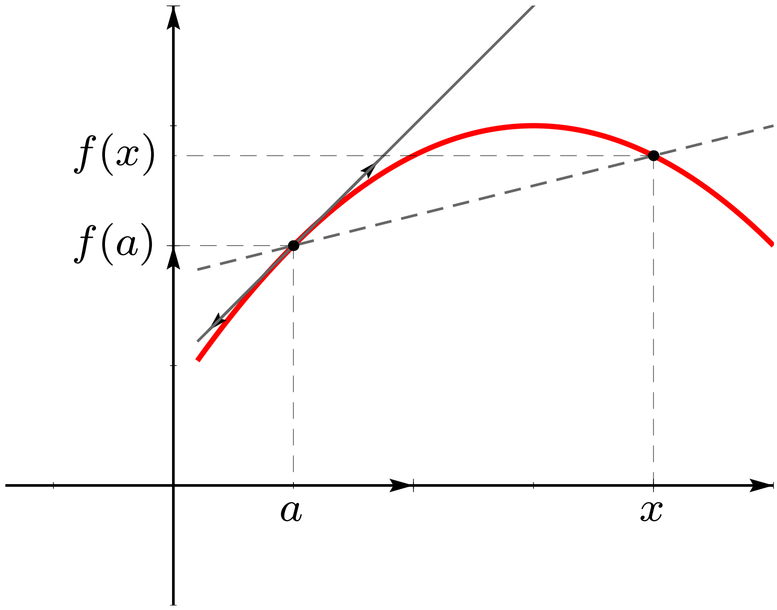


FIGURE 12.1 – Interprétation géométrie du nombre dérivé

- Si f est continue en a et si $\Delta_a(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$, les cordes (AM) ont une position limite verticale encore appelée tangente à la courbe en A.
- Si f n'est pas dérivable en a mais si $\Delta_a(x)$ possède des limites à gauche et à droite en a, A est appelé *point anguleux* de la courbe. C'est un point qui possède deux demi-tangentes de pentes différentes.

Interprétation cinématique

Considérant $f(t)$ comme l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, pour $t \neq a$, $\Delta_{a,f}(t)$ représente la vitesse moyenne entre les instants t et a et sa limite $f'(a)$, notée aussi $\dot{f}(a)$ la vitesse instantanée à l'instant a.

Interprétation analytique

Le théorème suivant permet de caractériser la dérivabilité en un point sans faire intervenir de division. Il sera généralisé en deuxième année pour des fonctions de plusieurs variables.

PROPOSITION 12.1 ♡ **Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable**
Soit $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. La fonction f est dérivable au point $a \in \mathrm{I}$ si et seulement si il existe $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et un réel c tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \boxed{f(x) = f(a) + c(x-a) + \underbrace{(x-a)\varepsilon(x)}_{\underset{x\to a}{o}(x-a)}}$$

On a alors $c = f'(a)$.

Démonstration

$\boxed{\Leftarrow}$ *Pour $x \in \mathrm{I}\setminus\{a\}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$ ce qui montre que f est dérivable au point a et que $f'(a) = c$.*

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que f est dérivable en a. Pour tout $x \in \mathrm{I}\setminus\{a\}$, posons $\varepsilon(x) = \Delta_a(x) - f'(a)$. Comme f est dérivable en a, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Prolongeons alors par continuité ε en a en posant $\varepsilon(a) = 0$. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a alors bien $f(x) = f(a) + c(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $c = f'(a)$.*

12.1.3 Dérivabilité et continuité

THÉORÈME 12.2 **« Dérivabilité implique continuité »**
Soient $f \in \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{I}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration *Comme f est dérivable en a, d'après la proposition 12.1, il existe une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et telle que*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x).$$

Comme $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, par opérations sur les limites, $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f(a)$ et f est bien continue en a.

Remarque 12.3 La réciproque est bien entendu fausse (par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0).

Remarque 12.4
- Si f est dérivable à gauche en $a \in \mathrm{I}$ alors f est continue à gauche en a.
- Si f est dérivable à droite en $a \in \mathrm{I}$ alors f est continue à droite en a.
- Si f possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche en a alors f est continue en a.

12.1.4 Fonction dérivée

DÉFINITION 12.4 **Dérivabilité sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point $a \in \mathrm{I}$. On définit alors la fonction dérivée

$$f' : \begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

La fonction dérivée se note aussi $\mathrm{D}f$ ou $\dfrac{df}{dx}$.

Remarque 12.5 Si une fonction f est dérivable sur I alors elle est continue sur I.

12.2 Opérations sur les dérivées

THÉORÈME 12.3 ♡ **Règles de calcul de dérivées**
Soient deux fonctions f et g définies sur I et dérivables en un point $a \in \mathrm{I}$. On a les propriétés suivantes :
- Soient deux réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et

$$\boxed{(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)}$$

- La fonction fg est dérivable en a et

$$\boxed{(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)}$$

- Si $g(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage du point a sur lequel la fonction g ne s'annule pas. La fonction $1/g$ est alors définie au voisinage du point a et est dérivable en a avec

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}}$$

- Si $g(a) \neq 0$, alors de la même façon que précédemment la fonction f/g est définie au voisinage de a, est dérivable en a et

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}}$$

Démonstration *Soit $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$.*
- *On a*

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a)}{x-a} = \alpha\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \beta\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

par opérations sur les limites.
- *On a*

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}g(x) + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}f(a) \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$$

par opérations sur les limites et parce que g étant dérivable en a, elle est continue en a et du coup $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} g(a)$.

– *Soit* V *un voisinage de* a *tel que* $\forall x \in V \cap I, \quad g(x) \neq 0$. *On a*

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = -\frac{g(x)-g(a)}{g(x)g(a)} \cdot \frac{1}{x-a} = -\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \xrightarrow[x \to a]{} -g'(a) \cdot \frac{1}{\left(g(a)\right)^2}$$

par opérations sur les limites et parce que g *est dérivable en* a *et donc continue en* a. *Du coup,* $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} g(a)$.

– *Il suffit d'appliquer les deux points précédents à* $F = f$ *et* $G = \frac{1}{g}$. G *est dérivable en* a *comme inverse d'une fonction dérivable en* a *et qui ne s'annule pas en* a *et* F *est dérivable en* a *car* f *l'est.* FG *est alors dérivable en* a *comme produit de fonctions dérivables en* a. *De plus,*

$$(FG)'(a) = F'(a)G(a) + F(a)G'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

COROLLAIRE 12.4 **Théorème d'opérations sur les fonctions dérivables**
Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I.

– Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur l'intervalle I et

$$\boxed{(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'}$$

– La fonction fg est dérivable sur l'intervalle I et

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$

– Si la fonction f ne s'annule pas sur I, alors la fonction $1/f$ est définie et dérivable sur I avec

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$$

– Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors la fonction f/g est dérivable sur l'intervalle I et

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Démonstration *Ces propriétés sont vraies en chaque point de* I *et donc sur* I *tout entier.*

THÉORÈME 12.5 ♡ **Dérivation des fonctions composées**
Soient deux fonctions $f : I \to R$, $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(a) \in J$. On suppose que

(H1) La fonction f est dérivable au point $a \in I$.

(H2) La fonction g est dérivable au point $b = f(a) \in J$.

Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'\left(f(a)\right) \times f'(a)}$$

Démonstration *Introduisons la fonction*

$$h : \begin{cases} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } y \neq b \\ g'(y) & \text{si } y = b \end{cases} \end{cases}$$

qui est continue en b *car* g *est dérivable en* b. *Alors pour tout* $x \in I \setminus \{a\}$ *:*

$$\frac{g\left(f(x)\right) - g\left(f(a)\right)}{x-a} = h\left(f(x)\right)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} h(b) \times f'(a) = g'\left(f(a)\right) f'(a)$$

par opérations sur les limites.

Remarque 12.6 Dans cette preuve, on pourrait être tenter d'écrire pour $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$

$$\frac{g\circ f(x) - g\circ f(a)}{x-a} = \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x)-f(a)}\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ce qui n'est pas correct car la fonction f peut s'annuler une infinité de fois au voisinage de a sans être constante et tout en étant dérivable en a. Un exemple d'une telle fonction est donné par $x \mapsto x^2 \sin 1/x$ en $a = 0$.

COROLLAIRE 12.6
Soient deux fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. On suppose que

(H1) La fonction f est dérivable sur I.

(H2) La fonction g est dérivable sur J

Alors la fonction $g\circ f$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'}$$

Démonstration *La propriété est vraie en chaque point de* I *donc elle est vraie sur* I.

THÉORÈME 12.7 **Dérivation de la bijection réciproque**
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$. On suppose que

(H1) la fonction f est injective sur l'intervalle I.

(H2) la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.

(H3) la fonction f' *ne s'annule pas* sur I : $\forall x \in \mathrm{I}$, $\boxed{f'(x) \neq 0}$.

Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et son application réciproque, f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J avec

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}}$$

Démonstration *Comme f est injective sur* I*, elle est bijective de* I *sur* J *et comme elle est dérivable sur* I *elle est continue sur* I *et* J *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*. En appliquant le théorème 11.52, sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur* J*. Soit $y_0 \in \mathrm{J}$. Montrons que la fonction f^{-1} est dérivable au point y_0. Soit $y \in \mathrm{J}\setminus\{y_0\}$. Écrivons :*

$$\Delta_{y_0,f^{-1}}(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\Delta_{f^{-1}(y_0),f}(f^{-1}(y))}$$

Puisque la fonction f est dérivable au point $f^{-1}(y_0)$, $\Delta_{f^{-1}(y_0),f}(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} f'(f^{-1}(y_0))$. Puisque cette limite est non nulle, par opération sur les limites, $\Delta_{y_0,f^{-1}}(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} 1/f'(f^{-1}(y_0))$.

Exemple 12.2

– Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto x^n$. f_n est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée n'est jamais nulle. La fonction réciproque g_n de f_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}\right.$ vérifie,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_n'(y) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}}$$

– La fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}\right.$ est une bijection strictement croissante et sa dérivée n'est jamais nulle. La fonction réciproque, $\arcsin : \left\{\begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ y & \longmapsto & \arcsin y \end{array}\right.$ est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

12.3 Étude globale des fonctions dérivables

12.3.1 Extremum d'une fonction dérivable

PROPOSITION 12.8 ♡ **Condition nécessaire d'un extremum relatif**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I tel que

- (H1) Le point a est *intérieur* à l'intervalle, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$.
- (H2) Le point a est un extremum local de la fonction f sur I.
- (H3) La fonction f est dérivable au point a.

alors $\boxed{f'(a) = 0}$.

Démonstration *Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f possède un maximum local en a, c'est à dire qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\beta, a+\beta] \cap I, \quad f(x) \leqslant f(a)$. Posons $r = \min(r_1, r_2)$.*

- *Si $a - r < x < a$, $[f(x) - f(a)]/(x-a) \leqslant 0$. Puisque $[f(x) - f(a)]/(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} f'_g(a)$, par passage à la limite dans l'inégalité, on tire que $f'_d(a) \leqslant 0$.*
- *Si $a < x < a + r$, $[f(x) - f(a)]/(x-a) \geqslant 0$ et puisque $[f(x) - f(a)]/(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} f'_d(a)$, par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient que $f'_d(a) \geqslant 0$.*

Puisque f est dérivable en a, on obtient que $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a) = 0$.

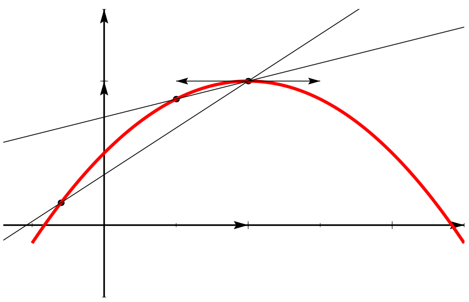


FIGURE 12.2 – Les pentes à gauche sont positives

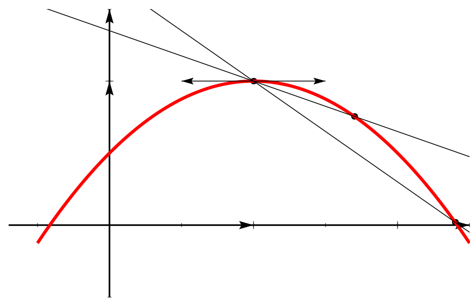


FIGURE 12.3 – Les pentes à droite sont négatives

⚠ *Attention 12.3*
– La condition $f'(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante d'extremum, (penser à $f : x \mapsto x^3$ en $x = 0$.)
– La condition a est *intérieur* à l'intervalle est fondamentale dans ce théorème. Si le point a est une borne de l'intervalle, on ne peut obtenir qu'une inégalité sur la dérivée à gauche ou à droite au point a.

12.3.2 Théorème de Rolle

THÉORÈME 12.9 ♡♡♡ **Théorème de Rolle**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$,
- (H2) la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$,
- (H3) $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\boxed{f'(c) = 0}$.

Démonstration *Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, l'image de ce segment, par application du théorème 11.49 est un segment $[m, M]$ avec $m \leqslant M$.*

- *Si $m = M$ alors f est constante sur $[a, b]$ et sa dérivée est nulle sur $]a, b[$.*
- *Sinon, alors $m < M$. Comme $f(a) = f(b)$ l'un des deux est différent de m ou M. On peut supposer que $f(a) \neq m$. Le minimum de f sur $[a, b]$ est donc atteint en un point $c \in [a, b]$ différent de a et de b, donc en un point intérieur de l'intervalle $[a, b]$. D'après la proposition précédente, on a $f'(c) = 0$.*

Interprétation graphique

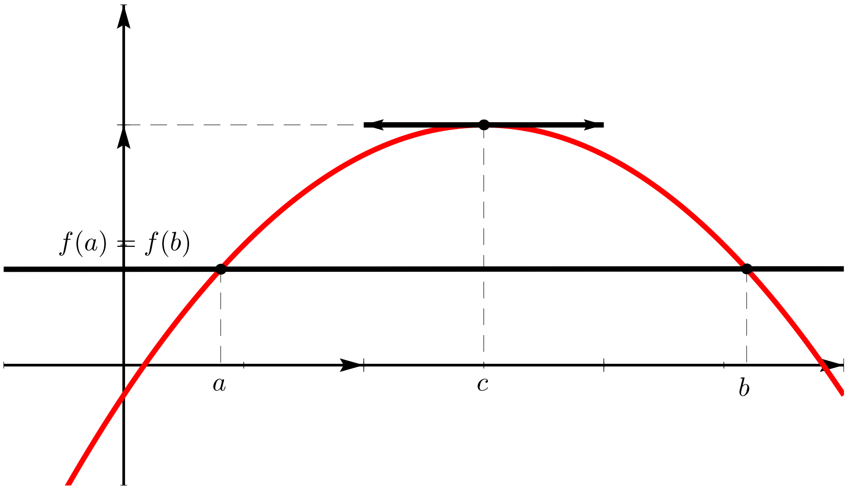


FIGURE 12.4 – Théorème de Rolle

Interprétation cinématique

Un point mobile sur un axe qui revient à sa position de départ a vu sa vitesse s'annuler à un instant donné.
À faire : appendice analyse pour l'utilisation pratique du théorème de Rolle, polynômes, extremum d'une bonne fonction auxiliaire

12.3.3 Égalité des accroissements finis

THÉORÈME 12.10 ♡♡♡ **Théorème des accroissement finis (TAF)**
Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$,
- (H2) la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Alors il existe un point intérieur $c \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$$

Nous allons donner deux preuves typiques dont on s'inspire dans les exercices. L'idée consiste à appliquer le théorème de Rolle à une bonne fonction auxiliaire pour obtenir l'existence du réel c vérifiant la propriété qui nous intéresse. La première preuve consiste à voir sur un dessin un problème d'extremum.

Démonstration ♡ *En examinant la figure ci-dessus, on voit que le point c correspond au maximum de l'écart vertical entre la corde* $[A, B]$ *et le point* $(x, f(x))$*. Définissons donc la mesure algébrique de cet écart :*

$$\varphi : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \left[f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] \end{cases}$$

La fonction φ *est continue sur le segment* $[a, b]$ *(théorèmes généraux), dérivable sur l'intervalle* $]a, b[$ *(théorème généraux sur les dérivées) et on calcule* $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$*. D'après le théorème de Rolle, il existe un point intérieur* $c \in]a, b[$ *tel que* $\varphi'(c) = 0$*, c'est à dire* $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

La deuxième preuve est plus « taupinale » et peu naturelle, mais fournit une recette qui fonctionne bien dans les exercices lorsque la formule à démontrer est compliquée.

- Dans la formule à démontrer, regrouper tous les c à un endroit et les remplacer par une constante K.
- Remplacer l'une des bornes (par exemple b) par une variable t, ce qui fournit une fonction auxiliaire φ définie sur $[a, b]$.
- Déterminer la constante K de telle sorte que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

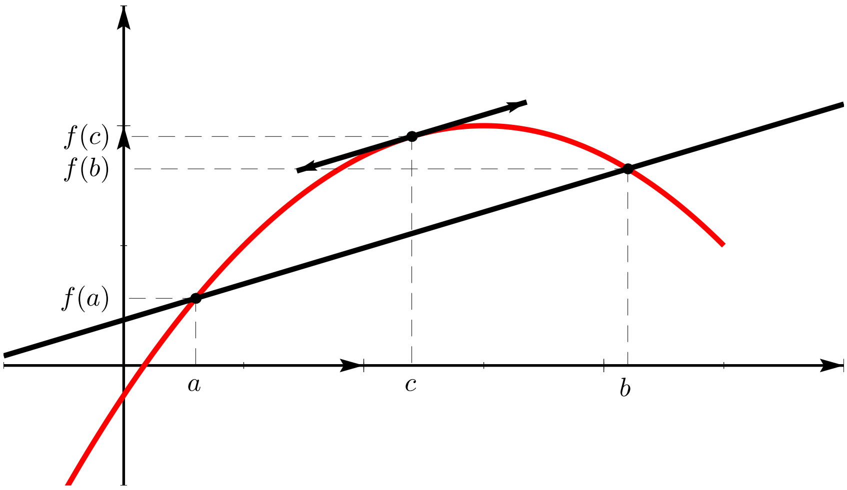


FIGURE 12.5 – Théorème des accroissements finis

– Appliquer le théorème de Rolle à cette fonction auxiliaire.

Démonstration ♡ *Appliquons cette « recette » à notre problème. La formule à montrer s'écrit* $f(b) - f(a) - f'(c)(b-a) = 0$. *Définissons donc une fonction auxiliaire* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(t) - f(a) - K(t-a) \end{array} \right.$ *où* K *est une constante que nous choisissons de telle sorte que* $\varphi(a) = \varphi(b)$. *On trouve que* $K = [f(b) - f(a)]/(b-a)$ *ce qui conduit à la fonction auxiliaire de la première preuve.*

Remarque 12.7 Cette méthode d'un usage très courant est employée dans les exercices 12.42, 12.44, 12.45 , 12.46 , ...

Remarque 12.8 Quand un mobile se déplace sur un axe et part d'un point A au temps t_1, arrive en B au temps t_2 et si f est la fonction position de ce mobile sur l'axe, alors il existe un instant $t \in]t_1, t_2[$ tel que la vitesse instantanée en t : $f'(t)$ de ce mobile soit égale à sa vitesse moyenne $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$.

12.3.4 Inégalité des accroissements finis

THÉORÈME 12.11 **Inégalité des accroissement finis (IAF)**
Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que

- (H1) la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$,
- (H2) la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$,
- (H3) il existe deux réels $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Alors on a

$$\boxed{m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)}$$

Démonstration *Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction* f *sur le segment* $[a,b]$. *Il existe un réel* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. *Puisque* $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, *on en déduit que* $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

THÉORÈME 12.12 **Dérivée bornée implique lipschitzienne**
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On suppose que

- (H1) la fonction f est continue sur l'intervalle I,
- (H2) la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $\mathring{I}$,
- (H3) la fonction f est bornée sur l'intervalle ouvert $\mathring{I}$: $\exists K \geqslant 0$, tel que $\forall x \in \mathring{I}$, $|f'(x)| \leqslant K$.

Alors la fonction f est K-lipschitzienne sur l'intervalle I.

Démonstration *Soit* $(x,y) \in I^2$ *avec* $x < y$. *Puisque* $[x,y] \subset I$, *la fonction* f *est continue sur le segment* $[x,y]$ *et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]x,y[$, *d'après le théorème des accroissements finis, il existe* $c \in]x,y[$ *tel que* $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$. *On en déduit que* $|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y-x| \leqslant K|y-x|$.

12.3.5 Application : Variations d'une fonction

Le résultat suivant, utilisé depuis le lycée est une conséquence du théorème des accroissements finis.

PROPOSITION 12.13 **Caractérisation des fonctions constantes, monotones**
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que

(H1) f est dérivable sur I.

Alors on a les résultats suivants :

1. $\left[\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \geqslant 0\right] \iff f$ est croissante sur I.
2. $\left[\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) > 0\right] \implies f$ est strictement croissante sur I.
3. $\left[\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \leqslant 0\right] \iff f$ est décroissante sur I.
4. $\left[\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) < 0\right] \implies f$ est strictement décroissante sur I.
5. $\left[\forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) = 0\right] \iff f$ est constante sur I.

Démonstration *Démontrons la première équivalence. Les trois suivantes se démontrent de même.*
$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que :* $\forall x \in]a,b[, \quad f'(x) \geqslant 0$ *et montrons que* f *est croissante sur* $[a,b]$. *Soient* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *tels que* $x_1 < x_2$. f *est continue sur* $[x_1, x_2]$ *et dérivable sur* $]x_1, x_2[$. *D'après le théorème des accroissements finis, il existe* $c \in]x_1, x_2[$ *tel que* $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0$ *et donc* $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ *ce qui prouve que* f *est croissante.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, supposons que* f *est croissante sur* $[a,b]$. *Alors, pour tout* $x_0 \in]a,b[$ *le taux d'accroissement de* f *en* x_0, $\Delta_{x_0,f}$ *est une fonction positive sur* $]a,b[\setminus \{x_0\}$. *Puisque la fonction* f *est dérivable au point* x_0, $\Delta_{x_0,f}(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)$. *Par passage à la limite dans l'inégalité, on en tire que* $f'(x_0) \geqslant 0$.
La dernière équivalence est conséquence du fait qu'une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante.

Remarque 12.9 La réciproque de (2) est fausse : la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

12.3.6 Condition suffisante de dérivabilité en un point

THÉORÈME 12.14 ♡♡♡ **Théorème du prolongement dérivable**
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et un réel $a \in \mathrm{I}$. On suppose que

(H1) la fonction$f$ est continue sur l'intervalle I,

(H2) la fonction f est dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$,

(H3) $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \in \mathbb{R}$.

Alors la fonction f est dérivable au point a et $f'(a) = l$.

Démonstration *Soit* $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$. *La formule des accroissements finis appliquée au segment* $[a,x]$ *nous assure de l'existence de* $c_x \in]a,x[$ *tel que* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$. *Comme* $c_x \xrightarrow[x \to a]{} a$, *on en déduit que* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} l$ *et donc que* f *est dérivable en* a *et que* $f'(a) = l$.

PROPOSITION 12.15
Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. On suppose que

(H1) la fonction f est continue sur I,

(H2) la fonction f est dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$,

(H3) $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Alors $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$. En d'autres termes, la courbe représentative de f possède une tangente verticale au point a.

Démonstration *Laissée au lecteur en s'inspirant par exemple de la preuve de la proposition précédente.*

Remarque 12.10 La réciproque du théorème de prolongement dérivable est fausse comme le montre le contre-exemple suivant

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ car

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leqslant |x| |\sin \frac{1}{x}| \leqslant |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

La fonction f est dérivable en tout point $x \neq 0$ avec $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ et f' n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$. En effet, la suite $\big(f(1/(n\pi))\big)_{n \geqslant 1}$ admet deux sous-suites, une convergeant vers 1 et l'autre vers -1.

12.4 Dérivées successives

12.4.1 Dérivée seconde

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 12.5 **Fonction deux fois dérivable**
On dit que la fonction f est *deux fois dérivable* sur I lorsque la fonction f' est dérivable en tout point de I. Sa dérivée est appelée fonction dérivée seconde de f et est notée

$$f'' \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}^2 f \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dt^2}$$

Remarque 12.11 Si f est deux fois dérivable sur I alors f' et f sont continues sur I.

Remarque 12.12 Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne alors $f''(t)$, si elle existe, représente l'accélération de ce point à l'instant t.

12.4.2 Dérivée d'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

DÉFINITION 12.6 **Dérivées successives**
Étant donné une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, on pose $f^{(0)} = f$ et on définit par récurrence, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de $f^{(n-1)}$, si elle existe. On la note

$$f^{(n)} \quad \text{ou} \quad \mathrm{D}^n f \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dt^n}$$

Remarque 12.13
- L'existence de $f^{(n)}$ sur I entraîne l'existence et la continuité, sur I, de toutes les dérivées d'ordre strictement inférieur.
- Si f est n fois dérivable sur I alors $f = f^{(0)}$, $f' = f^{(1)}$, …, $f^{(n-1)}$ sont continues sur I.

PROPOSITION 12.16
Étant donné deux fonctions f et g définies sur I et n fois dérivables sur I ainsi que deux réels α et β. Alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est elle aussi n fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \boxed{(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)}$$

Démonstration *Par récurrence.*

BIO 10 Gottfried Leibniz, Né le 1er juillet 1646 à Leipzig , mort le 14 novembre 1716 à Hanovre

Gottfried Leibniz est un philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et juriste allemand. Il se montre précoce intellectuellement et possède de fortes capacités d'apprentissage. Il dit avoir appris seul le latin et à 15 *ans il connaît la littérature grecque et latine. Il obtient son baccalauréat à* 17 *ans et rentre la même année à l'Université de Leipzig où il étudie la philosophie, le droit et les mathématiques. Cette université lui refuse en* 1666 *de lui décerner le titre de docteur, sans doute à cause de son très jeune âge et il obtient celui-ci un an plus tard à l'Université de Nuremberg. Plutôt que de chercher un poste universitaire, il rentre au service du baron von Boyneburg à Francfort qui l'initie à la politique.*
Leibniz est, avec Newton, l'inventeur du calcul infinitésimal et fut le découvreur des formules de dérivation d'un produit, d'un quotient et d'une puissance. Newton était parvenu de son côté, quelques années auparavant, aux mêmes résultats que Leibniz mais sans publier son travail. Une longue polémique s'ensuivit afin de déterminer qui avait la paternité de cette théorie.



PROPOSITION 12.17 **Formule de Leibniz**
Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I alors il en est du même du produit fg et on a la *formule de Leibniz* qui permet d'exprimer la dérivée n-ième du produit

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration *Par récurrence. Voir la preuve de la formule du binôme de Newton 8.34.*

PROPOSITION 12.18
Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si

(H1) la fonction f est n fois dérivable sur l'intervalle I,

(H2) la fonction g est n fois dérivable sur l'intervalle J.

Alors la fonction composée $g \circ f$ est n fois dérivable sur l'intervalle I.

Démonstration *Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la propriété a déjà été montrée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'une composée de fonctions n fois dérivable est n fois dérivable sur* I. *Montrons que si f et g sont $(n+1)$ fois dérivable sur* I *et* J *respectivement alors $g \circ f$ est $n+1$ fois dérivable sur* I. *On sait que f et g sont* 1 *fois dérivable sur respectivement* I *et* J *et que $(f \circ g)' = f' \times g' \circ f$. D'après l'hypothèse de récurrence, comme f' et g' sont n fois dérivables sur* I *et* J *respectivement, $g' \circ f$ est n fois dérivable sur* I *et d'après le théorème de Leibniz, $f' \times g' \circ f$ est aussi n fois dérivable sur* I. *Donc $(g \circ f)'$ est n fois dérivable sur* I *et $g \circ f$ est $(n+1)$ fois dérivable sur* I. *La propriété est ainsi prouvée par récurrence.*

Remarque 12.14 Une expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la composée de deux fonctions est donnée par la formule de Faà di Bruno. Elle est très difficile à manipuler et ne relève pas du programme.

12.4.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

DÉFINITION 12.7 **Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$**
On dit qu'une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de *classe $\mathscr{C}^n$* sur l'intervalle I si et seulement si

1. f est n fois dérivable sur I,
2. la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

On note
- $\mathscr{C}^0$ (I) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^0$ sur I, c'est à dire l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Pour $n \geqslant 1$, $\mathscr{C}^n$ (I) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
- $\mathscr{C}^{+\infty}$ (I) l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

PROPOSITION 12.19
Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})^2$ et soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors
- $\alpha f + \beta g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$
- $fg \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$

Remarque 12.15
- La première égalité et le fait que la fonction nulle est de classe $\mathscr{C}^n$ permet d'affirmer que $\mathscr{C}^n(\mathrm{I})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ (Voir la définition 23.3 page 848).
- On a

$$\ldots \subset \mathscr{C}^n(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^{n-1}(\mathrm{I}) \subset \ldots \mathscr{C}^2(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^1(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^0(\mathrm{I}) \subset \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$$

PROPOSITION 12.20
Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si

(H1) $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$,

(H2) $g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{J})$,

alors $g \circ f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$.

Exemple 12.4 Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ (On a même $f_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ si $n \in \mathbb{N}$).

PROPOSITION 12.21
Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$ ne s'annulant pas sur I, alors $1/f$ est élément de $\mathscr{C}^n(\mathrm{I})$.

THÉORÈME 12.22 **Théorème de la bijection de classe $\mathscr{C}^n$**
Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$ telle que

(H1) f' ne s'annule pas sur I.

alors f est une bijection sur son image $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

12.5 Fonctions convexes

DÉFINITION 12.8 ♡♡ **Fonction convexe**
Soit $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* lorsque

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Remarque 12.16 Cela signifie géométriquement que le graphe de f est situé en dessous de toutes les cordes joignant deux points de ce graphe.

Remarque 12.17 On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est *concave* lorsque

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

La fonction f est concave si et seulement si la fonction $-f$ est convexe. Dans la suite, on n'étudiera que les propriétés des fonctions convexes.

Remarque 12.18 Les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.

DÉFINITION 12.9 **Fonction strictement convexe**
On dit qu'une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ est *strictement convexe* lorsque $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2$, $x \neq y$,

$$\forall \lambda \in]0,1[, \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

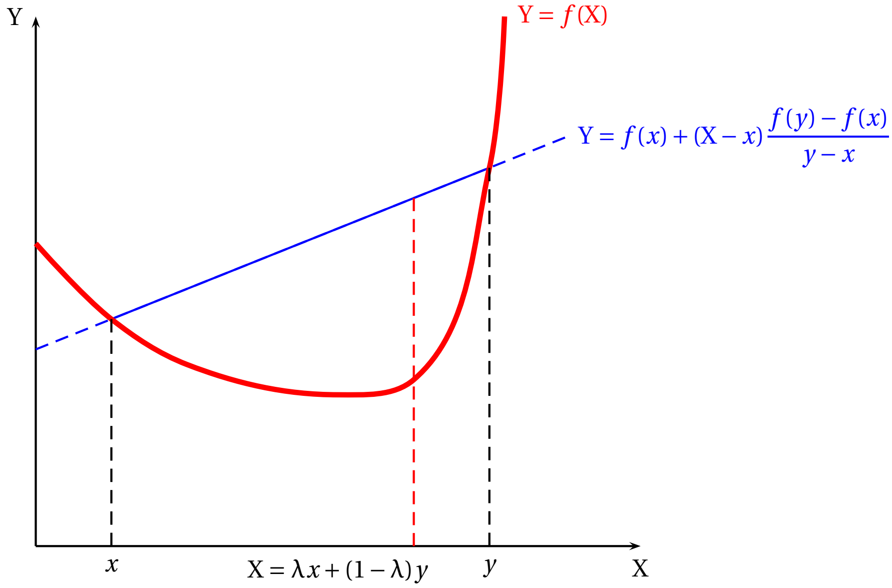


FIGURE 12.6 – Fonctions convexes

PROPOSITION 12.23 **Inégalité de convexité généralisée**
Soit une fonction f convexe sur l'intervalle I. Alors

$$\forall n \geqslant 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Démonstration *Par récurrence sur n. Pour $n = 2$, c'est la définition d'une fonction convexe. Montrons $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$. Soient $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. On peut supposer que tous les λ_i sont strictement positifs, sinon on se ramène à la propriété $\mathscr{P}(n)$. Posons $y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$: $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. Puisque f est convexe,*

$$f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1}) y) \leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) f(y)$$

et d'après $\mathscr{P}(n)$,

$$f(y) = f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n) \leqslant \mu_1 f(x_1) + \dots + \mu_n f(x_n)$$

En utilisant que $1 - \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, on obtient

$$(1 - \lambda_{n+1}) f(y) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

d'où l'inégalité souhaitée.

Le résultat suivant est à la base de toutes les démonstrations et est souvent utilisé dans les exercices théoriques sur les fonctions convexes. Il est facile à retenir, il suffit de faire le schéma suivant :

LEMME 12.24 ♡♡♡ **Lemme des trois pentes**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe :

$$\forall (x, y, z) \in I^3,\ x < y < z, \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration *Puisque $x < y < z$, y peut s'écrire comme barycentre de x et z : il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda) z$. Après calculs, on trouve que*

$$\lambda = \frac{z - y}{z - x}$$

Puisque f est convexe,

$$f(y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(z)$$

On en tire que

$$f(y) - f(x) \leqslant (1 - \lambda)\big(f(z) - f(x)\big)$$

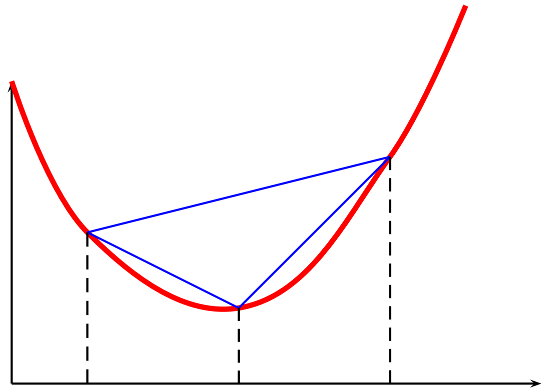


FIGURE 12.7 – Lemme des trois pentes

et comme $1-\lambda = \dfrac{y-x}{z-x}$, *que*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

De même,

$$f(y)-f(z) \leqslant \lambda\big(f(x)-f(z)\big)$$

d'où

$$\lambda\big(f(z)-f(x)\big) \leqslant f(z)-f(y)$$

et donc

$$\frac{z-y}{z-x}\big(f(z)-f(x)\big) \leqslant f(z)-f(y)$$

d'où l'on tire

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Le théorème suivant fournit un moyen très pratique de montrer qu'une fonction est convexe : il suffit de montrer que sa dérivée seconde est positive sur I.

THÉORÈME 12.25 ♡♡♡ **Caractérisation des fonctions convexes dérivables**

1. Si $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable,
$$(f \text{ convexe}) \iff (f' \text{ croissante})$$
2. Si $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ est deux fois dérivable,
$$(f \text{ convexe}) \iff (f'' \geqslant 0 \text{ sur I})$$

Démonstration

1. *Si f est convexe et dérivable, soient $x < y$ deux points de* I. *Montrons que $f'(x) \leqslant f'(y)$. Soit $z \in]x, y[$, d'après le lemme des trois pentes,*
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
En passant à la limite dans l'inégalité lorsque $z \to x^+$, on trouve que $f'(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. On a également
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$
et en passant à la limite dans l'inégalité lorsque $z \to y^-$, $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$. Finalement,
$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$$
2. *Supposons réciproquement f dérivable et f' croissante. Soient $x < y$ deux points de* I *et $\lambda \in [0,1]$. Posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et z, il existe $c_1 \in]x, z[$ tel que*
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(c_1)$$

De même, le théorème des accroissements finis entre z et y garantit l'existence de $c_2 \in]z, y[$ tel que

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(c_2)$$

Puisque f' est croissante, $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ d'où l'on tire

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

En remplaçant z par sa valeur, on aboutit alors à l'inégalité de convexité

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

3. *Si f est deux fois dérivable, on sait que la fonction f' est croissante si et seulement si la fonction f'' est positive.*

THÉORÈME 12.26 ♡♡ Le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de toutes ses tangentes
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

$$\forall x_0 \in \mathrm{I},\ \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Démonstration

1. *Si $x_0 < x$, prenons $z \in]x_0, x[$ et utilisons le lemme des trois pentes :*

$$\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

En passant à la limite dans l'inégalité lorsque $z \to x_0$, on en tire que

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

d'où $f(x) \geqslant (x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$.

2. *Si $x < x_0$, on prend $z \in]x, x_0[$ et avec le lemme des trois pentes,*

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leqslant \frac{f(x_0)-f(z)}{x_0-z}$$

En passant à la limite dans l'inégalité lorsque $z \to x_0$, on trouve

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leqslant f'(x_0)$$

et l'on retrouve que $f(x) \geqslant f(x_0)-(x_0-x)f'(x_0)$.

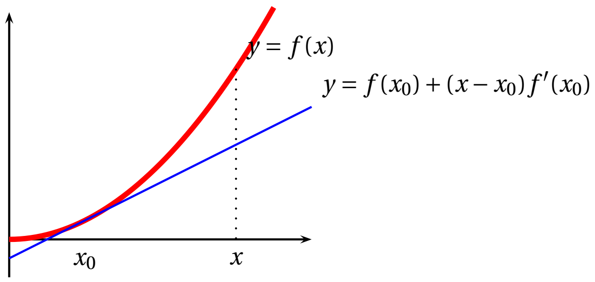


FIGURE 12.8 – Le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de ses tangentes

Multimédia : tangente qui varie, lemme des 3 pentes

On obtient des inégalités intéressantes, dites « inégalités de convexité » de la façon suivante :

1. On se donne une fonction f ;
2. On vérifie qu'elle est convexe sur I en vérifiant que $f'' \geqslant 0$;
3. On écrit l'inégalité de convexité (éventuellement généralisée).

PROPOSITION 12.27 Exemples d'inégalités de convexité

1. Si $\alpha \geqslant 1$ et $x, y > 0$, $(x+y)^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(x^\alpha+y^\alpha)$.
2. Pour n réels $x_1, \dots, x_n$, $(x_1+\cdots+x_n)^2 \leqslant n(x_1^2+\cdots+x_n^2)$.

Démonstration

1. *Considérons la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right.$ *. Elle est deux fois dérivable sur* $I =]0,+\infty[$ *et* $\forall x > 0,\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \geqslant 0$*. C'est donc une fonction convexe. En prenant* $\lambda = 1/2$*, on en déduit que* $\forall x, y > 0$*,* $(\frac{x+y}{2})^\alpha \leqslant \frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}$ *d'où la première inégalité.*
2. *La fonction* $x \mapsto x^2$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$ *et il suffit d'utiliser l'inégalité de convexité généralisée avec* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n$ *:*

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}$$

d'où la deuxième inégalité.

PROPOSITION 12.28 **Concavité du logarithme**

1. *Comparaison entre moyenne géométrique et arithmétique*. Pour tous réels $x_1, \ldots, x_n > 0$:

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

2. *Inégalité de Young :* pour deux réels $a, b > 0$ et deux réels $p, q > 0$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Démonstration *En notant* $f : x \mapsto \ln x$*,* $f''(x) = -1/x^2 \leqslant 0$ *donc la fonction logarithme est concave sur* $]0,+\infty[$.

1. *En utilisant l'inégalité de convexité généralisée avec* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n$*,*

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} = \ln\left((x_1 \ldots x_n)^{1/n}\right)$$

En prenant l'exponentielle (qui est une fonction croissante), on en déduit l'inégalité souhaitée.

2. *Pour* $\lambda \in [0,1]$ *et* $x, y > 0$*,*

$$\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y = \ln(x^\lambda y^{1-\lambda})$$

d'où en prenant l'exponentielle,

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leqslant \lambda x + (1-\lambda)y$$

Il suffit alors de prendre $x = a^p$*,* $y = b^q$ *et* $\lambda = 1/p$ *pour trouver l'inégalité de Young.*

En résumé

Les différents théorèmes de ce chapitre doivent être parfaitement connus. Il est du plus mauvais effet d'oublier de vérifier une des hypothèses du théorème de Rolle ou de celui des accroissement finis dans une démonstration. A ce stade de l'année, les calculs de dérivée doivent être menés sans hésitation et les formules de dérivation doivent être connues à la perfection. On complétera la lecture du chapitre par celle du paragraphe C.2 page 1197 de l'annexe C qui traite des méthodes de calcul des dérivées. Enfin, il est intéressant de maîtriser la démonstration du théorème du point fixe 3.6 page 1224. Nombreux sont les exercices qui n'en sont qu'un cas particulier.

12.6 Exercices

12.6.1 Dérivabilité

Exercice 12.1 ♡

En utilisant la définition, déterminer quand les fonctions suivantes sont dérivables et déterminer leur dérivée :

1. $f : x \mapsto x$.
2. $f : x \mapsto x^2$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
5. $f : x \mapsto |x|$.
6. $f : x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.
$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x-a}{x-a} = 1 \xrightarrow[x \to a]{} 1$$
donc f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $\boxed{f'(a) = 1}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.
$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x-a} = x + a \xrightarrow[x \to a]{} 2a$$
donc f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $\boxed{f'(a) = 2a}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$.
$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x \to a]{} \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0 \end{cases}$$
donc f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et dans ce cas $\boxed{f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}}$. Par contre f n'est pas dérivable en 0.
4. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{a\}$.
$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = -\frac{1}{ax} \xrightarrow[x \to a]{} -\frac{1}{a^2}$$
donc f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $\boxed{f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}}$.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.
$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x| - |a|}{x-a}.$$
Si $a < 0$, comme on va calculer la limite de $\Delta(x)$ quand x tend vers a, on peut supposer $x < 0$ et il s'ensuit que $\Delta(x) = -1$ donc f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_-^*$. De plus $\boxed{f'(a) = -1}$. On montre de même que si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors f est dérivable en a et $\boxed{f'(a) = 1}$. Par contre en 0, $\Delta(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} -1$ et $\Delta(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} 1$. f est alors dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
6. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. En utilisant les formules de factorisation :
$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} a^k \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = n a^{n-1}$$
donc f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $\boxed{f'(a) = n a^{n-1}}$.

Exercice 12.2 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathrm{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

1. Si f est paire que dire de f' ?
2. Si f est T-périodique ($\mathrm{T} > 0$) que dire de f' ?

Solution :

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = f(-x)$. En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = -f'(-x)$ et donc f' est impaire. De même si f est impaire, alors f' est paire.
2. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+\mathrm{T}) - f(x) = 0$, en dérivant à nouveau les membres de cette égalité, on obtient que $f'(x+\mathrm{T}) - f'(x) = 0$ et donc que f' est aussi T-périodique.

Exercice 12.3 ♡

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer :

1. *son domaine de définition.*
2. *son domaine de dérivabilité.*
3. *sa dérivée.*

1. $f : x \mapsto \sqrt[5]{x^3}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x^2+1}$
3. $f : x \mapsto \ln(\ln x)$
4. $f : x \mapsto e^{\cos x}$
5. $f : x \mapsto \ln|x|$
6. $f : x \mapsto 5^x$

Solution :

1. f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\boxed{f'(x) = \dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}}$.
2. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-2x\arctan x}{\left(1+x^2\right)^2}}$.
3. f est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x \in]1,+\infty[$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}}$.
4. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = -\sin x e^{\cos x}}$.
5. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables. De plus, si $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases} = \boxed{\dfrac{1}{|x|}}$.
6. Comme $5^x = e^{x\ln 5}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \ln 5.5^x}$.

Exercice 12.4 ♡

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer :

1. *son domaine de définition.*
2. *son domaine de dérivabilité.*
3. *sa dérivée.*

1. $f : x \mapsto \cos^7 x$
2. $x \mapsto x^x$
3. $f(x) = \sqrt{\left(x^4+1\right)^3}$
4. $f : x \mapsto x\ln|x+1|$
5. $f : x \mapsto x^4 e^{\frac{1}{x}}$
6. $f : x\,\mathrm{argth}(\sin x)$

Solution :

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = -7\sin x\cos^6 x}$.
2. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x^x = e^{x\ln x}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\boxed{f'(x) = (1+\ln x)\,x^x}$.
3. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{f'(x) = 6x^3\sqrt{x^4+1}}$.
4. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \ln|x+1| + \dfrac{x}{|x+1|}}$.

5. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x\in\mathbb{R}^*$, $\boxed{f'(x) = x^2 e^{x^{-1}}(4x-1)}$.
6. f est définie et dérivable sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x\in\mathrm{I}$, $\boxed{f'(x) = \operatorname{argth}(\sin x) + \dfrac{x}{\cos x}}$.

Exercice 12.5 ♡

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer :

1. *son domaine de définition.*
2. *son domaine de dérivabilité.*
3. *sa dérivée.*

1. $f : x\mapsto \ln(\ln(\ln(\ln x)))$
2. $f : x\mapsto \operatorname{argch}(2+\cos x)$
3. $f : x\mapsto (\operatorname{ch} x)^{2x}$
4. $f : x\mapsto \ln(\arccos x)$
5. $f : x\mapsto \dfrac{1}{\arcsin \operatorname{sh} x}$
6. $f : x\mapsto \sqrt{1+\operatorname{th} x}$

Solution :

1. f est définie et dérivable sur $]e^e,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x\in\,]e^e,+\infty[$: $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))\ln(\ln(\ln(x)))}}$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus(\pi+2\pi\mathbb{Z})$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x\not\equiv\pi$ alors : $\boxed{f'(x) = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}\sqrt{3+\cos x}}}$
3. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. De plus, $\boxed{f'(x) = 2\operatorname{ch}^{2x-1}(\ln(\operatorname{ch} x)\operatorname{ch} x + x\operatorname{sh} x)}$.
4. f est définie sur $[-1,1[$ et dérivable sur $]-1,1[$ comme composée de fonctions dérivables. Si $x\in\,]-1,1[$, $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}}$.
5. f est définie sur $\left[-\ln\left(1+\sqrt{2}\right),0\right[\cup\left]0,\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ et dérivable sur $\mathrm{I} = \left]-\ln\left(1+\sqrt{2}\right),0\right[\cup\left]0,\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right[$ comme composée de fonctions dérivables. De plus, si $x\in\mathrm{I}$ $\boxed{f'(x) = -\dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{2-\operatorname{ch}^2 x}(\arcsin \operatorname{sh} x)^2}}$.
6. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-\operatorname{th}^2 x}{2\sqrt{1+\operatorname{th} x}}}$

Exercice 12.6 ♡

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer :

1. *son domaine de définition.*
2. *son domaine de dérivabilité.*
3. *sa dérivée.*

1. $f : x\mapsto \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$
2. $f : x\mapsto \frac{x+\ln x}{x+\ln^2 x}$
3. $f : x\mapsto \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$
4. $f : x\mapsto (1+x)^x$
5. $f : x\mapsto \dfrac{\sqrt{\operatorname{argsh} x}}{\ln(\operatorname{ch} x)}$
6. $x\mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$

Solution :

1. f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable, par opérations sur les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x>0$: $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^2\sqrt{x}}}$

2. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\boxed{f'(x) = \dfrac{(x-1)\ln^2 x - 3x\ln x + x}{x\left(x+\ln^2 x\right)^2}}$

3. f est définie et dérivable sur $]-1,-1[\setminus\{0\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, si $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$: $f'(x) = -\dfrac{\arcsin x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x} = \boxed{-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}}$

4. $f(x) = e^{x\ln(1+x)}$ et donc f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$. Si $x \in]-1,+\infty[$, $\boxed{f'(x) = \left(ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}\right)(1+x)^x}$.

5. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $x>0$: $\boxed{f'(x) = -\dfrac{-\operatorname{ch} x \ln(\operatorname{ch} x) + 2\operatorname{argsh} x \operatorname{sh} x\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}(\ln(\operatorname{ch} x))^2 \operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{argsh} x}}}$

6. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{4+2\cos x - 3\cos^2 x}{(\cos x+2)^5}}$.

Exercice 12.7 ♡

Pour chacune des fonction suivantes :

1. *Déterminer son domaine de définition* D_f.
2. *Prouver que* f *est continue sur* D_f.
3. *Déterminer sur quel domaine* f *est dérivable.*
4. *Prolonger* f *par continuité là où c'est possible.*
5. *Vérifier si ce prolongement est dérivable.*

1. $f : x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $f : x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $f : x \mapsto \left(x^2-1\right)\arcsin\left(x^2\right)$
4. $f : x \mapsto |x| \operatorname{argth} x$

Solution :

1. f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions continues. En appliquant le théorème des gendarmes, on montre que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On prolonge alors f par continuité en 0 en posant : $f(0)=0$. Par opérations sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Reste à étudier la dérivabilité en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Delta(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\dfrac{1}{x}$ qui diverge quand x tend vers 0. f n'est donc pas dérivable en 0.
2. On montre comme précédemment que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On montre aussi qu'on peut là encore prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. Pour ce qui concerne la dérivabilité en 0 on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Delta(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
3. f est définie et continue sur $[-1,1]$. Par opérations sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $]-1,1[$. En $x=1$, $\Delta(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\left(x^2-1\right)\arcsin\left(x^2\right)}{x-1} = (x+1)\arcsin\left(x^2\right) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \pi$. f est donc dérivable en $x=1$ et $f'(1)=\pi$. On fait de même en -1.
4. f est définie et continue sur $]-1,1[$. f n'est pas prolongeable par continuité en ± 1. f est dérivable sur $]-1,0[\cup[0,1]$ comme produit de fonctions dérivables sur ces intervalles. En $x=0$, $\Delta(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|\operatorname{argth} x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc f est dérivable aussi en 0 et $f'(0)=0$.

Exercice 12.8 ♡

Pour chacune des fonction suivantes :

1. *Déterminer son domaine de définition* D_f.
2. *Prouver que* f *est continue sur* D_f.
3. *Déterminer sur quel domaine* f *est dérivable.*
4. *Prolonger* f *par continuité là où c'est possible.*
5. *Vérifier si ce prolongement est dérivable.*

1. $f : x \mapsto \frac{x^4}{e^x - 1}$
2. $f : x \mapsto x^x$.
3. $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$
4. $f : x \mapsto \sqrt{|x-1|}\sin x$.

Solution :

1. *f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $\frac{x^4}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^4}{x} = x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On prolonge alors f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. Si $x = 0$, alors $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^3}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.*
2. *$f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc par opérations sur les limites $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^0 = 1$. On prolonge donc f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables. En $x = 0$, on a : $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{x\ln x} - 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x\ln x}{x} = \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, l'équivalent étant valide car $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. f n'est donc pas dérivable en 0 et le graphe de f admet en 0 une tangente verticale.*
3. *f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. En $x = 0$, on a : $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\frac{-x}{2}}{x} = -\dfrac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et f est dérivable en 0 avec de plus $f'(0) = -1/2$.*
4. *f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et en $x = 1$: $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sin x.\sqrt{|x-1|}}{x - 1} \underset{x\to 1}{\sim} \sin 1 \dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x-1}$ donc $\Delta(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$ et $\Delta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} -\infty$. f n'est donc pas dérivable en 0.*

Exercice 12.9 ♡

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. *Prouver que f est continue en 0.*
2. *Étudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.*

Solution :

1. *Il est clair que $1 - e^x \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$. Donc f est continue à gauche en 0. De plus, $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et donc f est aussi continue à droite en 0. En résumé, f est continue en 0.*
2. *f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. Si $x < 0$ alors $f'(x) = -e^x$ et si $x > 0$ alors $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. De plus :*

$$\text{si } x < 0 : \quad \Delta(x) = \frac{1 - e^x}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-x}{x} = -1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1 \quad \text{et} \quad \text{si } x > 0 : \quad \Delta(x) = \frac{e^x - 1}{x(e^x + 1)} \underset{x\to 0^-}{\sim} \frac{x}{2x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \frac{1}{2}$$

donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 12.10 ♡

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 + x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. *Prouver que f est continue en 0.*
2. *Étudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.*

Solution :

1. *Il est clair que f est continue à gauche en 0. De plus, $2 + x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 2 = f(0)$ donc f est aussi continue à droite en 0. En résumé, f est continue en 0.*

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. Si $x<0$ alors $f'(x)=-e^{-x}$ et si $x>0$, $f'(x)=\ln x+1$. On vérifie facilement que f est dérivable à gauche en 0. Par contre, comme $f'(x)=\ln x+1\xrightarrow[x\to 0^+]{}-\infty$, f n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 12.11 ♡♡

Soient deux réels a et $x_0>0$. On définit

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x<x_0 \\ x^2+1 & \text{si } x\geqslant x_0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Trouver les valeurs de a et x_0 pour lesquelles f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Solution : Par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $]0,x_0[$ et sur $]x_0,+\infty[$. Comme $\forall x>x_0$, $f'(x)=2x\xrightarrow[x\to x_0]{}2x_0$, la fonction f est dérivable à droite au point x_0 d'après le théorème du prolongement dérivable et $f'_d(x_0)=2x_0$.

Comme $\forall x<x_0$, $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to x_0]{}\dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}$, il vient que f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0)=\dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}$.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$, c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{a=4x_0\sqrt{x_0}}$.

Exercice 12.12 ♡♡

Soit une fonction $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$. On dit que cette fonction possède une dérivée symétrique en 0 lorsque

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h} \text{ existe et est finie.}$$

1. *Si la fonction f est dérivable en 0, montrer qu'elle admet une dérivée symétrique en 0 et la calculer.*
2. *Si la fonction f admet une dérivée symétrique en 0, est-elle dérivable en 0 ?*

Solution :

1. Calculons le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+x\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$. Soit $h>0$. En écrivant cette égalité pour $x=h$ et pour $x=-h$, en soustrayant et en divisant par $2h$, on trouve que

$$\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=f'(0)+\frac{\varepsilon(h)+\varepsilon(-h)}{2}\xrightarrow[h\to 0]{}f'(0)$$

Donc la fonction f admet une dérivée symétrique en 0 qui vaut $f'(0)$.

2. La réciproque est fausse comme on le voit si $f(x)=|x|$: $\forall h\neq 0$, $\dfrac{f(h)-f(-h)}{2h}=0$ donc f admet une dérivée symétrique en 0 mais n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0)=-1$ et $f'_d(0)=1$.

Exercice 12.13 ♡♡

Soit une fonction $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ telle que $f(0)=0$, $f\geqslant 0$ et

$$\forall x\geqslant 0, f'(x)\leqslant af(x) \quad (a>0)$$

Montrer que la fonction f est nulle.

Solution : Introduisons la fonction auxiliaire

$$g:\left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-ax}f(x)\end{array}\right.$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et $\forall x\geqslant 0$, $g'(x)=e^{-ax}\big(f'(x)-af(x)\big)\leqslant 0$. Donc la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et on a $\forall x\geqslant 0$, $g(x)\leqslant g(0)$. Mais alors, si $x\in[0,+\infty[$, $f(x)=e^{ax}g(x)\leqslant e^{ax}g(0)=e^{ax}f(0)=0$. Comme la fonction f est positive, c'est la fonction nulle.

Exercice 12.14 ♡♡

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en $x_0 \neq 0$ et telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ soit dérivable en x_0. Montrer que f est dérivable en x_0.

Solution : *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. On écrit que :*

$$\frac{xf(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[x - x_0]}{x - x_0} = x\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x}\left(\frac{xf(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right)$$

On passe ensuite à la limite dans cette relation lorsque $x \to x_0$, et on trouve, en utilisant que $x \mapsto xf(x)$ est dérivable en x_0 et que f est continue en x_0, que f est dérivable en x_0 avec

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{1}{x_0}((xf)'(x_0) - f(x_0))}$$

Exercice 12.15 ♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et telle que $xf'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Solution : *Soit $0 < \varepsilon < 1$. Comme $xf'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $x \geqslant A$ alors*

$$\frac{1-\varepsilon}{x} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{x}.$$

Mais alors, pour $X \geqslant A$:

$$\int_A^X \frac{1-\varepsilon}{x}\,dx \leqslant \int_A^X f'(x)\,dx \leqslant \int_A^X \frac{1+\varepsilon}{x}\,dx$$

ce qui amène

$$(1-\varepsilon)(\ln X - \ln A) \leqslant f(X) - f(A) \leqslant (1+\varepsilon)(\ln X - \ln A).$$

On en déduit grâce au théorème des gendarmes que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Exercice 12.16 ♡♡

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solution :

1. *Si $x_0 = 0$, formons le taux d'accroissement Δ de f en 0. Pour $x \neq 0$, on a :$\Delta(x) = \left(f(x) - 0\right)/x$ et donc $|\Delta(x)| \leqslant x^2/x \leqslant x$. On en déduit que $\Delta(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et que f est dérivable en 0. De plus $f'(0) = 0$.*
2. *Si $x_0 \neq 0$, montrons que f n'est pas dérivable en x_0 en montrant que f n'est pas continue en x_0. Comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (r_n) et une suite d'irrationnels (q_n) qui convergent toutes deux vers x_0. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = r_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0^2$ et $f\left(q_n\right) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc f n'est pas continue en x_0 et à fortiori f n'est pas dérivable en x_0.*

Exercice 12.17 ♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)f(-x)}{x^2}$$

Solution : *Écrivons le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x)f(-x)}{x^2} = (f'(0) + \varepsilon(x))(-f'(0) - \varepsilon(-x)) \xrightarrow[x\to 0]{} -(f'(0))^2$$

Exercice 12.18 ♡♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Trouver la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{2^k}{3^n}\right)$$

Indication : Utiliser le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 : $f(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x)$. L'idée est que pour x petit, « $f(x)$ ressemble à $xf'(0)$ ». La suite se comporte comme $f'(0)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n} = f'(0)$.

Solution : *Écrivons le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 :*

$$f(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = f'(0)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n}\varepsilon\left(\frac{2^k}{3^n}\right) = f'(0) + v_n \text{ avec } v_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n}\varepsilon\left(\frac{2^k}{3^n}\right)$$

car d'après la formule du binôme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (1+2)^n = 3^n$.

Montrons que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\mu > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $|\varepsilon(x)| \leqslant \mu$. Comme la suite $\frac{2^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\frac{2^n}{3^n} \leqslant \alpha$. Soit alors $n \geqslant N$. Puisque $\forall k \in [0, n]$, $0 \leqslant \frac{2^k}{3^n} \leqslant \frac{2^n}{3^n} \leqslant \alpha$, il vient que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \left|\varepsilon\left(\frac{2^k}{3^n}\right)\right| \leqslant \mu$$

Mais alors

$$|v_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n}\left|\varepsilon\left(\frac{2^k}{3^n}\right)\right| \leqslant \mu\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{3^n} = \mu$$

Par conséquent, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)}$.

Exercice 12.19 ♡♡♡

On considère la suite (s_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$s_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$$

1. *Montrez que la suite (s_n) est convergente.*
2. *On considère une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable au point 0 et telle que $f(0) = 0$. On définit pour tout $n \geqslant 1$ la suite (S_n) par*

   $$S_n = \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$$

   Montrer que la suite (s_n) converge.
3. *Étudiez les suites de terme général*

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{1}{k+n}\right)$$

Solution :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Comme* $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$ *donc* (s_n) *est décroissante. Elle est positive donc minorée par* 0. *D'après le théorème de la limite monotone,* (s_n) *est donc convergente.*
2. *Posons* $\lambda = f'(0)$. *Le développement limité de* f *en* 0 *à l'odre* 1 *est donné, pour tout* $x \in [0,1]$, *par :* $f(x) = \lambda x + x\varepsilon(x)$ *où* ε *est une fonction définie sur un voisinage à droite de* 0 *telle que* $\lim_{0^+} \varepsilon = 0$. *On a donc pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *:* $f(1/k) = \lambda/k + \varepsilon_k/k$ *où* $\varepsilon_k = \varepsilon(1/k)$. *Remarquons que* $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. *Il vient alors :*

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right) = \lambda s_n + \sum_{k=n}^{2n} \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. *Il existe un rang* N *tel que si* $n \geqslant \mathrm{N}$ *alors* $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$ *Pour* $n \geqslant \mathrm{N}$, *on a donc :*

$$(\lambda - \varepsilon)\, s_n \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant (\lambda + \varepsilon)\, s_n.$$

Si $\lambda \neq 0$, *on en déduit que* $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda s_n$ *et donc que* S_n *converge vers* λl *où* $l = \lim s_n$. *Si* $\lambda = 0$ *alors il vient que* $\mathrm{S}_n = \underset{n\to+\infty}{o}(s_n)$ *et comme* (s_n) *converge il en est de même de* (S_n).
3. *Par application du résultat précédent, il est clair que* (u_n) *est convergente. Par ailleurs, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{1}{k+n}\right) = \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ *et donc de la même façon,* (v_n) *est convergente.*

12.6.2 Dérivées d'ordre n, formule de Leibniz

Exercice 12.20 ♡

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(x^2\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. *Vérifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* f'.
2. *La fonction* f *est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*
3. *La fonction* f *est-elle deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$ *?*

Solution :

1. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *comme produit et composée de fonctions dérivables. De plus, si* $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)$. *En* $x = 0$, *le taux d'accroissement de* f *est donné par :*

$$\Delta(x) = \frac{x^2 \ln\left(x^2\right)}{x} = x \ln x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

donc f *est aussi dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 0$.
2. *La fonction* f' *est clairement continue sur* $\mathbb{R}^*$. *De plus* $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *car* $x \ln x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *donc* f' *est aussi continue en* 0. *En conclusion,* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)$ *donc* f' *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *par opérations sur les fonctions dérivables. Le taux d'accroissement de* f' *en* 0 *est donné par, pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *:*

$$\Delta(x) = \frac{2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)}{x} = 2\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

et donc f *n'est pas deux fois dérivable en* 0.

Exercice 12.21 ♡

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} \left(x^x\right)^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. *Vérifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* f'.
2. *La fonction* f *est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*
3. *La fonction* f *est-elle deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$ *?*

Solution :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{x^2 \ln x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. f est par ailleurs clairement dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$. Étudions la dérivabilité de f en 0. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{x^2 \ln x} - 1}{x} \underset{x \to 0^+}{\sim} x \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ car $x^2 \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$. Il est clair que f est dérivable à gauche en 0 et que $f_g'(0) = 0$. f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En résumé, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions continues. De plus, si $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = (2x \ln x + x)\, e^{x^2 \ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ par opérations sur les limites. Il est par ailleurs clair que si $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$. f' est donc continue sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
3. f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. En 0^+ :

$$\Delta(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{(2x \ln x + x)\, e^{x^2 \ln x}}{x} = (2 \ln x + 1)\, e^{x^2 \ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$$

par opérations sur les limites et car $x^2 \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. f n'est donc pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 12.22 ♡

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Est-ce que f est de classe $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$?

Solution : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,1]$ par opération sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. Étudions la dérivabilité en 0. Soit $x \in]0,1]$. Le taux d'accroissement de f en 0 est

$$\Delta_f(x) = \frac{x \sin\left(\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right)}{x} = \sin\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

car $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \overset{X = 1/x}{=\!=} X e^{-X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Par ailleurs, toujours pour $x \in]0,1]$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^2 \sin\left(\frac{e^{-1/x}}{x}\right) + (1 - x)\, e^{-1/x} \cos\left(\frac{e^{-1/x}}{x}\right)\right)$$

et il vient facilement que $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, f' est aussi continue en 0. Calculons f''. On a :

$$f''(x) = -\frac{e^{-1/x}}{x^2}(1 - x) \sin\left(\frac{e^{-1/x}}{x}\right) + \frac{e^{-1/x}}{x^4}(-2x + 1) \cos\left(\frac{e^{-1/x}}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

donc f' est dérivable à droite en 0 d'après le théorème du prolongement dérivable et f'' est continue en 0. En conclusion f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$.

Exercice 12.23 ♡

Calculer la dérivée n-ième de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1 + x}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$
4. $f_4 : x \mapsto x^2 e^x$
5. $f_5 : x^3 \ln x$
6. $f_6 : x \mapsto \sin x \cos x$.
7. $f_7 : x \mapsto e^x \sin x$.

Solution :

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \neq 1$: $\boxed{f_1^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$. La formule est vraie au rang 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $x \neq 1$ on ait $f_1^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ alors pour tout $x \neq 1$

$$f_1^{(n+1)}(x) = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)' = -\frac{-(n+1)\,n!}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

et la formule est encore vraie au rang $n+1$. On conclut en appliquant le théorème de récurrence.

2. On montre de même que $\boxed{f_2^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}}$ pour tout $x \neq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$: $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x}$ donc :

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right) = \boxed{\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)}.$$

4. On calcule facilement les deux premières dérivées de f. Si $n \geqslant 3$, on applique la formule de Leibniz en remarquant que les dérivées d'ordre $\geqslant 3$ de $x \mapsto x^2$ sont nulles, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_4^{(n)}(x) = x^2 e^x + 2nxe^x + 2\frac{n(n-1)}{2}e^x = \boxed{\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right)e^x}.$$

5. On calcule facilement les trois premières dérivées de f_5. On montre aussi facilement par récurrence que la dérivée $n^{\text{ème}}$ de ln est $x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. On remarque que les dérivées d'ordre $\geqslant 4$ de $x \mapsto x^3$ sont toutes nulles. On procède alors comme précédemment. La formule de Leibniz nous permet d'écrire pour tout $n \geqslant 4$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ que :

$$\begin{aligned} f_5^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-3}} + 3\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-3}} + 6\frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-3}} \\ &= (-1)^n x^{3-n}(n-4)!\left(-(n-1)(n-2)(n-3) + 3n(n-2)(n-3) - 3n(n-2)(n-3) + n(n-1)(n-2)\right) \\ &= (-1)^n n(n+1)(n-2)(n-4)!x^{3-n} \end{aligned}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les formules de trigonométrie, $f_6(x) = \sin(2x)/2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f_6^{(n)}(x) = 2^{n-1}\sin(2x + n\pi/2)}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f_7(x) = e^x \sin x = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$. On sait dériver la fonction exponentielle complexe, voir la proposition 4.41 page 176. Comme $\left(e^{(1+i)x}\right)^{(n)} = (1+i)^n e^{(1+i)x} = \sqrt{2}^n e^{\frac{in\pi}{4}} e^{(1+i)x}$, on en déduit que $f_7^{(n)}(x) = \boxed{\sqrt{2}^n \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)e^x}$.

Exercice 12.24 ♡♡

Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction

$$f(x) = x^2(1-x)^n$$

Indication 12.4 : Écrire $(1-x)^n = (-1)^n(x-1)^n$ pour calculer les dérivées successives : cela évite les problèmes de signe !

Solution : Utilisons la formule de Leibniz :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[x^2\right]^{(k)} \left[(1-x)^n\right]^{(n-k)}$$

Et puisque les dérivées de x^2 sont nulles pour $k \geqslant 3$, il ne reste que 3 termes dans cette somme :

$$f^{(n)}(x) = x^2[(1-x)^n]^{(n)} + 2nx[(1-x)^n]^{(n-1)} + n(n-1)[(1-x)^n]^{(n-2)}$$

Ensuite, en remarquant que $(1-x)^n = (-1)^n(x-1)^n$, on calcule les dérivées de $(x-1)^n$:

$$[(x-1)^n]^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!}(x-1)^{n-p}$$

et alors

$$f^{(n)}(x) = n!x^2(-1)^n + 2nx(-1)^n n!(x-1) + n(n-1)(-1)^n \frac{n!}{2}(x-1)^2$$

et après factorisation et simplification, on trouve que

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{2}\left[(n+1)(n+2)x^2 - 2n(n+1)x + n(n-1)\right]}.$$

On remarque que f étant un polynôme de degré $(n+2)$, sa dérivée n-ième est bien un polynôme de degré 2.

Exercice 12.25 ♡♡

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{n-1}\ln x$ où $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculez $f^{(n)}$

Solution : *La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Notons g la fonction définie par $g(x) = x^{n-1}$ et h la fonction définie par $h(x) = \ln(x)$. D'après la formule de Leibniz, pour $x > 0$,*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Mais on montre facilement que pour $k \leqslant n-1$,

$$g^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-1-k}$$

et que $g^{(n)} = 0$, puis que $\forall k \geqslant 1$,

$$h^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} x^{n-1-k} (-1)^{n-k-1} \frac{(n-k-1)!}{x^{n-k}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x} \left[(1-1)^n - (-1)^n\right] \\
&= \boxed{\frac{(n-1)!}{x}}
\end{aligned}$$

Exercice 12.26 ♡♡

On considère la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^{n-1}\ln(x+1)$$

Déterminer $f_n^{(n)}(x)$ en effectuant un raisonnement par récurrence.

Solution : *Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,+\infty[$, $f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^n} - 1\right]$. On vérifie facilement la propriété au rang 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$: $f_{n-1}^{(n-1)}(x) = \frac{(n-2)!}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^{n-1}} - 1\right]$. Remarquons que : $f_n(x) = x f_{n-1}(x)$. La fonction f_n est un produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et elle est donc $\mathcal{C}^\infty$. On peut alors appliquer la formule de Leibniz et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :*

$$\begin{aligned}
f_n^{(n)}(x) &= x f_{n-1}^{(n)}(x) + n f_{n-1}^{(n-1)}(x) \\
&= -x\frac{(n-2)!}{x^2}\left(\frac{nx+1}{(1+x)^n} - 1\right) + n\frac{(n-2)!}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^{n-1}} - 1\right] \\
&= \frac{(n-2)!}{x}\left(-\frac{nx+n}{(1+x)^n} + \frac{n-1}{(1+x)^n} + 1 + \frac{n}{(1+x)^{n-1}} - n\right) \\
&= \boxed{\frac{(n-1)!}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^n} - 1\right]}
\end{aligned}$$

On termine en appliquant le principe de récurrence.

Exercice 12.27 ♡♡

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n(1-x)^n$. Calculer sa dérivée $n^{\text{ème}}$ et en déduire la valeur de la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Solution : *Posons $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto (1-x)^n$ Rappelons que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. On en déduit que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!}x^k$ et que $h^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}(1-x)^{n-k}$. En utilisant la formule de Leibniz, on trouve alors que :*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)\, h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

Remarquons que $f^{(n)}$ est un polynôme de degré n. Le coefficient de son terme dominant est :

$$n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = (-1)^n n! S_n$$

Comme la fonction f est une fonction polynomiale de degré $(2n)$ et de coefficient dominant $(-1)^n$, en la dérivant n fois, le coefficient de x^n dans $f^{(n)}(x)$ vaut aussi

$$(-1)^n (2n)(2n-1)\dots(n+1) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

On en déduit que $\boxed{S_n = \binom{2n}{n}}$.

12.6.3 Applications de la dérivation

Exercice 12.28 ♡

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que si f s'annule au moins deux fois alors il en est de même de f'.

Solution : *Si f' ne s'annule pas alors f est strictement croissante et donc injective. Elle ne peut s'annuler alors au plus qu'une fois. Si f' ne s'annule qu'une fois, en un réel noté α, alors on en déduit que le tableau de variation de f est un des deux suivants :*

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dans les deux cas, on remarque que f ne peut s'annuler qu'une fois. Par conséquent f' s'annule au moins deux fois.

Exercice 12.29 ♡

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\sin x} + x \end{array} \right.$.

1. *Démontrer que f réalise une bijection vers un intervalle qu'on précisera.*
2. *Prouver que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.*

Solution :

1. *La fonction f est bien définie et strictement croissante sur $\mathrm{I} = [0, \frac{\pi}{2}]$. Elle réalise donc une bijection de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. Mais par opération sur les fonctions continues, f est continue sur I donc J est un segment de $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}$ et que f est croissante, il vient que $\mathrm{J} = \left[0, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$. En conclusion, f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1 + \frac{\pi}{2}]$.*
2. *Comme f est continue et strictement croissante sur I, f^{-1} est continue et strictement croissante sur J. De plus f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0$. Donc f^{-1} est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Étudions la dérivabilité de f en 0. Considérons $h \in \left]0, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$ et posons $x = f^{-1}(h) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Remarquons que $x = f^{-1}(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. On a :*

$$\frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} = \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{\sin x} + x} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{\sin x}{x}} + 1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

car $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$. Donc f^{-1} est aussi dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En conclusion f^{-1} est dérivable sur J.

Exercice 12.30 ♡♡

Soit

$$f : \begin{cases} \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sin x} \end{cases}.$$

1. *Vérifier que f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur $[1, +\infty[$.*
2. *Sans calculer f^{-1}, déterminer son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.*

Solution :

1. *La fonction $\sin : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[\to]0, 1]$ est strictement décroissante et la fonction $x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$. Donc par utilisation de la règle des signes pour la composition des fonctions, f est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. On en déduit que f réalise une bijection de $\mathrm{I} =]0, 1]$ sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. Par opération sur les fonctions continues, f est continue sur I et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme $f(x) \xrightarrow[x \to \pi^-]{} +\infty$ et que $f(\pi/2) = 1$, on en déduit que $\mathrm{J} = [1, +\infty[$.*
2. *f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I. De plus si $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = -\cos x / \sin^2 x$. On remarque que f' ne s'annule qu'en $\pi/2$. Donc f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$. De plus, pour tout $y \in]1, +\infty[$:*

$$f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = -\frac{\sin^2 f^{-1}(y)}{\cos f^{-1}(y)}.$$

Mais comme $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to 1^+]{} \pi/2^+$, on en déduit que $f^{-1\prime}(y) \xrightarrow[y \to 1^+]{} -\infty$ et donc f^{-1} est, d'après le théorème du prolongement dérivable, non dérivable en 1. En conclusion f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 12.31 ♡♡

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. *Montrez que la fonction f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction g.*
2. *Etudiez la parité de la fonction g.*
3. *Etudiez les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et déterminez la limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.*
4. *On admet que $g'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Qu'en déduit-on sur la dérivabilité de g en 0 ? Tracer la courbe représentative de la fonction g.*

Solution :

1. *Remarquons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et que par conséquent, $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| > 0$. Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$, écrivons f sous forme exponentielle :*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}$$

Mais alors, lorsque $x \to 0$,

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln(1 + (x + \sqrt{1 + x^2} - 1)) \underset{x \to 0}{\sim} (x + \sqrt{1 + x^2} - 1) \underset{x \to 0}{\sim} x$$

Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} e$. On peut prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

2. Soit un réel $x > 0$. En utilisant les quantités conjuguées,

$$f(-x) = e^{-\frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} = e^{-\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)} = f(x)$$

La fonction g est donc paire et on l'étudiera sur $[0,+\infty[$.

3. On calcule pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2(\sqrt{x^2+1})}\left(x - \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)$$

Il faut donc étudier le signe de

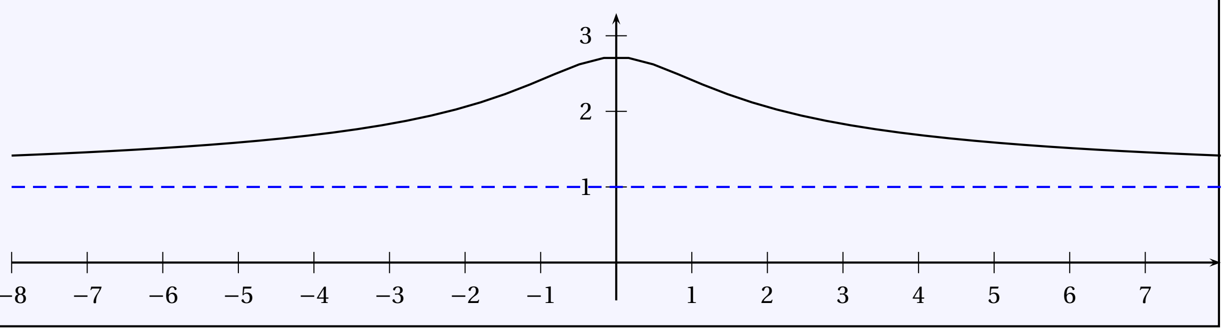
$$a(x) = x - \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

Mais $a'(x) = -\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)x}{\sqrt{x^2+1}}$. Comme $x>0$, $\sqrt{x^2+1}+x \geqslant 1$ et le logarithme est positif. Donc $a'<0$ sur $]0,+\infty[$ et puisque $a(0)=0$, il vient que $a<0$ sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Par ailleurs :

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = e^{\frac{1}{x}\left(\ln x + \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$$

car $\ln x/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

4. Si $g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ alors d'après le théorème du prolongement dérivable, g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$. On en déduit le graphe de g :



Exercice 12.32 ♡♡

On considère un réel $M>0$ et une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g'(x)| \leqslant M$. Soit un réel $\varepsilon > 0$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \varepsilon g(x)$.

1. Trouver une condition suffisante sur ε pour que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
2. Montrez que si cette condition est remplie, la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule $f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x) \geqslant 1 - \varepsilon M$. Par conséquent, si $M < 1/\varepsilon$, on est assuré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
2. Dans ce cas, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = f(\mathbb{R})$. Montrons que $J = \mathbb{R}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1 - \varepsilon M$, en notant $k = 1 - \varepsilon M > 0$, on a $[f - kx]' > 0$ et donc la fonction $x \mapsto f(x) - kx$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(0) + kx$. Or $f(0) + kx \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et d'après le théorème de majoration, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
   De même, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant 1 + \varepsilon M$, en notant $k' = 1 + \varepsilon M > 0$, on trouve que $\forall x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant f(0) + k'x$. Mais puisque $f(0) + k'x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, il vient que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. Donc $J =]-\infty,+\infty[$.

12.6.4 Recherche d'extrémums

Exercice 12.33 ♡

Déterminer les extremum éventuels des fonctions f définies par les expressions suivantes :

1. $f : x \mapsto 1/x$ *où* $x \in [1,2]$.
2. $f : x \mapsto x^5$ *où* $x \in \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto |x-1|$ *où* $x \in \mathbb{R}$.

Solution :

1. *La fonction f est continue et décroissante sur $[1,2]$. Elle atteint donc son minimum en $x = 2$ et son maximum en $x = 1$. Remarquons que f' ne s'annule pas sur $[1,2]$.*
2. *Une étude rapide des variations de f nous montre qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Cette fonction n'admet donc pas d'extremum sur $\mathbb{R}$. Remarquons que $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f.*
3. *On vérifie facilement que f admet un minimum en $x = 1$. Remarquons que f n'est pas dérivable en $x = 1$. Par contre f n'admet pas de maximum.*

Exercice 12.34 ♡♡

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(1)f'(1) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Indication 12.4 : Faire un dessin, et s'inspirer de la démonstration du théorème de Rolle.

Solution : *f est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Supposons par exemple que $f(1) > 0$ et $f'(1) < 0$. Soit $\mathrm{M} = f(c)$ le maximum de f sur $[0,1]$. Montrons que c est un point* intérieur *de $[0,1]$. On a $c \neq 0$ car $f(1) > 0$. Si on suppose que $c = 1$, alors $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f(1)$ mais alors $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \geqslant 0$ et en passant à la limite dans les inégalités lorsque $x \to 1$, on aurait $f'(1) \geqslant 0$, ce qui est faux. Par conséquent, $c \in]0,1[$. Alors puisque f est dérivable au point c qui est un extrémum local* intérieur*, il vient que $f'(c) = 0$.*

Exercice 12.35 ♡♡

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, non constante, dérivable à gauche et à droite en tout point. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'_d(c)f'_g(c) \leqslant 0$.

Solution : *La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment. Les deux bornes de f ne peuvent être atteintes en les extrémités de $[a,b]$ car comme $f(0) = f(1)$, f serait constante ce qui est contraire aux hypothèses. Une des deux bornes est donc atteinte en un point c intérieur au segment $[0,1]$. En ce point, les dérivées sont de signe contraire. En effet, supposons par exemple que c est un maximum alors, pour x dans un voisinage suffisamment petit à gauche de c, on a $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$ donc par passage à la limite dans une inégalité, $f'_g(x) \geqslant 0$. De même, pour x dans un voisinage suffisamment petit à droite de c, on a $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$ et donc $f'_d(x) \leqslant 0$. On en déduit le résultat. Si c est un minimum, on procède de manière analogue.*

Exercice 12.36 ♡♡♡

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution : *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$, il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| > \mathrm{A} \implies f(x) > f(x_0)$. En particulier, $x_0 \in [-\mathrm{A},\mathrm{A}]$. Sur le segment $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$, la fonction f est continue et admet donc un minimum : il existe $c \in [-\mathrm{A},\mathrm{A}]$ tel que pour tout $x \in [-\mathrm{A},\mathrm{A}]$, $f(x) \geqslant f(c)$. Mais si $x \in \mathbb{R} \setminus [-\mathrm{A},\mathrm{A}]$, on a $f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant f(c)$. Par conséquent, la fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ au point c. On sait alors que $f'(c) = 0$.*

12.6.5 Théorème de Rolle

Exercice 12.37 ♡

Étudier la possibilité d'appliquer le théorème de Rolle aux intervalles et fonctions suivants :

1. $f : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{x^2} \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

Solution :

1. La fonction f est continue sur $[-1,1]$ et $f(-1) = f(1)$. Elle est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ par opération sur les fonctions dérivables. Par contre, f n'est pas dérivable en 0. En effet, si $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$ alors le taux d'accroissement de f en 0 est
$$\Delta(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{-\frac{1}{3}}$$
qui diverge quand $x \to 0$. On ne peut donc appliquer le théorème de Rolle à f.
2. La fonction g est continue sur $]0,\pi]$ par opérations sur les fonctions continues. On vérifie facilement grâce au théorème des gendarmes que g est aussi continue en 0. Elle est dérivable sur $]0,\pi[$ et $g(0) = g(1/\pi) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g : il existe $c \in]0,\pi[$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 12.38 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que f' ne s'annule pas. Prouver que f ne peut être périodique.

Solution : Raisonnons par l'absurde. Supposons que f est périodique et notons $T > 0$ sa période. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b = a+T$. La fonction f est continue et dérivable sur $[a,b]$. De plus $f(b) = f(a+T) = f(a)$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à f sur le segment $[a,b]$. On en déduit que f' s'annule en un point de $[a,b]$ ce qui est en contradiction avec l'énoncé.

Exercice 12.39 ♡

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

Solution : Soit $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$. Elle est dérivable sur $[0,1]$, $F(0) = 0 = F(1)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in [0,1]$ tel que $F'(c) = 0$. Mais alors c est solution de l'équation.

Exercice 12.40 ♡

Soit
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \prod_{k=1}^{5}(x-k) \end{cases}.$$

1. *Sans calculer f', montrer que f' s'annule entre 1 et 2, entre 2 et 3, entre 3 et 4 et entre 4 et 5.*
2. *En déduire que les seules racines de f' sont celles trouvées précédemment.*
3. *Tracer le graphe de f.*

Solution :

1. La fonction f est dérivable (et donc continue) sur $[1,2]$ car polynomiale. De plus $f(1) = f(2) = 0$. D'après le théorème de Rolle, f' s'annule entre 1 et 2. On fait de même sur les trois autres segments.
2. Comme f est de degré 5, f' est de degré 4. Donc f' admet au plus 4 racines réelles. Les 4 racines trouvées dans la question précédente sont donc les seules racines de f'. On note α_i la racine de f' appartenant au segment $]i,i+1[$.
3. On en déduit facilement le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		α_1		2		α_2		3		α_3		4		α_4		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	$+\infty$

On trace alors le graphe de f sans difficulté.

Exercice 12.41 ♡♡

1. *Soient a,b deux réels distincts et soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que*
$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big)$$
2. *En déduire la **règle de l'Hospital** : soient $\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $f,g : V \to \mathbb{R}$ tels que :*

H1 *les fonctions f et g sont continues sur* V.

H2 *les fonctions f et g sont dérivables sur* $V\setminus\{x_0\}$.

H3 $f(x_0)=g(x_0)=0$.

H4 *la fonction g ne s'annule pas sur* $V\setminus\{x_0\}$.

H5 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\mathbb{R}$.

Alors $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

3. *En déduire les limites suivantes*

   (a) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

   (b) $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

   (c) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

   (d) $\lim_{x\to0}(1-\cos x)\operatorname{cotan}x$.

4. *Une généralisation de la proposition 11.36 page 431 :*

   (a) *Déduire de la règle de l'Hospital que si f est une application de classe $\mathscr{C}^2$ dans un voisinage de 0 tel que $f''(0)\neq0$ alors*

$$f(x)-\big(f(0)+xf'(0)\big)\underset{x\to0}{\sim}\frac{f''(0)}{2}x^2$$

   (b) *Généraliser ce résultat à une application de f classe $\mathscr{C}^n$ dans un voisinage de 0 telle que $f^{(n)}(0)\neq0$.*

Solution :

1. *Introduisons la fonction*

$$\theta:\left\{\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)\big(g(b)-g(a)\big)-g(x)\big(f(b)-f(a)\big)\end{array}\right..$$

   On montre que θ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ en utilisant les théorèmes d'opérations. On vérifie par un calcul simple que $\theta(a)=\theta(b)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle : il existe $c\in]a,b[$ tel que $\theta'(c)=f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)-g'(c)\big(f(b)-f(a)\big)=0$ d'où le résultat.

2. *Pour tout $x\in V\setminus\{x_0\}$, f et g sont continues sur $[x,x_0]$ et dérivables sur $[x,x_0[$. D'après le résultat de la première question appliqué au segment $[x,x_0]$, il existe $c_x\in]x,x_0[$ tel que*

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

   Notons que ce dernier quotient est défini, d'après l'hypothèse 5 si on prend x suffisamment proche de x_0. Mais $c_x\xrightarrow[x\to x_0]{}x_0$ et $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\xrightarrow[x\to x_0]{}l$ donc $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

3. *On vérifie que les fonctions f et g suivantes vérifient les hypothèses de la règle de l'Hospital sur un voisinage adéquat V de 0 puis on applique cette règle.*

   (a) *On pose $f:x\mapsto1-\cos x$ et $g:x\mapsto x^2$. Ces deux fonctions sont définies sur $V=\mathbb{R}$. Pour $x\in V$, on a : $f'(x)=\sin x$, $g'(x)=2x$ et pour $x\neq0$, $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\sin x}{2x}\underset{x\to0}{\sim}\frac12$ donc $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac12}$.*

   (b) *On pose $f:x\mapsto x-\sin x$ et $g:x\mapsto x^3$. Ces deux fonctions sont définies sur $V=\mathbb{R}$. Pour $x\in V$, on a : $f'(x)=1-\cos x$, $g'(x)=3x^2$ et pour $x\neq0$, $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1-\cos x}{3x^2}\underset{x\to0}{\sim}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac16$ donc $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac16}$.*

   (c) *On pose $f:x\mapsto\ln(1+x)-x$ et $g:x\mapsto x^2$. Ces deux fonctions sont définies sur $V=]-1,+\infty[$. Pour $x\in V$, on a : $f'(x)=-\frac{x}{1+x}$, $g'(x)=2x$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\frac{x}{2(1+x)x}\underset{x\to0}{\sim}-\frac12$ donc $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac12}$.*

   (d) *On pose $f:x\mapsto1-\cos x$ et $g:x\mapsto\tan x$. Ces deux fonctions sont définies sur $V=\mathbb{R}$. Pour $x\in V$, on a : $f'(x)=\sin x$, $g'(x)=1+\tan^2x$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\sin x}{1+\tan^2x}\xrightarrow[x\to0]{}0$ donc $\boxed{\lim_{x\to0}(1-\cos x)\operatorname{cotan}x=0}$.*

4. *Une généralisation de la proposition 11.36 page 431 :*

(a) *On suppose que f est définie sur un voisinage* V *de* $x_0 = 0$. *Introduisons les fonctions :*

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \left(f(0) + x f'(0)\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. .$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur V, *ces deux fonctions vérifient les quatre premières hypothèses de la règle de l'Hospital. De plus, si* $x \in V \setminus \{x_0\}$ *alors*

$$\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \frac{1}{2} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f''(0)}{2}$$

car on reconnaît le taux d'acroissement de f' en 0. *On en déduit, d'après la règle de l'Hospital, que*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f(x) - \left(f(0) + x f'(0)\right)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f''(0)}{2}$$

et comme $f''(0) \neq 0$ alors $f(x) - \left(f(0) + x f'(0)\right) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{f''(0)}{2} x^2$.

(b) *On généralise ce résultat en considérant les fonctions :*

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \left(f(0) + x f'(0) + \dfrac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

et en effectuant un travail identique. On montre alors que :

$$\boxed{f(x) - \left(f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{f^{(n)}(0)}{x^n}.}$$

Exercice 12.42 ♡♡♡

Soit I *un intervalle et* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable sur* I. *Soit* $(a, b, c) \in I^3$ *trois points de* I *avec* $a < b < c$. *Montrer qu'il existe* $d \in I$ *tel que*

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(d)}{2}$$

Solution : *Considérons la fonction* $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi(x) = (x-b) f(a) + (a-x) f(b) + (b-a) f(x) - \frac{(a-b)(b-x)(x-a)}{2} K$$

où K *est une constante choisie de telle sorte que* $\varphi(c) = 0$. *Comme* φ *est deux fois dérivable sur* I, φ *est continue sur* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$ *et* $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. *Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, il existe* $d_1 \in]a, b[$ *tel que* $\varphi'(d_1) = 0$. *De même, comme* $\varphi(b) = \varphi(c) = 0$, *il existe* $d_2 \in]b, c[$ *tel que* $\varphi'(d_2) = 0$. *Mais pour tout* $x \in I$, *on calcule*

$$\varphi'(x) = f(a) - f(b) + (b-a) f'(x) + (a-b) K x - \frac{(a-b)(a+b)}{2} K$$

et comme φ' *est continue sur* $[d_1, d_2]$, *dérivable sur* $]d_1, d_2[$ *et* $\varphi'(d_1) = \varphi'(d_2) = 0$, *d'après le théorème de Rolle, il existe* $d \in]d_1, d_2[$ *tel que* $\varphi''(d) = 0$. *Mais* $\forall x \in I$,

$$\varphi''(x) = (b-a) f''(x) + (a-b) K$$

et par conséquent, $K = f''(d)$. *Comme* $\varphi(c) = 0$, *en reportant cette valeur pour* K, *on trouve que*

$$(c-b) f(a) + (a-c) f(b) + (b-a) f(c) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} f''(d)$$

et en divisant cette égalité par $(a-b)(b-c)(c-a)$, *on trouve le résultat.*

Exercice 12.43 ♡♡

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. *On suppose que* $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ *tel que* $f''(c) = f(c)$.

Solution : *Considérons la fonction g donnée pour tout $x \in [a,b]$ par $g(x) = e^x[f'(x) - f(x)]$. Par opération sur les fonctions dérivables, g est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$ on a $g'(x) = e^x[f''(x) - f(x)]$. On vérifie que $g(a) = g(b) = 0$ Par application du théorème de Rolle, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g'(c) = 0$. Comme la fonction exponentielle ne s'annule jamais, il s'ensuit que $f''(c) - f(c) = 0$.*

Exercice 12.44 ♡♡♡

Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^3$ sur le segment $[a,b]$. On suppose qu'il existe trois points $a < a_1 < a_2 < a_3 < b$ tels que $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$. Soit un réel $x \in [a,b]$. Montrez qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{6} f^{(3)}(c).$$

Solution : *Définissons la fonction auxiliaire φ suivante :*

$$\varphi : \begin{cases} [a,b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto f(t) - \dfrac{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}{6}\mathrm{K} \end{cases}$$

où K est une constante choisie telle que $\varphi(x) = 0$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur le segment $[a,b]$ comme somme de la fonction f et d'une fonction polynomiale. Comme $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \varphi(a_3) = \varphi(x) = 0$, en appliquant le théorème de Rolle trois fois, on montre qu'il existe trois réels $b_1, b_2, b_3 \in]a,b[$ tels que $\varphi'(b_1) = \varphi'(b_2) = \varphi'(b_3) = 0$. En appliquant ensuite le théorème de Rolle à la fonction φ' deux fois, on montre l'existence de deux réels $c_1, c_2 \in]a,b[$ tels que $\varphi''(c_1) = \varphi''(c_2) = 0$ et en réappliquant le théorème de Rolle entre les points c_1 et c_2, on montre l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que $\varphi^{(3)}(c) = 0$. Mais on calcule pour $t \in [a,b]$,

$$\varphi^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - \mathrm{K}$$

et donc $\mathrm{K} = f^{(3)}(c)$. Comme la constante K a été choisie pour que $\varphi(x) = 0$, en écrivant cette condition et en remplaçant K par $f^{(3)}(c)$, on obtient l'égalité de l'énoncé.

Exercice 12.45 ♡♡♡

Soit $f \in \mathscr{C}^3([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}\left[f'(a) + f'(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c).$$

Solution : *Considérons la fonction auxiliaire*

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{2}\left[f'(a) + f'(t)\right] + \frac{(t-a)^3}{12}\mathrm{K}$$

définie pour tout $t \in [a,b]$ où K est une constante choisie en sorte que $\varphi(b) = 0$. La fonction φ s'annule aussi en a, est dérivable sur $[a,b]$ par opération sur les fonctions dérivables. On applique alors le théorème de Rolle. Il existe $c' \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c') = 0$. Par ailleurs, pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\left(f'(t) - f'(a)\right) - \frac{t-a}{2} f''(t) + \frac{(t-a)^2}{4}\mathrm{K}.$$

On remarque sur φ' s'annule aussi en a et qu'elle est dérivable sur $\left[a,c'\right]$. On applique alors une nouvelle fois le théorème de Rolle. Il existe $c \in \left]a,c'\right[$ tel que $\varphi''(c) = 0$. Mais pour tout $t \in [a,b]$,

$$\varphi''(t) = \frac{t-a}{2}\left(\mathrm{K} - f^{(3)}(t)\right).$$

Comme $\varphi''(c) = 0$, il vient que $\mathrm{K} = f^{(3)}(c)$ et l'égalité est prouvée.

entre a et b.

Exercice 12.46 ♡♡♡

Soit $f \in \mathscr{C}^5([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) - \frac{(b-a)^2}{12}\left(f''(b) - f''(a)\right) + \frac{(b-a)^5}{720} f^{(5)}(c)$$

Solution : *On utilise la fonction auxiliaire*

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\big(f'(x)+f'(a)\big) + \frac{(x-a)^2}{12}\big(f''(x)-f''(a)\big) - \frac{(x-a)^5}{720}\mathrm{K}$$

où K *est une constante choisie en sorte que* $\varphi(b) = 0$ *et l'application successive du théorème de Rolle permet de conclure comme dans l'exercice précédent.*

12.6.6 Théorème des accroissements finis

Exercice 12.47 ♡

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Considérons l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [n,n+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \right.$. *La fonction* f *est dérivable sur* $[n,n+1]$ *donc d'après l'inégalité des accroissements finis :*

$$m\left((n+1)-n\right) \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \mathrm{M}\left((n+1)-n\right)$$

où $m = \inf_{[n,n+1]} f'$ *et où* $\mathrm{M} = \sup_{[n,n+1]} f'$. *Comme pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = 1/t$, f' *est décroissante, et* $m = \dfrac{1}{n+1}$, $\mathrm{M} = \dfrac{1}{n}$. *On en déduit alors les inégalités.*

Exercice 12.48 ♡

1. *Montrer que pour tout* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. *En déduire que pour tout* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $-x^2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0$.

Solution : *Si* $x = 0$ *les inégalités sont trivialement vraies. Supposons que* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. *On applique l'inégalité des accroissements finis à* $\sin$ *sur le segment* $[0,x]$ *et on obtient le résultat.*
2. *On applique à nouveau l'inégalité des accroissements finis sur le segment* $[0,x]$ *mais cette fois ci à la fonction cosinus. On obtient :* $x.\inf_{t\in[0,x]}(-\sin t) \leqslant \cos x - 1 \leqslant x.\sup_{t\in[0,x]}(-\sin t)$ *ou encore , d'après la question précédente :* $-x^2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0$.

Exercice 12.49 ♡

Soient a, b *des réels positifs tels que* $a < b$.

1. *Montrer que*
$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$
2. *En déduire* $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

Solution :

1. *Le résultat de la première question découle directement de l'inégalité des accroissements finis appliquée* f : $\left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan x \end{array} \right.$.
2. *On applique l'inégalité précédente à* $a = 1$ *et* $b = \frac{4}{3}$ *et le résultat s'ensuit directement.*

Exercice 12.50 ♡

On prend 100 *comme valeur approchée de* $\sqrt{10001}$. *À l'aide du théorème des accroissements finis, majorer l'erreur commise.*

Solution : *Soient $0 < a < b$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction racine carrée sur le segment $[a,b]$, il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\sqrt{b}-\sqrt{a}=(b-a)\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

En prenant $a = 10000 = 10^4$ et $b = 10001 = 10^4+1$, on trouve que

$$\left|\sqrt{10001}-\sqrt{10000}\right| \leqslant \frac{1}{2\times 100}$$

donc l'erreur est inférieure à 5.10^{-3}.

Exercice 12.51 ♡

Soit une fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $\forall (x,y) \in]0,1[^2$,

$$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|^{\alpha}.$$

Montrer que la fonction f est constante.

Solution : *Soient $x \in]0,1[$. Pour $y \in]0,1[$ tel que $y \neq x$. On a $\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant k\left|y-x\right|^{\alpha-1}$ et comme $\alpha-1>0$, $\theta(y)=|y-x|^{\alpha-1}\xrightarrow[y\to x]{}0$. D'après le théorème de majoration, on en déduit que le taux d'accroissement possède une limite nulle lorsque $y \to x$. On a donc montré que la fonction f est dérivable et de dérivée non nulle en tout point $x \in]0,1[$. La fonction f est donc constante sur l'intervalle $]0,1[$.*

Exercice 12.52 ♡♡

Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue, ne s'annulant pas sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Montrez qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Solution : *Introduisons la fonction $\theta : \begin{cases} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left|f(x)\right| \end{cases}$. Comme f ne s'annule pas sur $[a,b]$, θ est bien définie et continue sur $[a,b]$. Par opérations sur les fonctions dérivables, θ est dérivable sur $]a,b[$. On applique le théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a,b[$ tel que $\theta(b)-\theta(a) = \theta'(c)(b-a)$ ce qui amène $\ln\left|f(a)\right| - \ln\left|f(b)\right| = (a-b)f'(c)/f(c)$. On obtient la formule proposée en passant à l'exponentielle : $\dfrac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)f'(c)/f(c)}$ (on peut supprimer les valeurs absolues car $f(a)$ et $f(b)$ sont de même signe.*

Exercice 12.53 ♡♡

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. La réciproque est-elle vraie ?

Solution : *Puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $f'(x) \geqslant 1$. Soit alors $x \geqslant A$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]A,x[$ tel que $f(x)-f(A) = f'(c)(x-A)$. Par conséquent, $f(x) \geqslant f(A)+x-A$ et d'après le théorème des gendarmes, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.*
La réciproque est bien entendu fausse, comme on le voit sur la fonction définie par $f(x) = x$.

Exercice 12.54 ♡♡♡

Soit un réel $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $f : [a,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,+\infty[$ telle que $f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

1. *Montrez que $\dfrac{f(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.*
2. *En déduire ensuite que si $f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} l$.*

Solution :

1. *Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, il existe $A_1 > 0$ tel que $\forall x \geqslant A_1$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \varepsilon$. Soit alors $x \geqslant A_1$. En utilisant le théorème des accroissements finis entre A_1 et x, on peut affirmer qu'il existe $c_x \in]A_1,x[$ tel que $f(x) = f(A_1) + f'(c_x)(x-A_1)$. Alors*

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(A_1)}{x} + f'(c_x)\left(1-\frac{A_1}{x}\right)$$

Comme $\dfrac{f(A_1)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, *il existe* $A_2 > 0$ *tel que* $\forall x \geqslant A_2$, $\left|\dfrac{f(A_1)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$.

Comme $1 - \dfrac{A_1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, *il existe* $A_3 > 0$ *tel que* $\forall x \geqslant A_3$, $\left|1 - \dfrac{A_1}{x}\right| \leqslant 1$.

Posons $A = \max(A_1, A_2, A_3)$.

Si $x \geqslant A$, *on obtient l'encadrement suivant :*

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f(A_1)}{x}\right| + \left|f'(c_x)\right|\left|1 - \frac{A_1}{x}\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \times 1 \leqslant 2\varepsilon$$

Il suffit alors de reprendre la démonstration avec au départ $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2}$ *pour avoir* $\left|f(x)/x\right| \leqslant \varepsilon$ *si* $x \geqslant A$. *On prouve ainsi que* $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2. *Définissons une fonction* g *par* $g(x) = f(x) - lx$. *Elle est dérivable sur* $[a, +\infty[$ *et* $\forall x \geqslant 0$, $g'(x) = f'(x) - l \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. *Donc d'après la première partie,* $\dfrac{g(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. *On trouve alors que* $\dfrac{f(x)}{x} - l \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *ce qui prouve que* $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$.

Exercice 12.55 ♡♡♡

Soit une fonction f *de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur le segment* $[a, b]$ *avec* $a < b$. *Montrez qu'il existe un réel* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

Solution : *Définissons la fonction auxiliaire suivante :*

$$\varphi : \begin{cases} [a,b] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \quad \dfrac{f(t)+f(a)}{2} - f\left(\dfrac{a+t}{2}\right) - \dfrac{(t-a)^2}{8} K \end{cases}$$

où K *est une constante choisie telle que* $\varphi(b) = 0$ *(c'est possible car* $a < b$*). Puisque la fonction* φ *est continue sur* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$, *et que* $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, *d'après le théorème de Rolle, il existe* $c_1 \in]a, b[$ *tel que* $\varphi'(c_1) = 0$. *On a donc*

$$\frac{f'(c_1)}{2} - \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+c_1}{2}\right) = K\frac{c_1 - a}{4}.$$

Appliquons ensuite le théorème des accroissements finis entre les points $\dfrac{a+c_1}{2}$ *et* c_1. *Comme la fonction* f' *est continue sur* $[(a+c_1)/2, c_1]$ *et dérivable sur* $](a+c_1)/2, c_1[$, *il existe un réel* $c \in](a+c_1)/2, c_1[$ *tel que*

$$f'(c_1) - f'\left(\frac{a+c_1}{2}\right) = \left(c_1 - \frac{a+c_1}{2}\right) f''(c).$$

On trouve donc que

$$\frac{c_1 - a}{4} f''(c) = \frac{K(c_1 - a)}{4}$$

et donc que $K = f''(c)$. *Puisque la constante* K *a été choisie pour que* $\varphi(b) = 0$, *on trouve donc que*

$$0 = \varphi(b) = \frac{f(b) + f(a)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

12.6.7 Application aux équations différentielles linéaires du premier ordre avec problèmes de raccord des solutions

Exercice 12.56 ♡♡

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad (1 - x^2) y' + xy + (x^2 - 1) = 0$$

1. *Déterminer toutes les solutions de* (E) *sur* $]-1, 1[$.

2. *Existe-t-il une solution sur* $I =]-1,1]$ *? (On admettra que* $\pi/2 - \arcsin x \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$ *).*

Solution : *La quantité* (x^2-1) *ne s'annule pas sur* $I_1 =]-1,1[$*. Résolvons l'équation d'abord sur* I_1*. La solution générale de l'équation homogène est*

$$y_0(x) = C\sqrt{1-x^2} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $\tilde{y}(x) = C(x)\sqrt{1-x^2}$*. Il suffit que* $C'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et donc par exemple* $C(x) = \arcsin(x)$*. La solution générale s'écrit donc*

$$y(x) = (\arcsin x + C)\sqrt{1-x^2}.$$

Soit maintenant y *une solution sur* I*. Pour que l'équation soit vérifiée en* 1*, il faut que* $y(1) = 0$*. Comme* $\forall x < 1$*,* $y(x) = (\arcsin x + C)\sqrt{1-x^2}$*, cette fonction se prolonge par continuité en* 1 *avec* $y(1) = 0$*. Étudions la dérivabilité en* 1 *de la fonction ainsi prolongée. Puisque* y *vérifie l'équation différentielle, on en tire que* $\forall x < 1$*,*

$$y'(x) = 1 - x\frac{\arcsin x + C}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pour que y' *ait une limite finie en* 1*, il faut que* $C = -\arcsin 1 = -\dfrac{\pi}{2}$*. En effet, si* $C \neq -\dfrac{\pi}{2}$*, alors* $y'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \infty$ *et d'après la proposition 12.15 page 478,* y *ne serait pas dérivable en* 1 *?*
Si $C = -\dfrac{\pi}{2}$*, alors*

$$y'(x) = 1 - x\frac{\arcsin x - \pi/2}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[x\to 1]{} 2 \text{ car } \frac{\arcsin x - \pi/2}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\sqrt{2(1-x)}}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -1$$

et donc d'après le théorème 12.14, y *est dérivable en* 1 *avec* $y'(1) = 2$*. Réciproquement, on vérifie que la fonction*

$$\boxed{x \mapsto \left(\arcsin x - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1-x^2}}$$

est solution de (E) *sur* $]-1,1]$*. C'est la seule solution de cette équation sur* $]-1,1]$*.*

12.6.8 Études de suites réelles

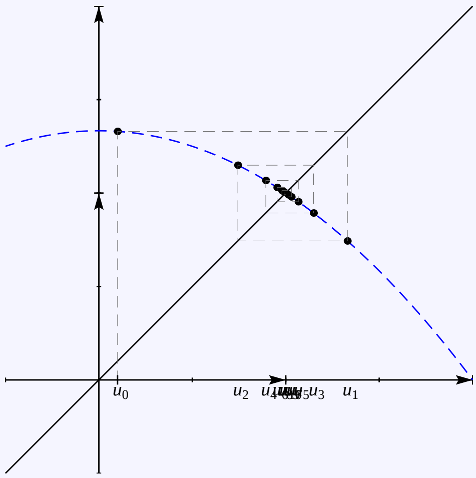
Exercice 12.57 ♡

On considère la suite (u_n) *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in [0,4/3] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(4 - u_n^2\right) \end{cases}.$$

1. *Montrer que :* $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0,4/3]$.
2. *Si* (u_n) *était convergente, quel serait sa limite* l *?*
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - l| \leqslant \frac{8}{9}|u_n - l|$ *et conclure.*

Solution :



Introduisons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{3}\left(4-x^2\right) \end{cases}$. On montre facilement que f est strictement décroissante sur $[0,4/3]$, que $f(0) = 4/3$ et que $f(4/3) = 20/27 > 0$. L'intervalle $[0,4/3]$ est donc stable par f. Remarquons aussi que f admet 1 comme unique point fixe sur cet intervalle. .

1. Montrons la propriété par récurrence. Par définition $u_0 \in [0,4/3]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [0,4/3]$. Alors comme $[0,4/3]$ est stable par f, il s'ensuit que $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,4/3]$. La propriété est alors prouvée par récurrence.
2. Si (u_n) était convergente, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on aurait $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ ce qui amènerait $l = f(l)$. La limite de (u_n) serait donc un point fixe de f dans l'intervalle $[0,4/3]$. On en déduit que l serait égal à 1.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue sur $[u_n, 1]$ et dérivable sur $]u_n, 1[$. Donc d'après le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}-1| &\leqslant \sup_{]u_n,1[} \left|f'(x)\right| |u_n-1| \\ &\leqslant \sup_{]0,4/3[} \left|f'(x)\right| |u_n-1| \\ &\leqslant \frac{8}{9}|u_n-1| \end{aligned}$$

car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2/3x$. Par une récurrence facile, on en déduit que :

$$|u_{n+1}-1| \leqslant \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} |u_0-1|$$

et donc d'après le théorème des gendarmes, il vient que $|u_{n+1}-1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En conclusion : $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.

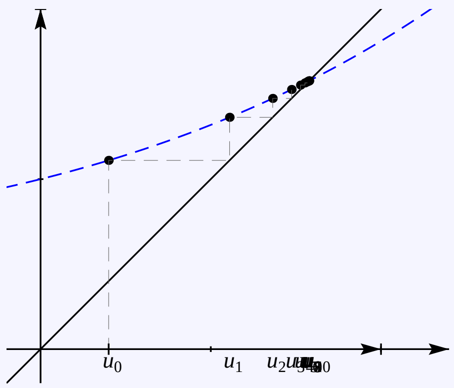
Exercice 12.58 ♡♡

On considère l'application f et la suite (u_n) définies par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{x+2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

1. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0,1[$ (et donc que (u_n) est bien définie).
3. Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $]0,1[$.
4. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{2e}{9}\right)^n$.
5. Conclure.
6. Donner une valeur approchée de α à 10^-3 près.

Solution :



1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de telles fonctions. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x)}{(2+x)^2}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 1/2$ et que $f(1) = e/3 < 1$ on en déduit que $f(]0,1[) \subset]0,1[$.
2. Par définition, $u_0 \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]0,1[$. Comme $]0,1[$ est stable par f, il vient que $u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[$. On prouve ainsi la propriété par récurrence. On a de plus clairement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$ donc (u_n) est bien définie.
3. Introduisons la fonction

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x(x+2) \end{array} \right. .$$

Par opérations sur les fonctions continues, θ est continue sur $[0,1]$. De plus, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e - 3 < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, θ admet un zéro sur $]0,1[$. On montre facilement que pour tout $x \in [0,1]$, $\theta'(x) = e^x - 2 - 2x$ et $\theta''(x) = e^x - 2$. Donc sur $[0,1]$, θ'' est strictement négative et θ' est strictement décroissante. Comme $\theta'(0) = -1$, sur $[0,1]$, θ' est strictement négative et θ est strictement décroissante. On peut alors affirmer que le zéro de f sur $]0,1[$ est unique. On le note α.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue sur $[u_{n-1}, \alpha]$ et dérivable sur $]u_{n-1}, \alpha[$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha| &\leqslant \sup_{x \in]0,1[} \left| f'(x) \right| |u_{n-1} - \alpha| \\ &\leqslant \frac{2e}{9} |u_{n-1} - \alpha| . \end{aligned}$$

car f' est strictement croissante sur $[0,1]$. Par une récurrence facile, on en déduit que

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2e}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| .$$

Mais comme $u_0, \alpha \in]0,1[$, on a : $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$ et on obtient l'inégalité proposée.
5. On déduit facilement de cette dernière inégalité et du théorème des gendarmes que $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha}$.
6. On utilise l'inégalité précédente. On cherche pour quels valeurs de n, $(2e/9)^n \leqslant 10^{-3}$. On passe au logarithme et on trouve $n \geqslant \dfrac{3 \ln 10}{2 \ln 3 - \ln 2 - 1} \simeq 13,7$. Donc il suffit de calculer u_{14} pour connaître α à la précision requise. On trouve $\alpha \simeq 0.789$ à 10^{-3} près. Ceci est valable quelque soit la valeur prise au départ pour u_0 !

Exercice 12.59 ♡

1. Pour tout $x \geqslant 0$, déterminer un encadrement de $\operatorname{sh}(x+1) - \operatorname{sh} x$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{ch} 0 + \operatorname{ch} 1 + \ldots + \operatorname{ch} n \leqslant \operatorname{sh}(n+1)$.
3. On considère la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \operatorname{sh}(n+1) - (\operatorname{ch} 0 + \operatorname{ch} 1 + \ldots + \operatorname{ch} n) .$$

Montrer que (u_n) est croissante.
4. On considère aussi la fonction $f : x \mapsto \operatorname{sh}(x+2) - \operatorname{sh}(x+1) - \operatorname{ch}(x+1)$.
   (a) Prouver que $f(x)$ et $f'(x)$ sont positives pour tout $x \geqslant 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant f(0)$.
5. En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Soit $x \geqslant 0$. La fonction sh est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. D'après l'inégalité des accroissements finis : $\inf_{]x,x+1[} \operatorname{ch} \leqslant \operatorname{sh}(x+1) - \operatorname{sh} x \leqslant \sup_{]x,x+1[} \operatorname{ch}$. Mais comme ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $\operatorname{ch} x \leqslant \operatorname{sh}(x+1) - \operatorname{sh} x \leqslant \operatorname{ch}(x+1)$.
2. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{sh}(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{sh}(k+1) - \operatorname{sh} k) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch} k = \operatorname{ch} 0 + \operatorname{ch} 1 + \ldots + \operatorname{ch} n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $u_{n+1} - u_n = \operatorname{sh}(n+2) - \operatorname{sh}(n+1) - \operatorname{ch}(n+1)$. Cette quantité est positive d'après la première question appliquée à $x = n+1$. Donc (u_n) est croissante.

4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) D'après la première question, on a : $\operatorname{ch} x \leqslant \operatorname{sh}(x+1) - \operatorname{sh} x$ donc $\operatorname{ch}(x+1) \leqslant \operatorname{sh}(x+2) - \operatorname{sh}(x+1)$ et f est positive. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions dérivables et pour $x \in \mathbb{R}_+$: $f'(x) = \operatorname{ch}(x+2) - \operatorname{ch}(x+1) - \operatorname{sh}(x+1)$. On montre facilement en appliquant l'inégalité des accroissements finis à ch sur le segment $[x+1, x+2]$ que cette dernière quantité est positive. Donc $f' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Comme f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant f(0)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = f(n) > f(0) + u_0$. Donc $u_n \geqslant n f(0)$. Comme $f(0) > 0$, d'après le théorème des gendarmes $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

Exercice 12.60 ♡

1. *Étudier la fonction* $f : \begin{cases}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x \ln x} \end{cases}$.
2. *Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :*

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leqslant \frac{1}{n \ln n}.$$

3. *En déduire que la suite (u_n) de terme général*

$$u_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln n}$$

définie pour tout entier $n \geqslant 2$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ par opérations sur les fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $f'(x) = -\dfrac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}$. La fonction f' est strictement négative sur $]1, +\infty[$ et f est strictement décroissante sur son domaine de définition. On montre par ailleurs facilement que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $n \geqslant 2$. Introduisons la fonction $\theta : \begin{cases} [n, n+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\ln x) \end{cases}$. Soit $x \in [n, n+1]$. Comme $n \geqslant 2$, on a :$x \geqslant 2$ et donc $\ln x > 0$. La fonction θ est donc bien définie. Elle est de plus dérivable sur son domaine de définition par opérations sur les fonctions dérivables et $\theta'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$. D'après la question précédente, f' est strictement décroissante, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à θ sur le segment $[n, n+1]$, il vient que

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leqslant \frac{1}{n \ln n}.$$

3. Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, on a : $1/(2\ln 2) \geqslant \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$, $1/(3\ln 3) \geqslant \ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)$, ...,$1/(n \ln n) \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)$. On somme alors ces $n-1$ inégalités et on trouve par télescopage que :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln n} \\ &\geqslant (\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)) + (\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3)) + \ldots + (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)) \\ &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2). \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le théorème des gendarmes : $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

12.6.9 Convexité

Exercice 12.61

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs strictement positives. On suppose que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $g : x \mapsto \ln(f(x))$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. *Si on suppose f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f'_\alpha(x) = (\alpha f(x)+f'(x))e^{\alpha x}$ et $f''_\alpha(x) = (\alpha^2 f(x)+2\alpha f'(x)+f''(x))e^{\alpha x}$. Par hypothèse, on a $f''_\alpha(x) > 0$ ceci pour tout α. On en déduit que le discriminant du trinôme en α est négatif. Donc $\left(f'(x)\right)^2 - f''(x)f(x) < 0$ et ceci pour tout x réel.*

   Or g est deux fois dérivable et $g''(x) = \dfrac{f''(x)f(x)}{f(x)^2}$. On en déduit que g est convexe.
2. *Si on ne suppose plus f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, la démonstration est plus acrobatique :*

   Pour $x \neq y$ et $t \in [0,1]$, on pose $\alpha = \dfrac{\ln(f(x)) - \ln(f(x))}{x-y}$. Par hypothèse, f_α est convexe sur $\mathbb{R}$ donc

$$\exp(\alpha(tx+(1-t)y))f(tx+(1-t)y) \leqslant te^{\alpha x}f(x) + (1-t)e^{\alpha y}f(y),$$

   soit

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &\leqslant t\exp(\alpha(x-y)(1-t))f(x) + (1-t)\exp(-\alpha(x-y)t)f(y) \\ &\leqslant t\exp((\ln f(x) - \ln f(y))(1-t))f(x) + (1-t)\exp((\ln f(x) - \ln f(y))t)f(y) \\ &\leqslant \left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{t-1} f(x) + (1-t)\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{t} f(y) \\ &\leqslant f(x)^t f(y)^{1-t} \end{aligned}$$

   En prenant les logarithmes, on obtient la convexité de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.62 ♡

On considère une fonction f deux fois dérivable sur $\mathrm{I} =]0,+\infty[$ et une fonction $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathrm{I},\ g(t) = tf(1/t).$$

Montrer que f est convexe si et seulement si g est convexe.

Solution :

1. $\boxed{\Rightarrow}$ *La fonction g est deux fois dérivable sur I par opérations sur les fonctions deux fois dérivables sur I. Pour tout $t \in \mathrm{I}$:*

$$\begin{cases} g'(t) &= f(1/t) - \dfrac{f'(1/t)}{t} \\ g''(t) &= \dfrac{1}{t^3}f''(1/t) \geqslant 0 \end{cases}.$$

   On en déduit que g est convexe.
2. $\boxed{\Leftarrow}$ *Soit $x \in \mathrm{I}$. Posons $t = 1/x$. On a $f(x) = xg(1/x)$ et on montre facilement que $f''(x) = 1/x^3 g''(x) \geqslant 0$ ce qui montre que f est convexe.*

Remarque 12.19 *On peut également montrer ce résultat avec comme hypothèse que f est uniquement continue (utiliser qu'une fonction continue est convexe si elle vérifie le lemme des trois pentes)*

Exercice 12.63 ♡

En utilisant la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$, montrer que

$$\forall a,b > 1, \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}.$$

Solution : *La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I} =]1,+\infty[$ et pour tout $x > 1$, on calcule $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2\ln x} - \dfrac{1}{x^2(\ln x)^2} = -\dfrac{1+\ln x}{x^2\ln^2 x} < 0$. La fonction f est donc concave et pour $a,b > 1$ et $\lambda \in [0,1]$:*

$$\ln\ln\left(\frac{\lambda a + (1-\lambda)b}{2}\right) \geqslant \lambda\ln\ln a + (1-\lambda)\ln\ln a.$$

Donc en prenant $\lambda = 1/2$, il vient que :

$$\ln\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{\ln\ln a + \ln\ln a}{2} = \ln\left((\ln a \ln b)^{1/2}\right)$$

En prenant l'exponentielle qui est croissante, on en déduit l'inégalité de l'énoncé.

Exercice 12.64 ♡♡

Montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Solution : *Comme la fonction* ln *est concave sur* $]0,1[$,

$$\forall (a,b) \in]0,1[^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad \ln(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda \ln a + (1-\lambda)\ln b.$$

Soit $x \in]0,1[$. *En posant* $a = x \in]0,1[$, $b = 1-x \in]0,1[$ *et* $\lambda = x \in]0,1[$ *, on trouve que*

$$x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \leqslant \ln(x^2 + (1-x)^2)$$

En étudiant la fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + (1-x)^2 \end{array} \right.$ *, on montre qu'elle admet un minimum en* $\frac{1}{2}$ *qui vaut* $\frac{1}{2}$. *Par conséquent,*

$$x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \geqslant \ln(\frac{1}{2}).$$

On applique alors l'exponentielle à notre inégalité et comme cette fonction est croissante, on obtient le résultat de l'énoncé.

Exercice 12.65 ♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction convexe majorée. Montrer que* f *est constante.*

Solution : *Prouvons le résultat par l'absurde. Si* f *n'est pas constante, alors il existe deux réels* $x < y$ *tels que* $f(x) \neq f(y)$. *Étudions deux cas :*

1. *si* $f(x) < f(y)$ *:* *Soit* $z > y$, *d'après le lemme des trois pentes, on a :*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

d'où en notant $\Delta = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$,

$$f(z) \geqslant (z-x)\Delta + f(x) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui est impossible car f *est majorée sur* $[x,+\infty[$.

2. *si* $f(x) > f(y)$ *:* *Supposons cette fois-ci que* $z < x$. *D'après le lemme des trois pentes, on a :*

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

et en notant $\Delta = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} < 0$, *il vient :*

$$f(z) \geqslant f(x) + (z-x)\Delta \xrightarrow[z\to-\infty]{} +\infty$$

ce qui est impossible car f *est majorée sur* $]-\infty,x]$.

Il ne peut alors exister $x < y$ *tels que* $f(x) \neq f(y)$. *On en déduit que* f *est constante.*

Exercice 12.66 ♡♡

Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle I *est continue sur l'intérieur de l'intervalle* I.

Solution : *Soit* $x \in$ I, *un point* intérieur. *Il existe donc deux points* $(z_1,z_2) \in$ I *tels que* $z_1 < x < z_2$. *Soit* $y \in [x,z_2]$. *En utilisant le lemme des trois pentes, on trouve que*

$$\frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x}$$

Notons pour $i = 1,2$, $\Delta_i = \dfrac{f(x)-f(z_i)}{x-z_i}$. *L'inégalité précédente devient :*

$$\Delta_1(y-x) \leqslant f(y)-f(x) \leqslant \Delta_2(y-x)$$

et d'après le théorème des gendarmes, $f(y) \xrightarrow[y\to x^+]{} f(x)$. *Par les mêmes arguments, en prenant* $y \in [z_1, x]$, *on montre également que* $f(y) \xrightarrow[y\to x^-]{} f(x)$, *et donc que* $f(y) \xrightarrow[y\to x]{} f(x)$. *On a alors montré que* f *est continue au point* x.

Exercice 12.67 ♡♡♡

Soit une fonction $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ *dérivable et concave sur* $[0,+\infty[$. *Montrez que*

$$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ f(x+y) \leqslant f(x)+f(y).$$

Solution : *Comme la fonction* f *est concave et dérivable, on sait que la fonction* f' *est décroissante sur* $\mathrm{I} = [0,+\infty[$. *Soit* $y \in \mathrm{I}$. *Considérons la fonction définie sur* I *par* $g(x) = f(x+y) - f(x)$. *Elle est dérivable sur* I *et pour tout* $x \in \mathrm{I}$, *comme* $x+y \geqslant x$, *on a :* $g'(x) = f'(x+y) - f'(x) \leqslant 0$. *Donc* $\forall x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leqslant g(0) = f(y) - f(0)$. *On a alors montré que* $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) - f(0)$ *et comme par hypothèse,* f *est à valeurs positives,* $f(0) \geqslant 0$ *et donc*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad f(x+y) \leqslant f(x)+f(y).$$

12.6.10 Équations fonctionnelles

Exercice 12.68 ♡♡♡

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *telles que pour toute suite arithmétique* (x_n), *la suite* $(f(x_n))$ *est une suite arithmétique.*

Solution : *Soit* f *une fonction vérifiant la propriété. Considérons* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *Il existe alors* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a+bn) = \alpha + \beta n.$$

Si on pose $n = 0$ *puis* $n = 1$, *on trouve que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(a+bn) = f(a) + \left[f(a+b) - f(a)\right] n$$

En particulier si $n = 2$, *on trouve que*

$$f(a+2b) = 2f(a+b) - f(a).$$

et cette relation doit être vraie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *Avec* $a = 0$, *on trouve en particulier que*

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad f(2b) = 2f(b) - f(0).$$

Posons $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(0) \end{array} \right.$. *Cette fonction doit vérifier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x).$$

La fonction g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *car* f *l'est et en dérivant cette dernière relation, on trouve que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(2x) = g'(x).$$

Comme g' *est continue en* 0, *on montre facilement que* g' *est constante. Par conséquent,* g *est linéaire, et* f *est affine. On vérifie réciproquement que toute fonction affine convient.*

Exercice 12.69 ♡♡

1. *Trouver toutes les fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 2f(x)$$

2. *Si l'on ne suppose pas* f *dérivable, construire une fonction différente de celles trouvées vérifiant la propriété.*

Solution :

1. En dérivant, on trouve que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(2x) = 2f'(x)$$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(2x) = f'(x)$. Soit $x \neq 0$. Il s'ensuit par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}*$, $f'(\frac{x}{2^n}) = f'(x)$. Mais f' est continue en 0 donc $f'(\frac{x}{2^n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)$. La fonction f' est donc constante et f est affine de la forme $f(x) = ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Mais $f(2\times 0) = 2\times f(0)$ et nécessairement $f(0) = 0$ ce qui amène $b = 0$. La fonction f est donc linéaire. Réciproquement, toute fonction linéaire convient.
2. La fonction donnée par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
vérifie la propriété et n'est pas linéaire.

Exercice 12.70 ♡♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\circ f(x) = \frac{x}{2} + 3 \quad (\star).$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\frac{x}{2}+3) = \dfrac{f(x)}{2} + 3.$
2. Montrer que la fonction f' est constante.
3. Trouver les fonctions f vérifiant la relation (1).

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant f à $(\star)$, on trouve que $f(f\circ f(x)) = f\left(\frac{x}{2}+3\right)$ et comme $f\circ(f\circ f) = (f\circ f)\circ f$, en utilisant l'expression de $f\circ f$ donnée par $(\star)$, on obtient que $\dfrac{f(x)}{2} + 3 = f\left(\frac{x}{2}+3\right)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En dérivant l'égalité précédente, on obtient que
$$\frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2}+3\right).$$
On définit alors une suite (u_n) par
$$\begin{cases} u_0 & = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = \dfrac{u_n}{2} + 3 \end{cases}.$$
Cette suite est arithmético-géométrique donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 6 + \frac{1}{2^n}(x-6) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6$$
Comme f' est continue au point 6, on obtient que $f'(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(6)$ et que finalement $f'(x) = f'(6)$. Par conséquent, f' est constante.
3. Comme f' est constante, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$$
Cherchons les réels a, b tels que f vérifie $(\star)$. Après calculs, on trouve $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, b = 6 - 3\sqrt{2}$ ou alors $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, b = 6 + 3\sqrt{2}$.

Chapitre 13

Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Pour bien aborder ce chapitre

Les mathématiciens se sont intéressés très tôt aux problèmes de calcul d'aires et de volumes. Ainsi Eudoxe de Cnide, mathématicien grec du 4e siècle avant note ère, parvient à calculer le volume d'une pyramide. Cent ans plus tard, Archimède généralise son procédé et invente la méthode d'exhaustion. Il s'agit d'approcher l'aire ou le volume à déterminer par des aires ou des volumes élémentaires, par défaut et par excès. La notion de limite est alors encore bien loin d'être découverte et le calcul est généralement terminé par un raisonnement par l'absurde. La « révélation » est venue de Newton et de Leibniz lorsqu'ils inventèrent le calcul infinitésimal : l'opération d'intégration est une opération inverse de celle de la dérivation et, pour calculer une aire, il suffit de calculer une primitive. C'est « le théorème fondamental de l'analyse » 13.29 page 531. Il faudra attendre néanmoins le 19e siècle pour que la notion d'intégrale soit bien formalisée grâce aux travaux de Cauchy et surtout à ceux de Riemann. Celui-ci s'intéresse à fonction f donnée sur un segment $[a,b]$ et essaie d'approcher l'aire $\mathscr{A}$ sous le graphe de f par les aires Σ^- et Σ^+ de deux familles de rectangles qui approchent par défaut et par excès $\mathscr{A}$ comme dans les dessins ci-dessous.

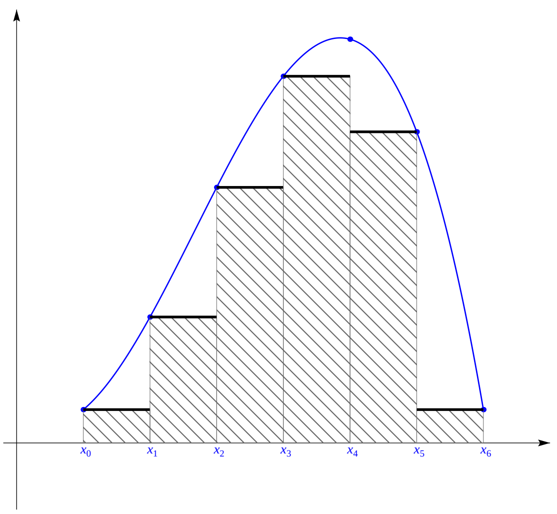


FIGURE 13.1 – Somme inférieure : Σ^-

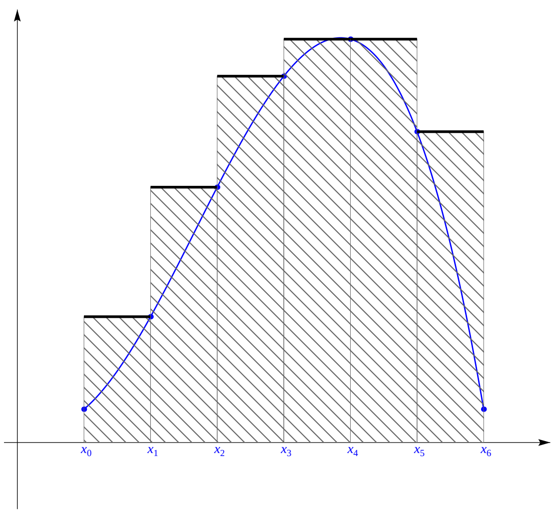


FIGURE 13.2 – Somme supérieure : Σ^+

Une fonction est intégrable au sens de Riemann si et seulement la différence des aires Σ^+ et Σ^- tend vers 0 quand le pas de la subdivision, c'est-à-dire la largeur des rectangles considérés, tend vers 0. La méthode d'exhaustion est sous-jacente à ce procédé.

Nous travaillerons dans ce chapitre sur une classe de fonctions beaucoup plus simples que celles étudiée dans l'intégrale de Riemann : les fonctions continues par morceaux. Ce sera amplement suffisant pour pourvoir traiter une large variété de problèmes. Vous généraliserez ces résultats en spé lors de l'étude des intégrales impropres à des fonctions pas forcément continues par morceaux.

En particulier, pour un segment $[a,b]$ et une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ positive, nous nous attacherons dans ce chapitre à

répondre aux deux questions suivantes.

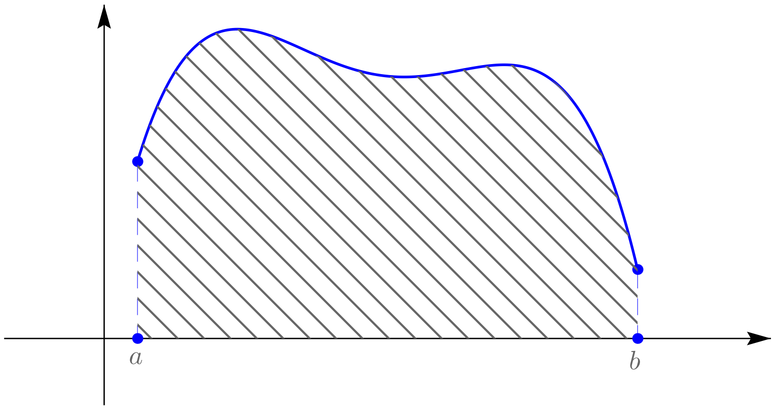


FIGURE 13.3 – Aire sous une courbe

1. Quelle condition imposée à f pour que l'aire délimitée par sa courbe dans un repère orthonormé soit bien définie ?
2. Comment calculer cette aire ?

13.1 Fonctions en escaliers

13.1.1 Subdivision d'un segment

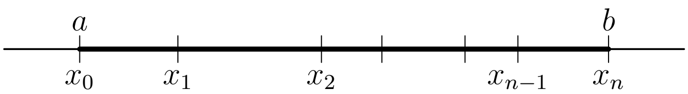


FIGURE 13.4 – Subdivision d'un segment

DÉFINITION 13.1 **Subdivision d'un segment**
On appelle *subdivision* du segment $[a,b]$ toute famille $\tau = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Le *pas de la subdivision* τ est donné par $\max_{i\in[\![0,n-1]\!]} |x_{i+1} - x_i|$. Une subdivision de $[a,b]$ est *régulière* si tous les $x_{i+1} - x_i$ sont égaux.

DÉFINITION 13.2 **Subdivision plus fine qu'une autre**
Considérons τ et τ' deux subdivisions d'un segment $[a,b]$. On dit que τ' est plus fine que τ si et seulement si tout élément de la famille τ est élément de la famille τ'.
Plus précisément, une subdivision est une famille. Une famille est une application. Il vaut mieux dire que l'image de τ est incluse dans l'image de τ'

PROPOSITION 13.1
Soient τ et τ' deux subdivisions d'un segment $[a,b]$. Il existe une subdivision de $[a,b]$ plus fine que τ et τ'.

Démonstration *Il suffit de considérer la famille $\tau'' = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ dont les éléments sont ceux de τ et ceux de τ' ordonnés dans l'ordre croissant et où N est le cardinal de la famille ainsi construite. τ'' est plus fine que τ et τ'.*

13.1.2 Fonctions en escaliers

DÉFINITION 13.3 **Fonction en escalier**

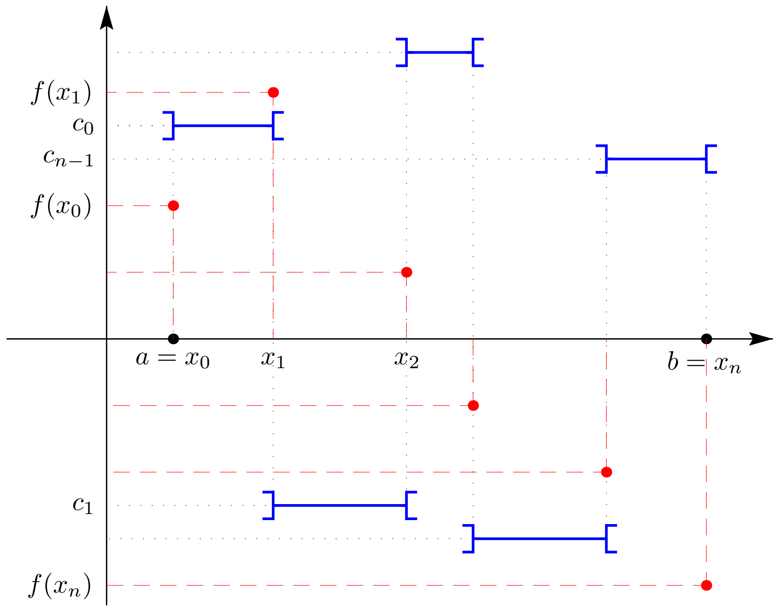


FIGURE 13.5 – Fonction en escalier

– Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *une fonction en escalier* sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que φ est constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \exists c_k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi(x) = c_k$$

– La subdivision τ est dite *subordonnée* à la fonction φ.
– On notera $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Remarque 13.1
– Si τ est une subdivision subordonnée à φ alors toute subdivision plus fine est encore subordonnée à φ.
– Une fonction constante est une fonction en escalier.

PROPOSITION 13.2
Toute fonction $\varphi \in \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration *Soient φ une fonction en escalier et $\tau = x_0 < \cdots < x_n = b$ une subdivision qui lui est subordonnée. On a donc : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \exists c_k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi(x) = c_k$. En posant $m = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |c_k|$ puis $\mathrm{M} = \max(m, |f(x_0)|, \ldots, |f(x_n)|)$, on a $\forall x \in [a, b]$, $|\varphi(x)| \leqslant \mathrm{M}$.*

PROPOSITION 13.3

– L'ensemble des fonctions en escalier $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ sur le segment $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions $(\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R}), +, .)$.
– L'ensemble $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est aussi un sous-anneau de l'anneau des fonctions $(\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$.

Démonstration *La fonction constante égale à 0 sur $[a, b]$ est élément de $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$. On montre facilement (en utilisant une subdivision plus fine que les deux subdivisions subordonnées aux deux fonctions) que $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$. On montre de même qu'un produit de fonctions en escalier est encore une fonction en escalier, ce qui prouve que $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$.*

13.1.3 Intégrale d'une fonction en escaliers

DÉFINITION 13.4 **Intégrale d'une fonction en escaliers**
Supposons que $a < b$. Soit une fonction en escalier $\varphi \in \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ une subdivision subordonnée à φ. Soient $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = c_k$. On définit l'*intégrale* de la fonction en escalier φ entre a et b comme étant le nombre réel

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k).$$

Ce nombre ne dépend pas du choix de la subdivision τ subordonnée à φ.

Démonstration *Prouvons que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie. Soient τ_1 et τ_2 deux subdivisions subordonnées à φ. Notons I_τ l'intégrale calculée avec la formule donnée dans la proposition pour une subdivision τ de $[a,b]$.*

- *Supposons que τ_1 est plus fine que τ_2. Si τ_1 et τ_2 ne diffèrent qu'en un point, $\tau_2 = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ et $\tau_1 = a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \alpha < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$. On a : $\varphi_{|]x_i,x_{i+1}[} = c_i$ par conséquent $\varphi_{|]x_i,\alpha[} = c_i$, $\varphi_{|]\alpha,x_{i+1}[} = c_i$ et*

$$\begin{aligned} I_{\tau_1} &= c_0(x_1-x_0)+c_1(x_2-x_1)+\ldots+c_{i-1}\left(x_i-x_{i-1}\right)+\\ &\underbrace{c_i\left(\alpha-x_i\right)+c_i\left(x_{i+1}-\alpha\right)}_{=c_i(x_{i+1}-x_i)}+c_{i+1}\left(x_{i+2}-x_{i+1}\right)+\\ &\ldots+c_{n-1}(x_n-x_{n-1}) = I_{\tau_2}\end{aligned}$$

  Le cas où τ_1 et τ_2 ne diffèrent que d'un nombre fini de points se traite de même.
- *Étudions maintenant le cas général. Considérons la subdivision $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ qui est plus fine que τ_1 et τ_2. En appliquant le point précédent, on a $I_\tau = I_{\tau_1}$ et $I_\tau = I_{\tau_2}$ et par conséquent $I_{\tau_1} = I_{\tau_2}$.*

13.1.4 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escaliers

PROPOSITION 13.4 **L'intégrale est une forme linéaire sur $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$**

Soient $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions en escalier sur le segment $[a,b]$. Pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{[a,b]} \alpha\varphi_1+\beta\varphi_2 = \alpha\int_{[a,b]}\varphi_1+\beta\int_{[a,b]}\varphi_2$$

Autrement dit, si

$$\theta : \begin{cases} \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \int_{[a,b]}\varphi \end{cases}$$

alors on a

$$\theta\left(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2\right) = \alpha\theta\left(\varphi_1\right)+\beta\theta\left(\varphi_2\right)$$

On dit aussi que θ est une *forme linéaire* sur $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration *Soient τ_1 une subdivision subordonnée à φ_1 et τ_2 une subdivision subordonnée à φ_2. Soit τ une subdivision plus fine que τ_1 et τ_2. Elle est donc subordonnée à la fois à φ_1 et à φ_2. Supposons que $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ et que*

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!],\quad \varphi_{1|]x_i,x_{i+1}[} = c_i \quad\text{et}\quad \varphi_{2|]x_i,x_{i+1}[} = d_i.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2 &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha c_i+\beta d_i\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)\\ &= \alpha\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)+\beta\sum_{i=0}^{n-1}d_i\left(x_{i+1}-x_i\right)\\ &= \alpha\int_{[a,b]}\varphi_1+\beta\int_{[a,b]}\varphi_2\end{aligned}$$

PROPOSITION 13.5 **L'intégrale d'une fonction en escalier positive est positive**
Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$. Si φ est positive sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]}\varphi \geqslant 0$.

Démonstration *Soit $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision subordonnée à φ : $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $\varphi_{1|]x_i,x_{i+1}[} = c_i \in \mathbb{R}$. Comme φ est positive, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, on a $c_i \geqslant 0$. Par conséquent, $\int_{[a,b]}\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right) \geqslant 0$.*

COROLLAIRE 13.6
Soit $\left(\varphi_1,\varphi_2\right) \in (\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}))^2$. On a

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \implies \int_{[a,b]}\varphi_1 \leqslant \int_{[a,b]}\varphi_2$$

Démonstration *Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction en escalier $\varphi = \varphi_2-\varphi_1$ et d'utiliser la linéarité de l'intégrale.*

PROPOSITION 13.7 **Relation de Chasles**
Soit φ une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$ et $c \in]a,b[$. Alors

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$$

Démonstration *Soit $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision subordonnée à φ. On peut supposer, quitte à considérer la subdivision $\tau' = \tau \cup \{c\}$ qui est plus fine que τ que c est un point de τ. On suppose de plus que c est le m-ième élément de τ. Si pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, $\varphi_{1|]x_i,x_{i+1}[} = c_i$ alors*

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} \varphi &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) + \sum_{i=m}^{n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi
\end{aligned}$$

13.2 Fonctions continues par morceaux

13.2.1 Définition et propriétés

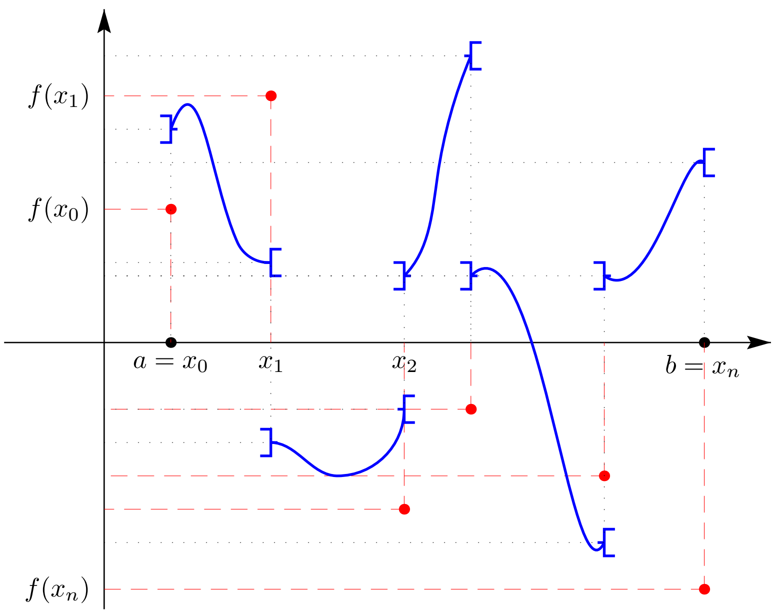


FIGURE 13.6 – Fonction continue par morceaux

DÉFINITION 13.5 **Fonction continue par morceaux sur un segment**

- Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction *continue par morceaux* sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que
  1. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
  2. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, φ restreinte à $]x_k, x_{k+1}[$ admet une limite finie strictement à droite en x_k et strictement à gauche en x_{k+1}. Autrement dit, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.
- Une telle subdivision est dite *adaptée* ou *subordonnée* à φ.

Remarque 13.2
- Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
- Comme pour les fonctions en escaliers, si τ est une subdivision de $[a,b]$ subordonnée à φ continue par morceaux sur $[a,b]$ et si τ' est une autre subdivision de φ de $[a,b]$ plus fine que τ alors τ' est aussi subordonnée à φ.

PROPOSITION 13.8
Si φ est une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ alors φ est bornée sur $[a,b]$.

Démonstration *Soit φ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et soit $\tau : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ une subdivision subordonnée à φ. Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la fonction $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est continue et se prolonge en une fonction $\tilde{f}_i$ continue sur le segment $[x_i,x_{i+1}]$. En appliquant le théorème 11.48, $\tilde{f}_i$ est bornée sur le segment $[x_i,x_{i+1}]$. Posons $\mathrm{M} = \max_{i\in[\![0,n-1]\!]}\{\mathrm{M}_i, |f(x_i)|\} \cup \{|f(b)|\}$. Alors $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$.*

PROPOSITION 13.9
Soit I un intervalle.
– L'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R}),+,.)$.
– L'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a,b]$ est un sous-anneau de $(\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R}),+,\times)$.

Démonstration *Montrons le premier point, le second se prouve de même. Il est tout d'abord clair que l'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a,b]$ est non vide. Soient α, β deux scalaires réels et soient φ_1 et φ_2 deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Soient τ_1 une subdivision de $[a,b]$ subordonnée à φ_1 et soit τ_2 une subdivision de $[a,b]$ subordonnée à φ_2. Soit $\tau : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ une subdivision plus fine que φ_1 et φ_2. τ est donc subordonnée à la fois à φ_1 et à φ_2. De plus, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, $(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)_{|]x_i,x_{i+1}[} = \alpha\varphi_{1|]x_i,x_{i+1}[} + \beta\varphi_{2|]x_i,x_{i+1}[}$ qui est continue sur $]x_i,x_{i+1}[$ comme combinaison linéaire d'applications continues sur $]x_i,x_{i+1}[$. De plus, par opérations sur les limites, $(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)_{|]x_i,x_{i+1}[}$ admet une limite stricte à droite de x_i et une limite stricte à gauche de x_{i+1}. $\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2$ est donc bien une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.*

13.2.2 Approximation des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier

THÉORÈME 13.10 ♡ **Approximation d'une fonction continue par une fonction en escalier**
Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une fonction en escalier φ telle que

$$\|f-\varphi\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-\varphi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration *Puisque la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est uniformément continue sur ce segment (théorème de Heine, 11.51). Il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $|x-y| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. Considérons alors un entier n suffisamment grand pour que $(b-a)/n \leqslant \eta$ et définissons la subdivision de pas constant $h = (b-a)/n \leqslant \eta$, $x_i = a + ih$ pour $i \in [\![0,n-1]\!]$. Définissons ensuite la fonction en escalier φ en posant $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $\forall x \in [x_i,x_{i+1}[$, $\varphi(x) = f(x_i)$ et $\varphi(b) = f(b)$. Soit $x \in [a,b[$, il existe $i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x_i \leqslant x < x_{i+1}$ et comme $|x-x_i| \leqslant \eta$, $|f(x)-\varphi(x)| = |f(x)-f(x_i)| \leqslant \varepsilon$. Si $x = b$, on a également $|f(b)-\varphi(b)| = 0 \leqslant \varepsilon$. En passant à la borne supérieure, on a bien $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

Multimédia : animation, n augmente et les aires des rectangles sous le graphe de f se rapprochent de l'intégrale

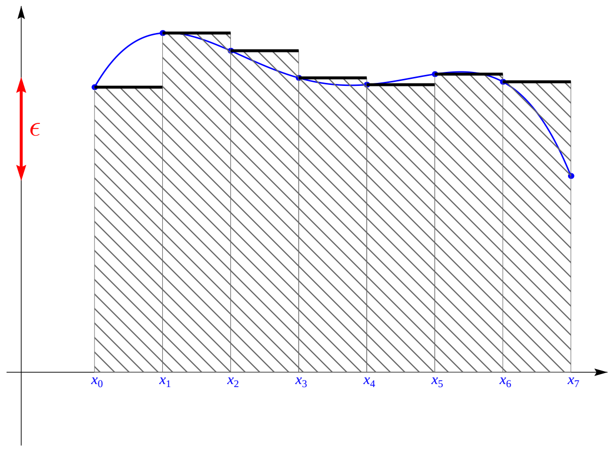


FIGURE 13.7 – Une approximation grossière avec ε assez grand

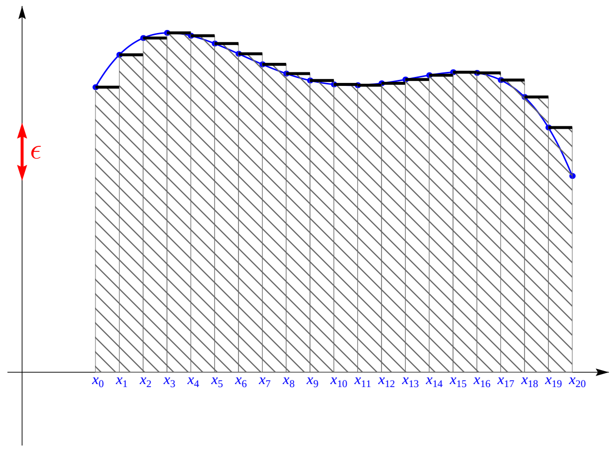


FIGURE 13.8 – Une approximation plus fine avec ε plus petit

LEMME 13.11 **Une fonction continue par morceaux est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier**
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Il existe une fonction g continue sur $[a,b]$ et une fonction ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que $f = g + \psi$.

Démonstration *Considérons une subdivision $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ subordonnée à la fonction en escalier f. Comme f est continue par morceaux, sa restriction à $]x_0, x_1[$ possède une limite finie à droite en x_0 et une limite finie à gauche en x_1, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l$ et $f(x) \xrightarrow[x \to x_1 -]{} \mathrm{L}$. Posons $\forall x \in]x_0, x_1[$, $g(x) = f(x)$, $g(x_0) = l$ et $g(x_1) = \mathrm{L}$ et $\psi(x_0) = f(x_0) - l$, $\forall x \in]x_0, x_1[$, $\psi(x) = 0$ et $\psi(x_1) = f(x_1) - \mathrm{L}$. On a bien g continue sur $[x_0, x_1]$, ψ en escalier sur $[x_0, x_1]$ et $\forall x \in [x_0, x_1]$, $f(x) = g(x) + \psi(x)$. On recommence ce procédé sur $[x_1, x_2]$ ... pour définir les fonctions g et ψ sur $[a, b]$.*

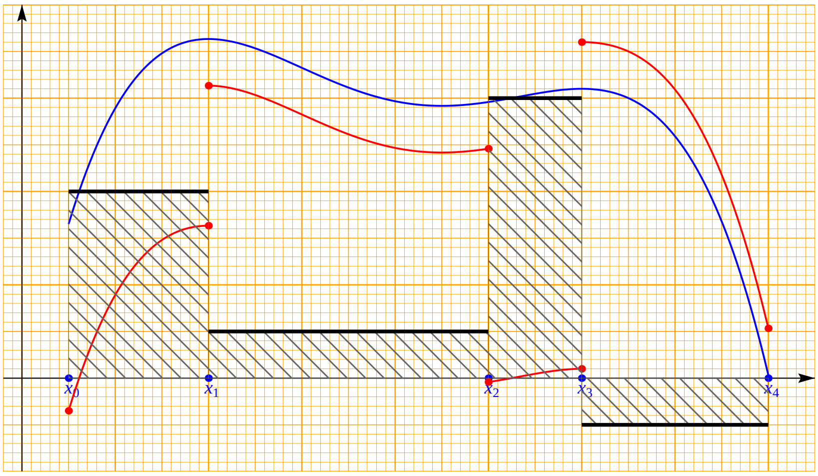


FIGURE 13.9 – Toute fonction continue par morceaux est somme d'une fonction continue et d'une fonction en escaliers.

COROLLAIRE 13.12 **Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier**
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Démonstration *D'après le lemme précédent, il existe une fonction g continue sur $[a, b]$ et une fonction ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que $f = g + \psi$. D'après le théorème précédent, il existe une fonction en escalier χ sur $[a, b]$ telle que $\|g - \chi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Posons alors $\varphi = \psi + \chi$. C'est une fonction en escalier et on a bien $\|f - \varphi\|_\infty = \|g - \chi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

COROLLAIRE 13.13 **Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier**

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions en escalier, $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant

$$\boxed{\varphi \leqslant f \leqslant \psi} \quad \text{et} \quad \boxed{\psi - \varphi \leqslant \varepsilon}.$$

Démonstration *D'après le corollaire 13.12, il existe une fonction en escalier χ sur $[a, b]$ vérifiant $\forall x \in [a, b]$, $-\varepsilon/2 \leqslant f(x) - \chi(x) \leqslant \varepsilon/2$. Définissons les fonctions en escalier $\varphi = \chi - \varepsilon/2$ et $\psi = \chi + \varepsilon/2$. Elles vérifient bien $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi = \varepsilon$.*

13.2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

PROPOSITION 13.14 **Intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux**

Soit une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. On considère les ensembles

$$\mathscr{I}_{<f} = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \text{ est en escalier sur } [a, b] \text{ et } \varphi \leqslant f \right\}$$

$$\mathscr{I}_{>f} = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \text{ est en escalier sur } [a, b] \text{ et } f \leqslant \varphi \right\}$$

On a les propriétés suivantes,
- $\mathscr{I}_{<f}$ admet une borne supérieure.
- $\mathscr{I}_{>f}$ admet une borne inférieure.
- $\sup \mathscr{I}_{<f} = \inf \mathscr{I}_{>f}$.

On définit alors l'intégrale de Riemann de la fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$ par

$$\boxed{\int_{[a,b]} f = \sup \mathcal{I}_{<f} = \inf \mathcal{I}_{>f}}$$

Démonstration *On définit les ensembles $\mathcal{E}_{<f}$ et $\mathcal{E}_{>f}$ par*

$$\mathcal{E}_{<f} = \left\{\varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi \leqslant f\right\}$$

et

$$\mathcal{E}_{>f} = \left\{\varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } f \leqslant \varphi\right\}$$

- *On a prouvé que si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ alors elle est minorée par un réel m et majorée par un réel M sur $[a,b]$. Par conséquent, les fonctions en escalier sur $[a,b]$ définies par $x \mapsto m$ et $x \mapsto \mathrm{M}$ sont éléments respectivement de $\mathcal{E}_{<f}$ et de $\mathcal{E}_{>f}$. $\mathcal{E}_{<f}$ et $\mathcal{E}_{>f}$ sont donc non vides.*
- *Montrons que $\mathcal{I}_{<f}$ est majorée. Soit $\varphi \in \mathcal{E}_{<f}$. On a $\varphi \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$. Par conséquent, $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \mathrm{M} = \mathrm{M}(b-a)$. Cette majoration étant valable pour toute fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}_{<f}$, on en déduit que $\mathcal{I}_{<f}$ est majorée.*
- *D'après l'axiome de la borne supérieure, on en déduit que $\mathcal{I}_{<f}$ possède une borne supérieure β.*
- *De même, on prouve que $\mathcal{I}_{>f}$ est non vide minorée et possède une borne inférieure α.*
- *On a $\alpha \leqslant \beta$. Montrons que $\alpha = \beta$. Soit $\varepsilon > 0$. Appliquant le théorème précédent, il existe des fonctions en escalier φ et ψ définies sur $[a,b]$ telles que*

  $$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$

  On a donc : $\varphi \in \mathcal{E}_{<f}$ et $\psi \in \mathcal{E}_{>f}$ ce qui donne

  $$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$

  ce qui s'écrit aussi :

  $$\beta - \alpha \leqslant \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \psi - \varphi \leqslant \varepsilon(b-a)$$

  Cette inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que : $\alpha = \beta$.

Remarque 13.3 Cette définition généralise la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier. Si f est une fonction en escalier, son intégrale de Riemann est égale à l'intégrale de la fonction en escalier précédemment définie.

PLAN 13.1 : Pour montrer qu'une fonction f est intégrable sur un segment

Il suffit de montrer que f est continue par morceaux sur ce segment.

BIO 11 Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz(Allemagne), mort le 20 juillet 1866 à Selasca, Italie



Mathématicien Allemand. Bernhard Riemann est le deuxième enfant d'une famille de six. Il reçoit de son père, pauvre pasteur luthérien, une éducation stricte et rigoureuse. Bien que très tôt il montre des talents intellectuels exceptionnels, il souffre d'une grande timidité, de dépression nerveuse et hypocondrie. Ses problèmes d'expression le poursuivront toute sa vie et l'empêcheront d'être reconnu à sa juste valeur de son vivant. Á 19 ans, il s'établit à Hanovre pour étudier la théologie et la philosophie, mais ses goût s'orientent vite vers les mathématiques. Il rencontre Gauss à l'université de Göttingen qui sera son directeur de thèse. Celle-ci porte sur les fonctions complexes et il y introduit les surfaces qui portent maintenant son nom et qui sont d'une grande importance dans la recherche mathématique actuelle. Quelques années plus tard, il jette les bases de la géométrie différentielle. C'est aussi lui qui a finalisé le travail de Cauchy sur les fonctions intégrables et qui a, le premier, produit une théorie rigoureuse de l'intégration. Il est le découvreur de la fonction ζ qui est au carrefour de nombreuses théories mathématiques modernes. La position des zéros de cette fonction est l'objet d'une célèbre conjecture qui n'a toujours pas été prouvée et qui permettrait de mieux comprendre la répartition des nombres premiers. Bernhard Riemann est mort à 40 ans de la tuberculose.

13.2.4 Propriétés de l'intégrale

PROPOSITION 13.15 **L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux**

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g}$$

Démonstration *Comme f et g sont des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$, il en est de même de $\alpha f + \beta g$ et cette fonction est donc intégrable sur le segment $[a,b]$. Posons $\mathrm{I} = \int_{[a,b]} \alpha f + \beta g$, $\mathrm{I}_1 = \int_{[a,b]} f$ et $\mathrm{I}_2 = \int_{[a,b]} g$. On veut donc prouver que $\mathrm{I} = \alpha \mathrm{I}_1 + \beta \mathrm{I}_2$, ce qui revient à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $-\varepsilon \leqslant \mathrm{I} - (\alpha \mathrm{I}_1 + \beta \mathrm{I}_2) \leqslant \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 13.13, il existe des fonctions en escalier φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 définies sur $[a,b]$ telles que*

$$\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1, \quad \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2, \quad \psi_2 - \varphi_2 \leqslant \varepsilon$$

On a donc

$$\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \leqslant \alpha f + \beta g \leqslant \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \quad \text{et} \quad \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 - (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) \leqslant \varepsilon$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
& \int_{[a,b]} \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 - \alpha \int_{[a,b]} \psi_1 - \beta \int_{[a,b]} \psi_2 \leqslant \mathrm{I} - (\alpha \mathrm{I}_1 + \beta \mathrm{I}_2) \leqslant \int_{[a,b]} \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 - \alpha \int_{[a,b]} \varphi_1 - \beta \int_{[a,b]} \varphi_2 \\
\text{donc} \quad & \int_{[a,b]} \alpha(\varphi_1 - \psi_1) + \beta(\varphi_2 - \psi_2) \leqslant \mathrm{I} - (\alpha \mathrm{I}_1 + \beta \mathrm{I}_2) \leqslant \int_{[a,b]} \alpha(\psi_1 - \varphi_1) + \beta(\psi_2 - \varphi_2) \text{ par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier} \\
\text{donc} \quad & \int_{[a,b]} -\varepsilon(\alpha + \beta) \leqslant \mathrm{I} - (\alpha \mathrm{I}_1 + \beta \mathrm{I}_2) \leqslant \int_{[a,b]} \varepsilon(\alpha + \beta) \text{ car } \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon \text{ et } \psi_2 - \varphi_2 \leqslant \varepsilon \text{ et par application du théorème 13.6} \\
\text{donc} \quad & -\varepsilon(\alpha + \beta)(b - a) \leqslant \mathrm{I} - (\alpha \mathrm{I}_1 + \beta \mathrm{I}_2) \leqslant \varepsilon(\alpha + \beta)(b - a)
\end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème.

PROPOSITION 13.16 **L'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive est positive**

Soit φ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. On a

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) \geqslant 0 \implies \int_{[a,b]} \varphi \geqslant 0}$$

Démonstration *La fonction nulle sur $[a,b]$ est en escalier et vérifie $0 \leqslant f$. Elle est donc élément de $\mathscr{E}_{<f}$ et par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on a $\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} 0 = 0$.*

COROLLAIRE 13.17
Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$. On a

$$\boxed{\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \implies \int_{[a,b]} \varphi_1 \leqslant \int_{[a,b]} \varphi_2}$$

Démonstration *En appliquant le théorème précédent à la fonction positive $g - f$, on obtient $\int_{[a,b]} g - f \geqslant 0$ et on conclut en utilisant la linéarité de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.*

PROPOSITION 13.18 **Relation de Chasles**
Soit φ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Soit $c \in]a,b[$. Alors :

$$\boxed{\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi}$$

Démonstration *Soit* $\varphi \in \mathscr{E}_{<f}$*. On a* $\varphi_{|[a,c]} \leqslant f_{|[a,c]}$ *et* $\varphi_{|[c,b]} \leqslant f_{|[c,b]}$*. Par conséquent,*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} \varphi &= \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,a]} \varphi \text{ par application de la relation de Chasles pour les fonctions en escalier}\\ &\leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,a]} f \text{ par application du théorème 13.17}\end{aligned}$$

Notons γ *cette dernière quantité.* γ *est donc un majorant de* $\mathscr{I}_{<f} = \left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathscr{E}_{<f}\right\}$*. Par conséquent,* $\gamma \geqslant \int_{[a,b]} f$*. On peut faire le même raisonnement avec une fonction* $\varphi \in \mathscr{E}_{>f}$ *et on aura alors* $\gamma \leqslant \int_{[a,b]} f$*. Donc* $\gamma = \int_{[a,b]} f$ *et la relation de Chasles est démontrée.*

13.2.5 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

I désigne ici un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 13.6 **Fonction continue par morceaux sur un intervalle**
On dit qu'une fonction définie sur un intervalle I est *continue par morceaux* sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Notation 13.1 Soit f une fonction continue par morceaux sur I. Soit $(a, b) \in \mathrm{I}^2$. On note

– Si $a \leqslant b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f$
– Si $b \leqslant a$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{[a,b]} f$
– Si $a = b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Remarque 13.4 Dans cette notation (comme dans les calculs de sommes), la variable x est muette, on a défini l'intégrale d'une *fonction*. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \dots$.

PROPOSITION 13.19 **Relation de Chasles**
Soit une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle I et trois réels $a, b, c \in \mathrm{I}$. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Démonstration

- *Si* $a < c < b$*, par application du théorème 13.18,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[c,b]} f = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Si* $a < b < c$*, par application du point précédent,*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Les autres cas se démontrent de même.*

13.2.6 Nullité de l'intégrale d'une fonction continue

THÉORÈME 13.20 ♡♡♡ **Si l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle alors cette fonction est nulle**
Soient $[a, b]$ un segment et une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant

(H1) la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$,

(H2) elle est positive : $\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geqslant 0$.

(H3) son intégrale est nulle : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Alors la fonction est nulle : $\boxed{\forall x \in [a, b], \quad f(x) = 0}$

Démonstration *Par l'absurde, supposons que la fonction f n'est pas nulle. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) \neq 0$. Pour simplifier la rédaction, supposons que $c \in]a,b[$ et $f(c) > 0$ (les autres cas se traitent de la même façon). Posons $\varepsilon = f(c)/2$. Puisque la fonction f est continue au point c, on peut trouver un voisinage $]c-\eta, c+\eta[$ de c avec $\eta > 0$ inclus dans $[a,b]$ tel que $\forall x \in]c-\eta, c+\eta[$, $-\varepsilon \leqslant f(x) - f(c) \leqslant \varepsilon$ c'est à dire $\forall x \in]c-\eta, c+\eta[\ f(x) \geqslant \varepsilon$. On a donc par la relation de Chasles,*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{c-\eta} f(x)\,dx + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx \\ &\geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(x)\,dx \text{ car } f \geqslant 0 \\ &> \int_{c-\eta}^{c+\eta} \varepsilon\,dx = 2\eta\varepsilon > 0\end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec la troisième hypothèse. f est donc nulle sur $[a,b]$.

Remarque 13.5

- La réciproque de cette propriété est clairement vraie : $\left[\forall x \in [a,b],\quad f(x) = 0\right] \implies \int_a^b f(x)\,dx = 0$.
- Ce théorème est bien entendu faux si l'on ne suppose pas $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ ou si la fonction f est uniquement continue par morceaux : une fonction nulle partout sauf en un point est d'intégrale nulle.

13.2.7 Majorations fondamentales

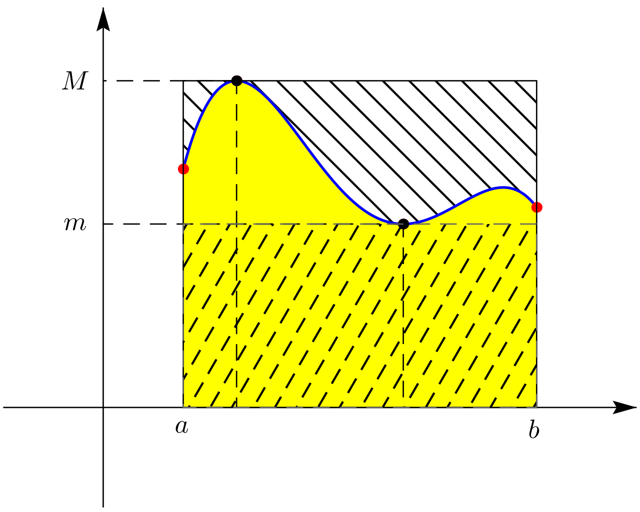


FIGURE 13.10 – Encadrement d'une intégrale

THÉORÈME 13.21 ♡♡♡

Soient f une fonction réelle continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. En appliquant la proposition 13.8, il existe des réels m et M tels que $\forall x \in [a,b],\quad m \leqslant f(x) \leqslant M$. On a alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

Démonstration *En appliquant la proposition 13.17, on obtient*

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

ce qui donne le résultat.

THÉORÈME 13.22 ♡♡♡
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$ et

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$$

Démonstration *Remarquons tout d'abord que comme f est continue par morceaux, utilisant les théorèmes d'opération sur les limites et les fonctions continues, il en est de même de $|f|$ et donc $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$. De plus, on a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Par conséquent, d'après le théorème 13.17,*

$$-\int_{[a,b]} |f| \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

ce qui donne le résultat.

THÉORÈME 13.23 **Inégalité de la moyenne**

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors on a l'*inégalité de la moyenne*

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sup_{[a,b]}|f| \int_{[a,b]} |g|$$

Démonstration *Comme f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, appliquant la proposition 13.8, f est bornée sur $[a,b]$ et il existe donc un réel $\mathrm{M}>0$ tel que $\sup_{[a,b]} \leqslant \mathrm{M}$. On a donc : $\forall x \in [a,b],\quad |f(x)\,g(x)| \leqslant \mathrm{M}|g(x)|$ et donc, appliquant le théorème 13.17 et le théorème précédent,*

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \int_{[a,b]} |fg| \leqslant \int_{[a,b]} \mathrm{M}|g| \leqslant \mathrm{M}\int_{[a,b]} |g|$$

THÉORÈME 13.24 ♡♡♡ **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$. On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sqrt{\int_{[a,b]} f}\sqrt{\int_{[a,b]} g}$$

Démonstration *Introduisons la fonction polynomiale P de la variable α définie par*

$$\mathrm{P} = \int_{[a,b]} (f+\alpha g)^2 = \alpha^2 \int_{[a,b]} g^2 + 2\alpha \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} f^2$$

Remarquons que comme $\forall \alpha \in \mathbb{R},\quad (f+\alpha g)^2 \geqslant 0$, P est positive ou nulle.

- *Si $\int_{[a,b]} g^2 = 0$ alors P est une fonction affine. Vu qu'elle est positive ou nulle, il est nécessaire que le coefficient de son terme de degré 1 est nul, c'est à dire $\int_{[a,b]} fg = 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors démontré dans ce cas particulier.*
- *Sinon, P est un trinôme du second degré. Comme $\mathrm{P} \geqslant 0$, ses deux racines sont ou confondues ou complexes. Par conséquent son discriminant réduit Δ est négatif ou nul*

$$\Delta = \left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 - \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

On en déduit alors l'inégalité souhaitée. Dans le cas où f et g sont continues (et plus seulement continues par morceaux), remarquons qu'il y a égalité dans cette inégalité lorsque $g = 0$ ou alors lorsque le trinôme P possède une racine double. C'est à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{[a,b]} (f+\alpha g)^2 = 0$. D'après le théorème 13.20 page 526, on doit avoir $f+\alpha g = 0$, c'est à dire que les deux fonctions f et g sont proportionnelles. Réciproquement, si les deux fonctions sont proportionnelles, on vérifie qu'il y a égalité dans la majoration de Cauchy-Schwarz.

THÉORÈME 13.25 **Inégalité de Minkowski**

Soient deux fonctions continues f et g sur le segment $[a,b]$. En notant $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$, on a l'inégalité suivante

$$\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$$

Démonstration *Développons et utilisons Cauchy-Schwarz*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}(f+g)^2 &= \int_{[a,b]}f^2+2\int_{[a,b]}fg+\int_{[a,b]}g^2\\ &\leqslant \int_{[a,b]}f^2+2\sqrt{\int_{[a,b]}f^2}\sqrt{\int_{[a,b]}g^2}+\int_{[a,b]}g^2\\ &= \left(\sqrt{\int_{[a,b]}f^2}+\sqrt{\int_{[a,b]}g^2}\right)^2\\ &= \left(\|f\|_2+\|g\|_2\right)^2\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité souhaitée. Remarquons qu'il y a égalité dans cette majoration si et seulement si $\int_{[a,b]}fg = \left|\int_{[a,b]}fg\right| = \sqrt{\int_{[a,b]}f^2}\sqrt{\int_{[a,b]}g^2}$. *D'une part, il y a égalité dans Cauchy-Schwarz donc les deux fonctions* f *et* g *sont proportionnelles et d'autre part, puisque* $\int fg \geqslant 0$, *le coefficient de proportionnalité doit être positif ou nul. On vérifie facilement la réciproque.*

13.2.8 Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION 13.7 **Valeur moyenne d'une fonction**
Soient $[a,b]$ un segment et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On appelle *valeur moyenne* de f sur le segment $[a,b]$ la quantité

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

13.2.9 Invariance de l'intégrale par translation

PROPOSITION 13.26 **Invariance de l'intégrale par translation**

Soient f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs réelles et $\mathrm{T}\in\mathbb{R}$. Soit $f_{\mathrm{T}} : \begin{cases}[a+\mathrm{T},b+\mathrm{T}] & \longrightarrow \mathbb{R}\\ x & \longmapsto f(x-\mathrm{T})\end{cases}$. Alors f_{T} est continue par morceaux sur le segment $[a+\mathrm{T},b+\mathrm{T}]$ et

$$\boxed{\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f_{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Démonstration

- *Supposons que* f *est une fonction en escalier sur* $[a,b]$. *Soit* $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *une subdivision subordonnée à* f. *Il existe donc* $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ *tels que* $f_{|]x_i,x_{i+1}[} = c_i$. *Posons* $\tau_{\mathrm{T}} : a+\mathrm{T} = x_0+\mathrm{T} < x_1+\mathrm{T} < \ldots < x_n+\mathrm{T} = b+\mathrm{T}$. τ_{T} *est une subdivision subordonnée à* f_{T}. *De plus :* $f_{\mathrm{T}|]x_i+\mathrm{T},x_{i+1}+\mathrm{T}[} = c_i$. *Par conséquent :*

$$\int_{[a+\mathrm{T},b+\mathrm{T}]} f_{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(x_{k+1}+\mathrm{T}-\left(x_k+\mathrm{T}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(x_{k+1}-x_k\right) = \int_{[a,b]} f$$

  Le théorème est alors démontré pour les fonctions en escalier.
- *Supposons que* f *est une fonction continue par morceaux sur le segment* $[a,b]$. *Par définition de l'intégrale, on a :*

$$\begin{aligned}\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f_{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{d}x &= \sup\left\{\int_{[a+\mathrm{T},b+\mathrm{T}]}\varphi \mid \varphi \text{ est en escalier sur } [a+\mathrm{T},b+\mathrm{T}] \text{ et } \varphi\leqslant f_{\mathrm{T}}\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{[a,b]}\varphi_{-\mathrm{T}} \mid \varphi \text{ est en escalier sur } [a+\mathrm{T},b+\mathrm{T}] \text{ et } \varphi\leqslant f_{\mathrm{T}}\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{[a,b]}\varphi \mid \varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi\leqslant f\right\}\\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

13.3 Primitive et intégrale d'une fonction continue

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.

DÉFINITION 13.8 **Primitive**

Soit : $I \to \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur l'intervalle I si et seulement si

- H1 la fonction F est dérivable sur I,
- H2 sa dérivée est égale à f : $\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$

PROPOSITION 13.27 **Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante**

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $G = F + c$.

Démonstration *Comme* F *et* G *sont des primitives de* f *sur* I, *on a* $(G-F)' = f - f = 0$. *Par conséquent* $G - F$ *est une fonction constante sur* I, *c'est une conséquence du théorème des accroissements finis (* 12.13 page 478*). Il existe donc* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $G = F + c$.

Remarque 13.6 Le fait que I est un *intervalle* est fondamental. Si par exemple $I = [0,1] \cup [2,3]$ la fonction G définie par $G(x) = 0$ sur $[1,2]$, $G(x) = 1$ sur $[2,3]$ est une primitive de la fonction f sur I. La fonction F nulle est également une primitive de f sur I et ces deux fonctions ne diffèrent pas d'une constante.

Considérons une fonction f continue par morceaux sur un *intervalle* I et un point $a \in I$. Alors, pour tout réel $x \in I$, le segment $[a, x]$ est inclus dans l'intervalle I ce qui nous permet de définir la fonction suivante :

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

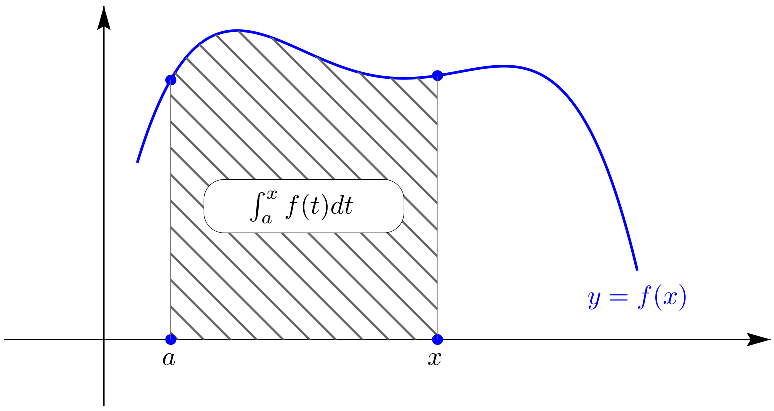


FIGURE 13.11 – Théorème fondamental de l'analyse

LEMME 13.28 **La fonction** F **est continue sur** I

Si la fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle I, alors la fonction F est continue sur I.

Démonstration *Considérons un segment* $[a, b]$ *inclus dans l'intervalle* I. *Comme la fonction* f *est continue par morceaux sur le segment* $[a, b]$, *elle est bornée sur ce segment. Notons* $M_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. *Soient* $(x, y) \in [a, b]^2$, *avec* $x < y$. *En utilisant Chasles et la majoration classique* 13.21 page 527,

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M_{[a,b]} |y - x|$$

Nous avons montré que la restriction de F *au segment* $[a, b]$ *était lipschitzienne, donc continue. La fonction* F *est donc continue en tout point de tout segment inclus dans* I *ce qui montre qu'elle est continue sur l'intervalle* I.

Le théorème suivant permet de relier calcul différentiel et calcul intégral. Les anglo-saxons lui ont donné le nom de « Fundamental Theorem of Calculus »que nous traduisons par :

THÉORÈME 13.29 ♡♡♡♡ **Théorème fondamental de l'analyse**

(H1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

(H2) Soit f une fonction continue sur I.

Soit $a \in \mathrm{I}$ alors la fonction

$$\mathrm{F}:\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et est la seule primitive de f qui s'annule en a $\quad \mathrm{F}' = f \quad$ et $\quad \mathrm{F}(a) = 0$

Démonstration *Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Pour simplifier la preuve, supposons que x_0 n'est pas l'extrémité droite de l'intervalle I. Nous allons montrer que la fonction F est dérivable au point x_0. Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in \mathrm{I}$. Puisque la fonction f est continue au point x_0, lorsque h est petit, pour $t \in [x_0, x_0 + h]$, $f(t)$ est proche de $f(x_0)$. Effectuons cette approximation :*

$$\mathrm{F}(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(x_0) + [f(t) - f(x_0)]\big)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x_0) + hf(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \big[f(t) - f(x_0)\big]\,\mathrm{d}t$$

Nous avons fait apparaître un reste de notre approximation

$$\mathrm{R}(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \big[f(t) - f(x_0)\big]\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f est continue au point x_0, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [x_0, x_0 + \eta]$, $|f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Soit $h \in]0, \eta]$,

$$|\mathrm{R}(h)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \big[f(t) - f(x_0)\big]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} \big|f(t) - f(x_0)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon h$$

Par conséquent, $|\mathrm{R}(h)|/h \leqslant \varepsilon$. Nous avons montré que $\mathrm{R}(h)/h \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, donc que $\mathrm{R}(h) = o(h)$. La fonction F admet un développement limité à l'ordre 1 au point x_0 et d'après le théorème 12.1 page 471, elle est dérivable à droite au point x_0 avec $\mathrm{F}'_d(x_0) = f(x_0)$. On montre de la même façon (en prenant $h < 0$) que F est dérivable à gauche en x_0 avec $\mathrm{F}'_g(x_0) = f(x_0)$. Puisque $\mathrm{F}' = f$ est continue par hypothèse, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I.

Le théorème fondamental garantit l'existence de primitives d'une fonction *continue* sur un intervalle.

COROLLAIRE 13.30 **Une fonction continue sur un intervalle possède une primitive**

(H1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

(H2) Soit f une fonction continue sur I

alors f possède une primitive F sur I.

Jusqu'à présent, nous avons construit de façon théorique l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, mais nous sommes pour l'instant incapables de calculer la moindre intégrale ! Le théorème fondamental permet d'effectuer ce calcul si l'on connaît une primitive de notre fonction sur le segment $[a, b]$.

COROLLAIRE 13.31 **Calcul d'intégrale**
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une application continue sur le segment $[a, b] \subset \mathrm{I}$. Soit G une primitive de f sur $[a, b]$ alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ est donnée par

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)$$

Démonstration *Comme la fonction f est continue sur l'intervalle I, elle admet comme primitive sur I la fonction F du théorème fondamental. Soit G une primitive quelconque de f sur I. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{G} = \mathrm{F} + c$. Par conséquent*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = [\mathrm{G}(b) + c] - [\mathrm{G}(a) + c] = \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)$$

THÉORÈME 13.32 ♡♡♡ **Théorème fondamental (deuxième forme)**

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On a

$$\boxed{f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Démonstration *Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, f' est continue et est donc bien intégrable sur tout segment $[a,b]$ de I. De plus f est une primitive de f' sur I. Appliquant le résultat précédent, on a bien $\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.*

Remarque 13.7 Pensez à utiliser cette formule lorsque vous avez une hypothèse sur f' et vous voulez obtenir une propriété sur la fonction f.

Exemple 13.2 On note $E = \{f \in \mathscr{C}^1([a,b]) \mid f(a) = 0\}$. Nous allons montrer qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\forall f \in E$, $\|f\|_2 \leqslant C\|f'\|_2$ (c'est l'inégalité de Poincaré).
Nous voulons majorer une quantité faisant intervenir f ($\|f\|_2$) en fonction d'une quantité faisant intervenir f' ($\|f'\|_2$). Il n'y a pas à hésiter sur l'outil à utiliser : c'est le théorème fondamental.
Soit $f \in E$. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$, d'après le théorème fondamental deuxième forme, pour $x \in [a,b]$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors en utilisant Cauchy-Schwarz,

$$f^2(x) = \left(\int_a^x 1 \times f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^x 1^2\,\mathrm{d}t \int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec la majoration classique 13.21 page 527,

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Il suffit de prendre $C = (b-a)/\sqrt{2}$.

Notation 13.3
– On note $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
– Si f est une fonction continue, la notation $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est utilisée pour représenter une primitive quelconque de la fonction f. Avec les notations précédentes :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C^{te}$$

THÉORÈME 13.33 ♡♡♡ **Dérivée d'une fonction définie par une intégrale**

(H1) Soit une fonction f *continue* sur un *intervalle* I,

(H2) Soient $u, v : J \mapsto I$ deux fonctions *dérivables* sur *l'intervalle* J.

Alors la fonction

$$G : \left\{\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est dérivable sur l'intervalle J et

$$\forall x \in J, \quad \boxed{G'(x) = v'(x) f[v(x)] - u'(x) f[u(x)]}$$

Démonstration *Soit un réel $a \in I$ et F la fonction du théorème fondamental. Il suffit de remarquer que pour $x \in J$, avec la relation de Chasles,*

$$G(x) = \int_a^{v(x)} - \int_a^{u(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$$

Puisque $G = F\circ v - F\circ u$ *et que la fonction* F *est dérivable sur* I *(théorème fondamental), que* u *et* v *sont dérivables sur* J *à valeurs dans* I*, d'après le théorème 12.5 page 473, la fonction* G *est dérivable sur* J *et* $\forall x\in J$, $G'(x) = F'(v(x))\times v'(x) - F'(u(x))\times u'(x)$ *d'où la formule du théorème puisque* $F' = f$.

Exemple 13.4 Étudions les variations de la fonction

$$g : \left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}\end{array}\right.$$

La fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $I =]1,+\infty[$. Notons $J =]1,+\infty[$ et définissons les fonctions

$$u : \left\{\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & x\end{array}\right. \quad v : \left\{\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & x^2\end{array}\right. \quad f : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-1}\end{array}\right.$$

Les fonctions u, v sont dérivables de J vers I et la fonction f est continue sur l'intervalle I. D'après le théorème précédent, g est dérivable sur l'intervalle J et pour $x\in J$,

$$g'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

Le trinôme x^2-2x-1 s'annule sur I en $x_0 = 1+\sqrt{2}$ et on en déduit que g est croissante sur $]1,x_0]$ puis décroissante sur $[x_0,+\infty[$.

13.4 Calcul de primitives et d'intégrales

13.4.1 Intégration par parties

PROPOSITION 13.34 **Méthode d'intégration par parties**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(H1) u et v des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

alors

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration *Par opérations sur les fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I*, la fonction* uv *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I*. D'après le théorème fondamental deuxième forme,*

$$(uv)(b) - (uv)(a) = \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(u'v\right)(t) + \left(uv'\right)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(u'v\right)(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \left(uv'\right)(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 13.8 *Application au calcul de primitive.* Dans un calcul de primitive, la formule d'intégration par parties s'écrit

$$\int u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = u(t)\,v(t) - \int u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 13.9 On consultera la partie C.6.8 page 1236 pour apprendre à utiliser cette technique.

13.4.2 Changement de variables

PROPOSITION 13.35 **Changement de variable**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I\to\mathbb{R}$ une application continue sur I. Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha<\beta$ et $\varphi : [\alpha,\beta]\to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha,\beta]$ alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration *Comme f est continue sur I, elle possède une primitive F sur I et pour tout $x_0, x_1 \in \mathrm{I}$, on a $\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x_1) - \mathrm{F}(x_0)$. En particulier, comme $\varphi(\alpha), \varphi(\beta) \in \mathrm{I}$, on a $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(\varphi(\beta)) - \mathrm{F}(\varphi(\alpha))$. Par ailleurs, $\mathrm{F}\circ\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ comme composée d'applications de classes $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$. En appliquant le théorème fondamental deuxième forme, on obtient*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(\varphi(\beta)) - \mathrm{F}(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta (\mathrm{F}\circ\varphi)'(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)\mathrm{F}'(\varphi(u))\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(u) f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u$$

PLAN 13.2 : **Changement de variable dans un calcul d'intégrale**

Pour calculer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$,

1. *On vérifie que $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathrm{I}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha,\beta]$ et que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.*
2. *On pose* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{cases}$
3. *On écrit $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$*

Ne pas oublier de transformer les bornes

Exemple 13.5

– Calculons $\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en utilisant le changement de variable $t = \sin u$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u \text{ car cos est positif sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

N'aurions-nous pas pu obtenir ce résultat sans calcul ? (Représenter la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ ...)

– Calculons $\mathrm{J} = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ en utilisant le changement de variable $u = e^x$ (on a donc $x = \ln u$).

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} = \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{e^{\sqrt{3}}} \frac{u}{1+u^2}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{e^{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= [\arctan u]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

Remarque 13.10 Pour calculer une intégrale du type $\int_a^b f(x^n)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, effectuer le changement de variables $y = x^n$.

13.4.3 Changement de variable affine

L'utilisation d'un changement de variable affine permet souvent sans calcul d'intégrale, de prouver des propriétés graphiquement évidentes.

PROPOSITION 13.36 **Intégrale d'une fonction périodique**
Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, T-périodique. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors :

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

- *Avec le changement de variables* $\begin{cases} t &= u - \mathrm{T} \\ du &= dt \end{cases}$*, on obtient* $\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u-\mathrm{T})\,\mathrm{d}u == \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *car* f *est* T *périodique.*
- *Avec la relation de Chasles,* $\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b+\mathrm{T}}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$*. En appliquant l'égalité précédente, on obtient* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b+\mathrm{T}}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *d'où le résultat.*

Dans le cas où la fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}$*, on peut retrouver ce résultat à l'aide du théorème fondamental. Considérons la fonction*

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{x+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et pour* $x \in \mathbb{R}$*,* $g'(x) = f(x+\mathrm{T}) - f(x) = 0$*. La fonction est donc constante et on retrouve le résultat.*

PROPOSITION 13.37 **Intégrale d'une fonction paire ou impaire**

Soit $a > 0$ et f une fonction continue par morceaux sur le segment $[-a, a]$.

– Si f est paire,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

En particulier

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

– Si f est impaire,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

En particulier

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Démonstration *Par application de la relation de Chasles, on a* $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *Par le changement de variable* $\begin{cases} u &= -x \\ du &= -dx \end{cases}$*, on obtient* $\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u$

- *Supposons que* f *est paire. On a alors* $\int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$ *et donc* $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- *Supposons que* f *est impaire. On a alors* $\int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$ *et donc* $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Remarque 13.11 Le changement de variable $\varphi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ t & \longmapsto & a + (b-a)\,t \end{cases}$ permet de transformer une intégrale sur le segment $[a, b]$ en une intégrale sur le segment $[0, 1]$:

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = (b-a)\int_0^1 f(a + (b-a)\,t)\,\mathrm{d}t$$

13.4.4 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Nous allons résoudre l'exercice suivant, très typique des concours :

Exercice 13.1 ♡♡

Soit f *la fonction donnée par* $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}^*$.
2. *Prouver que :*
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{-2x}\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\ln 2$$
Établir une inégalité analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. *En déduire que l'on peut prolonger* f *par continuité en* 0 *et étudier le comportement de* f *à l'infini. On appelle encore* f *la fonction ainsi prolongée.*
4. *Montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et calculer sa dérivée.*
5. *Étudier la dérivabilité de* f *en* 0 *et déterminer la position de son graphe par rapport à la tangente en ce point.*

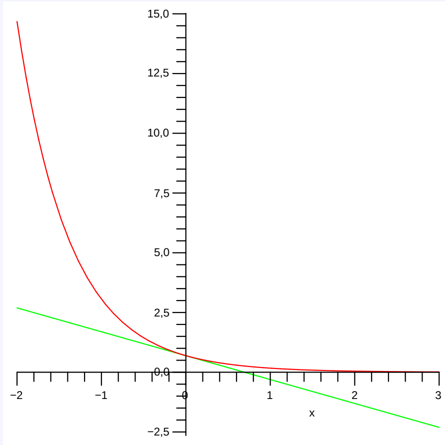
6. Étudier les variations de f et tracer son graphe.

Solution :

1. Notons $h : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{-t}}{t} \end{cases}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. h est continue sur le segment $[x, 2x]$ et par conséquent admet une intégrale sur ce segment. On en déduit que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent : $\forall t \in [x, 2x]$, $\quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$ et donc :
$$\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}\,\mathrm{d}t$$
ce qui s'écrit :
$$e^{-2x}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
ou encore :
$$e^{-2x}\,[\ln t]_x^{2x} \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x}\,[\ln t]_x^{2x}$$
d'où il vient :
$$\boxed{e^{-2x}\ln 2 \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x}\ln 2}$$
On montre de même que si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors :
$$\boxed{e^{-x}\ln 2 \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-2x}\ln 2}$$
3. On a : $\lim_{x\to 0} e^{-2x}\ln 2 = \lim_{x\to 0} e^{-x}\ln 2 = \ln 2$. Utilisant les deux inégalités précédentes et appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \ln 2}$. f est donc prolongeable par continuité en 0. On a de plus :
   - $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\ln 2 = \lim_{x\to 0} e^{-x}\ln 2 = 0$, donc, toujours d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
   - $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\ln 2 = +\infty$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.
4. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet donc une primitive H de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut alors écrire,pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = \mathrm{H}(2x) - \mathrm{H}(x)$ et on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence et composée de fonctions de classes $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) = 2\mathrm{H}'(2x) - \mathrm{H}'(x) = 2h(2x) - h(x)$ donc :
$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}}$$
On prouve de même que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et que si $x \in \mathbb{R}_-^*$ alors $f'(x) = \dfrac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$. De plus :
   - si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $x \leqslant 2x \implies -2x \leqslant -x \implies e^{-2x} \leqslant e^{-x} \implies e^{-2x} - e^{-x} \leqslant 0 \implies \dfrac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} \leqslant 0 \implies f'(x) \leqslant 0$.
   - si $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a : $2x \leqslant x \implies -x \leqslant -2x \implies e^{2x} \leqslant e^{-2x} \implies e^{-2x} - e^{-x} \geqslant 0 \implies \dfrac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} \leqslant 0 \implies f'(x) \leqslant 0$.
5. Montrons maintenant que f est dérivable en 0 ; Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a, par produit et quotient d''équivalents :
$$f'(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} = e^{-t}\frac{e^{-t} - 1}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -e^{-t}$$
par conséquent $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1$, on peut appliquer le théorème du prolongement dérivable 12.14, et affirmer que f est dérivable en 0. De plus :$f'(0) = -1$. Une équation de la tangente au graphe de f en 0 est donc : $y = -x + \ln 2$. De plus :
$$f(x) - (-x + \ln 2) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} + t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$
et une étude rapide montre que $t \mapsto \dfrac{e^{-t} + t - 1}{t}$ est positive si $t \geqslant 0$ et négative si $t < 0$. Par conséquent, si $x > 0$, $f(x) - (-x + \ln 2) \geqslant 0$ et la tangente au graphe de f est en dessous du graphe de f si $x > 0$. Si $x < 0$, on obtient le même résultat.

6. *On en déduit les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que son graphe :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-1	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0



13.5 Formules de Taylor

13.5.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et un réel $a \in$ I. Partons du théorème fondamental deuxième forme pour écrire pour $x \in$ I,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, on peut effectuer une intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = f'(t) & u'(x) = f''(t) \\ v'(x) = 1 & v(x) = t \end{cases} \qquad u, v \text{ sont de classe } \mathscr{C}^1$$

$$f(x) = f(a) + \Big[t f'(t)\Big]_a^x - \int_a^x t f''(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + x f'(x) - a f'(a) - \int_a^x t f''(t)\,\mathrm{d}t$$

On se rend compte qu'il est plus intéressant de considérer la primitive de 1 qui s'annule en x de telle façon à ne faire intervenir que les valeurs de f en a :

$$\begin{cases} u(x) = f'(t) & u'(x) = f''(t) \\ v'(x) = 1 & v(x) = -(x-t) \end{cases} \qquad u, v \text{ sont de classe } \mathscr{C}^1$$

$$f(x) = f(a) + \Big[-(x-t) f'(t)\Big]_a^x + \int_a^x (x-t) f''(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + (x-a) f'(a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on peut effectuer n intégrations par parties successives pour trouver la formule suivante.

Théorème 13.38 **Formule de Taylor avec reste intégral**

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $(a, x) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

– Le polynôme

$$\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

est appelé *polynôme de Taylor de f de degré n*.

– La fonction définie sur I par

$$\mathrm{R}_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée *reste intégral*.

Démonstration *C'est une simple récurrence. Pour $n=0$, la formule est le théorème fondamental deuxième forme et pour passer de n à $n+1$, il suffit d'effectuer une intégration par partie de $R_{n-1}(x)$ en primitivant $(x-t)^n/n!$ en $-(x-t)^{n+1}/(n+1)!$.*

Remarque 13.12 Lorsque nous demandons à nos étudiants l'*idée* de la démonstration de la formule de Taylor intégrale, toute la classe s'exclame : « par récurrence » ! Une récurrence n'est pas une *idée* de démonstration, simplement une technique de rédaction. Ici, les idées sont :

1. Le théorème fondamental deuxième forme.
2. Intégrer par parties en primitivant 1 pour que les primitives successives s'annulent en x.

Les examinateurs de concours se plaignent chaque année des candidats qui sont incapables de retrouver cette formule sans se tromper. En cas de doute, faites le calcul de l'introduction en intégrant par parties le théorème fondamental,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-a) f''(t)\,\mathrm{d}t$$

et à partir de là vous retrouvez sans problème la forme générale.

Exemple 13.6

– Formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction cosinus à l'ordre 2 en 0

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

– Formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle à l'ordre n, $n\in\mathbb{N}$, en 0 :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\exp(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 13.13 Effectuant le changement de variable $t = a + (x-a)u$, on peut exprimer le reste intégral de la façon suivante

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 (x-a)^{n+1}\frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}u\\
&= (x-a)^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

13.5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

THÉORÈME 13.39 ♡♡♡ **Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a\in I$. Si $x\in I$, on peut, d'après le théorème précédent 13.38, écrire $f(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= T_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}$$

On a alors

$$\boxed{\left|f(x) - T_n(x)\right| = |R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}}$$

où M_{n+1} est un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,x]$ (qui existe car $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,x]$)

Démonstration Par application de la formule de Taylor avec reste intégral 13.38, on a, pour tout $a, x \in \mathrm{I}$, si $a \leqslant x$,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{R}_n(x)| &= \left|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sup_{t\in[a,x]} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{M}_{n+1} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{M}_{n+1} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x \\
&\leqslant \mathrm{M}_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

La démonstration est similaire lorsque $x \leqslant a$ (ne pas oublier d'inverser les bornes).

BIO 12 Brook Taylor, né le 18 août 1685 à Edmonton en Angleterre et mort le 29 décembre 1731 à Londres



Mathématicien Anglais. Brook Taylor est issu d'une famille aisée. Il reçoit sa première éducation de précepteurs puis intègre l'université de Cambridge dont il ressort diplomé en 1709 après des études en mathématiques. C'est à John Machin, dont il fut l'élève, qu'il doit son entrée en 1712 à la Royal Society. Son premier travail concernait l'étude de la deuxième loi de Kepler sur le mouvement des planètes. Il devient secrétaire de la Royal Society en 1714 et participe au comité chargé de départager Newton et Leibnitz à propos de la paternité de l'invention du calcul infinitésimal. On mesurera l'impartialité de ce comité à l'admiration que Taylor portait à Newton ... Il publia deux livres de mathématiques la même année 1715 ``*Methodus incrementorum directa and reversed*´´et ``*Linear Perspective*´´. On trouve dans le premier la formule qui porte son nom mais sans mention du reste et sans que ne soit abordé les problèmes de convergence. Bien que Taylor ait découvert cette formule de manière indépendante, d'autres mathématiciens l'avaient mise en évidence auparavant comme Grégory, Newton, Leibniz et Johann Bernouilli. L'importance de cette formule ne fut perçue que bien plus tard, en 1772 par Lagrange qui la promulgua comme principe de base du calcul différentiel. Dans ce même livre, Taylor découvre la formule d'intégration par parties et invente le calcul aux différences finies. La vie de Taylor ne fut pas heureuse. Son premier mariage, désapprouvé par son père, se termine par la mort de son épouse lors de sa grossesse et de l'enfant qu'elle portait. Son second mariage se termine de manière identique si ce n'est que le bébé survivra. Taylor, très ébranlé, ne survécut que deux ans à sa seconde femme.
Ces différents problèmes, ajoutés à l'aridité de ces textes mathématiques, ont fait que le génie de Taylor n'a pas été perçu à sa juste valeur par ses contemporains.

13.5.3 Formule de Taylor-Young

THÉORÈME 13.40 ♡♡♡ **Formule de Taylor-Young**

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. Il existe une fonction ε définie sur I telle que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \mathrm{T}_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

Démonstration Supposons dans un premier temps que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Considérons un segment inclus dans l'intervalle I contenant le point a, $a \in [\alpha,\beta]$. La fonction $f^{(n+1)}$ étant continue sur ce segment, elle est bornée. Notons $\mathrm{M} = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(n+1)}(x)|$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, on majore alors

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant |x-a|^n \underbrace{\frac{\mathrm{M}|x-a|}{(n+1)!}}_{\varepsilon(x)}$$

et on a bien $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Dans le cas où la fonction f est uniquement de classe $\mathscr{C}^n$, la démonstration est plus technique. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$:

$$f(x) = \mathrm{T}_{n-1}(x) + \mathrm{R}_{n-1}(x) \text{ où } \mathrm{R}_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Lorsque x est proche de a, pour $t \in [a,x]$, $f(t)$ est proche de $f(a)$. Mettons en évidence cette approximation :

$$\mathrm{R}_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(a)\,\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left[f(t) - f(a)\right]\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^n}{n!} f(a) + \theta(x)$$

Il ne reste qu'à vérifier que $\theta(x) = o((x-a)^n)$ au voisinage du point a. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f^{(n)}$ est continue au point a, il existe $\eta > 0$ tel que pour $t \in \mathrm{I}$, $|t-a| \leqslant \eta \implies |f(t) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$. Puisque $\forall t \in [a,x]$, $|t-a| \leqslant \eta$, on majore l'intégrale (prenons $x > a$ pour simplifier)

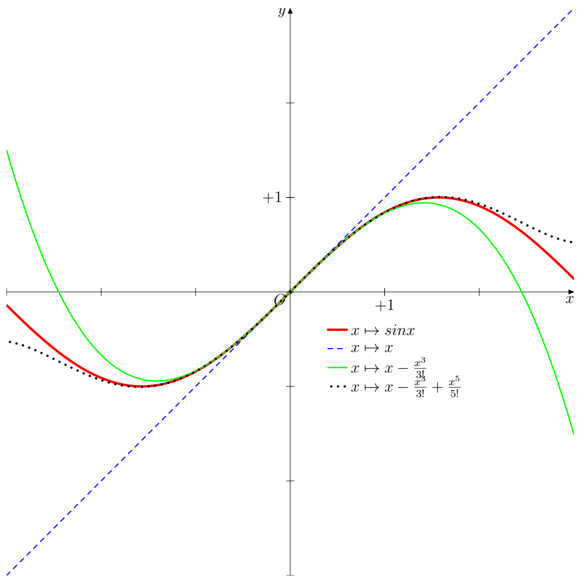
$$|\theta(x)| \leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f(t) - f(a)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = \varepsilon \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Nous avons donc montré que $|\theta(x)/(x-a)^n| \leqslant \varepsilon$ et donc que $\theta(x)/(x-a)^n \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Exemple 13.7 Cette formule, appliquée à l'ordre 5 en 0 pour la fonction sin permet d'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^5\right)$$

On approxime ainsi, dans un voisinage de 0 la fonction sin par un polynôme de degré 5. Plus l'ordre utilisé est élevé, meilleure est l'approximation obtenue. On s'en convaincra en étudiant les graphes ci dessous.



Multimédia : Tracé de sin, des polynômes de Taylor T_n en fonction de n et voir que l'approximation est locale en 0.

13.5.4 Utilisation des trois formules de Taylor

Il est important dans les exercices de savoir choisir son outil. Quand utiliser une formule de Taylor-Young ? Une inégalité de Taylor-Lagrange ?

- La formule de Taylor-Young fournit une approximation *locale* d'une fonction f au voisinage d'un point a par un polynôme T_n, le polynôme de Taylor.
- L'inégalité de Taylor-Lagrange fournit une majoration *globale* du reste R_n de cette approximation sur un segment $[a,x]$, même lorsque x est éloigné de a.
- La formule de Taylor-intégrale est la plus précise et donne explicitement le reste R_n sous forme d'une intégrale. Les deux autres formules en sont une conséquence. En première année, on ne l'utilise pas beaucoup, mais elle est importante en deuxième année.

Exemple 13.8 Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x) - \sin(x)}{x^3}$. Les équivalents usuels ne suffisent pas ici puisque $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ et $\mathrm{sh}\, x \underset{x \to 0}{\sim} x$ et on ne peut pas sommer ces équivalents. Nous avons besoin du comportement *local* des fonctions sh et sin

au voisinage du point 0. Utilisons la formule de Taylor-Young à l'ordre 3. Les dérivées successives de ces fonctions en zéro sont simples à calculer et on obtient

$$\mathrm{sh}(x) = x + x^3/3! + \mathrm{o}(x^3) \qquad \sin(x) = x - x^3/3! + \mathrm{o}(x^3)$$

Ces formule sont des *égalités* et on peut les sommer pour trouver que

$$\mathrm{sh}(x) - \sin(x) = x^3/3 + \mathrm{o}(x^3)$$

d'où $[\mathrm{sh}(x) - \sin(x)]/x^3 = 1/3 + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 1/3$.

Exemple 13.9 Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+h)f(x-h) = (f(x))^2$$

Montrons qu'alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x)f(x) = (f'(x))^2$.
Écrivons la formule de Taylor-Young pour la fonction f entre x et $x+\theta$.

$$f(x+\theta) = f(x) + \theta f'(x) + \frac{\theta^2}{2} f''(x) + \theta^2 \varepsilon(\theta) \quad (\varepsilon(\theta) \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0)$$

Si $h \neq 0$, en prenant $\theta = h$ et $\theta = -h$, on trouve que

$$f(x)^2 = f(x+h)f(x-h) = \left[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + h^2\varepsilon(h)\right]\left[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + h^2\varepsilon(-h)\right]$$

En développant et en ordonnant par rapport aux puissances de h, on trouve que

$$0 = h^2\left[-(f')^2(x) + f(x)f''(x)\right] + h^2\varphi(h)$$

avec $\varphi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. En divisant par h^2 et en faisant tendre h vers 0, on obtient le résultat. L'idée était d'utiliser la relation de l'énoncé en faisant tendre h vers 0, d'où l'utilisation de la formule de Taylor-Young.

Exemple 13.10 Étudier la limite en 0 de la fonction définie par

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Il nous faut une approximation de la fonction définie par $f(t) = \cos t$ au voisinage de zéro. Utilisons une formule de Taylor à l'ordre 2.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathrm{R}_2(t)$$

On en tire que $(1-\cos t)/t^2 = 1/2 - \mathrm{R}_2(t)/t$. Puisque $\mathrm{R}_2(t) = \cos t - 1 + t^2/2$, la fonction R_2 est continue sur $[x, 2x]$ et on peut intégrer :

$$\mathrm{F}(x) = \underbrace{\frac{1}{2x}\int_x^{2x}\mathrm{d}t}_{=1/2} - \underbrace{\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{R}_2(t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{\theta(x)}$$

Il nous faut traiter le reste $\theta(x)$ de notre approximation. Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, on sait que

$$|\mathrm{R}_2(t)| \leqslant \frac{t^3}{3!}\sup_{u\in[0,t]}|f^{(3)}(u)| \leqslant \frac{t^3}{6}$$

(puisque $|f^{(3)}(t)| = |\cos t| \leqslant 1$). Alors,

$$|\theta(x)| \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{|\mathrm{R}_2(t)|}{t^2} \leqslant \frac{1}{6x}\int_x^{2x} t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{4} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Par conséquent, $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1/2$.

Exemple 13.11 Trouvons deux réels $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$u_n=\int_0^1(1+x^2)^{1/n}\,\mathrm{d}x=a+\frac{b}{n}+\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$$

Écrivons pour $x\in[0,1]$, $(1+x^2)^{1/n}=e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^2)}$. Lorsque n devient grand, le terme dans l'exponentielle tend vers 0 à x fixé. On pourrait utiliser une formule de Taylor-Young pour l'exponentielle, mais le reste s'écrirait à l'aide d'une fonction ε qui dépendrait à la fois de x et de n sur laquelle nous n'avons pas d'information suffisante pour l'intégrer. Utilisons plutôt l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle à l'ordre 1 entre 0 et X :

$$e^{\mathrm{X}}=1+\mathrm{X}+\mathrm{R}_1(\mathrm{X})\text{ avec }|\mathrm{R}_1(\mathrm{X})|\leqslant\frac{\mathrm{X}^2}{2}\sup_{t\in[0,\mathrm{X}]}e^t\leqslant\frac{\mathrm{X}^2}{2}e^{\mathrm{X}}$$

On en tire que

$$u_n=\underbrace{\int_0^1\mathrm{d}x}_{a=1}+\frac{1}{n}\underbrace{\int_0^1\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x}_{b}+\underbrace{\int_0^1\mathrm{R}_1\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right)\mathrm{d}x}_{\theta_n}$$

On calcule b par parties

$$b=\int_0^1\ln(1+x^2)dx=\left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\ln2-2+\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\boxed{\ln2-2+\frac{\pi}{4}}$$

et il nous reste à majorer grossièrement le reste.

$$|\theta_n|\leqslant\frac{1}{n^2}\int_0^1\frac{\ln^2(1+x^2)}{2}e^{\ln(1+x^2)/n}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n^2}\int_0^1\frac{\ln^2 2}{2}e^{\ln(2)}\leqslant\frac{\mathrm{C}}{n^2}$$

Exemple 13.12 Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes $\mathrm{C},k>0$ telles que

1. $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)=0$,
2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)|\leqslant\mathrm{C}k^n n!$.

Montrons que f est la fonction nulle.

– Nous pouvons écrire une formule de Taylor à tout ordre n : $f(x)=\mathrm{R}_n(x)$. Notre hypothèse permet de majorer $|f^{n+1}|$, utilisons donc l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|f(x)|=|\mathrm{R}_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[0,x]}|f^{(n+1)}(t)|\leqslant\mathrm{C}|xk|^{n+1}$$

– Si $x\in]-1/k,1/k[$, en notant $\mathrm{K}=|xk|$, $|\mathrm{K}|<1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f(x)|\leqslant\mathrm{CK}^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. On en déduit que f est nulle sur l'intervalle $]-1/k,1/k[$.
– Considérons la fonction translatée, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x-1/k)$. Puisque f ainsi que toutes ses dérivées s'annulent en $1/k$, pour tout n, $f^{(n)}(0)=0$ et comme $g^{(n)}(x)=f^{(n)}(x-1/k)$, la fonction g vérifie les mêmes hypothèses que f. Elle est nulle sur $]-1/k,1/k[$ ce qui montre que f est nulle sur $]-1/k,2/k[$. On recommence avec d'autres translatées pour prouver que f est nulle sur $\mathbb{R}$ en entier.

13.6 Méthode des rectangles, Sommes de Riemann

THÉORÈME 13.41 **Méthode des rectangles**

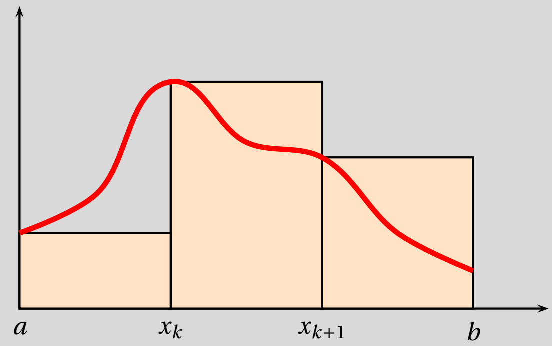
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. On effectue une subdivision du segment $[a,b]$ de pas constant $h=(b-a)/n$. On pose pour un entier $k\in[0,n]$, $x_k=a+k\frac{b-a}{n}=a+kh$. Posons pour un entier $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{R}_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)$$

On obtient une majoration de l'erreur commise en approximant l'intégrale I de la fonction f sur $[a,b]$ par R_n :

$$|\mathrm{I}-\mathrm{R}_n|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2n}\mathrm{M}_1$$

où $M_1 = \|f'\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f'(t)|$ (la fonction f' étant continue sur un segment, elle est bornée).



Démonstration *Commençons par estimer l'erreur sur un petit segment $[x_k, x_{k+1}]$:*

$$\varepsilon_{n,k} = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(t) - f(x_k)\right]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut utiliser le théorème fondamental deuxième forme. Pour $t \in [x_k, x_{k+1}]$,

$$|f(t) - f(x_k)| = \left|\int_{x_k}^{t} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_k}^{t} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M_1(t - x_k)$$

En intégrant cette inégalité, on trouve que

$$|\varepsilon_{n,k}| \leqslant M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\,\mathrm{d}t = M_1 \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = M_1 \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

On en déduit une majoration de l'erreur globale en sommant ces erreurs $\varepsilon_{n,k}$

$$|I - R_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(t) - f(x_k)\right]\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}$$

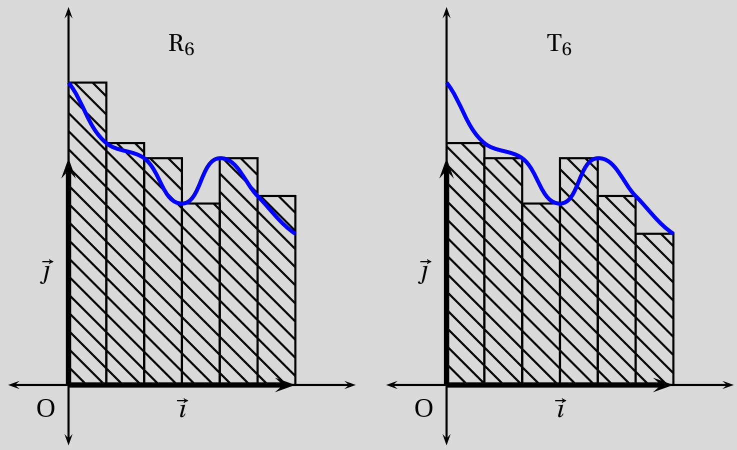
Dans le cas du segment $[0,1]$, on obtient le résultat suivant, intéressant pour étudier certaines suites.

THÉORÈME 13.42 ♡♡♡ **Convergence d'une somme de Riemann**

Soit une fonction f continue sur le segment $[0,1]$. On définit les suites de termes généraux

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$



Démonstration

- *Si la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$, le théorème précédent donne le résultat.*
- *Supposons que la fonction f est uniquement continue. On remarque que R_n représente l'intégrale de la fonction en escalier φ_n définie par $\forall x \in [k/n,(k+1)/n[$, $\varphi_n(x) = f(k/n)$ et $\varphi(1) = f(1)$. Le terme T_n représente l'intégrale d'une autre fonction en escalier ψ_n définie par $\psi_n(x) = (k+1)/n$ lorsque $x \in [k/n,(k+1)/n[$ et $\psi_n(1) = f(1)$.*
- *Montrons que $\|f-\varphi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est uniformément continue (théorème de Heine). Il existe donc $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. Posons $N = E(1/\eta)+1$. Alors pour $n \geqslant N$, si $x \in [0,1[$, il existe $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $k/n \leqslant x < (k+1)/n$ et alors $|f(x)-\varphi_n(x)| = |f(x)-f(k/n)| \leqslant \varepsilon$ puisque $|x-k/n| \leqslant 1/n \leqslant \eta$. De même, on montre que $\|f-\psi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
- *Alors, $|I-R_n| = \left|\int_0^1 [f(t)-\varphi_n(t)]\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)-\varphi_n(t)|\,dt \leqslant \|f-\varphi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La même majoration montre que $|I-T_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Remarque 13.14 Plus généralement, si f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, et si

$$u_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

où les points ξ_k sont dans l'intervalle $[a+kh, a+(k+1)h]$, avec $h = \dfrac{b-a}{n}$, on a

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

On se sert en pratique uniquement des sommes de Riemann du théorème précédent pour une fonction f continue sur le segment $[0,1]$ pour étudier la limite de certaines suites.

PLAN 13.3 : Pour étudier la limite d'une suite (u_n) faisant intervenir une somme et le groupement k/n

Essayer d'écrire u_n sous la forme $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$ et utiliser les sommes de Riemann.

Exemple 13.13 Considérons la suite de terme général $u_n = \sum p = 0n-1\dfrac{\sqrt{n^2+p^2}}{n^2}$. On peut faire apparaître le groupement p/n dans u_n en factorisant par n^2 dans la racine :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{1+(p/n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f(p/n)$$

où la fonction $f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{cases}$ est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème précédent, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$. Le plus rapide pour calculer cette intégrale consiste à intégrer par parties.

$$I = \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{2} - I + \left[\operatorname{argsh}(x)\right]_0^1$$

d'où l'on tire $I = \sqrt{2}/2 + \ln(\sqrt{2}+1)/2$.

Exemple 13.14 Considérons la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{2n-1}\frac{1}{2p+1}$. Avec le changement d'indice $k = p-n$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(k/n)+1/(2n)}$$

On n'obtient pas exactement une somme de Riemann, mais cela y ressemble fort ! Lorsque n est grand, on se dit que le terme $1/(2n)$ devient négligeable. Encadrons u_n par deux sommes de Riemann :

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1+p/n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(k+1)/n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k/n} = \beta_n$$

Les deux suites (α_n) et (β_n) sont des sommes de Riemann qui convergent vers la même limite, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(2)$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)/2$.

En résumé

Ce chapitre doit être bien maîtrisé et il sera important de faire un maximum d'exercices pour assimiler les différentes techniques nouvellement introduites. Plus particulièrement :

1. vous devez être à l'aise avec le calcul de primitives. Vous pourrez consulter les sections
   - C.6.3 page 1229 pour apprendre à calculer les primitives des fractions rationnelles
   - C.6.4 page 1230 pour apprendre à utiliser les règles de Bioche (qui permettent de calculer des primitives de la forme $\int F(\cos x, \sin x)\, dx$)
   - C.6.5 page 1233 pour les primitives de la forme $\displaystyle\int F(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$
   - C.6.6 page 1233 pour les primitives de fonctions contenant des racines
   - C.6.7 page 1235 pour les primitives de la forme $\displaystyle\int f(x^\alpha)\frac{dx}{x}$
   - et enfin C.6.8 page 1236 pour bien comprendre le cadre d'utilisation de l'intégration par parties.
2. Les majorations fondamentales du paragraphe 13.2.7 page 527 seront d'un usage constant aussi il faudra s'entraîner à les utiliser. Les exercices des sections 13.7.9 page 566, 13.7.10 page 569 et 13.7.12 page 580 constitueront un excellent terrain d'entraînement.
3. Il faudra avoir bien compris le pourquoi des formules et inégalité de Taylor et savoir utiliser, pour un problème « global », la formule de Taylor avec reste intégrale et pour un problème « local », la formule de Taylor-Young.

13.7 Exercices

13.7.1 Calcul de primitives

Exercice 13.2 ♡

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \cos x \sin x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution : *On utilise à chaque fois, là où elle est valide, la formule :* $\int u' u^a = \begin{cases} \frac{1}{a+1}u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ \ln|u| + C & \text{si } a = -1 \end{cases}$.

1. $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C^{te}$ *sur* $]-1,+\infty[$
2. $\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$
3. $\int \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C^{te}$ *sur* $]-\infty,1]$.
4. $\int \cos x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
5. $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$.
6. $\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 13.3 ♡

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \tan x\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int x e^{x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x$

Solution :

1. $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
2. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \arctan x + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
4. $\int x e^{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{x^2} + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
5. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(1+\cos^2 x\right) + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
6. $\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x = \ln \operatorname{ch} x + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 13.4 ♡

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{1}{x(\ln x)^4}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{\operatorname{th} x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \cos x \sin^3 x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$

Solution :

1. $\int \frac{1}{x(\ln x)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^{-3}}{3} + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$.
2. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
3. $\int \frac{1}{\operatorname{th} x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sh} x| + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}^*$.
4. $\int \cos x \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4} + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
5. $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2} + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
6. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-x} + C^{te}$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Exercice 13.5 ♡

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \dfrac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
6. $\int (2x-1)^2\,(x+1)\,\mathrm{d}x$

Solution :

1. $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\arctan\cos x + \mathrm{C}^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. $\int \dfrac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1+e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x - \int \dfrac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = x + \ln(1+e^x) + \mathrm{C}^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2} + \mathrm{C}^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
4. $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x - x + \mathrm{C}^{te}$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
5. $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2 + \mathrm{C}^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.
6. $\int (2x-1)^2\,(x+1)\,\mathrm{d}x = x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + x + \mathrm{C}^{te}$ *sur* $\mathbb{R}$.

13.7.2 Calcul d'intégrales

Exercice 13.6 ♡

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_1^{\operatorname{ch}1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_{1+e}^{1+2e} \dfrac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$

Solution :

1. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi} = \boxed{\pi}$
2. $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\arcsin x\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$
3. $\int_0^{\operatorname{ch}1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\operatorname{argch} x\right]_1^{\operatorname{ch}1} = \boxed{1}$
4. $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{\arctan x^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{\pi}{8}}$
5. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{1}{\ln x}\right]_e^{e^2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$
6. $\int_{1+e}^{1+2e} \dfrac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \dfrac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right]_{1+e}^{1+2e} = \boxed{2e + \dfrac{3}{2}e^2 + \ln 2}$

13.7.3 Linéarisation

Exercice 13.7 ♡

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$
2. $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$
3. $\int \operatorname{sh}^5 x\,\mathrm{d}x$
4. $\int \cos^2 x \sin 2x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x\,\mathrm{d}x$
6. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x$.

Solution : *On utilise le procédé de linéarisation des expressions trigonométriques B.3.2 page 1165 et on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

1. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ *et* $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2} + \mathrm{C}^{te}$
2. $\cos^4 x = \dfrac{\cos 4x}{8} + \dfrac{\cos(2x)}{2} + \dfrac{3}{8}$ *et* $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{32}\sin 4x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{3}{8}x + \mathrm{C}^{te}$

3. $\operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16}\operatorname{sh}5x - \frac{5}{16}\operatorname{sh}3x + \frac{5}{8}\operatorname{sh}x$ *et* $\int \operatorname{sh}^5 x\,dx = \frac{1}{80}\operatorname{ch}5x - \frac{5}{48}\operatorname{ch}3x + \frac{5}{8}\operatorname{ch}x + C^{te}$ *On peut aussi remarquer que* $sh^5 x = sh\,x(ch^2-1)^2$ *et que* $\int sh^5 x\,dx = \frac{1}{6}(ch^2-1)^3 + C$.
4. $\cos^2 x \sin 2x = \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x$ *et* $\int \cos^2 x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C^{te}$. *On peut aussi remarquer que* $\cos^2 x \sin 2x = 2\sin x \cos^3 x$ *et donc* $\int \cos^2 x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos^4 x + C$.
5. $\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}4x - 1}{8}$ *et* $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{\operatorname{sh}4x}{32} - \frac{1}{8}x + C^{te}$
6. *Inutile de linéariser...* $\int \operatorname{sh}x \operatorname{ch}x\,dx = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{2} + C^{te}$.

13.7.4 Intégration par parties

Exercice 13.8 ♡

Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^e \ln x\,dx$
2. $\int_0^1 \arctan x\,dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$
4. $\int_0^1 (x+2)\,e^x\,dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 x\,dx$
6. $\int_0^{\pi} (x-1)\cos x\,dx$

Solution : *On vérifie que les fonctions considérées sont bien de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur les intervalles considérés et on effectue des intégrations par parties, on trouve :*

1. $\ln x = \ln x \times 1$, *on trouve* $\int_1^e \ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx = \boxed{1}$.
2. $\arctan x = 1 \times \arctan x$. *On a alors :* $\int_0^1 \arctan x\,dx = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ *Mais* $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$. *Donc* $\int_0^1 \arctan x\,dx = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2}$.
3. *On effectue deux intégrations par parties successives et on retrouve l'intégrale de départ : Notant* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$, *on a :* $I = \Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx = \Big[e^x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[e^x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I$. *Donc* $\boxed{I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}}$.
4. $\int_0^1 (x+2)\,e^x\,dx = \Big[(x+2)\,e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = \boxed{2e-1}$
5. *Comme* $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, *on a :* $\int \sin^3 x\,dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x$ *et* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 x\,dx = \Big[-\frac{3}{4}x\cos x + \frac{1}{12}x\cos 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x\right)dx = -\Big[-\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{36}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{7}{9}}$
6. $\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,dx = \Big[(x-1)\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = \Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = \boxed{-2}$

Exercice 13.9 ♡

Déterminer les primitives suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle elles sont définies :

1. $\int \ln x\,dx$
2. $\int \arcsin x\,dx$
3. $\int x\arctan x\,dx$
4. $\int (x+1)\operatorname{sh}x\,dx$
5. $\int \operatorname{argsh}(3x)\,dx$
6. $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$

Solution : *On vérifie que les fonctions considérées sont bien de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur les intervalles* I *considérés et on effectue des intégrations par parties, on trouve :*

1. *Sur* $I = \mathbb{R}_+^*$ *:* $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C^{te}$
2. *Sur* $I = [-1,1]$ *:* $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C^{te}$

3. *Sur* $I = \mathbb{R}$ *:* $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)$. *Mais* $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x - \arctan(x) + C^{te}$ *donc :* $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x^2\arctan x - x + \arctan(x)\right) + C^{te} = \frac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right)\arctan x - x\right) + C^{te}$.
4. *Sur* $I = \mathbb{R}$ *:* $\int (x+1)\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{d}x = (x+1)\,\mathrm{ch}\,x - \int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x = (x+1)\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x + \mathbb{C}^{te}$
5. *Sur* $I = \mathbb{R}$ *:* $\int \mathrm{argsh}(3x)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{argsh}(3x) - \int \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{argsh}(3x) - \frac{\sqrt{1+9x^2}}{3} + C^{te}$
6. *Sur* $I = \mathbb{R}$ *:* $\int \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x = x\ln\left(1+x^2\right) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\ln\left(1+x^2\right) - 2x - 2\arctan x + C^{te}$

Exercice 13.10 ♡

Déterminer les primitives suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle elles sont définies :

1. $\int x\,\mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{d}x$
2. $\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \mathrm{argth}\,x\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \mathrm{ch}\,x\cos x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

Solution : *On vérifie que les fonctions considérées sont bien de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur les intervalles* I *considérés et on effectue des intégrations par parties, on trouve :*

1. *Sur* $I = \mathbb{R}$ *: Comme* $\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x+1}{2}$, $\int \mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sh}\,2x}{4} + C^{te}$ *et* $\int x\,\mathrm{ch}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{x\,\mathrm{sh}\,2x}{4} - \int\left(\frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sh}\,2x}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{x\,\mathrm{sh}\,2x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{\mathrm{ch}\,2x}{8} + C^{te} = \frac{x^2}{4} + \frac{x\,\mathrm{sh}\,2x}{4} - \frac{\mathrm{ch}\,2x}{8} + C^{te}$.
2. *Sur* $I =]-1,+\infty[$ *:* $\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x^2\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(x^2\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)\right) + C^{te}$.
3. *Sur* $I =]-1,1[$ *:* $\int \mathrm{argth}\,x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{argth}\,x - \int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{argth}\,x + \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right) + C^{te}$.
4. *Sur* $I = \mathbb{R}$ *: on effectue deux intégrations par parties successives :* $\int \mathrm{ch}\,x\cos x\,\mathrm{d}x = \cos x\,\mathrm{sh}\,x + \int \mathrm{sh}\,x\sin x\,\mathrm{d}x = \cos x\,\mathrm{sh}\,x + \sin x\,\mathrm{ch}\,x - \int \cos x\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x$. *On en déduit que :* $\int \cos x\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos x\,\mathrm{sh}\,x + \sin x\,\mathrm{ch}\,x) + C^{te}$
5. *Sur* $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *:* $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = x\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}x = x\tan x + \ln|\cos x| + C^{te}$
6. *Sur* $I = \mathbb{R}_+^*$ *: on effectue deux intégrations par parties successives :* $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x^2\ln^2 x - x^2\ln x + \frac{x^2}{2}\right) + C^{te}$

Exercice 13.11 ♡

Calculer $I = \int_0^{\pi/2} t^2\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution : *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$. *Donc* $I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2\cos(2t)\,\mathrm{d}t$. *Pour calculer* $\int_0^{\pi/2} t^2\cos(2t)\,\mathrm{d}t$, *on effectue deux intégrations par parties successives, les fonctions considérées étant bien de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0,\pi/2]$ *:*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} t^2\cos(2t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t\sin(2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{I = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}}$.

Exercice 13.12 ♡

Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution : *On effectue deux intégrations par parties successives à partir de la seconde intégrale :*

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\Big[(x-a)(x-b)f'(x)\Big]_a^b}_{=0} - \int_a^b (2x-(a+b))\,f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\Big[(2x-(a+b))\,f(x)\Big]_a^b + 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -(b-a)\big(f(a)+f(b)\big) + 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

et on trouve la formule proposée.

Exercice 13.13 ♡

On définit la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Trouver une relation de récurrence simple entre I_n et I_{n+1} puis calculer I_1 et I_2.

Solution : *Soit $n\in\mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties :*

$$\mathrm{I}_n = \left[\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2nx^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{\left(1+x^2\right)-1}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} + 2n\mathrm{I}_n - 2n\mathrm{I}_{n+1}$$

donc $\boxed{\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2^n} + (2n-1)\mathrm{I}_n\right)}$*. Il est par ailleurs clair que* $\mathrm{I}_1 = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ *donc* $\boxed{\mathrm{I}_2 = \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}}$.

Exercice 13.14 ♡♡

1. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Trouver une relation entre $\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$ et $\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.*
2. *En déduire : $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ et $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$.*

Solution :

1. *On effectue une intégration par parties :*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x - 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   et on en déduit que

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\left((2n-1)\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n}\right)}.$$

2. *Il s'ensuit que que $\mathrm{I}_2 = 1/2(\arctan x + x/(x^2+1)^2) + \mathrm{C}^{te}$ car $\mathrm{I}_1 = \arctan x + \mathrm{C}^{te}$. On en tire finalement que $\mathrm{I}_3 = 1/4(3\arctan x + 3x/(x^2+1)^2 + x/(x^2+1)^3$.*

Exercice 13.15 ♡♡

Calculer pour un entier $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Solution : *Soit $n \geqslant 1$, en intégrant par parties (dériver x^n), on trouve que*

$$\mathrm{I}_n = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2n}{3}x^{n-1}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}dx = \frac{2n}{3}(\mathrm{I}_{n-1}-\mathrm{I}_n)$$

d'où la relation de récurrence :

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n}{2n+3}\mathrm{I}_{n-1} = \cdots = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 5}\mathrm{I}_0$$

et puisque $\mathrm{I}_0 = \dfrac{2}{3}$, on obtient finalement

$$\boxed{\mathrm{I}_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}}$$

Exercice 13.16 ♡♡

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

1. *Justifier que pour tout entier $n > 0$, l'intégrale I_n existe.*
2. *Calculer pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n-2}$, I_0 et I_1.*
3. *En déduire la valeur de I_n pour tout entier n.*

Solution :

1. *L'intégrale I_0 est clairement bien définie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin nx}{\sin x}$ est définie et continue sur $]0,\pi/2]$ par opérations sur les fonctions continues. De plus, par équivalents usuels $\sin nx/\sin x \underset{x\to 0}{\sim} n$. Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} n$. On prolonge alors f par continuité en 0 en posant $f(0) = n$. La fonction ainsi prolongée est continue sur $[0,\pi/2]$ et l'intégrale I_n existe.*
2. *Soit $n \geqslant 2$. On utilise la formule valable pour tout $p, q \in \mathbb{R}$: $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$. Elle livre :*

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n-2} = \int_0^{\pi/2} 2\cos((n-1)x)\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\sin((n-1)\pi/2)}{n-1}$$

   donc $\boxed{\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-2} + \dfrac{2\sin((n-1)\pi/2)}{n-1}}$. *Par ailleurs $\mathrm{I}_0 = 0$ et $\mathrm{I}_1 = \pi/2$.*
3. *On utilise les résultats de la question précédente. Si $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ alors*

$$\mathrm{I}_n = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\right) = \boxed{2\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}}.$$

   Si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\boxed{\mathrm{I}_n = \pi/2}$.

13.7.5 Fractions rationnelles

cette section sera complétée à l'occasion du chapitre sur les fractions rationnelles.

Exercice 13.17

Calculer :

1. $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+2x+5)(x+2)}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+x+1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
8. $\int_0^{-1} \frac{1}{(x^2-3x+2)^2}\,\mathrm{d}x$
9. $\int_0^1 \frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x$

Solution :

1. $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$ *donc* $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln|x| + \ln|x-1|\Big]_2^3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

2. $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[3\ln|x-1| + \ln|x+1|\Big]_2^3 = \frac{1}{2}(3\ln 2 + \ln 4 - \ln 3)$

3. $\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+5}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{4}{x+5}\,\mathrm{d}x = \Big[x - 4\ln|x+5|\Big]_0^1 = 1 - 4\ln 6 + 4\ln 5.$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{5}\ln|x-2|\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \left[-\frac{3}{10}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{5}\arctan x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\ln(\frac{3}{4}) - \frac{3}{10}\ln(\frac{5}{4}) - \frac{1}{5}\arctan(\frac{1}{2})$

5. *On écrit la décomposition a priori* $\dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \dfrac{\mathrm{A}}{x-2} + \dfrac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+2x+5}$.
En multipliant les deux membres par $x+2$ *et en faisant* $x=-2$ *on trouve* $\mathrm{A} = \dfrac{1}{4-4+5} = \dfrac{1}{5}$.
En multipliant les deux membres par x^2+2x+5 *et en faisant* $x=-1+2i$ *on trouve* $\mathrm{B}(-1+2i)+\mathrm{C} = \dfrac{1}{-1+2i+2} = \dfrac{1-2i}{5}$. *D'où* $\mathrm{B} = -\dfrac{1}{5}$ *et* $\mathrm{C} = 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)} &= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}\\ &= \frac{1}{10}\left[2\ln(x+2) - \ln(x^2+2x+5)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{10}(2\ln 3 - 2\ln 2 - \ln 8 + \ln 5)\\ &= \frac{1}{10}\ln\left(\frac{45}{32}\right).\end{aligned}$$

6. *On écrit la décomposition a priori* $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \dfrac{\mathrm{A}}{x+1} + \dfrac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+x+1}$.
En multipliant les deux membres par $x+1$ *et en faisant* $x=-1$ *on trouve* $\mathrm{A} = \dfrac{-1}{1-1+1} = -1$.
En multipliant les deux membres par x^2+x+1 *et en faisant* $x=j$ *on trouve* $\mathrm{B}j+\mathrm{C} = \dfrac{j}{j+1} = \dfrac{j(j^2+1)}{(j+1)(j^2+1)} = 1+j$.
D'où $\mathrm{B}=1$ *et* $\mathrm{C}=1$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+x+1)} &= -\int_0^2 \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx}{x^2+x+1}\\ &= \left[-\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\right]_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\\ &= -\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 7 + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\int_0^2 \frac{dx}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}\end{aligned}$$

On pose $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $du = \dfrac{2\,dx}{\sqrt{3}}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\int_0^2 \frac{dx}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1} &= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{5}{\sqrt{3}}} \frac{du}{u^2+1}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) &= \frac{\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\\ &= \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{1+\frac{5}{3}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Donc $\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi$. *D'après la propriété des accroissements finis,* $\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leqslant \frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$,

donc $\left|\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} < \pi$ *d'où* $k = 0$ *et*

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+x+1)} = -\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 7 + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

7.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2}\\ &= \frac{16}{9}\int_0^1 \frac{dx}{\left((\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1\right)^2}\\ &= \frac{16}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{3}{\sqrt{3}}} \frac{du}{(u^2+1)^2}\end{aligned}$$

En posant $u = \tan\varphi$, $d\varphi = \dfrac{du}{u^2+1}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int_{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)} \cos^2\varphi\,d\varphi\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)}\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\ &\quad + \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\sin\left(2\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right) - \sin\left(2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

8.

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-2)(x-1)}.$$

En élevant au carré,

$$\frac{1}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{-1} \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} &= \left[-\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \ln(2-x) + \ln(1-x)\right]_0^{-1}\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} - 1 + \ln 2\\ &= -\frac{2}{3} + 2\ln 2.\end{aligned}$$

9. *Le lecteur vérifiera que*

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2(x+2)} = -\frac{3}{25}\log(|x+2|) + \frac{3}{50}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{17}{50}\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{10}\frac{x+3}{x^2+1} + \mathrm{C}$$

et que

$$\int_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2(x+2)} = \frac{3}{25}\ln 3 + \frac{9}{50}\ln 2 - \frac{17\pi}{200} + \frac{1}{10}.$$

Exercice 13.18

Calculer la primitive (préciser l'intervalle)

$$\mathrm{F} = \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$$

Solution : *C'est une fraction rationnelle. Après décomposition en éléments simples, on trouve*

$$\mathrm{F} = x - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)} - \frac{3}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \mathrm{C}$$

où C *est une constante qui dépend de l'intervalle* ($]-\infty,-1[$ *ou* $]-1,+\infty[$) *considéré.*

13.7.6 Changement de variable

Exercice 13.19 ♡

Déterminer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable précisé :

1. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ *en posant* $u = \ln x$
2. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ *en posant* $u = \sqrt{x+1}$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ *en posant* $u = \cos x$.
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,\mathrm{d}x$ *en posant* $u = \tan x$.
5. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ *en posant* $x = \cos u$.
6. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ *en posant* $u = \sqrt{x}$.

Solution :

1. *On pose* $u = \ln x$. u *est bien* $\mathscr{C}^1$ *et* $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$.
   Point n'est besoin de changement de variable puisque
   $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + \mathrm{C}$.
2. *On pose* $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}} \end{cases}$ *et* $x = u^2 - 1$. *On a :* $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(u^2-1)^3}{2}\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{16}{35} - \frac{9}{35}\sqrt{2}}$
3. *On pose* $\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x\,dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{1}{3}}$.
4. *On pose* $\begin{cases} u = \tan x \\ du = \left(1+\tan^2 x\right)dx = \left(1+u^2\right)dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u^4}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(\frac{u^4-1}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(u^2-1\right)\mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3} - u + \arctan u\right]_0^1 = \boxed{-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}}$.
5. *On pose* $\begin{cases} x = \cos u \\ dx = -\sin u\,du \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 u}\sin u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.
6. *On pose* $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{e}} 2\ln u^2\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt{e}} 4\ln u\,\mathrm{d}u = 4\Big[u\ln u - u\Big]_1^{\sqrt{e}} = \boxed{4-2\sqrt{e}}$.

Exercice 13.20 ♡

Déterminer les primitives suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

1. $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

Solution :

1. *On pose* $\begin{cases} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{cases}$ *, on obtient :* $\int \dfrac{1}{x + x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \arctan u + \mathrm{C}^{te} = \boxed{\arctan \ln x + \mathrm{C}^{te}}$.
2. *On pose* $\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -\arctan u + \mathrm{C}^{te} = \boxed{-\arctan\cos x + \mathrm{C}^{te}}$
3. *On pose* $\begin{cases} u = \operatorname{sh} x \\ du = \operatorname{sh} x dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = \int \operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u = \int \dfrac{1}{2}(1+\operatorname{ch} 2u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{sh} 2u + \mathrm{C}^{te} = \boxed{\dfrac{1}{2}\operatorname{argsh} x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1+x^2} + \mathrm{C}^{te}}$
4. *Un grand classique. Cette fois les différentes méthodes sont instructives :*
   On pose $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx = u dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\arctan u + \mathrm{C}^{te} = \boxed{2\arctan\left(e^x\right) + \mathrm{C}^{te}}$.
   Changement en $u = sh x$.
   $$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ch x} &= \int \frac{ch x\, dx}{ch^2 x} \\ &= \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \arctan u + \mathrm{C} \\ &= \arctan\left(argsh x\right) + \mathrm{C}. \end{aligned}$$
   Changement en $t = th\left(\frac{x}{2}\right)$.
   $$\begin{aligned} \int \frac{dx}{ch x} &= \int \frac{\frac{2\,dt}{1-t^2}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} \\ &= 2\arctan t + \mathrm{C} \\ &= 2\arctan\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \mathrm{C} \end{aligned}$$
   Les trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et ne diffèrent donc que d'une constante !
5. *On pose* $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int \dfrac{1+u}{1+u}\,\mathrm{d}u - \int \dfrac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = u + \ln|1+u| + \mathrm{C}^{te} = \boxed{e^x + ln\left(1+e^x\right) + \mathrm{C}^{te}}$
6. *On pose* $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{dx}{2u} \end{cases}$ *, on obtient :*
   $$\begin{aligned} \int \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}} &= \int (u^2-1)\, du \\ &= \frac{u^3}{3} - u + \mathrm{C} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + \mathrm{C}. \end{aligned}$$

Exercice 13.21 ♡

Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

1. $\int_0^1 \dfrac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_1^4 \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution :

1. *On pose* $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx = u dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u = \int_1^e \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln u - \ln(1+u)\Big]_1^e = \boxed{\ln 2 - \ln(e+1) + 1}$.
2. *On pose* $\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \sin^2 u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4u}{8}\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{\pi}{16}}$.
3. *On pose* $\begin{cases} u = \arcsin x \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{u}{1-\sin^2 u}}\sqrt{1-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{6}}{54}}$.
4. *On pose* $\begin{cases} u = \sqrt{\tan(x)} \\ du = \dfrac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}} dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2\,\mathrm{d}u = \boxed{2}$.
5. *On pose* $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u = \Big[2\ln(1+u)\Big]_1^2 = \boxed{2\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.
6. *On a :* $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$ *On pose* $\begin{cases} u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \\ du = \dfrac{2}{\sqrt{3}} dx \end{cases}$ *, on obtient :* $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan u\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$.

Exercice 13.22 ♡

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Calculer à l'aide de changements de variables, les intégrales*

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \mathrm{I}_2 = \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad \mathrm{I}_3 = \int_a^b (x-a)^n\,\mathrm{d}x$$

Solution : *Pour les deux premières intégrales, on effectue le changement de variable* $\begin{cases} u = x/a \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/a \end{cases}$ *. On obtient alors :*

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^1 \frac{a\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-a^2u^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin 1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \int_0^1 \frac{a\,\mathrm{d}u}{a^2+a^2u^2} = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\arctan 1}{a} = \boxed{\frac{\pi}{4a}}$$

Pour la troisième, on pose $\begin{cases} u = x-a \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{cases}$ *:*

$$\mathrm{I}_3 = \int_a^b (x-a)^n = \int_0^{b-a} u^n\,\mathrm{d}u = \boxed{\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}}.$$

Exercice 13.23 ♡♡

En utilisant un bon changement de variables, calculer pour $0 < a < b$*, l'intégrale*

$$\mathrm{I} = \int_a^b (x-a)^3(b-x)^4\,dx$$

Solution : *Effectuons le changement de variables* $\begin{cases} y = b - x \\ dy = -dx \end{cases}$ *. On trouve que :*

$$I = \int_0^{b-a} (b-a-y)^3 y^4 \, dy$$

On fait ensuite le changement de variables $\begin{cases} z = \dfrac{y}{b-a} \\ dy = (b-a)\, dz \end{cases}$ *, et on trouve que*

$$I = (b-a)^8 \int_0^1 z^4 (1-z)^3 \, dz.$$

En développant, on obtient alors

$$\boxed{I = \frac{1}{280}(b-a)^8}$$

Exercice 13.24 ♡♡

Soit un réel $a > 0$. Calculer en utilisant un bon changement de variables, l'intégrale

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \, dx$$

Indication 13.14 : Comment laisser les bornes invariantes ?

Solution : *On effectue le changement de variables* $\begin{cases} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\dfrac{dx}{x^2} \end{cases}$ *:*

$$I = -\int_a^{1/a} \frac{t \ln \frac{1}{t}}{\left(1+t^2\right)^2} \, dt = -\int_{1/a}^{a} \frac{t \ln t}{\left(1+t^2\right)^2} \, dt = -I$$

et de ce fait $\boxed{I = 0}$.

Exercice 13.25 ♡♡

Calculer en utilisant un bon changement de variables l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$$

Indication 13.14 : Comment laisser les fonctions $\sin x$, $\cos^2 x$ *et les bornes invariantes ?*

Solution : *On effectue le changement de variables* $\begin{cases} t = \pi - x \\ dt = -dx \end{cases}$ *. On trouve que*

$$I = -\int_0^{\pi} \frac{(-\pi + t) \sin t}{1 + \cos^2 t} \, dt$$

et donc que $2I = \int_0^{\pi} \dfrac{\pi \sin t}{1 + \cos^2 t} \, dt$. *On effectue ensuite le changement de variables* $\begin{cases} u = \cos t \\ du = -\sin t \, dt \end{cases}$ *et on trouve finalement que*

$$I = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{\pi}{1+u^2} \, du = -\frac{\pi}{2} \left[\arctan u\right]_1^{-1} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

13.7.7 Calcul de primitives et d'intégrales - Techniques mélangées

Exercice 13.26

Calculer $I = \int_0^1 \dfrac{t^5}{(t^4+1)^2} \, dt$.

Solution : *En posant $t^2 = x$,*

$$\int_0^1 \frac{t^5\,dt}{(t^4+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

En intégrant par parties, $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1, \\ v'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2} & v(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{t^5\,dt}{(t^4+1)^2} = -\frac{1}{4}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}.$$

Exercice 13.27

Calculer $\int_0^1 \dfrac{t}{(t^4+t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

Solution : *En posant $t^2 = x$,*

$$\int_0^1 \frac{t\,dt}{(t^4+t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \left[\frac{2\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{3\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right]_0^1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Exercice 13.28

Calculer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$$

Solution : *On peut écrire* $x(1-x) = -(x^2-x) = -((x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4})$ *Donc*

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}\,dx$$

et en posant $y = x - \dfrac{1}{2}$, $dy = dx$,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - (2y)^2}\,dy$$

Par le changement de variables $z = 2y$, $dy = \dfrac{dz}{2}$,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{1-z^2}\,dz = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

On peut retrouver ce résultat en étudiant la courbe $y = \sqrt{x(1-x)}$: $y^2 = x(1-x)$ *donc* $x^2 + y^2 - x = 0$, $(x-\dfrac{1}{2})^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$. *C'est le demi-cercle centré en* $(\frac{1}{2}, 0)$ *de rayon* $\frac{1}{2}$. *L'intégrale cherchée est donc la demi-aire d'un disque de rayon* $\dfrac{1}{2}$ *qui vaut* $\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 13.29

Calculer $\int_0^1 \dfrac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Solution :

$$\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3+2x}{(x^2+2)^2} + \frac{-x+1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2(x^2+2)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}$$

Le terme tout intégré vaut $\dfrac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \dfrac{1}{12}$, *et, en intégrant par parties,*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \left[\frac{x}{x^2+2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{(x^2+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+2} - 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = -\frac{1}{3} + 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} + 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}.$$

Or

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}u}{2u^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On trouve que

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Exercice 13.30

Calculer $\int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Solution : $x - 1/2\,(x+1)^{-1} - 3/2\,\ln(x+1) - 1/4\,\ln(x^2+1) + \mathrm{C}$

Exercice 13.31

Calculer $\int \frac{x^4}{x^2+1}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

Solution : *Pour faire disparaître l'arctangente, on intègre par parties. Pour cela, il nous faut une primitive de* $\frac{x^4}{x^2+1}$.

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + \mathrm{C}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right)\arctan x - \int \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right)\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+x)\,\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{4x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}\\ &= \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}\ln(x^2+1) + \mathrm{C}\end{aligned}$$

Exercice 13.32

Calculer $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ *sur* $\mathbb{R}$ *(justifier l'intervalle).*

Solution : *Séparer en deux primitives pour appliquer la règle de Bioche à chacune. En posant* $u = \cos x$ *et* $v = \sin x$,

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}v}{2-v^2} + \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

En posant $v = \sqrt{2}w$ $\mathrm{d}v = \sqrt{2}\,\mathrm{d}w$, *on a*

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{2-v^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{d}w}{1-w^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{1+w}{1-w}\right| + \mathrm{C} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right) + \mathrm{C}$$

D'où

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right) + \arctan\cos x + \mathrm{C}$$

Exercice 13.33

Calcul de $\int \frac{\operatorname{sh} x}{3+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Solution : *En posant* $\operatorname{ch} x = \sqrt{2}u$,

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{3+\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sh} x}{2+\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}u}{2+2u^2},$$

d'où

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{2}}\right) + \mathrm{C}$$

Exercice 13.34

Calculer $\int \sqrt{\dfrac{x}{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x$ *sur* $\mathrm{I} = [0,1[$.

Solution : *On pose* $t = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$, $t^2 = \dfrac{x}{1-x}$, $x = \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

$$\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\frac{x}{(1-x)}}\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \int t(1+t^2)\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = 2t - 2\arctan t + \mathrm{C}$$

D'où

$$\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \mathrm{C}$$

Exercice 13.35

Calculer $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ *sur* $\mathrm{I} =]1,+\infty[$.

Solution : *Multiplier par les quantités conjuguées et se ramener au calcul de deux primitives simples.*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{ch}^2\,u\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int \mathrm{sh}^2\,v\,\mathrm{d}v$$

en posant $x = \mathrm{sh}\,u$ *puis* $x = \mathrm{ch}\,v$. *Maintenant*

$$\int \mathrm{ch}^2\,u\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{ch}\,2u+1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2u + \frac{u}{2} + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u + \frac{u}{2} + \mathrm{C} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \mathrm{C}$$

et

$$\int \mathrm{sh}^2\,v\,\mathrm{d}v = \int \frac{\mathrm{ch}\,2v-1}{2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2v - \frac{v}{2} + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,v\,\mathrm{sh}\,v - \frac{v}{2} + \mathrm{C} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \mathrm{C}$$

Finalement,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) + \mathrm{C}$$

Exercice 13.36

Calculer $\int \dfrac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$.

Solution : *Poser* $t = \sqrt{x+2}$, *et ensuite un changement de variables en* ch.
$t^2 = x+2$, $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, $x+1 = t^2-1$.

$$\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2+\sqrt{t^2-1}}{1+t}\,t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2+\mathrm{sh}\,u}{1+\mathrm{ch}\,u}\mathrm{ch}\,u\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{2+\mathrm{sh}\,u}{1+\mathrm{ch}\,u}(1+\mathrm{ch}\,u)\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{d}u - 2\int \frac{2+\mathrm{sh}\,u}{1+\mathrm{ch}\,u}\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{d}u$$

$$= 4\int \mathrm{sh}\,u\,\mathrm{d}u + 2\int \mathrm{sh}^2\,u\,\mathrm{d}u - 4\int \frac{\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{d}u}{1+\mathrm{ch}\,u} - 2\int \frac{\mathrm{sh}^2\,u\,\mathrm{d}u}{1+\mathrm{ch}\,u} = 4\,\mathrm{ch}\,u + \mathrm{ch}\,u\,\mathrm{sh}\,u - u - 4\ln(1+\mathrm{ch}\,u) - 2\int \frac{(\mathrm{ch}^2\,u-1)\,\mathrm{d}u}{1+\mathrm{ch}\,u}$$

$$= 4\,\mathrm{ch}\,u + \mathrm{ch}\,u\,\mathrm{sh}\,u - u - 4\ln(1+\mathrm{ch}\,u) - 2\,\mathrm{sh}\,u + 2u + \mathrm{C}$$

$$= 4\sqrt{x+2} + \sqrt{(x+2)(x+1)} - 4\ln(1+\sqrt{x+2}) - 2\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}) + \mathrm{C},$$

puisque $u = \ln(w+\sqrt{w^2-1})$ *avec* $w = \sqrt{x+2}$ *et donc* $\sqrt{w^2-1} = \sqrt{x+1}$.

Exercice 13.37

Calculer

$$\int_0^1 \arctan\left(\sqrt[3]{x}\right)\,\mathrm{d}x$$

Solution : *Par le changement de variables $t = x^{\frac{1}{3}}$, et par parties.*

$$\int_0^1 \arctan\left(\sqrt[3]{x}\right)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 3t^2 \arctan t\, \mathrm{d}t = \left[t^3 \arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^3\, \mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[t^3 \arctan t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Exercice 13.38

Calculer

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^3}\,dx$$

Solution : *En écrivant $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$*

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(y = \frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

Donc

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+3}$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+3} + \mathrm{C}}$$

Exercice 13.39

Calculer

$$\mathrm{I} = \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Solution : *Écrivons*

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

En intégrant $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ par parties, on trouve finalement

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \mathrm{C}}$$

Exercice 13.40

Calculer

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{5+4\sin x}$$

Solution : *Par le changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$,*

$$\mathrm{I} = \int \frac{2}{5t^2+8t+5} = \frac{10}{9}\int \frac{dt}{\left(\frac{5}{3}t+\frac{4}{3}\right)^2+1}$$

finalement,

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5}{3}\tan\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\right) + \mathrm{C}}$$

Exercice 13.41

Calculer

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$$

Solution : *Par le changement de variables* $y = x^{\frac{1}{4}}$*, on trouve*

$$I = 4\int \frac{y^2}{y-1} = 2y^2 + 4y + 4\ln|y-1| + C$$

Donc

$$\boxed{I = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln|x^{\frac{1}{4}} - 1| + C}$$

Exercice 13.42

Calculer

$$\int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Solution : *Il faut éliminer les racines :* $x^2 + 4x - 5 = (x-1)^2 \dfrac{x+5}{x-1}$*. Donc* $(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}} = (1-x)^3 \left(\dfrac{x+5}{1-x}\right)^{\frac{3}{2}}$ $= (1-x)^2 \dfrac{x+5}{1-x}\left(\dfrac{x+5}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$*. Posons* $y = \left(\dfrac{x+5}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$*, alors* $x = \dfrac{y^2-5}{y^2+1}$*,* $dx = \dfrac{12y}{(1+y^2)^2}\,dy$ *et* $1 - x = \dfrac{6}{y^2+1}$*. Alors*

$$I = \frac{1}{18}\int \frac{y^2-5}{y^2}\,dy$$

et finalement

$$\boxed{I = \frac{1}{18}\left(\sqrt{\frac{x+5}{1-x}} + 5\sqrt{\frac{1-x}{x+5}}\right) + C}$$

Exercice 13.43

Calculer

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{6+x-x^2}}$$

Solution : *En écrivant* $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$*,*

$$I = \int \frac{dx}{x(3-x)\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}}$$

en effectuant ensuite le changement de variables $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}$*,* $x = \dfrac{3y^3-2}{y^2+1}$ *et* $3 - x = \dfrac{5}{y^2+1}$*,* $dx = \dfrac{10y}{(y^2+1)^2}\,dy$*,*

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y^3 - \frac{2}{3}}$$

et finalement,

$$\boxed{I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}} - \sqrt{\dfrac{2}{3}}}{\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}}\right| + C}$$

Exercice 13.44

Calculer

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$$

Solution :

$$\mathrm{I} = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\, x\,\mathrm{d}x$$

par le changement de variables $y = x^2$,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int \frac{y}{\sqrt{y+2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \sqrt{y+2} - \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y+2}} = \frac{1}{3}(y+2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{y+2} + \mathrm{C}$$

finalement,

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x^2+2} + \mathrm{C}}$$

Exercice 13.45

Calculer

$$\mathrm{I} = \int_2^3 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$$

Solution : *Par le changement de variables* $y = \sqrt{x-1}$,

$$\mathrm{I} = \ln\frac{3+\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Exercice 13.46

Calculer

$$\mathrm{I} = \int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$$

Solution : *On écrit* $(x-a)+(x-b) = 2x-(a+b)$.
Or $\int_a^b ((x-a)+(x-b))\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b (x-a)^{3/2}(b-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int_a^b (x-a)^{1/2}(b-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = 0.$
D'où $2\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x = (a+b)\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ *grâce à l'aire du demi-disque. Le résultat*

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{\pi}{16}(a+b)(b-a)^2}$$

en découle.

Exercice 13.47

Calculer

$$\int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

Solution : *On écrit* $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x(1+\sin^2 x)} = \int \frac{\sin x\cos x\,dx}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}$ *et là le changement de variable* $u = \sin^2 x$ *parait naturel,*
$\frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u)(1+u)} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + \mathrm{C} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\right) + \mathrm{C}.$

Exercice 13.48

Calculer

$$\mathrm{I} = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2+2x}\,dx$$

Solution : *Par les changements de variables* $y = x+1$ *et* $y = \operatorname{ch} z$,

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{3}{2}\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}}$$

Exercice 13.49

Calculer une primitive de

$$F = \int (x+1)^2 \sqrt{-x^2-2x+1}\,dx$$

(préciser l'intervalle)

Solution : *La fonction à primitiver est continue sur le l'intervalle* $I = [-1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1]$. *On cherche une primitive sur cet intervalle. C'est une primitive d'une fraction rationnelle en* x *et la racine d'un trinôme. On commence par réduire le trinôme sous forme canonique :*

$$-x^2-2x+1 = -((x+1)^2-2) = 2(1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2)$$

et après le changement de variables $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$, *on se ramène au calcul d'une primitive sur* $J = [-1,1]$ *:*

$$G = 4\int y^2\sqrt{1-y^2}\,dy$$

En posant alors $y = \sin t$, *(pour éliminer la racine), on se ramène au calcul d'une primitive sur l'intervalle* $J' = [-\pi/2, \pi/2]$ *:*

$$H = 4\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \int \sin^2(2t)\,dt$$

qui se calcule en linéarisant. Remplacer ensuite en fonction de x. *Terminer le calcul !*
Une autre méthode consiste à écrire (a *et* b *sont les racines du trinôme avec* $a < b$*) :*

$$\sqrt{-x^2-2x+1} = \sqrt{(x-a)(b-x)} = (x-a)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$$

et à se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en x *et en la racine d'une homographie. Poser alors* t *la racine de l'homographie.*

Exercice 13.50

Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\frac{dt}{t}$$

Solution : *C'est une fraction rationnelle en* t *et en la racine* n*-ième d'une homographie. Posons donc* $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$ *:*

$$t = \frac{u^2+1}{-u^2+1} \qquad dt = \frac{4u}{(1-u^2)}\,du$$

Donc

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\,du$$

et en décomposant en éléments simples cette fraction rationnelle,

$$\frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u-1} - \frac{2}{u^2+1}$$

on trouve finalement :

$$I = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{\pi}{3}$$

13.7.8 Propriétés de l'intégrale

Exercice 13.51 ♡

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *On suppose que* f *est continue sur* $[a,b]$. *Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$
2. $f \leqslant 0$ *ou* $f \geqslant 0$.

Solution : *Le sens indirect est trivial. Pour le sens direct, supposons que* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$*. Alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ *et donc* $\int_a^b \left(\left|f(t)\right| - f(t)\right)\,\mathrm{d}t = 0$*. La fonction* $\left|f\right| - f$ *est continue et positive. On sait que l'intégrale d'une fonction positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. Donc* $\left|f\right| - f$ *est nulle et* f *est positive. Le cas* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ *se traite de la même façon.*

Exercice 13.52 ♡

Considérons une application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*. Montrer que* f *admet une et une seule primitive* F *vérifiant* $\int_0^1 \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Solution :

Unicité : *Supposons qu'il existe deux telles primitives* F *et* G*. Alors* $\mathrm{F} = \mathrm{G} + \mathrm{C}^{te}$*. Comme* $\int_0^1 \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{G}(t)\,\mathrm{d}t = 0$*, on a nécessairement* $\mathrm{C}^{te} = 0$.

Existence : *Soit* $\mathrm{H}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$*. La fonction* $\mathrm{F} : x \mapsto \mathrm{H}(x) - \int_0^1 \mathrm{H}(t)\,\mathrm{d}t$ *répond au problème*

Exercice 13.53 ♡

On considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[0,1]$ *et telle que* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$*. Montrer que* f *admet un point fixe.*

Indication 13.14 : *Introduire la fonction* $\varphi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) - t \end{cases}$.

Solution : *On a* $\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$*. Si* φ *ne change pas de signe sur* $[0,1]$ *alors d'après le cours* $\varphi = 0$*, Sinon, si* φ *change de signe sur* $[0,1]$*, comme* φ *est continue sur* $[0,1]$*, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur* $[0,1]$ *et donc* f *admet un point fixe.*
On peut aussi proposer la solution suivante. Comme $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1/2$ *il vient que* $\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$*. D'après le théorème de la moyenne, il existe* $c \in [0,1]$ *tel que* $g(c) = 0$ *et par construction,* c *est un point fixe de* f.

Exercice 13.54 ♡

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$*. Montrer que :*

$$\exists c \in]a,b[, \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$$

Indication 13.14 : *Poser* $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et introduire la fonction* $\varphi : t \mapsto f(t) - \alpha$.

Solution : *Posons* $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et considérons* $\varphi : t \mapsto f(t) - \alpha$*. La fonction* φ *est définie et continue sur* $[a,b]$ *et* $\int_a^b \varphi\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \alpha(b-a) = 0$*. Donc* φ *s'annule en un point* $c \in [0,1]$ *et on a* $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13.55 ♡

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$*. Trouver les fonctions* f *continues sur* $[a,b]$ *telles que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|$$

Solution : *Soit* f *une fonction vérifiant l'égalité ci dessus. Alors :*

$$\int_a^b \left(\sup_{[a,b]} f - f(x)\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Mais $\sup_{[a,b]} f - f$ *est une fonction continue et positive sur* $[a,b]$*. Comme son intégrale sur* $[a,b]$ *est nulle alors* $\sup_{[a,b]} f - f$ *est nulle et donc* f *est constante. On vérifie réciproquement que les fonctions constantes satisfont l'égalité de l'énoncé.*

Exercice 13.56 ♡♡

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. On suppose que* $g \geqslant 0$*. Montrer qu'il existe* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Solution : *Si g est identiquement nulle sur $[a,b]$, la propriété est trivialement vérifiée. Supposons que ce ne soit pas le cas. Comme $g \geqslant 0$, on peut affirmer que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. De plus :*

$$\inf_{[a,b]} f = \frac{\inf_{[a,b]} f \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{\sup_{[a,b]} f \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} = \sup_{[a,b]} f.$$

On en déduit que $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \in \left[\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f\right]$. Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur le segment $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}$ et l'égalité est prouvée.

Exercice 13.57 ♡♡♡

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $\forall k \in [0,n]$, $\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

Solution : *Si f est la fonction identiquement nulle sur $[a,b]$ alors le résultat est évident. On suppose dans toute la suite que f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$.*
Remarquons que l'hypothèse de l'énoncé est équivalente au fait que pour tout polynômes P de degré $\leqslant n$ alors $\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
On va montrer par récurrence la propriété P_n suivante :

$$P_n : \left[\left[\forall k \in [0,n], \quad \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right] \implies f \text{ change au moins } n+1 \text{ fois de signe sur } [a,b]\right].$$

Le résultat découle de cette propriété par application du théorème des valeurs intermédiaires.
Montrons P_0. Si f ne change pas de signe sur $[a,b]$ alors f est positive ou négative sur $[a,b]$ et comme f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, on ne peut avoir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc f change de signe au moins une fois sur $[a,b]$ et P_0 est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_{n-1} est vraie et prouvons que P_n est vraie. On suppose donc que pour toute fonction polynomiale P de degré $\leqslant n$, $\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que f change au moins n fois de signe sur $[a,b]$. Notons $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in [a,b]$ les points de $[a,b]$ en lesquels f change de signe (ce sont des zéros distincts de f). Notons aussi $\alpha_0 = a$ et $\alpha_{n+1} = b$. Par l'absurde, supposons que f ne change pas $n+1$ fois de signe sur $[a,b]$. Considérons une fonction polynomiale P du signe de f sur chaque intervalle $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$ pour $i \in [\![0,n]\!]$. Une telle fonction existe, il suffit par exemple de considérer $P(t) = (t-\alpha_1)\dots(t-\alpha_n)$ si f est positive sur $[\alpha_0,\alpha_1]$ ou son opposé si f est négative sur ce segment. La fonction Pf est alors positive sur $[a,b]$. Mais par hypothèse, son intégrale est nulle donc on devrait avoir $Pf = 0$ ce qui n'est pas possible car ni f ni P ne sont nuls. Donc f change au moins $n+1$ fois de signe sur $[a,b]$ et la propriété est prouvée par récurrence.

13.7.9 Majorations d'intégrales

Exercice 13.58 ♡

Soit $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Peut-il y avoir égalité ?

Solution : *On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $f : x \mapsto 1$ et $g : x \mapsto 1/x$ sur le segment $[a,b]$:*

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leqslant \left(\int_a^b \mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b \frac{dx}{x^2}\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

On a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles sur le segment $[a,b]$ ce qui n'est évidemment pas le cas.

Exercice 13.59 ♡

Soit deux fonctions continues et positives $f, g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in [0,1]$, $f(x)g(x) \geqslant 1$. Montrer que

$$\left[\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right]\left[\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right] \geqslant 1$$

Étudier le cas d'égalité.

Solution : *D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquées aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sur $[0,1]$, on a :*

$$1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{fg(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t}$$

ce qui prouve l'inégalité. Si cette inégalité est une égalité, alors il y a égalité dans Cauchy-Schwarz, et il est nécessaire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}+$ tel que $g = \lambda f$ (ou alors $f = \lambda g$). De plus, pour avoir $1 = \int_0^1 \sqrt{fg(t)}\,\mathrm{d}t$, il faut que $\int_0^1 \left[\sqrt{fg(t)} - 1\right]\,\mathrm{d}t = 0$. Comme la fonction intégrée est continue et positive, et que son intégrale est nulle, d'après le cours la fonction est nulle. Par conséquent, les deux fonctions f et g doivent être constantes et inverses l'une de l'autre. On vérifie la réciproque facilement.

Exercice 13.60 ♡

Soit une fonction f continue sur le segment $[0,1]$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathrm{I}_k = \int_0^1 x^k \left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x$$

Montrer que pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a $\mathrm{I}_{p+q}^2 \leqslant \mathrm{I}_{2p}\mathrm{I}_{2q}$.

Solution : *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\mathrm{I}_{p+q}^2 = \left(\int_0^1 x^{p+q}\left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 x^p\sqrt{\left|f(x)\right|}x^q\sqrt{\left|f(x)\right|}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 x^{2p}\left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x \int_0^1 x^{2q}\left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_{2p}\mathrm{I}_{2q}$$

Exercice 13.61 ♡

Soit l'ensemble $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}([a,b]) \mid \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$. Déterminer

$$\alpha = \inf_{f\in\mathrm{E}} \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$$

Solution : *Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :*

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right) \geqslant \left(\int_a^b \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{f}}\,\mathrm{d}x\right)^2 = (b-a)^2$$

donc $(b-a)^2 \leqslant \alpha$. Mais la fonction f_0 constante égale à 1 sur $[a,b]$ est élément de E et vérifie :

$$\left(\int_a^b f_0(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f_0(x)}\right) = (b-a)^2$$

donc $\boxed{\alpha = (b-a)^2}$.

Exercice 13.62 ♡♡

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer les fonctions $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution : *Soit une telle fonction f. Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left|\int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

En notant $\mathrm{I} = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x$, on trouve donc le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz : $\mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{I}}\sqrt{\mathrm{I}}$. On sait alors qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f^2 = \lambda f$. Donc $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = 0$ ou bien $f(x) = \lambda$. Supposons qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = 0$ et qu'il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = \lambda$. Si $\lambda \neq 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il devrait exister $c \in [x_0, x_1]$ tel que $f(c) = \lambda/2$ ce qui est impossible. Par conséquent, la fonction f est constante sur $[a,b]$. On voit que cette constante vaut 0 ou 1. La réciproque est immédiate.

Exercice 13.63 ♡♡

Soient deux fonctions strictement positives $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1])$. Montrer que

$$\int_0^1 \left(\frac{f(t)}{g(t)} + \frac{g(t)}{f(t)}\right) \mathrm{d}t \geqslant 2$$

Solution : *On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^1 \frac{f}{\sqrt{fg}} \frac{g}{\sqrt{fg}}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left[\int_0^1 \frac{f^2}{fg}(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \times \left[\int_0^1 \frac{g^2}{fg}(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{f^2}{fg}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{g^2}{fg}(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{f}{g} + \frac{g}{f}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Le résultat s'en suit. Pour avoir égalité, il faut qu'il y ait égalité dans Cauchy-Schwarz, donc que f/g et g/f soient proportionnelles, donc que f et g soient proportionnelles, et ensuite que $\lambda = 1$, c'est-à-dire que $f = g$.

Remarque : Pour $u > 0$, $u + \frac{1}{u} \geqslant 2$, d'où le résultat en prenant $u = \dfrac{f(t)}{g(t)}$. Le cas d'égalité est simple.

Exercice 13.64 ♡♡

Soit une fonction convexe φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. *Si f est une fonction en escalier sur $[0,1]$, montrer que*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. *Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, montrer que*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution :

1. *Considérons une subdivision $\sigma : x_0 = 0 < \ldots < x_n = 1$ subordonnée à f. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]x_i, x_{i+1}[} = c_i$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(x_{i+1} - x_i)$. Remarquons que $\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = 1$. Comme φ est convexe, on peut alors écrire :*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(x_{i+1} - x_i)\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\,\varphi(c_i) = \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. *Comme f est continue sur $[0,1]$, il existe une suite (f_n) de fonctions en escaliers sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Donc :*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) = \varphi\left(\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \varphi\left(\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

car φ est continue sur $\mathbb{R}$. Mais d'après la première question, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f_n(x)\,\mathrm{d}x$ donc par passage à la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi \circ f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et que φ est, d'après le théorème de Heine, uniformément continue sur $[0,1]$, $(\varphi \circ f_n)$ converge uniformément vers $\varphi \circ f$ sur $[0,1]$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi \circ f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty}\varphi \circ f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui prouve la propriété.

Exercice 13.65 ♡♡♡

Pour $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on note $\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sa valeur moyenne. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de a et b telle que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$,

$$\int_a^b \left|f(x)-\overline{f}\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant \mathrm{C}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$$

Solution : *D'après le théorème de la moyenne, il existe $c \in [a,b]$ tel que $\overline{f} = f(c)$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. Donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left|f-\overline{f}\right|^2 = \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (x-c)\int_c^x \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t.$$

On intègre par rapport à x entre a et b cette inégalité :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|f(x)-\overline{f}\right|^2 \mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b (x-c)\left(\int_c^x \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_a^c (x-c)\left(\int_c^x \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x + \int_c^b (x-c)\left(\int_c^x \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_a^c (c-a)\left(\int_a^c \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x + \int_c^b (b-c)\left(\int_c^b \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_a^c (c-a)\left(\int_a^b \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x + \int_c^b (b-c)\left(\int_a^b \left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \left((c-a)^2+(b-c)^2\right)\left(\int_a^b (f'(t))^2\,dt\right)
\end{aligned}$$

Enfin la fonction (convexe) $c \mapsto (c-a)^2+(b-c)^2$ prend son maximum aux bornes a et b et l'inégalité est prouvée avec $\mathrm{C} = (b-a)^2$.

13.7.10 Limite de fonctions définies par une intégrale

Exercice 13.66 ♡

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Trouver la limite de la suite de terme général

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,\mathrm{d}x$$

Solution : *En notant $\mathrm{M} = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$,*

$$|\mathrm{I}_n| \leqslant \mathrm{M}\int_0^1 \frac{dx}{|1+nx|} \leqslant \mathrm{M}\int_0^1 \frac{dx}{1+nx} \leqslant \mathrm{M}\left[\frac{\ln(1+nx)}{n}\right]_0^1 \leqslant \mathrm{M}\frac{\ln(n+1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $\ln n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$

Exercice 13.67 ♡

A l'aide de majorations simples, trouver les limites des suites suivantes :

1. $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+e^{nx}}dx$;
2. $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+x}dx$;
3. $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \sin(nx)dx$;
4. $\mathrm{I}_n = \int_0^1 e^{-nx}(1+x^n)dx$;
5. $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n}\int_n^{2n} \arctan x dx$;
6. $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$.

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{x^n}{1+e^{nx}} \leqslant x^n$ donc par passage à l'intégrale : $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et d'après le théorème des gendarmes* $\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
2. *Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$ donc par passage à l'intégrale : $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant -\frac{e^{-n}-1}{n}$ et d'après le théorème des gendarmes* $\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

3. *Pour tout* $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x^n \sin(nx) \leqslant x^n$ *donc par passage à l'intégrale :* $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ *et d'après le théorème des gendarmes* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

4. *Pour tout* $x \in [0,1]$, $0 \leqslant e^{-nx}(1+x^n) \leqslant 2e^{-nx}$ *donc en passant à l'intégrale,* $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{-2}{n}(e^{-n}+1)$ *et par le théorème des gendarmes* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

5. *Comme* arctan *est croissante, pour tout* $x \in [n,2n]$, $\arctan n \leqslant \arctan x \leqslant \arctan(2n)$ *et il vient que :* $n\arctan n \leqslant \int_n^{2n} \arctan x dx \leqslant n\arctan(2n)$. *On en déduit que* $\arctan n \leqslant I_n \leqslant \arctan(2n)$ *et d'après le théorème des gendarmes :* $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}}$.

6. *Comme* $x \mapsto \ln\left(1+x^2\right)$ *est croissante sur* $[0,1]$, *on a :*

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \leqslant \ln 2 \int_0^1 x^n\,dx = \frac{\ln 2}{n+1}$$

donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{I_n \to 0}$.

Exercice 13.68 ♡♡

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_{-2x}^{2x} \cos\left(t^4\right)\,dt$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \displaystyle\int_{x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\,dt$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt$

Indication 13.14 : Pour la dernière, penser à une intégration par parties.

Solution :

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $t \in [-2x,2x]$, $-1 \leqslant \cos\left(t^4\right) \leqslant 1$ *donc* $\int_{-2x}^{2x} -\,dt \leqslant \int_{-2x}^{2x} \cos\left(t^4\right)\,dt \leqslant \int_{-2x}^{2x} dt$ *ce qui amène :* $-2x \leqslant \int_{-2x}^{2x} \cos\left(t^4\right)\,dt \leqslant 2x$ *et par application du théorème des gendarmes,* $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_{-2x}^{2x} \cos\left(t^4\right)\,dt = 0$

2. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Pour tout* $t \in [x,2x]$, $-\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ *donc* $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x} \leqslant \int_x^{2x} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt \leqslant \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x}$ *et par application du théorème des gendarmes,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt = 0$

3. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Pour tout* $t \in [x,3x]$, $\dfrac{e^{-3x}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-x}}{t}$ *donc* $e^{-3x}\ln 3 \leqslant \int_x^{3x} \dfrac{e^{-t}}{t}\,dt \leqslant e^{-x}\ln 3$ *et par application du théorème des gendarmes :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = 0$

4. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Pour tout* $t \in \left[x, x^2\right]$, $\dfrac{1}{\ln x^2} \leqslant \dfrac{1}{\ln t}$ *donc* $\dfrac{x^2-x}{\ln x^2} \leqslant \int_x^{x^2} \dfrac{1}{\ln t}\,dt$ *et par application du théorème des gendarmes :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt = +\infty$

5. *Soit* $x \in \mathbb{R}_-^*$. *Pour tout* $t \in [x,2x]$, $\dfrac{e^{\frac{1}{2x}}}{t} \leqslant \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t} \leqslant \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{t}$ *donc* $\ln 2 e^{\frac{1}{2x}} \leqslant \int_x^{2x} \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\,dt \leqslant \ln 2 e^{\frac{1}{x}}$ *et par application du théorème des gendarmes :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\,dt = \ln 2.$

6. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$.*En effectuant une intégration par parties, on obtient :* $\int_x^{2x} \dfrac{\cos t}{t}\,dt = \left[\dfrac{\sin t}{t}\right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \dfrac{\sin t}{t^2}\,dt$. *Il est clair que :* $\dfrac{\sin 2x}{2x} - \dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. *Par ailleurs, pour tout* $t \in [x,2x]$, $-\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{\sin t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ *donc* $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x} \leqslant \int_x^{2x} \dfrac{\sin t}{t^2}\,dt \leqslant \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x}$ *et d'après le théorème des gendarmes,* $\int_x^{2x} \dfrac{\sin t}{t^2}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. *On a ainsi montré que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt = 0$

Exercice 13.69 ♡♡

Soit la suite de fonctions (g_n) *définies sur* $[0,1]$ *par* $g_n(x)=0$ *si* $x\in]\frac{1}{n},1]$ *et* $g_n(x)=n$ *si* $x\in[0,\frac{1}{n}]$. *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$. *Trouver la limite de la suite de terme général*

$$I_n=\int_0^1 f(t)g_n(t)\,dt$$

Solution : *Soit* $\varepsilon>0$. *Comme* f *est continue en* 0, *il existe* $\eta>0$ *tel que* $\forall x\in[0,\eta]$, $|f(x)-f(0)|\leqslant\varepsilon$. *Il existe aussi* $N\in\mathbb{N}$ *tel que si* $n\geqslant N$ *alors* $1/n\leqslant\eta$. *Soit* $n\geqslant N$. *On a :*

$$I_n=\int_0^1 f(t)\,g_n(t)\,dt=\int_0^{1/n} f(t)\,g_n(t)\,dt+\int_{1/n}^1 f(t)\,g_n(t)\,dt=\int_0^{1/n} nf(t)\,dt.$$

Mais

$$f(0)-\varepsilon=\int_0^{1/n} n\big(f(0)-\varepsilon\big)\,dt\leqslant\int_0^{1/n} nf(t)\,dt\leqslant\int_0^{1/n} n\big(f(0)+\varepsilon\big)\,dt=f(0)+\varepsilon$$

Donc $\boxed{I_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(0)}$.

Exercice 13.70 ♡♡

On définit une fonction I *en posant, pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$, $I(x)=\frac{1}{x}\int_0^\pi \sin(x^2\sin t)\,dt$. *Trouver la limite de* $I(x)$ *lorsque* $x\to0$.

Solution : *Soit* x *un réel appartenant à un voisinage épointé de* 0 *inclus dans* $\left]-\sqrt{\pi/2},\sqrt{\pi/2}\right[$. *Sur ce voisinage,* sin *est strictement croissante. Pour tout* $t\in[0,\pi]$, *on peut écrire :* $-x^2\leqslant x^2\sin t\leqslant x^2$ *ce qui amène :* $\sin\left(-x^2\right)\leqslant\sin\left(x^2\sin t\right)\leqslant\sin\left(x^2\right)$ *et donc en passant à l'intégrale et en divisant par* x *en obtient :*

$$\pi\frac{\sin\left(-x^2\right)}{x}\leqslant I(x)\leqslant\pi\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}.$$

Mais comme $\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}\underset{x\to0}{\sim}x$, *d'après le théorème des gendarmes, il vient :* $\boxed{I(x)\xrightarrow[x\to0]{}0}$.

Exercice 13.71 ♡♡♡

Soit une fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *continue. Trouver la limite des suites de terme général :*

1. $H_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$
2. $I_n=n\int_0^1 x^n f(x)\,dx$

Solution :

1. *La fonction* f *est continue sur* $[0,1]$ *et est donc majorée sur* $[0,1]$ *par* $M=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. *On a alors* $\left|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right|\leqslant M\int_0^1 x^n\,dx=\frac{M}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ *et donc d'après le théorème des gendarmes,* $H_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
2. *Remarquons que* $I_n=n\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]\,dx+n\int_0^1 x^n f(1)\,dx$. *Par ailleurs :*
   (a) $n\int_0^1 x^n f(1)\,dx=f(1)\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(1)$.
   (b) *Comme* f *est continue sur le segment* $[0,1]$, f *est bornée. Notons* $M=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. *Soit* $\varepsilon>0$. *Comme* f *est continue au point* 1, *il existe* $c\in]0,1[$ *tel que* $\forall x\in[c,1]$, $|f(x)-f(1)|\leqslant\varepsilon$. *Alors*

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx\right|&\leqslant n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\,dx\\&\leqslant n\int_0^c x^n 2M\,dx+n\int_c^1 x^n\varepsilon\,dx\\&\leqslant 2M\frac{n}{n+1}c^n+\frac{n}{n+1}(1-c^n)\varepsilon\\&\leqslant 2Mc^n+\varepsilon\end{aligned}$$

   Comme $|c|<1$, *la suite géométrique* (c^n) *converge vers* 0. *Par conséquent, il existe* $N\in\mathbb{N}$ *tel que* $\forall n\geqslant N$, $|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx|\leqslant2\varepsilon$. *Donc, la première suite tend vers* 0.

En conclusion, $\boxed{I_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(1)}$.

Exercice 13.72 ♡♡♡

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ *continue et un réel* $a \in [0,1]$*. Trouver la limite de la suite de terme général*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 f(ax^n)\,\mathrm{d}x$$

Solution : *Soit* $\varepsilon > 0$*. Comme* f *est continue en* 0*, il existe* $\eta > 0$ *tel que si* $|x| \leqslant \eta$ *alors* $\left|f(x) - f(0)\right| \leqslant \varepsilon$*. Pour tout* $c \in]0,1[$*, on a :*

$$\left|\mathrm{I}_n - f(0)\right| \leqslant \int_0^c \left|f\left(ax^n\right) - f(0)\right| \mathrm{d}x + \int_c^1 \left|f\left(ax^n\right) - f(0)\right| \mathrm{d}x$$

– *Il est clair que* $\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \left|f(ax^n) - f(0)\right| \mathrm{d}x = 0$*. On peut alors fixer* $c \in]0,1[$ *en sorte que* $\int_c^1 \left|f(ax^n) - f(0)\right| \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$*.*

– *Comme* $c^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant \mathrm{N}$*, on a* $0 \leqslant ac^n \leqslant \eta$*. Comme* $0 \leqslant x \leqslant c$*, on a* $ax^n \in [0,\eta]$*. Il vient alors :* $\left|f(ax^n) - f(0)\right| \leqslant \varepsilon$ *et* $\int_0^c \left|f(ax^n) - f(0)\right| \mathrm{d}x \leqslant c\varepsilon \leqslant \varepsilon$*. car* $c \in]0,1[$*.*

Au final, pour $n \geqslant \mathrm{N}$*, on a :* $\left|\mathrm{I}_n - f(0)\right| \leqslant 2\varepsilon$ *et donc* $\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)}$*.*

Exercice 13.73 ♡♡♡

Soit une fonction f *continue sur* $\mathbb{R}$*. Déterminer la limite lorsque* $x \to 0$ *de la fonction définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^x \frac{x}{x^2 + t^2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication 13.14 : Faire un changement de variables qui fera apparaître la variable x *à l'intérieur de* f*.*

Solution : *Par le changement de variables* $t = xu$*, on trouve que*

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^1 \frac{f(xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Montrons que $\mathrm{I}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)\pi/4$*. Soit* $\varepsilon > 0$*. Comme* f *est continue au point* 0*, il existe un réel* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in [0,\alpha]$*,* $|f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$*. Soit alors* $x \in [0,\alpha]$*,*

$$\left|\mathrm{I}(x) - f(0)\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|f(ux) - f(0)|}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \varepsilon$$

En effet, si $u \in [0,1]$*, on a* $0 \leqslant ux \leqslant x \leqslant \alpha$ *et donc* $\dfrac{|f(ux) - f(0)|}{1+u^2} \leqslant \varepsilon$*, ce qui permet de majorer l'intégrale et d'aboutir au résultat.*

13.7.11 Théorème fondamental, étude de fonctions définies par une intégrale

Exercice 13.74 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que les fonctions* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *suivantes sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur un intervalle à déterminer et calculer leur dérivée en fonction de* f *:*

1. $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$
2. $g(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sh} t\, f(\operatorname{ch} t)\,\mathrm{d}t$
3. $g(x) = \int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$
4. $g(x) = \int_1^x \dfrac{f(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Solution :

Comme f *est continue sur* $\mathbb{R}$*, elle admet une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$ *d'après le théorème fondamental de l'analyse.*

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $g(x) = \mathrm{F}(x^2) - \mathrm{F}(2x)$*. La fonction* g *est donc de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *par opérations sur les fonctions* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $g'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)$*.*
2. *La fonction* $t \mapsto \mathrm{F}(\operatorname{ch} t)$ *est une primitive de* $t \mapsto \operatorname{sh} t\, f(\operatorname{ch} t)$ *donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $g(x) = \mathrm{F}\left(\operatorname{ch}\left(x^2\right)\right) - \mathrm{F}(1)$*. La fonction* g *est donc de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *par opérations sur les fonctions* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*. De plus pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $g'(x) = 2x \operatorname{sh}\left(x^2\right) f\left(\operatorname{ch}\left(x^2\right)\right)$*.*
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $t \mapsto \mathrm{F}(t+x)$ *est une primitive de* $t \mapsto f(t+x)$ *donc la fonction* g *donnée, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, par* $g(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *par opérations sur les fonctions de* $\mathscr{C}^1$*. De plus* $g'(x) = 2f(2x) - f(x)$*.*

4. *La fonction* $t \mapsto \mathrm{F}(\ln t)$ *est une primitive de* $t \mapsto \dfrac{f(\ln t)}{t}$ *donc la fonction* g *donnée, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $g(x) = \mathrm{F}(\ln x) - \mathrm{F}(0)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *par opérations sur les fonctions* $\mathscr{C}^1$. *De plus* $g'(x) = \dfrac{f(\ln x)}{x}$.

Exercice 13.75 ♡

Soit une fonction f *continue et positive sur le segment* $[a,b]$. *En utilisant la fonction* $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, *montrer que si* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, *alors* $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = 0$.

Solution : *Comme* f *est continue sur le segment* $[a,b]$, *d'après le théorème fondamental,* f *admet une primitive* F *sur* $[a,b]$ *s'annulant en* a *et donnée par :* $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. *Comme* f *est positive, la fonction* F *est croissante. Mais d'après l'hypothèse* $\mathrm{F}(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 = \mathrm{F}(a)$, *donc* F *est nécessairement constante. On en déduit que* f *est identiquement nulle sur* $[a,b]$.

Exercice 13.76 ♡♡

Soit une fonction f *continue sur* $[0,1]$, *dérivable sur* $]0,1[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $f(1) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. *Montrer qu'il existe un réel* $c \in]0,1[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Solution : *Considérons la fonction*

$$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x \left[f(t) - f(1) \right] \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Comme f *est continue sur* $[0,1]$, F *est bien définie d'après le théorème fondamental. Pour tout* $x \in [0,1]$, $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x f(1)$ *et donc* $\mathrm{F}(0) = 0 = \mathrm{F}(1)$. *Donc d'après le théorème de Rolle, il existe* $\alpha \in]0,1[$ *tel que* $\mathrm{F}'(\alpha) = 0$, *mais puisque* $\forall x \in]0,1[$, $\mathrm{F}'(x) = f(x) - f(1)$, *on en déduit que* $f(\alpha) = f(1)$. *Alors en appliquant le théorème de Rolle à* f *sur le segment* $[\alpha, 1]$, *il existe* $c \in]\alpha, 1[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Exercice 13.77 ♡

Montrer que la fonction définie par

$$\varphi(x) = \int_{\frac{x-1}{x}}^{\frac{x}{x+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + \int_1^{2x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

est constante.

Solution : *D'après le théorème fondamental,* φ *est définie et dérivable sur les intervalles* $\mathrm{I}_1 =]-\infty, -1[$, $\mathrm{I}_2 =]-1, 0[$ *et* $]0, +\infty[$. *On calcule sa dérivée sur chacun de ces intervalles :*

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 1} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + 1} \frac{1}{x^2} + \frac{4x}{4x^4+1} \\
&= \frac{1}{2x^2+2x+1} - \frac{1}{2x^2-2x+1} + \frac{4x}{4x^4+1} \\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0
\end{aligned}$$

On obtient donc la formule

$$\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) + \arctan(2x^2) = \varepsilon \frac{\pi}{2}$$

avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Exercice 13.78 ♡

Déterminer la parité de l'application

$$g : x \mapsto \int_x^{3x} e^{t^2}\, dt$$

Solution : *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On effectue le changement de variable* $\left\{ \begin{array}{ll} u & = -t \\ \mathrm{d}u & = -\mathrm{d}t \end{array} \right.$:

$$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_x^{3x} e^{u^2}\,\mathrm{d}u = -g(x).$$

Donc g *est impaire.*

Exercice 13.79 ♡♡

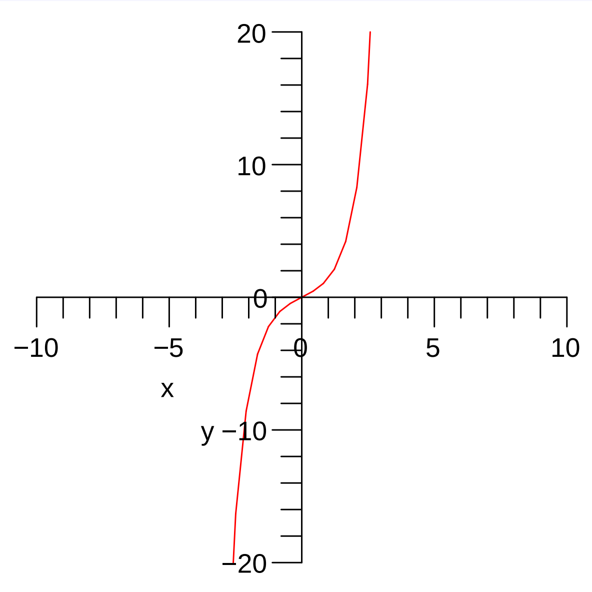
On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} t}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$ *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* f.
2. *Montrer que* f *est impaire.*
3. *Déterminer la dérivée de* F *et en déduire ses variations.*
4. *Déterminer la limite de* f *en* $+\infty$.
5. *Tracer la tangente à l'origine, puis la courbe représentative de* f.

Solution :

1. φ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$. *De plus,* $\frac{\operatorname{sh} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *donc* φ *est aussi continue en* 0. *Par application du théorème fondamental de l'analyse, on en déduit que* φ *admet une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$. f *est donc définie et de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. f *est impaire : soit* $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t \overset{u=-t}{=\!=} \int_0^{x} -\frac{\operatorname{sh} u}{u}\,\mathrm{d}u = -f(x)$ *par imparité de* sh.
3. f *est strictement croissante. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{F}'(2x) - \mathrm{F}'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} 2x - \operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   Comme sh *est croissante sur* $\mathbb{R}$, f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
4. *Soit* $x > 0$ *et soit* $t \in [x, 2x]$. *On a :* $\frac{\operatorname{sh} t}{t} \geqslant \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ *car* φ *est croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Donc :* $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \operatorname{sh} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. *On en déduit que* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. *Par symétrie, on a aussi :* $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.
5. *On montre de plus facilement que* f *admet la bissectrice principale comme tangente en* 0.



Exercice 13.80 ♡♡

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On pose, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x - t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que*

$$f'(x) = \int_0^x \cos(x - t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. *En déduire que* f *est solution de l'équation différentielle* $y'' + y = g(x)$.
3. *Résoudre cette équation différentielle.*

Solution :

1. *Soit* $x, t \in \mathbb{R}$. *On a :* $\sin(x-t)\,g(t) = \sin x \cos t\, g(t) - \cos x \sin t\, g(t)$. *Les fonctions* $t \mapsto \cos t\, g(t)$ *et* $t \mapsto \sin t\, g(t)$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *par opération sur les fonctions continues. Par application du théorème fondamental, elles admettent, respectivement, des primitives* G_1 *et* G_2 *sur* $\mathbb{R}$. *On peut supposer de plus que ces deux primitives s'annulent en* 0. *On a alors d'après les formules d'addition :*

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \sin x G_1(x) - \cos x G_2(x)$$

G_1 *et* G_2 *étant de classe* $\mathscr{C}^1$, *il en est de même de* f *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x G_1(x) + \sin x \cos x g(x) + \sin x G_2(x) - \cos x \sin x g(x) \\ &= \cos x G_1(x) + \sin x G_2(x) \\ &= \int_0^x \cos(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

2. *En effectuant des calculs analogues au précédent, on obtient :*

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x G_1(x) + \cos^2 g(t) + \cos x G_2(x) + \sin^2 x g(x) \\ &= g(x) - \sin x G_1(x) + \cos x G_2(x) \\ &= g(x) - f(x) \end{aligned}$$

f *est donc solution de l'équation différentielle donnée.*

3. *Les solutions de* $y'' + y = 0$ *sont les fonctions :* $x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$ *où* α, β *sont réels. Les solutions de* $y'' + y = g$ *sont donc les fonctions :*

$$x \mapsto f(x) + \alpha \cos x + \beta \sin x$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

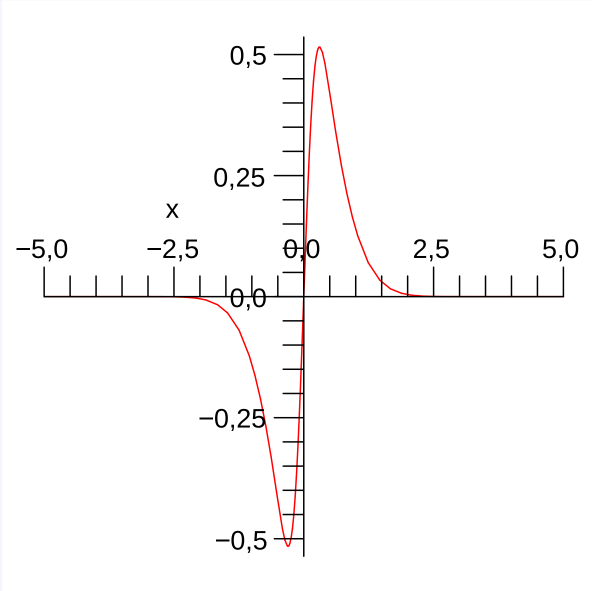
Exercice 13.81 ♡♡

On considère la fonction f *donnée par* $f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* f.
2. *Montrer que* f *est impaire.*
3. *Déterminer la dérivée de* F *et en déduire ses variations.*
4. *Déterminer les limites de* f *aux bornes de son domaine.*

Solution :

1. *La fonction* $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$. *D'après le théorème fondamental de l'analyse, on peut affirmer qu'elle admet une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$. φ *étant de classe* $\mathscr{C}^{+\infty}$, *il en est de même de* F *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = F(4x) - F(x)$..
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \int_{-x}^{-4x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{u=-t}{=\!=\!=} -\int_x^{4x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -f(x)$. f *est donc impaire.*
3. *D'après la première question, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4f(4x) - f(x) = 4e^{-16x^2} - e^{-x^2}$. *On vérifie facilement que* $f'(x) = 0$ *si et seulement si* $x = \pm\sqrt{\frac{2\ln 2}{15}}$, *qu'elle est positive entre ces deux valeurs et négative ailleurs. On en déduit que* f *est décroissante sur* $\left]-\infty, \sqrt{\frac{2\ln 2}{15}}\right]$, *croissante sur* $\left[-\sqrt{\frac{2\ln 2}{15}}, \sqrt{\frac{2\ln 2}{15}}\right]$ *et décroissante à nouveau sur* $\left[\sqrt{\frac{2\ln 2}{15}}, +\infty\right[$.
4. φ *étant décroissante, pour tout* $x > 0$, *et tout* $t \in [x, 4x]$, *on a* $e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$ *et* $f(x) \leqslant \int_x^{4x} e^{-x^2}\,\mathrm{d}t = 3xe^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *donc, d'après le théorème des gendarmes,* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. *Par symétrie, on a aussi :* $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$



Exercice 13.82 ♡♡

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $= f(x) = \int_x^{2x} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* f *est bien définie.*
2. *En effectuant un changement de variable, montrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = f\left(\dfrac{1}{2x}\right)$.
3. *En déduire un équivalent simple de* f *en* $+\infty$.

Solution :

1. *La fonction* $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *par opérations sur les fonctions continues. Par application du théorème fondamental, on en déduit qu'elle admet une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$. f *est donc bien définie sur* $\mathbb{R}$. *On remarque de plus que* φ *étant de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *il en est de même de* F.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}^*$. *On a :*

$$f\left(\frac{1}{2x}\right) = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t \tag{13.1}$$

$$\underset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_{2x}^{x} -\frac{1}{u^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}}\,\mathrm{d}u \tag{13.2}$$

$$= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}\,\mathrm{d}t \tag{13.3}$$

$$= f(x) \tag{13.4}$$

3. *Chercher un équivalent de* $f(x)$ *en* $+\infty$ *revient à chercher un équivalent de* $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *en* 0. *D'après la question précédente,* $f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. *D'après la première question, on peut affirmer que* $x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et admet donc un développement limité à l'ordre* 1 *en* 0. *Au voisinage de* 0, *on a donc :*

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(0) + \frac{x}{2}f'(0) + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Mais, d'après la première question, $f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x)$ *donc* $f'(0) = 1$. *Il est clair d'autre part que* $f(0) = 0$. *On a donc :* $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$ *ce qui amène* $f\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ *et il vient* $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}}$.

Exercice 13.83 ♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *et* $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall x \neq 0, \quad g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que g peut-être prolongée par continuité en 0. On appellera encore g la fonction ainsi définie sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.*
3. *Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.*

Solution :

1. *Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet, d'après le théorème fondamental de l'analyse une primitive F sur $\mathbb{R}$. Comme f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,*

$$g(x) = \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x} + \frac{\mathrm{F}(-x) - \mathrm{F}(0)}{-x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{F}'(0) = f(0)$$

car F est dérivable en 0 de dérivée $f(0)$. Donc on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = f(0)$.

2. *En utilisant ce qui a été fait dans la question précédente, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:*

$$g(x) = \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)}{2x}$$

avec F qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ par opération sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$. En particulier, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et si $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \frac{2x\left(\mathrm{F}'(x) + \mathrm{F}'(-x)\right) - 2\left(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)\right)}{4x^2} = \frac{x\left(f(x) + f(-x)\right) - \left(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)\right)}{2x^2} = \frac{f(x) + f(-x) - g(x)}{2x}.$$

3. *Calculons le taux d'accroissement Δ de g en 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$:*

$$\Delta(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)}{2x} - f(0)\right).$$

Comme F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-x, x]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in \left]-x, x\right[$ tel que $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x) = 2x f(c_x)$. On obtient alors :

$$\Delta(x) = \frac{f(c_x) - f(0)}{x}.$$

On utilise alors le fait que $c_x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et que f est dérivable en 0. On trouve $\lim_{x\to 0}\Delta(x) = f'(0)$ donc $\boxed{g'(0) = f'(0)}$..

Exercice 13.84 ♡♡♡

On se propose d'étudier la fonction définie par $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\,dt$.

1. *Montrer que le domaine de définition de g est $\mathbb{R}^*$.*
2. *Etudier la parité de la fonction g.*
3. *Calculer la dérivée de la fonction g et dresser son tableau de variations.*
4. *Calculer la limite de la fonction g en 0 et en $+\infty$.*

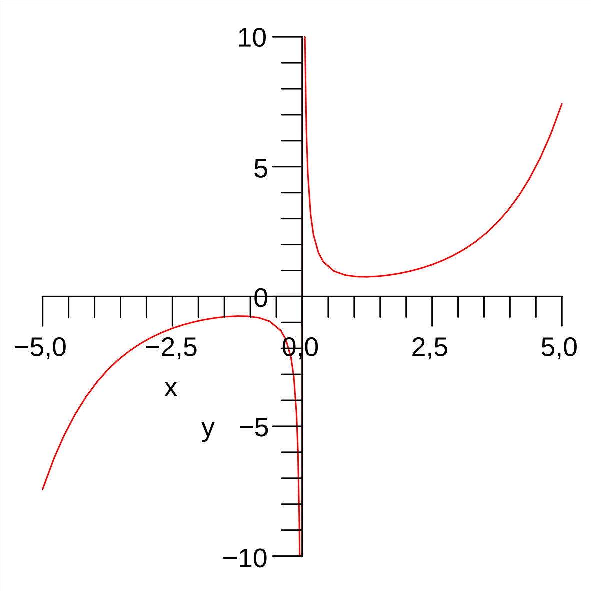
Solution :

1. *La fonction donnée par $f(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}$ est définie et continue sur les intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. D'après le théorème fondamental, f admet une primitive sur chacun de ces deux intervalles. On note F une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on peut alors écrire $g(x) = \mathrm{F}(2x) - \mathrm{F}(x)$. La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.*
2. *Par le changement de variables $u = -t$, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^{2x} f(-t)\,\mathrm{d}t = -g(x)$ car la fonction f est paire. La fonction g est donc* impaire*. On ne fera donc son étude que sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.*
3. *Remarquons tout d'abord que comme F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, il en est de même de g par opérations sur les fonctions continues. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a :*

$$g'(x) = 2\mathrm{F}'(2x) - \mathrm{F}'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\frac{\operatorname{ch}(2x)}{(2x)^2} - \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} = \frac{2\operatorname{ch}^2 x - 2\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$$

Pour trouver les valeurs $x > 0$ telles que $g'(x) = 0$, on résout une équation du second degré en $\operatorname{ch} x$ et l'on trouve que $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. On résout ensuite une équation du second degré en e^x et l'on trouve $e^x = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$. Finalement $x_0 = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$.La fonction g' est négative sur l'intervalle $]0, x_0[$ et positive sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$.

4. Soit $x>0$. Puisque $\forall t\in[x,2x]$, $\dfrac{\operatorname{ch}x}{4x^2}\leqslant f(t)\leqslant\dfrac{\operatorname{ch}(2x)}{x^2}$, on en déduit que $\dfrac{\operatorname{ch}x}{4x}\leqslant g(x)\leqslant\dfrac{\operatorname{ch}x}{x}$ et d'après le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim_{x\to 0}g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.



Exercice 13.85 ♡♡♡

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose que

$$\forall x\geqslant 0,\quad f(x)\leqslant \mathrm{C}+\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

où C est une constante strictement positive.

1. *Montrer que*
$$\forall x\geqslant 0,\quad f(x)\leqslant \mathrm{C}\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
C'est le lemme de Gronwall, *très utile pour étudier des équations différentielles.*
2. *Que peut-on dire si $f(x)\leqslant\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$?*

Indication 13.14 : Introduire la fonction $\varphi(x)=\mathrm{C}+\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et calculer sa dérivée.

Solution :

1. Introduisons la fonction φ donnée pour tout $x\in[0,+\infty[$ par $\varphi(x)=\mathrm{C}+\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème fondamental, la fonction φ est dérivable et en utilisant l'hypothèse, pour tout $x\geqslant 0$, il vient que
$$\varphi'(x)=f(x)g(x)\leqslant g(x)\varphi(x)$$
Introduisons alors la fonction $\psi(x)=e^{-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\varphi(x)$. On a
$$\psi'(x)=e^{-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\left(\varphi'(x)-g(x)\varphi(x)\right)\leqslant 0$$
Donc ψ est décroissante sur $[0,+\infty[$ et donc puisque $\psi(0)=\mathrm{C}$,
$$\forall x\geqslant 0,\psi(x)\leqslant \mathrm{C}\implies f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant \mathrm{C}e^{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$$
2. Lorsque $\mathrm{C}=0$, on trouve que f est nulle sur $[0,+\infty[$.

Exercice 13.86 ♡♡

Étudier la fonction définie par

$$g(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt$$

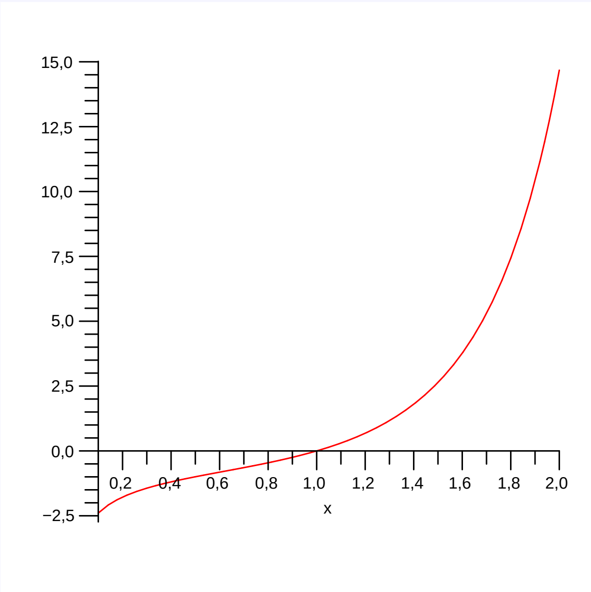
Solution : *La fonction $f : x \mapsto e^t/t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. f diverge en 0. Si $x \in \mathbb{R}_-$, alors $0 \in [x, x^2]$ et donc on ne peut intégrer f sur ce segment. On en déduit que g est définie sur $]0, +\infty[$. De plus, d'après le théorème fondamental, f admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = F(x^2) - F(x)$. On en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$g'(x) = 2x\frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x}.$$

Pour tout $x \in]0,1[$ et tout $t \in [x, x^2]$, $e^t/t \leqslant e^x/x^2$ donc $g(x) \leqslant \frac{e^x}{x^2}(x^2 - x) = e^x\left(1 - \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes, $g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$.
De même, pour tout $x \geqslant 1$ et tout $t \in [x, x^2]$, $e^t/t \geqslant 1/t$ et $g(x) \geqslant \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Donc $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
Afin d'étudier les variations de g, résolvons l'équation : $2e^{x^2} - e^x = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$2e^{x^2} - e^x = 0 \iff e^{x^2 + \ln 2} = e^x \iff x^2 - x + \ln 2 = 0$$

mais le discriminant de ce trinôme est négatif donc l'équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que g' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et que g est strictement croissante. Remarquons que l'unique zéro de g est en $x = 1$.



Exercice 13.87 ♡♡

Soient deux fonctions continues f et g sur $[0,1]$. On suppose que $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que f et g sont $\mathscr{C}^\infty$;*
2. *Montrer que $f = g = 0$.*

Solution :

1. *Comme f et g sont continues sur $[0,1]$, d'après le théorème fondamentale, elles admettent des primitives F et G sur $[0,1]$. On peut de plus supposer que ces primitives s'annulent en 0. Remarquons que F et G sont éléments de $\mathscr{C}^1([0,1])$. Il vient alors pour tout $x \in [0,1]$:*

$$f(x) = G(x) \quad \text{et} \quad g(x) = F(x).$$

Mais alors f et g sont aussi éléments de $\mathscr{C}^1([0,1])$. Comme $f' = g$ et que $g' = f$, on montre par une récurrence facile que $f, g \in \mathscr{C}^\infty([0,1])$.

2. *Comme $f' = g$ et que $g' = f$, f est solution de l'équation différentielle : $y'' - y = 0$. Donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{-x}$. Mais comme $f(0) = 0$ et que $f'(0) = g(0) = 0$, il vient que $\alpha = \beta = 0$. Donc $f = 0$. Comme $f' = g$, il est clair que $g = 0$ aussi.*

Exercice 13.88 ♡♡

Soit la fonction définie par

$$g(x)=\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
2. *Étudier la parité de g.*
3. *Montrer que pour tout $x\in[0,\pi/2]$, $1-x^2\leqslant\cos x\leqslant 1$.*
4. *Prolonger g par continuité en 0.*
5. *Montrer que g ainsi prolongée est dérivable en 0 ?*
6. *Trouver $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.*

Solution :

1. *La fonction* $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \cos t/t\end{array}\right.$ *est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions continues. D'après le théorème fondamental, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $g(x)=\mathrm{F}(2x)-\mathrm{F}(x)$. On en déduit que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
2. *Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $g(-x)=\int_{-x}^{-2x}\cos t/t\,\mathrm{d}t=\int_x^{2x}\cos(-u)/u\,\mathrm{d}u=g(x)$ donc g est paire. On étudiera donc g sur $\mathbb{R}_+^*$.*
3. *Soit $x\in\,]0,\pi/2]$. La fonction $t\mapsto\cos t$ est dérivable sur $[0,x]$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis : $x\inf_{t\in]0,x[}(-\sin t)\leqslant\cos x-1\leqslant x\sup_{t\in]0,x[}(-\sin t)$ soit : $-x^2\leqslant\cos x-1\leqslant 0$*
4. *Soit $x\in[0,\pi/2]$. D'après la question précédente, on a : $\frac{1-t^2}{t}\leqslant\frac{\cos t}{t}\leqslant\frac{1}{t}$ donc $\ln 2-2x^2+x^2/2\leqslant g(x)\leqslant\ln 2$ et d'après le théorème des gendarmes $g(x)\xrightarrow[x\to0^+]{}\ln 2$. On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0)=\ln 2$.*
5. *Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$*
$$g'(x)=2\mathrm{F}'(2x)-\mathrm{F}'(x)=\frac{\cos 2x}{x}-\frac{\cos x}{x}=\frac{\cos 2x-1}{x}-\frac{\cos x-1}{x}$$
mais $\cos 2x-1\underset{x\to0^+}{\sim}-2x^2$ donc $\frac{\cos 2x-1}{x}\xrightarrow[x\to0^+]{}0$ et $1-\cos x\underset{x\to0^+}{\sim}x^2/2$ donc $\frac{\cos x-1}{x}\xrightarrow[x\to0^+]{}0$. On en déduit que $g'(x)\xrightarrow[x\to0^+]{}0$ et donc que g est dérivable en 0 de nombre dérivé $g'(0)=0$.
6. *Voir l'exercice 13.68.*

13.7.12 Suites dont le terme général est défini par une intégrale

Exercice 13.89 ♡

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. *Calculer I_0, I_1 et I_2.*
2. *Étudier la monotonie de (I_n).*
3. *En déduire que (I_n) est convergente.*
4. *Prouver que :*
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\frac{1}{n+1}.$$
5. *En déduire la limite de (I_n).*
6. *En déduire un équivalent de la suite*
$$\mathrm{J}_n=\int_0^1 x^n\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$$

Solution :

1. *On trouve : $\mathrm{I}_0=\dfrac{\pi}{4}$, $\mathrm{I}_1=\ln\sqrt{2}$ et $\mathrm{I}_2=1-\dfrac{\pi}{4}$.*
2. *Pour tout $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a : $x^{n+1}\leqslant x^n$ ce qui amène : $\dfrac{x^{n+1}}{1+x^2}\leqslant\dfrac{x^n}{1+x^2}$ et donc $\mathrm{I}_{n+1}\leqslant\mathrm{I}_n$. On en déduit que (I_n) est décroissante.*
3. *Comme la fonction $x\mapsto\dfrac{x^n}{1+x^2}$ est positive sur $[0,1]$, on a : $\mathrm{I}_n\geqslant0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite (I_n) est donc minorée par 0. On a montré qu'elle est décroissante. On applique le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle est convergente et que sa limite est positive.*

4. *Pour tout* $x \in [0,1]$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $\dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$. *Donc :* $\mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$. *On a de plus montré précédemment que* $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.
5. *D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que* $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
6. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Une intégration par parties livre :*

$$\mathrm{J}_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}\mathrm{I}_{n+2} = \frac{\ln 2}{n+1}\left(1 - \frac{2}{\ln 2}\mathrm{I}_{n+2}\right).$$

Comme $\mathrm{I}_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *il vient que* $\boxed{\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{n+1}}$.

Exercice 13.90 ♡

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. *Étudier les variations de* $f : x \mapsto x(1-x)$ *sur* $[0,1]$.
2. *En déduire celles de* (I_n).
3. *En déduire que* (I_n) *est convergente.*
4. *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

5. *En déduire la limite de* (I_n).

Solution :

1. *L'étude des variations de* f *permet de dresser le tableau suivant :*

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

2. *On déduit de l'étude précédente que :* $\forall x \in [0,1], \quad x(1-x) \in [0,1]$. *Il vient alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $x^{n+1}(1-x)^{n+1} \leqslant x^n(1-x)^n$ *et* $\mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$. *On en déduit que* (I_n) *est décroissante.*
3. *La fonction* f *étant positive sur* $[0,1]$, *il en est de même de* (I_n). *Appliquant le théorème de la limite monotone, on en déduit que* (I_n) *est convergente et que sa limite est positive.*
4. f *est majorée par* $\dfrac{1}{4}$ *sur* $[0,1]$ *:* $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leqslant \frac{1}{4}$. *Il en découle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in [0,1]$, $x^n(1-x)^n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ *et* $\mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{4^n}$. *On a par ailleurs montré dans la question précédente que* $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.
5. *La suite* $\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$ *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{4}$ *donc elle converge vers* 0. *D'après le théorème des gendarmes,* (I_n) *converge vers* 0.

Exercice 13.91 ♡♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on considère la suite de terme général*

$$\mathrm{I}_n = \int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

1. *Calculer* I_0 *et* I_1.
2. *Trouver une relation de récurrence entre* I_{n+1} *et* I_n.
3. *En déduire que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \mathrm{I}_n < \frac{e}{n+1}$$

puis la limite de (I_n).

4. *En déduire un équivalent de* I_n.

Solution :

1. $\mathrm{I}_0 = e-1$ *et* $\mathrm{I}_1 = 1$.
2. *On effectue une intégration par parties :*

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+1} &= \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)(\ln x)^n \,\mathrm{d}x \\ &= e-(n+1)\,\mathrm{I}_n\end{aligned}$$

3. *Soit* $n\in\mathbb{N}$. *On a :* $\forall x\in[1,e], 0\leqslant (\ln x)^n$ *Donc* $0\leqslant \mathrm{I}_n$. *On en déduit que :* $\mathrm{I}_n = \dfrac{e-\mathrm{I}_{n+1}}{(n+1)} \leqslant \dfrac{e}{(n+1)}$. *En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que* $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. *D'après la relation de récurrence, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on a :*

$$\mathrm{I}_n = \frac{e}{n+1} - \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{n+1} = \frac{e}{n+1}\left(1-\mathrm{I}_{n+1}\right).$$

Mais comme $\mathrm{I}_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *il vient que :* $\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n+1}}$.

Exercice 13.92 ♡♡

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ *où* $n\in\mathbb{N}^*$..

1. *Étudier la monotonie de* (I_n).
2. *En déduire que* (I_n) *est convergente.*
3. *Trouver une relation de récurrence entre* I_{n+1} *et* I_n.
4. *En déduire la limite de* (I_n) *ainsi qu' un équivalent simple de* I_n.

Solution :

1. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $x\in[1,e]$, $\ln x\in[0,1]$ *et* $\ln^{n+1}x\leqslant \ln^n x$. *On passe à l'intégrale et cette inégalité amène* $\mathrm{I}_{n+1}\leqslant \mathrm{I}_n$. (I_n) *est donc décroissante.*
2. *Comme, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto x^2\ln^n x$ *est positive sur* $[1,e]$, *la suite* (I_n) *est positive. Elle est donc minorée par* 0 *et on a montré qu'elle est décroissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente et sa limite est positive ou nulle.*
3. *On effectue une intégration par partie, on montre que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *:*

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+1} &= \int_1^e x^2\ln^{n+1}x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\ln^{n+1}x\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\,\frac{x^3}{3}\,\frac{\ln^n x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\left(e^3-(n+1)\,\mathrm{I}_n\right)\end{aligned}$$

4. *On sait que* (I_n) *admet une limite* $\ell\geqslant 0$. *Supposons que* $\ell\neq 0$. *Alors, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient une contradiction. Donc* $\ell=0$. *Toujours d'après la relation de récurrence, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on a :* $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n+1}\left(e^3-3\mathrm{I}_{n+1}\right)$. *Comme* $\mathrm{I}_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *il vient :* $\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^3}{n+1}}$.

Exercice 13.93 ♡♡

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, *on considère la suite de terme général :*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

1. *Montrer que*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x$$

2. *En déduire que*

$$\mathrm{I}_n = 1-\frac{\ln 2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution :

1. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *En effectuant une intégration par parties, on obtient :*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x.x^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x}{n}\ln\left(1+x^n\right)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. *On en déduit que :*

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\\ &= 1-\frac{\ln 2}{n}+\frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Donc : $n\left(\mathrm{I}_n - 1 + \dfrac{\ln 2}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$. *Mais, d 'après l'inégalité :* $\forall x\in\,]-1,+\infty[,\quad \ln(1+x)\leqslant x$, *on obtient :*

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui prouve que : $\boxed{\mathrm{I}_n = 1-\dfrac{\ln 2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

Exercice 13.94 ♡

Soit $n\in\mathbb{N}$. *On pose*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

1. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$ *;*
2. *Trouver une relation de récurrence entre* I_{n+1} *et* I_n *;*
3. *En déduire la limite de la suite de terme général*

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Solution :

1. *Pour tout* $t\in[0,1]$, *on a* $\dfrac{t^n}{n!}e^{1-t}\leqslant \dfrac{e}{n!}$. *Donc :*

$$0\leqslant |\mathrm{I}_n| \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

Par le théorème des gendarmes, $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. *On effectue une intégration par parties :*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-t}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)!}+\mathrm{I}_{n+1}$$

donc $\boxed{\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n - \dfrac{1}{(n+1)!}}$.

3. *Par télescopage, on en déduit que*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_n + 1$$

et donc que $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I}_0+1$. *Comme* $\mathrm{I}_0 = e-1$, $\boxed{\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e}$.

Exercice 13.95 ♡♡

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

Une telle intégrale est appelée intégrale de Wallis.

1. *Montrer que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$
2. *Calculer* I_0 *et* I_1.
3. *Montrer que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$
4. *En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de* I_{2p} *et* I_{2p+1} *à l'aide de factorielles.*
5. *Montrer que* (I_n) *est décroissante et positive. En déduire que* (I_n) *est convergente.*
6. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*
$$1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}}.$$
7. *Montrer que* $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
8. *Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\quad (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$.
9. *En déduire que :* $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1.
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt \\ &\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \end{aligned}$$
2. *On vérifie facilement que* $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $I_1 = 1$.
3. *En effectuant une intégration par parties, on montre que :*
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t . \sin^{n+1} t \, dt \\ &= \left[-\cos t . \sin^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t . \sin^n t \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right) . \sin^n t \, dt \end{aligned}$$
donc : $I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$ *d'où :* $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
4. *D'après les deux questions précédentes et grâce à un raisonnement par récurrence, on montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:*
$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
5. *Pour tout* $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n t \geqslant \sin^{n+1} t$ *donc* $I_n \geqslant I_{n+1}$ *et* (I_n) *est décroissante. Par ailleurs :* $\sin^n t \geqslant 0$ *donc* $I_n \geqslant 0$. *La suite* (I_n) *est donc décroissante et minorée. Par application du théorème de la limite monotone,* (I_n) *est convergente.*
6. (I_n) *étant décroissante, il vient que :* $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ *ce qui s'écrit aussi :* $1 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$.

7. *D'après les questions 3 et 5, on obtient :*

$$1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

mais $\frac{n+2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *donc, par application du théorème des gendarmes,* $\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et donc :* $I_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$ *ou encore :* $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

8. *En utilisant les expressions trouvées dans la question 4, on montre que :* $(n+1)\,I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
9. *Par application des deux questions précédentes et par opérations sur les équivalents :*

$$I_n = \sqrt{I_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{I_n.I_{n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\,(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

.

Exercice 13.96 ♡♡♡

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[0,1]$ vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$. Étudier la suite de terme général

$$I_n = n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,dx$$

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Par deux intégrations par parties, on trouve que*

$$I_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,dx$$

Mais puisque $\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \sim 1$, *en posant* $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$ *(qui existe puisque f'' est continue sur le segment* $[0,1]$*), on obtient la majoration suivante :*

$$|\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,dx| \leqslant \int_0^1 x^{n+2}|f''(x)|\,dx \leqslant M_2 \int_0^1 x^{n+2}\,dx \leqslant \frac{M_2}{n+3}$$

Alors d'après le théorème de majoration, $\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et donc*

$$\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Exercice 13.97 ♡♡♡

Soit deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue et positive. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$I_n = \left[\int_a^b f^n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}}$$

Indication 13.14 : On étudiera d'abord le cas où f est une fonction constante.

Solution : *Si f est une fonction constante de valeurs $c \in \mathbb{R}$ alors* $I_n = (c^n\,(b-a))^{\frac{1}{n}} = c\,(b-a)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.
Montrons que si f n'est pas constante sur $[a,b]$ et si $M = \sup_{[a,b]} f$ alors $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$. *Remarquons que M existe bien car f est continue sur le segment $[a,b]$. Ce maximum est de plus atteint en un point $x_0 \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $\varepsilon < 1$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \left]x_0-\eta, x_0+\eta\right[\cap [a,b]$, $M-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M$. Comme f est positive sur $[a,b]$, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} 0 \leqslant M - u_n = M - \left(\int_a^b \left(f(x)\right)^n dx\right)^{1/n} &\leqslant M - \left(\int_{]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap[a,b]} \left(f(x)\right)^n dx\right)^{1/n} \\ &\leqslant M - (M-\varepsilon)\left(2\eta\right)^{1/n} = M\left(1-\left(2\eta\right)^{1/n}\right) + \varepsilon\left(2\eta\right)^{1/n} \end{aligned}$$

Comme $\left(2\eta\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, *on peut supposer qu'à partir d'un certain rang N, on a pour tout $n \geqslant N$:* $1-\left(2\eta\right)^{1/n} \leqslant \varepsilon/(2M)$ *et* $\left(2\eta\right)^{1/n} \leqslant \varepsilon/2$. *On obtient alors :* $0 \leqslant M - u_n \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon^2/2 \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ *car* $0 < \varepsilon < 1$. *En résumé, on a montré que pour* $n \geqslant N$, $|M - u_n| \leqslant \varepsilon$ *donc* $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M}$.

Exercice 13.98 ♡♡

Trouver la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (\arcsin x)^n \, dx$$

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n!}(\pi/2)^n$. Mais pour tout $a > 1$, par croissance comparées, $a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$ donc $\frac{1}{n!}(\pi/2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent,* $\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

Exercice 13.99 ♡♡

1. *Soit un entier $k \geqslant 1$. Encadrer l'intégrale $\mathrm{I}_k = \int_k^{k+1} \ln t \, \mathrm{d}t$.*
2. *En déduire un équivalent de la suite de terme général $u_n = \ln n!$.*

Solution :

1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a : $\ln k \leqslant \ln t \leqslant \ln(k+1)$ et il vient que pour tout $k \geqslant 1$, $\ln k \leqslant \mathrm{I}_k \leqslant \ln(k+1)$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on trouve que*

$$\int_1^n \ln t \, \mathrm{d}t \leqslant \ln n! \leqslant \int_2^{n+1} \ln t \, \mathrm{d}t$$

et puisque $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $[1, +\infty[$, on obtient l'encadrement suivant :

$$n\ln n - n + 1 \leqslant \ln n! \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$$

et l'on démontre ensuite facilement en divisant cette inégalité par $n\ln n$ que $(\ln n!)/(n\ln n)$ est encadrée par deux suites qui convergent vers 1. Par conséquent, $\boxed{\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n}$.

Exercice 13.100 ♡♡

On considère la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

1. *Trouver $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$*
2. *Trouver une relation de récurrence simple entre I_n et I_{n-1} pour $n \geqslant 1$.*
   On considère ensuite la suite dite de Mercator et de terme général

$$\mathrm{S}_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

3. *Exprimer pour $n \geqslant 1$, S_n en utilisant I_n.*
4. *En déduire que la suite (S_n) converge et préciser sa limite.*

Solution :

1. *Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $t \in [0,1]$, on a la majoration $\frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$, on peut encadrer l'intégrale I_n ainsi :*

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

2. *Écrivons pour $n \geqslant 1$,*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{(t+1-1)\,t^{n-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{n-1} \, \mathrm{d}t - \mathrm{I}_{n-1} = \frac{1}{n} - \mathrm{I}_{n-1}$$

Alors $\boxed{\mathrm{I}_n = \frac{1}{n} - \mathrm{I}_{n-1}}$.

3. *En exprimant* I_n *en fonction de* I_0*, on trouve que*

$$I_n = \frac{1}{n} - I_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + I_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{1} + (-1)^n I_0$$

En multipliant par $(-1)^{n-1}$*, on trouve alors que* $(-1)^{n-1} I_n = S_n - I_0$*. Finalement* $\boxed{S_n = I_0 + (-1)^{n-1} I_n}$.

4. *Puisque* $\left|(-1)^{n-1} I_n\right| = I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, il vient que* $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_0$*. Mais* $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$ *et donc la suite* (S_n) *converge vers* $\ln 2$*.*

Exercice 13.101 ♡♡♡

Étudier la suite (u_n) *de terme général :*

$$u_n = \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

Indication 13.14 : On commencera par déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$*, puis* $u_{n+2} - u_n$ *et l'on s'intéressera ensuite aux deux suites extraites* u_{2n} *et* u_{2n+1}*.*

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On calcule grâce au changement de variables* $u = t - n\pi$*,*

$$u_{n+1} - u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin u}{u + n\pi}\, \mathrm{d}u$$

Alors

$$u_{n+2} - u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\pi \sin u}{(u+n\pi)(u+(n+1)\pi)}\, \mathrm{d}u$$

Puisque pour tout $u \in [0,\pi]$, $\frac{\pi \sin u}{(u+n\pi)(u+(n+1)\pi)} \geqslant 0$*, on en déduit que* $u_{2n+2} - u_{2n} \geqslant 0$ *et* $u_{2n+3} - u_{2n+1} \leqslant 0$*. Donc* $\left(u_{2p}\right)$ *est croissante et* $\left(u_{2p+1}\right)$ *est décroissante. Comme de plus,*

$$|u_{2n+1} - u_{2n}| \leqslant \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{u + 2n\pi}\, \mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

en en déduit que les deux suites extraites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont adjacentes, et donc qu'elles convergent vers la même limite* l*. D'après un théorème du cours, la suite* (u_n) *converge alors également vers* l*.*

Exercice 13.102 ♡♡♡

On note pour un entier n *non-nul :*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^n \left(\int_0^n \frac{\mathrm{d}y}{x+y+1}\right) \mathrm{d}x$$

1. *Calculer l'intégrale* I_n *pour* $n > 0$*.*
2. *Déterminer un équivalent de la suite* (I_n)*.*
   Indication 13.14 : On pourra utiliser un développement limité à l'ordre 1 *de* $\ln$ *en* 0*.*
3. *Encadrer* S_n *à l'aide de* I_n *pour* $n > 0$*.*
4. *En déduire un équivalent de* (S_n)*.*

Solution :

1. *Une première intégration suivant la variable* x *conduit à* $I_n = \int_0^n \ln(x+n+1)\, \mathrm{d}x - \int_0^n \ln(x+1)\, \mathrm{d}x$*. En intégrant par parties, on trouve finalement* $\boxed{I_n = (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1)}$.
2. *Pour tout* $x \in]-1,+\infty[$*, on a :* $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ *donc si* (u_n) *est une suite réelle convergeant vers* 0 *alors*

$\ln(1+u_n) = u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$. *Écrivons*

$$\begin{aligned} I_n &= (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) \\ &= (2n+1)\left(\ln(2n) + \ln(1+1/2n)\right) - 2(n+1)\left(\ln n + \ln(1+1/n)\right) \\ &= (2n+1)\left(\ln(2n) + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2n}\right)\right) - 2(n+1)\left(\ln n + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (2n+1)\ln 2 - \ln n - 1 - \frac{3}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &= 2n\ln 2 \underbrace{\left(1 + \frac{\ln 2 - \ln n - 1 - \frac{3}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}{2n\ln 2}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{2n\ln 2} \end{aligned}$$

3. *Comme* $x \mapsto 1/x$ *est décroissante, et que*

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_i^{i+1}\int_j^{j+1} \frac{1}{x+y+1}\,dx\,dy$$

on en tire l'encadrement

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+3} \leqslant I_n \leqslant S_n$$

d'où $I_n \leqslant S_n$ *et en sortant les termes de la somme à gauche :*

$$I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}$$

Mais toujours en comparant cette somme avec une intégrale, $\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} \leqslant \int_1^{n+1}\frac{dt}{t}$. *Finalement,*

$$I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + \ln(n+1)$$

4. *On tire facilement des deux questions précédentes que* $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln 2}$.

Exercice 13.103 ♡♡♡

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt$$

1. *Justifier l'existence de* I_n *pour* $n \geqslant 1$.
2. *Déterminer la limite de la suite* (I_n) [1].

Solution :

1. *Soit* $t \in [0,1[$. *Puisque* $1 - t^n = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$,

$$\frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = t^n(1 + t + \cdots + t^{n-1}) = \sum_{k=n}^{2n-1} t^k$$

Donc à n *fixé, la fonction à intégrer est continue sur le segment* $[0,1]$, *donc l'intégrale* I_n *existe.*

2. *D'après ce calcul, on peut exprimer* I_n *à l'aide d'une somme :*

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$$

En encadrant pour $i \geqslant 2$, $1/i$ *par deux intégrales :*

$$\int_i^{i+1}\frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i}\frac{dt}{t}$$

1. Une autre solution de cet exercice utilisant les sommes de Riemann est proposée dans l'exercice 13.120 page 594

on obtient un encadrement de I_n *:*

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_{n}^{2n} \frac{dt}{t}$$

et donc

$$\ln \frac{2n+1}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \ln 2.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\mathrm{I}_n \to \ln 2}$.

13.7.13 Algèbre linéaire et intégration

Exercice 13.104 ♡♡

Soit E *l'espace vectoriel des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Si* $f \in \mathrm{E}$, *on note* $\mathrm{T}(f) = g$ *l'application définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x t f(t)\, dt$$

1. *Montrer que* T *est un endomorphisme de* E.
2. *Déterminer* $\operatorname{Ker}\mathrm{T}$ *et* $\operatorname{Im}\mathrm{T}$.

Solution :

1. *La linéarité de* T *provient de la linéarité de l'intégrale. Si* $f \in \mathrm{E}$ *alors par opérations sur les fonctions continues, la fonction* $t \mapsto t f(t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et admet, d'après le théorème fondamental, une unique primitive* F *sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* 0. *Donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{F}(x)$. *Comme* F *est continue sur* $\mathbb{R}$ *il en est de même de* g *et on a bien* $g \in \mathrm{E}$. *L'application* T *est bien à valeurs dans* E.
2. *Soit* $f \in \operatorname{Ker}\mathrm{T}$ *et* F *la primitive sur* $\mathbb{R}$ *de* $t \mapsto t f(t)$ *qui s'annule en* 0. *Alors* $\mathrm{F} = 0$ *et* $\mathrm{F}' = 0$. *Donc pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $t f(t) = 0$. *On en déduit que* f *est identiquement nulle sur* $\mathbb{R}^*$. *Comme* f *est continue en* 0, *on a aussi* $f(0) = 0$. *Donc* $f = 0$ *et* $\operatorname{Ker}\mathrm{T} = \{0\}$. *L'endomorphisme* T *est injectif. Montrons que* $\operatorname{Im}\mathrm{T}$ *est l'ensemble* $\mathscr{F}$ *des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *de la forme* $x \mapsto x\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x)$ *où* $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *et où* $\mathrm{G} : x \mapsto \int_0^x \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t$. *Soit* $f \in \mathrm{E}$. *Notons* F *la primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* 0 *et* G *celle de* F *sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* 0. *Une intégration par parties livre :*

$$\mathrm{T}(f) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\mathrm{F}(t)\Big]_0^x - \int_0^x \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x)$$

donc $\mathrm{T}(f) \in \mathscr{F}$. *Réciproquement, si* $\mathrm{H} = x \mapsto x\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) \in \mathscr{F}$ *alors* H *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{H}'(t) = \mathrm{F}(t) + t\mathrm{F}'(t) - \mathrm{G}'(t) = t\mathrm{F}'(t)$ *car* $\mathrm{G}' = \mathrm{F}$. *Donc* $\mathrm{H} = \mathrm{T}\big(\mathrm{F}'(t)\big)$ *et* $\mathrm{H} \in \operatorname{Im}\mathrm{T}$.

Exercice 13.105 ♡♡

Soient le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et les applications :*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. *Prouver que* φ *et* ψ *sont des endomorphismes de* E.
2. *Calculer* $\varphi \circ \psi$ *et* $\psi \circ \varphi$.
3. *Déterminer les noyaux et images de* φ *et* ψ.

Solution :

1. *La linéarité de* φ *provient de la linéarité de la dérivation et celle de* ψ *de la linéarité de l'intégration.*
2. *Soit* $f \in \mathrm{E}$. *Comme* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *et, d'après le théorème fondamental, elle admet une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(\psi(f)\big)(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)$. *Par conséquent :* $\varphi \circ \psi(f) = \mathrm{F}' = f$ *et donc* $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. *De même,* f' *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et une primitive de* f' *sur* $\mathbb{R}$ *est bien entendu donnée par* f. *Donc, pour tout* $\psi \circ \varphi(f) = \psi(f') = f - f(0)$.
3. *Comme* $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ *est bijective, nécessairement* φ *est surjective et* ψ *est injective. Donc* $\operatorname{Im}\varphi = \mathrm{E}$ *et* $\operatorname{Ker}\psi = \{0\}$. *Par ailleurs,* $\operatorname{Ker}\varphi$ *est donné par les fonctions constantes sur* $\mathbb{R}$ *et* $\operatorname{Im}\psi = \big\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\big\}$. *En effet, si* f *est élément de ce dernier ensemble alors* $\psi(f')$ *est la primitive de* f' *qui s'annule en* 0. *Il en est de même pour* f *et donc* $f = \psi(f')$. *Réciproquement, toute fonction de la forme* $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *s'annule en* 0 *et est* $\mathscr{C}^\infty$ *si* f *l'est.*

13.7.14 Formules de Taylor

Exercice 13.106 ♡

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

2. *En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.*

Solution :

1. *Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On applique la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[0,x]$ à la fonction* exp *qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur ce segment :*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} \, dt.$$

Mais

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!} \, dt \right| \leqslant \int_0^{|x|} \frac{|x-t|^n e^t}{n!} \, dt \leqslant \int_0^{|x|} |x|^n e^{|x|} \, dt = \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

et on en déduit l'inégalité annoncée.

2. *Comme* $\frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par le théorème des gendarmes* $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x}$.

Exercice 13.107 ♡

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$$

Solution : *La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. On montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $\ln^{(n)}(1+x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. On applique alors la formule de Taylor avec reste intégrale :*

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \frac{(-1)^n (n)!}{(1+t)^{n+1}} \, dt \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^n (1+t)} \, dt. \end{aligned}$$

Mais

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n (1-t)^n}{(1+t)^n (1+t)} \, dt \right| = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^n dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \, dt = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et on conclut comme dans l'exercice précédent.

Exercice 13.108 ♡

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2}{x^2}$.

Solution : *On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$:*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + f''(a) \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)$$

et on remplace :

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \underset{h\to 0}{o}(1) \xrightarrow[h\to 0]{} f''(a)$$

On applique ce résultat à la fonction cosinus qui est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en $a = 0$. On obtient : $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2}{x^2} = -1$

Exercice 13.109 ♡

Trouver

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

Solution : *Utilisons la formule de Taylor-Young pour l'exponentielle en* 0 *à l'ordre* 3 *:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Alors le numérateur s'écrit $\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$ *et par conséquent, la fonction tend vers* $\boxed{\frac{1}{6}}$.

Exercice 13.110 ♡

Soit f *une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $[0,1]$. *On pose pour* $x \in]0,1[$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))}{\sin(\pi x)}$$

Montrer que l'on peut prolonger g *par continuité en* 0 *et* 1.

Solution : *On écrit la formule de Taylor-Young pour* f *en* 0 *à l'ordre* 1 *pour tout* $x \in [0,1]$ *:* $f(x) = f(0) + xf'(0) + \underset{x\to 0^+}{o}(x)$ *et on remplace dans* $g(x)$ *:*

$$g(x) = \frac{xf'(0) + \underset{x\to 0^+}{o}(x) - x\big(f(1) - f(0)\big)}{\sin(\pi x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{f'(0) + \underset{x\to 0^+}{o}(1) - \big(f(1) - f(0)\big)}{\pi} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{\pi}\big(f'(0) - f(1) + f(0)\big)$$

et on prolonge f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = \frac{1}{\pi}\big(f'(0) - f(1) + f(0)\big)$. *La formule de Taylor-Young appliquée aux fonctions* f *et* $x \mapsto \sin(\pi x)$ *en* 1 *à l'ordre* 1 *donne pour tout* $x \in [0,1]$ *:*

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \underset{x\to 1^-}{o}(x-1) \quad \text{et} \quad \sin(\pi x) = -\pi(x-1) + \underset{x\to 1^-}{o}(x-1)$$

et on procède comme précédemment :

$$g(x) = \frac{\big(-f(1) + f'(1) - f(0)\big)(x-1) + \underset{x\to 1^-}{o}(x-1)}{-\pi(x-1) + \underset{x\to 1^-}{o}(x-1)} = \frac{-f(1) + f'(1) - f(0) + \underset{x\to 1^-}{o}(1)}{-\pi + \underset{x\to 1^-}{o}(1)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{\pi}\big(f(1) - f'(1) + f(0)\big).$$

On prolonge alors f *par continuité en* 1 *en posant* $f(1) = \frac{1}{\pi}\big(f(1) - f'(1) + f(0)\big)$.

Exercice 13.111 ♡♡

1. *Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre* 0 *et* $X \in \mathbb{R}_+^*$.
2. *En déduire l'existence d'une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad \left|\big(1+x^2\big)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\big(1+x^2\big)\right| \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

3. *Trouver alors deux réels* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \big(1+x^2\big)^{1/n}\,dx = a + \frac{b}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Solution :

1. *On écrit l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre* 0 *et* $X \in \mathbb{R}_+^*$ *:*

$$\left|e^X - (1+X)\right| \leqslant \frac{X^2}{2}e^X$$

car $\sup_{x\in[0,X]} |e^x| = e^X$.

2. *Soient* $x \in [0,1]$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Comme* $\left(1+x^2\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right)$, *avec* $X = \frac{1}{n}\ln(1+x^2)$, *on trouve que :*

$$\left|\left(1+x^2\right)^{1/n} - \left(1+\frac{1}{n}\ln\left(1+x^2\right)\right)\right| \leqslant \frac{\ln^2\left(1+x^2\right)}{2n^2}\left(1+x^2\right) \leqslant \frac{\ln^2(2)}{n^2}$$

car $1+x^2 \leqslant 2$

3. *Posons* $a = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$ *et* $b = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$. *On a alors :*

$$\varepsilon_n = \left|\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{1/n}\mathrm{d}x - a - \frac{b}{n}\right| = \left|\int_0^1 \left[\left(1+x^2\right)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\left(1+x^2\right)\right]\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \frac{C}{n^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

Donc $\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{1/n}\mathrm{d}x = a + \frac{b}{n} + \varepsilon_n$ *et* $|n\varepsilon_n| \leqslant \frac{C}{n}$ *donc* $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. *Il ne reste plus qu'à calculer b par parties :*

$$b = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x = \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln 2 - 2 + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{4}.$$

13.7.15 Sommes de Riemann

Exercice 13.112 ♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On met en évidence le groupement* k/n *:*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}}$$

et on reconnaît une somme de Riemann donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \boxed{\sqrt{3}-1}$.

Exercice 13.113 ♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On met en évidence le groupement* k/n *:*

$$u_n = \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+n} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\frac{p}{n}+1} + \frac{1}{n}.$$

On reconnaît une somme de Riemann : $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\frac{p}{n}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2$. *On en déduit que* $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2}$.

Exercice 13.114 ♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On met en évidence le groupement* k/n *:*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

et on reconnaît une somme de Riemann. Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 13.115 ♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On met en évidence le groupement* k/n *:*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} + \frac{1}{n}$$

On reconnaît une somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{2}-1)$ *donc* $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2(\sqrt{2}-1)}$.

Exercice 13.116 ♡

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-n/k}}{k^2}$$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On écrit :*

$$u_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-n/k}}{k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$$

et on reconnaît une somme de Riemann. L'intégrale à calculer est $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$. *La fonction* $f : x \mapsto \frac{e^{-1/x}}{x^2}$ *est prolongeable par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 0$ *donc cette intégrale est bien définie. Une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *est* $x \mapsto e^{-1/x}$ *donc l'intégrale vaut* $-1/e$. *En conclusion* $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1/e}$.

Exercice 13.117 ♡

Trouver la limite des suites de termes général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3}$$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *En mettant en évidence le groupement* k/n, *on reconnaît une somme de Riemann :*

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{8\left(\frac{k}{n}\right)^3+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{8x^3+1} = \mathrm{I}$$

On calcule la limite $\mathrm{I} = \frac{1}{24}\ln 9 = \frac{1}{12}\ln 3$.

Exercice 13.118 ♡

Soient deux réels $\alpha > 0, \beta > 0$. *Déterminer la limite de la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha n + \beta k}$$

Solution : *Soit* $n \geqslant 1$. *Écrivons*

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha + \beta k/n}$$

On reconnaît alors une somme de Riemann. Posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/(\alpha+\beta x) \end{array} \right.$. *Cette fonction est continue sur le segment* $[0,1]$ *et donc* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. *Reste à calculer cette intégrale :*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln(\alpha+\beta x)\right]_0^1 = \ln(1+\alpha/\beta)$$

.

Exercice 13.119 ♡♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{k+n}}$$

Solution : *On reconnaît une somme de Riemann :*

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ où } f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{1+x}} \end{array} \right.$$

avec la fonction f qui est continue sur le segment $[0,1]$. Par conséquent, la suite (u_n) converge vers

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

C'est une intégrale d'une fraction rationnelle en x et en une racine n-ième d'une homographie qui se calcule grâce au changement de variables $t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$. On trouve alors : $x = \frac{t^2}{1-t^2} = -1 + \frac{1}{1-t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}$ et

$$\mathrm{I} = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-t^2)t\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = -2\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1-t} + \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \boxed{-\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

Exercice 13.120 ♡♡

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt$$

1. *Justifier l'existence de I_n pour $n \geqslant 1$.*
2. *Déterminer la limite de la suite (I_n).*

Solution :

1. *Soit $t \in [0,1[$. Puisque $1-t^n = \left(1+t+\cdots+t^{n-1}\right)(1-t)$,*

$$\frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = t^n(1+t+\cdots+t^{n-1}) = \sum_{k=n}^{2n-1} t^k \xrightarrow[x\to 1^-]{} n$$

Donc à n fixé, la fonction à intégrer se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale I_n existe.

2. *D'après ce calcul, on peut exprimer I_n à l'aide d'une somme :*

$$\mathrm{I}_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$$

On reconnaît une somme de Riemann :

$$\mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{n}{k}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$$

où $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x+1} \end{array} \right.$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. donc

$$\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\ln 2}$$

Exercice 13.121 ♡♡

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}\left(n^2+k^2\right)^{1/n}$$

Solution : *Comme les termes de u_n sont strictement positifs, nous pouvons transformer le produit en somme en utilisant le logarithme. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln u_n$. On calcule alors*

$$v_n = -4\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \ln\left[n^2(1+k^2/n^2)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \ln(1+k^2/n^2)$$

On reconnaît alors une somme de Riemann, associée à la subdivision du segment $[0,1]$ en $2n$ intervalles en écrivant

$$v_n = 2\times \frac{1}{(2n)}\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1+4\frac{k^2}{(2n)^2}\right)$$

Comme la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+4x^2) \end{array} \right.$ est continue sur le segment $[0,1]$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\mathrm{I} = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties cette intégrale, on trouve $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[u\ln(1+u^2)\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln 5 - 2 + 2\arctan 2$ et donc finalement,$u_n = e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{5}{e^4}e^{2\arctan 2}$.

Exercice 13.122 ♡♡

Trouver un équivalent de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n(k^2+n^2)}}{n}$$

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons u_n en faisant apparaître le groupement k/n :*

$$u_n = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(k/n)^2+1} = \sqrt{n}v_n$$

où v_n est une somme de Riemann qui converge vers $\mathrm{I} = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. Pour calculer I, le plus rapide est d'intégrer par parties :

$$\mathrm{I} = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

d'où l'on tire $2\mathrm{I} = \sqrt{2} + \left[\operatorname{argsh} x\right]_0^1$ et comme $\operatorname{argsh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, on tire $\mathrm{I} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. Par conséquent, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right)\sqrt{n}}$.

Exercice 13.123 ♡♡♡

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$$

Solution : *Considérer $v_n = \ln u_n = \frac{1}{n}\left[\ln(2n!) - \ln(n!) - n\ln n\right]$. On a*

$$v_n = \frac{1}{n}\Big[\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n\ln n\Big]$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{p+1}{n}\right)$$

Par conséquent, v_n est une somme de Riemann qui converge vers $\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ (la fonction est continue sur $[0,1]$). Grâce à une intégration par parties, on calcule $\boxed{\mathrm{I} = 2\ln 2 - 1}$. La limite de u_n est donc $\frac{4}{e}$.

Chapitre 14

Développements limités

Pour bien aborder ce chapitre

On a mis en évidence dans le chapitre précédent les formules de Taylor. Celle de Taylor-Young, en particulier, permet d'approximer dans un voisinage d'un point donné, à la précision voulue, une fonction par un polynôme. Cette approximation, comme nous l'avons expliqué, sera d'un grand intérêt pour connaître localement le comportement d'une fonction. Le problème est cependant de déterminer le polynôme de Taylor. En effet, à l'exception de quelques fonctions simples, la formule de Taylor-Young, pour être appliquée, demande de connaître les différentes dérivées de la fonction étudiée et celles-ci, en général, sont difficiles à calculer.
Pour répondre à ce problème, nous allons introduire dans ce chapitre différentes techniques qui permettront, à partir des polynômes de Taylor des fonctions usuelles, de calculer le polynôme de Taylor pour une large classe de fonctions.

14.1 Développements limités

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (non vide et non réduit à un point).

14.1.1 Définitions

DÉFINITION 14.1 **Développement limité**
Soient une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et un point adhérent $x_0 \in \bar{\mathrm{I}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n* au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme P de degré $\leqslant n$, une fonction $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \mathrm{P}(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

– Le polynôme P est appelé *partie régulière* ou *partie principale* du développement limité de f en x_0.
– La fonction $x \mapsto (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelée *reste* du développement limité de f en x_0.

Remarque 14.1
– Avec les notations précédentes,

$$(x - x_0)^n \varepsilon(x) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$$

– Par le changement de variable

$$\begin{cases} h = x - x_0 & \text{si } x_0 \in \mathbb{R} \\ h = 1/x & \text{si } x_0 = \pm\infty \end{cases}$$

on peut toujours se ramener à un développement limité en $x_0 = 0$.

On se limitera désormais à l'étude des développements limités en 0

14.1.2 DL fondamental

THÉORÈME 14.1 **DL de $\dfrac{1}{1-x}$**
La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{cases}$$

admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ un DL à l'ordre n en 0 et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)}$$

Démonstration *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a, par application de la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique*

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

mais $\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \frac{x}{1-x}$ *et* $\frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et donc :* $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$.

COROLLAIRE 14.2

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 \cdots + x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)}$$

Démonstration *Il suffit de remplacer, dans la formule précédente, x par $-x$ pour obtenir la première formule ou de remplacer x par x^2 pour obtenir la seconde.*

14.1.3 Propriétés

PROPOSITION 14.3 ♡ **Unicité du DL**
Soit une fonction f admettant un DL d'ordre n en 0. Alors la partie régulière du DL d'ordre n en 0 de f est unique. Autrement dit, s'il existe des polynômes de degré n P_1 et P_2 tels que

$$f(x) = P_1(x) + o(x^n) = P_2(x) + o(x^n)$$

alors $P_1 = P_2$.

Démonstration *Notons $P_1 = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ et $P_2 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$. Il existe donc une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $P_1(x) - P_2(x) = x^n \varepsilon(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On peut ainsi écrire*

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n = x^n \varepsilon(x)$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$ dans cette égalité, on obtient $a_0 - b_0 = 0$ et donc $a_0 = b_0$. On a donc

$$(a_1 - b_1) + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1} = x^{n-1}\varepsilon(x)$$

En appliquant ce procédé $n-1$ fois, on prouve que $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$ et donc que $P_1 = P_2$.

PROPOSITION 14.4 **Troncature d'un DL**
Soit une fonction f admettant un DL à l'ordre n en 0. Soit un entier naturel $p \leqslant n$. Alors f admet un DL à l'ordre p en 0 et celui ci est obtenu en ne gardant que les termes de degré inférieur à p dans la partie principale.

Démonstration *Comme f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il existe $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$. Par conséquent*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + x^p \left(a_{p+1} x + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon(x)\right) \\ &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + x^p \varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1(x) = a_{p+1} x + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)$ vérifie bien, par opération sur les limites $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

PROPOSITION 14.5 **Utilisation de la parité**
Soit une fonction f admettant un DL d'ordre n en 0. Si f est paire (impaire) sur un voisinage symétrique de 0, alors la partie principale de son DL à l'ordre n en 0 ne contient que des puissances paires (impaires).

Démonstration *Effectuons la démonstration dans le cas où f est paire. Le cas impair se démontre de la même façon. Comme la fonction f est paire, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$ alors $f(-x) = a_0 - a_1 x + \ldots + a_n (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$. Par unicité du développement limité de f en 0 à l'ordre n, on a donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ impair $a_k = -a_k$ ce qui n'est possible que si $a_k = 0$.*

14.1.4 DL et régularité

THÉORÈME 14.6 ♡ **DL et dérivabilité**
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ définie sur $]0, \alpha]$. On suppose que

(H1) La fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0 $f(x) = a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x)$

Alors la fonction f se prolonge en une fonction

$$\widetilde{f} : \begin{cases} [0,\alpha] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

dérivable en 0 avec $\widetilde{f}'(0) = a_1$.

Démonstration *Puisque pour $x \neq 0$, $\widetilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0 = \widetilde{f}(0)$, la fonction $\widetilde{f}$ est continue en 0. Le taux d'accroissement de $\widetilde{f}$ en 0 s'écrit pour $x \neq 0$,*

$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{a_1 x + x\varepsilon(x)}{x} = a_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1$$

ce qui montre que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 avec $\widetilde{f}'(0) = a_1$.

THÉORÈME 14.7 ♡ **Une fonction $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre n**
Soit $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle avec $0 \in \mathrm{I}$. On suppose que

(H1) $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$

Alors la fonction f admet un développement limité en 0 à l'ordre n donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

Démonstration *C'est la formule de Taylor-Young (13.40 page 539)*

Remarque 14.2 Cette formule permet de justifier l'existence d'un développement limité. Elle a donc un intérêt théorique. Pour calculer effectivement les coefficients de ce DL à l'aide de cette formule, il faut pouvoir calculer les dérivées successives de la fonction en 0 ce qui n'est possible que pour des fonctions simples.

Remarque 14.3 La réciproque du théorème précédent est fausse comme le montre l'exemple fondamental suivant. Soit $n \geqslant 2$. Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{n+1}\sin(1/x^n) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Cette fonction admet un développement limité à l'ordre n en 0 puisque

$$f(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^n + x^n\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = x^n \sin(1/x^n)$ pour $x \neq 0$, avec $|\varepsilon(x)| \leqslant |x|^n \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. La fonction f est bien continue en 0 puisque $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$. Elle est également dérivable en 0 puisque $|f(x)/x| \leqslant |x|^n \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Elle est dérivable en $x \neq 0$ avec

$$f'(x) = (n+1)x^n \sin(1/x^n) - n\cos(1/x^n)$$

et f' n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$ ce qui montre que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

BIO 13 William Young, né à Londres le 20 octobre 1863, mort à Lausanne le 7 juillet 1942



Mathématicien Anglais. William Young, issu de parents épiciers, montre dès le primaire un fort potentiel pour les mathématiques à tel point que le directeur de son école, Edwin A. Abott, auteur d'une célèbre livre de mathématiques, ``*Flatland*´´, l'encourage à poursuivre ses études dans cette direction. Young entre à l'université de Cambridge en 1881. Il est assez probable qu'il ne se serait pas intéressé à la recherche s'il n'avait pas rencontré sa futur femme, Grace Chisholm, elle même tout juste docteur en mathématiques suite à une thèse avec Félix Klein. Young s'est intéressé à la théorie des fonctions réelles et a découvert, de manière indépendante de Lebesgue et avec un autre formalisme, la théorie d'intégration dite de Lebesgue, qui généralise celle de Riemann. Il s'est intéressé aux séries de Fourier et aux séries orthogonales. Sa contribution majeure est sans doute celle apportée au calcul différentiel pour les fonctions à plusieurs variables qui inspira de nombreux livres d'enseignement consacrés à ce sujet. Young fit de nombreux voyages et visita de nombreuses universités en Europe, Amériques, Asie et Afrique. En 1940, alors que la seconde guerre mondial a éclaté, il se retrouve coincé à Lausanne et ne peut rejoindre sa femme et ses cing enfants. Il passa ainsi les deux dernières années de sa vie dans la détresse de cette séparation.

14.2 Développement limité des fonctions usuelles

14.2.1 Utilisation de la formule de Taylor-Young

PROPOSITION 14.8 **DL classiques à partir de Taylor-Young**
On obtient les DL classiques suivants en 0 en calculant les dérivées successives en 0 et en appliquant la formule de Taylor-Young.

– *Fonctions exponentielle et hyperboliques* :

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\ \operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\\ \operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\end{aligned}$$

– *Fonctions trigonométriques* :

$$\begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\\ \sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\end{aligned}$$

– *Fonction logarithme* :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\ \ln(1-x) &= -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\end{aligned}$$

– *Fonction* $x\mapsto(1+x)^\alpha$ *avec* $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

Remarque 14.4 Cette dernière formule appliquée à $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $n = 2$ donne

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Remarque 14.5 Parmi ces DLs certains s'obtiennent de manière plus rapide qu'en appliquant la formule de Taylor-Young grâce aux théorèmes que nous allons maintenant introduire.

14.3 Opérations sur les développements limités

14.3.1 Combinaison linéaire et produit

PROPOSITION 14.9 **Combinaison linéaire et produit de DLs**
Soient deux fonctions f et g réelles définies sur I admettant en 0 des DL d'ordre n

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \mathrm{P}(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{Q}(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

où P et Q sont des polynômes réels de degré n. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Les fonctions $\alpha f + \beta g$ et $f \times g$ admettent des Dl d'ordre n en 0 et ces DLs sont donnés par, pour tout $x \in \mathrm{I}$

$$\begin{aligned} \left(\alpha f + \beta g\right)(x) &= \left(\alpha \mathrm{P} + \beta \mathrm{Q}\right)(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\ \left(f \times g\right)(x) &= \mathrm{R}(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

où $\mathrm{R}(x)$ est égal au produit $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)$ auquel on a retiré tous les termes de degré $> n$.

Démonstration *Pour $i = 1,2$, il existe des fonctions $\varepsilon_i : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = \mathrm{P}(x) + x^n \varepsilon_1(x)$, $g(x) = \mathrm{Q}(x) + x^n \varepsilon_2(x)$ et $\varepsilon_i(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.*

- *On a donc :*

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \mathrm{P}(x) + \beta \mathrm{Q}(x) + x^n \left(\alpha \varepsilon_1(x) + \beta \varepsilon_2(x)\right) = \alpha \mathrm{P}(x) + \beta \mathrm{Q}(x) + x^n \varepsilon(x)$$

  avec $\varepsilon(x) = \alpha \varepsilon_1(x) + \beta \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par opérations sur les limites. Par conséquent $\alpha f + \beta g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie régulière $\alpha \mathrm{P} + \beta \mathrm{Q}$.
- *Pour le produit,*

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x) + x^n \mathrm{Q}(x)\varepsilon_1(x) + x^n \mathrm{P}(x)\varepsilon_2(x) + x^{2n}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \\ &= \mathrm{R}(x) + x^n\left(x\mathrm{S}(x) + \mathrm{Q}(x)\varepsilon_1(x) + \mathrm{P}(x)\varepsilon_2(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right) \\ &= \mathrm{R}(x) + x^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

  où
  - ▲ R *est un polynôme de degré n et* S *un polynôme de degré $n-1$ tels que* $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x) = \mathrm{R}(x) + x^{n+1}\mathrm{S}(x)$
  - ▲ $\varepsilon(x) = x\mathrm{S}(x) + \mathrm{Q}(x)\varepsilon_1(x) + \mathrm{P}(x)\varepsilon_2(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *par opération sur les limites.*

14.3.2 Composée

PROPOSITION 14.10 **Composée de DLs**
Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de 0. On suppose que

- (H1) La fonction f admet un DL d'ordre n en 0, $f(x) = \mathrm{F}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ où F est un polynôme de degré n.
- (H2) La fonction g admet un DL d'ordre n en 0, $g(x) = \mathrm{G}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ où G est un polynôme de degré n.
- (H3) $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Alors la fonction composée $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$ dans le polynôme $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$.

Démonstration *Admise*

14.3.3 Quotient

PROPOSITION 14.11
Soit une fonction u définie au voisinage de 0. On suppose que

(H1) $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$

(H2) u admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière un polynôme P.

Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $1+\mathrm{P}+\mathrm{P}^2+\cdots+\mathrm{P}^n$.

Démonstration *Appliquer le théorème de composition de DL à la fonction définie par $g(y) = 1/(1-y)$ (qui admet un DL à tout ordre) et à la fonction $f = u$.*

PROPOSITION 14.12 **Quotient de DLs**
Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de 0. On suppose que

(H1) Les fonctions f et g admettent des DL d'ordre n en 0.

(H2) $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} l \neq 0$.

alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un DL d'ordre n en 0.

Démonstration *Puisque $l \neq 0$, nous pouvons écrire pour $x \in \mathrm{I}$,*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{l\frac{g(x)}{l}} = \frac{1}{l}\frac{f(x)}{1-u(x)}$$

où $u(x) = 1 - g(x)/l$. La fonction u admet un développement limité à l'ordre n (combinaison linéaire de DL) et $u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Il suffit d'appliquer la proposition précédente.

Ce théorème permet de déterminer les DLs suivants :

PLAN 14.1 : Pour calculer le DL à l'or de n de $\dfrac{1}{g}$

On suppose que $g(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{1-u} \text{ avec } u = -\left(a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\right)\\
&= 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \underset{x\to 0}{o}\left(u^n\right)\\
&= 1 - \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right) + \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^2 + \ldots + (-1)^n \left(a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

qu'on développe et tronque en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$.

COROLLAIRE 14.13
On a :

$$\begin{aligned}
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)\\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

14.3.4 Développement limité d'une primitive

THÉORÈME 14.14 **Primitivation d'un DL**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in \overline{\mathrm{I}}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On suppose que

(H1) la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.

(H2) la fonction f' admet un DL d'ordre n en 0, $\forall x \in I$, $f'(x) = \overbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}^{P'(x)} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

(H3) $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} l \in \mathbb{R}$.

alors la fonction f admet un DL d'ordre $n+1$ en 0 obtenu en primitivant la partie régulière du DL de f' et en ajoutant la limite de f en 0 :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \underbrace{l + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}}_{P(x)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$$

Démonstration *Pour fixer les idées, supposons que* $I =]0,\alpha[$. *Posons, pour tout* $x \in I$, $F(x) = f(x) - \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ *et* $F(0) = l$. *La fonction* F *ainsi définie est continue sur* $[0,\alpha[$ *et dérivable sur* $]0,\alpha[$ *avec*

$$\forall x \in]0,\alpha[, \quad F'(x) = f'(x) - \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) = x^n \tilde{\varepsilon}(x)$$

où $\tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *Soit* $x \in]0,\alpha[$. *La fonction* F *est continue sur* $[0,x]$, *dérivable sur* $]0,x[$. *D'après le théorème des accroissements finis, il existe* $\theta(x) \in]0,1[$ *tel que* $F(x) - F(0) = xF'(\theta(x))$. *Remarquons que la fonction* θ *ainsi définie vérifie* $\theta(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *On a alors*

$$f(x) - l - \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^{n+1}\tilde{\varepsilon}(\theta(x)) = o(x^{n+1})$$

En effet, par composée de limites, $\tilde{\varepsilon}(\theta(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Ce théorème permet de déterminer les DLs suivants :

COROLLAIRE 14.15

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\operatorname{argth} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\operatorname{argsh} x &= x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} - \cdots + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

Remarque 14.6 Le dernier s'obtient en remarquant que $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Remarque 14.7 *Attention :* On peut primitiver les DL mais pas les dériver. L'existence d'un DL à l'ordre n pour une fonction f dérivable n'implique pas toujours l'existence d'un DL à l'ordre $n-1$ pour la fonction f'. Pour s'en convaincre, reprendre l'exemple 14.3 page 598 où la fonction f possède un DL à l'ordre $n \geqslant 2$, alors que f' n'était pas continue en 0 donc ne possédait même pas un DL à l'ordre 0 !

On peut tout de même dériver des DL dans certains cas, mais il faut le justifier en utilisant les propriétés du cours.

Exemple 14.1 On suppose que

(H1) la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Alors la fonction f' admet un DL à l'ordre $(n-1)$ sur I de partie principale le polynôme P' où P est la partie principale du DL de f. C'est une conséquence de la formule de Taylor-Young.

Exemple 14.2 Considérons la fonction $f : \begin{cases} I =]-\pi/2, \pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{cases}$. Elle est dérivable sur I et vérifie une équation différentielle.

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 1 + f^2(x)$$

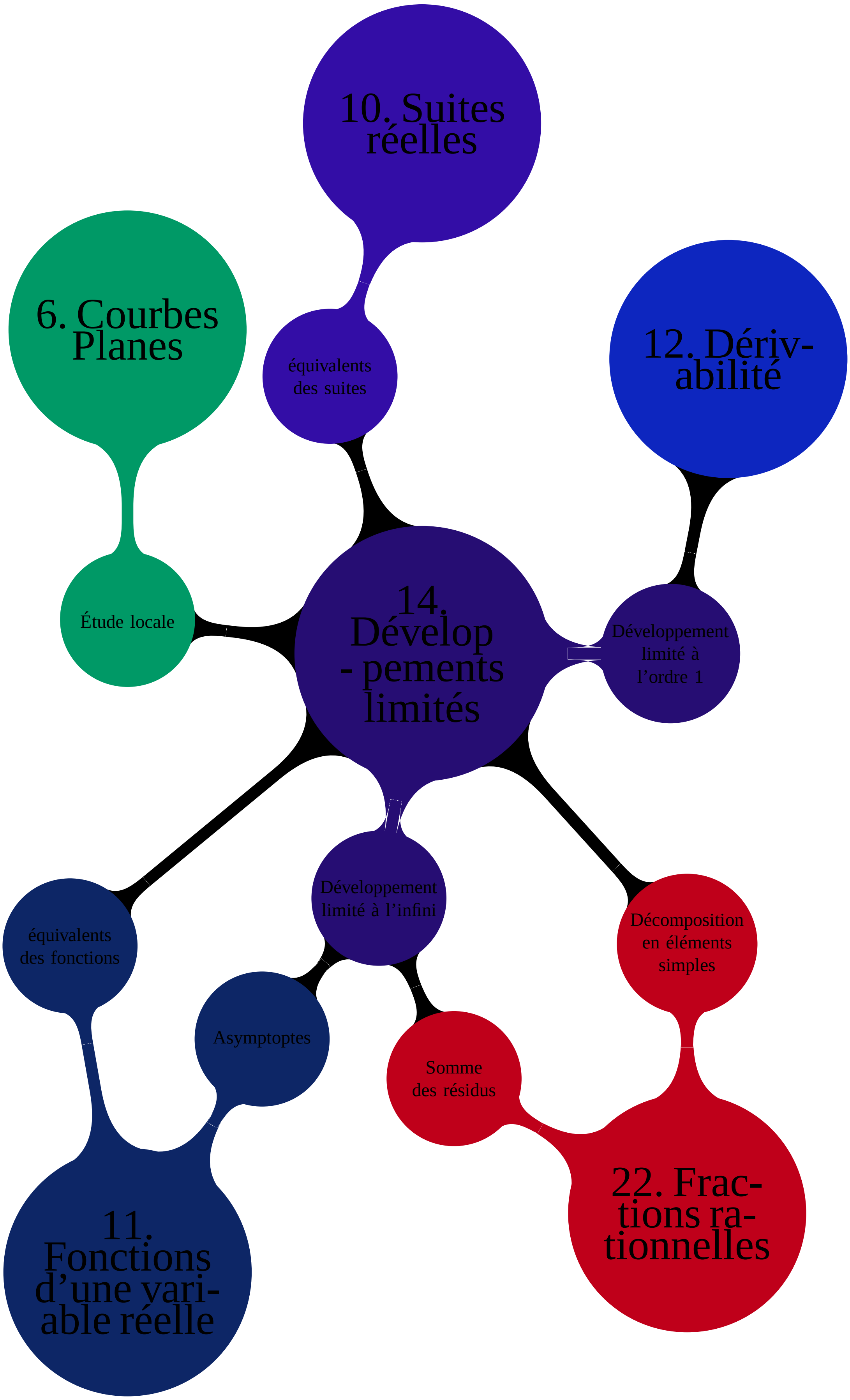
Utilisons cette équation différentielle pour déterminer le DL à l'ordre 5 de f en 0.

– Puisque f est de classe $\mathscr{C}^5$ sur I, d'après Taylor-Young, elle possède un DL à l'ordre 5 en 0. De plus, comme f est impaire, on peut écrire
$$f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)$$
– Par opérations algébriques sur les développements limités et en utilisant l'équation différentielle, la fonction f' admet donc un DL en zéro à l'ordre 4 donné par
$$f'(x) = 1 + x^2 \left[a_1 + a_3 x^2 + o(x^2)\right]^2 = 1 + x^2 \left[a_1^2 + 2a_1 a_3 x^2 + o(x^2)\right] = 1 + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_3 x^4 + o(x^4)$$
– Par primitivation de DL et puisque $f(0) = 0$, on obtient que
$$f(x) = x + \frac{a_1^2}{3} x^3 + \frac{2a_1 a_3}{5} x^5 + o(x^5)$$
– Par unicité du DL de f, on en tire que $a_1 = 1$, $a_1^2/3 = a_3$ et $2a_1 a_3/5 = a_5$ d'où par résolution de ce système, $a_1 = 1$, $a_3 = 1/3$ et $a_5 = 2/15$.

L'intérêt des développements limités est essentiellement pratique. Il faut savoir calculer rapidement des développements limités simples. Vous pouvez consulter maintenant l'appendice C.4.5 page 1210 pour apprendre à calculer efficacement les DL et étudier leurs applications en analyse.

En résumé

1. Les calculs de développements limités sont avant tout des calculs sur les polynômes. Afin d'être efficace dans ces derniers, une lecture du paragraphe B.4.2 page 1170 s'impose.
2. Pour apprendre à prévoir l'ordre d'un développement limité et savoir les utiliser pour déterminer des équivalents ou des limites on pourra consulter le paragraphe C.4.5 page 1210.
3. Vous devrez prendre de l'aisance dans les calculs de développements limités, il serviront souvent aussi il conviendra de les manipuler avec efficacité et sûreté, ce qui demande au départ de pratiquer un assez grand nombre d'exercices calculatoires.


10. Suites réelles
6. Courbes Planes
équivalents des suites
12. Dériv-abilité
Étude locale
14. Dévelop - pements limités
Développement limité à l'ordre 1
Développement limité à l'infini
équivalents des fonctions
Décomposition en éléments simples
Asymptoptes
Somme des résidus
11. Fonctions d'une vari-able réelle
22. Frac-tions ra-tionnelles

14.4 Exercices

14.4.1 Calcul de développements limités

Exercice 14.1 ♡

En utilisant la formule de Taylor-Young, trouver les développements limités en 0 *à l'ordre* n *des fonctions suivantes :*

1. $f : x \mapsto e^x$
2. $f : x \mapsto \sin x$
3. $f : x \mapsto \cos x$
4. $f : x \mapsto \operatorname{ch} x$
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
6. $f : x \mapsto \ln(1-x)$

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

1. f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = e^x$ *donc, par application de la formule de Taylor-Young,* $f(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.
2. f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$ *donc, par application de la formule de Taylor-Young,* $f(x) = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2p+1}\right)$ *où* $p = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.
3. f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$ *donc, par application de la formule de Taylor-Young,* $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2p+1}\right)$ *où* $p = \left[\dfrac{n}{2}\right]$.
4. f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x \text{ si } k \text{ est pair} \\ \operatorname{sh} x \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$ *donc, par application de la formule de Taylor-Young,* $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2p+1}\right)$ *où* $p = \left[\dfrac{n}{2}\right]$.
5. f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ *donc, par application de la formule de Taylor-Young,* $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.
6. f *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *et, utilisant le calcul précédent, pour tout* $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = -\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k}$ *donc, par application de la formule de Taylor-Young,* $f(x) = -\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^n}{n}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Exercice 14.2 ♡

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f *admet un développement limité d'ordre* 2 *en* 0 *mais que* f *n'est pas deux fois dérivable en* 0.

Solution : *On a :* $\frac{f(x)}{x^2} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *d'après le théorème des gendarmes. Donc* f *admet un développement limité d'ordre* 2 *en* 0 *donné par* $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. *D'autre part* $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et*

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)}{x} = 3x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

qui diverge quand x *tend vers* 0. *Donc* f *n'est pas deux fois dérivable en* 0.

Exercice 14.3 ♡

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ *à l'ordre indiqué :*

1. $\sin x \cos x$ *à l'ordre* 5
2. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ *à l'ordre* 3
3. $\arctan x$ *à l'ordre* 5.
4. $\operatorname{sh} x \cos x$ *à l'ordre* 5
5. $e^x \sqrt{1-x}$ *à l'ordre* 4
6. $e^{\sin x}$ *à l'ordre* 5.

Solution :

1. *Par produit de DLs :*

$$\begin{aligned}\sin x \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \\ &= \boxed{x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\end{aligned}$$

On retrouve ce résultat en écrivant $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

2. *Appliquant les formules usuelles :*

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \boxed{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}$$

3. *Utilisant les formules usuelles, on a :* $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ *et donc par primitivation :*

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}$$

4. *Par produit de DLs :*

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x \cos x &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \\ &= \boxed{x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\end{aligned}$$

5. *Par produit de DLs :*

$$\begin{aligned}e^x\sqrt{1-x} &= -\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \\ &= \boxed{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{13x^3}{48} - \frac{79x^4}{384} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\end{aligned}$$

6. *Par composition de DLs :*

$$\boxed{e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}$$

Exercice 14.4 ♡

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ *à l'ordre indiqué :*

1. $(e^x - 1)(\sin x - x)$ *à l'ordre* 6
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ *à l'ordre* 6
3. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ *à l'ordre* 4
4. $\tan x$ *à l'ordre* 5
5. $\arcsin x$ *à l'ordre* 5
6. $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Par produit de DLs :*

$$\begin{aligned}\left(e^x-1\right)(\sin x - x) &= -\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)\\ &= \boxed{-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{12}x^5-\frac{7}{360}x^6+\underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}\end{aligned}$$

2. *Par composition de DLs :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}\\ &= \boxed{1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}\end{aligned}$$

3. *Par quotient de DLs :* $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{130}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ *et donc par composition de DLs, on a :*

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{130}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \left(-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}\right)^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\ &= \boxed{-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\end{aligned}$$

4. *On a prouvé dans la question 2 que* $\frac{1}{\cos x}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$ *donc, par produit de DLs :*

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)\\ &= \boxed{x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\end{aligned}$$

Voir aussi l'exercice 14.14.

5. *Utilisant les formules usuelles :* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ *et donc par primitivation :*

$$\boxed{\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}$$

6. *Par quotient de DLs :*

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} &= \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\\ &= \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)}\\ &= \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= \boxed{1-x+\frac{2}{3}x^2-\frac{11}{24}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\end{aligned}$$

Exercice 14.5 ♡

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ à l'ordre indiqué :

1. $(1+2x)^x$ *à l'ordre* 5
2. $\ln(1+\operatorname{sh} x)$ *à l'ordre* 4.
3. $\ln(\cos x)$ *à l'ordre* 6
4. $\sqrt{\cos x}$ *à l'ordre* 4
5. $e^{\operatorname{ch} x}$ *à l'ordre* 3
6. $\operatorname{th} x$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Par produit et composition de DLs :*

$$\begin{aligned}(1+2x)^x &= e^{x\ln(1+2x)}\\ &= e^{x\left(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3-4x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)\right)}\\ &= e^{2x^2-2x^3+\frac{8}{3}x^4-4x^5+\underset{x\to0}{o}(x^5)}\\ &= \boxed{1+2x^2-2x^3+\frac{14}{3}x^4-8x^5+\underset{x\to0}{o}(x^5)}\end{aligned}$$

2. *Par composition de DLs :*

$$\begin{aligned}\ln(1+\operatorname{sh} x) &= \ln\left(1+x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to0}{o}(x^4)\right)\\ &= \boxed{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5}{12}x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)}\end{aligned}$$

3. *Par composition de DLs :*

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln(1+(\cos x-1))\\ &= \ln\left(1-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+\underset{x\to0}{o}(x^6)\right)\right)\\ &= \boxed{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}\right)+\underset{x\to0}{o}(x^6)}\end{aligned}$$

4. *Comme* $\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{5}{128}x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)$, *par composition de DLs :*

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos x} &= \sqrt{1+(\cos x-1)}\\ &= \sqrt{1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\underset{x\to0}{o}(x^4)\right)}\\ &= \boxed{1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}}+\underset{x\to0}{o}(x^4)\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}e^{\operatorname{ch} x} &= ee^{(\operatorname{ch} x-1)}\\ &= e\left(e^{\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^3)}\right)\\ &= \boxed{e\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+\underset{x\to0}{o}(x^3)}\end{aligned}$$

6. *Par quotient de DLs :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\\
&= \frac{x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\\
&= \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 14.6 ♡

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0 = 0$ à l'ordre indiqué :

1. $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ *à l'ordre* 3
2. $\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \dfrac{1}{\tan x}$ *à l'ordre* 3
3. $\sqrt{1+\cos x}$ *à l'ordre* 5
4. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ *à l'ordre* 3
5. $\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$ *à l'ordre* 4
6. $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Utilisant les formules usuelles :*

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) &= \ln\left(1+x^2\right) - \ln(1+x)\\
&= \boxed{-x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

2. *Comme* $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$ *et que* $\operatorname{th} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\tan x} &= \frac{1}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)} - \frac{1}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{45} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)\\
&= \boxed{\frac{2}{3}x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos x} &= \sqrt{1 + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}\\
&= \boxed{\sqrt{2}\left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\\ &= e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)}\\ &= e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\ &= ee^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\ &= \boxed{e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) &= \ln\left(\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \boxed{\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) &= \ln\left(2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= \ln 2\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= \ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= \boxed{\ln 2+\frac{x}{4}-\frac{3}{32}x^2+\frac{5}{96}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\end{aligned}$$

Exercice 14.7 ♡

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en $x_0=0$ à l'ordre indiqué :

1. $x\mapsto \sin(\tan(x))$ *à l'ordre* 7
2. $e^{\sqrt{1+x}}$ *à l'ordre* 3
3. $(\ln(1+x))^2$ *à l'ordre* 4
4. $\sqrt{3+\cos x}$ *à l'ordre* 3
5. $x\mapsto \sin^6(x)$ *à l'ordre* 9
6. $\ln(3e^x+e^{-x})$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Comme* $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$*, on a :*

$$\begin{aligned}\sin(\tan x) &= \left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\\ &= \boxed{x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{55}{1008}x^7+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{1+x}} &= e^{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\
&= e.e^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\
&= e\left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \boxed{e\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{48}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(\ln(1+x))^2 &= \left(x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2\\
&= \boxed{x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3+\cos x} &= \sqrt{4-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\\
&= 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}\\
&= \boxed{2-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\sin^6(x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^6\\
&= \boxed{x^6-x^8+\underset{x\to 0}{o}\left(x^9\right)}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\ln\left(3e^x+e^{-x}\right) &= \ln\left(4+2x+2x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \ln 4+\ln\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \boxed{2\ln 2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{8}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 14.8 ♡

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en x_0 à l'ordre indiqué :

1. $\sin(x)$ *en* $x_0=\frac{\pi}{4}$ *à l'ordre* 3
2. $\cos(x)$ *en* $x_0=\frac{\pi}{3}$ *à l'ordre* 4
3. e^x *en* $x_0=1$ *à l'ordre* 4.
4. $\dfrac{\ln x}{x^2}$ *en* $x_0=1$ *à l'ordre* 4
5. $\sin x\cos 3x$ *en* $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ *à l'ordre* 2
6. $\arctan x$ *en* $x_0=1$ *à l'ordre* 3

Solution :

1. *Posons* $t = x - \frac{\pi}{4}$. *Chercher le* $DL\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ *de* $\sin x$ *revient à chercher celui de* $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ *en* 0 *:*

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(t + \tfrac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + \underset{t \to 0}{o}\left(t^3\right) \\
&= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{6}\right) + \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)}
\end{aligned}$$

2. *Comme précédemment, on se ramène en* 0 *en posant* $t = x - \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \\
&= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}t^3 + \frac{t^4}{48} + \underset{t \to 0}{o}\left(t^4\right) \\
&= \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \underset{x \to \frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)}
\end{aligned}$$

3. *On se ramène en* 0 *en posant* $t = x - 1$. *Il vient :*

$$\begin{aligned}
e^x &= e^{1+t} \\
&= e.e^t \\
&= e\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \underset{t \to 0}{o}\left(t^4\right)\right) \\
&= \boxed{e\left(1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \underset{x \to 1}{o}\left((x-1)^4\right)\right)}
\end{aligned}$$

4. *On pose* $t = x - 1$ *:*

$$\begin{aligned}
\frac{\ln x}{x^2} &= \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2} \\
&= \frac{\ln(1+t)}{1 + 2t + t^2} \\
&= \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \underset{t \to 0}{o}\left(t^4\right)\right)\left(1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + \underset{t \to 0}{o}\left(t^3\right)\right) \\
&= t - \frac{5}{2}t^2 + \frac{13}{3}t^3 - \frac{77}{12}t^4 + \underset{t \to 0}{o}\left(t^4\right) \\
&= \boxed{(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + \underset{x \to 1}{o}\left((x-1)^4\right)}
\end{aligned}$$

5. *Posons* $t = x - \dfrac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
\sin x \cos 3x &= \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\cos t + \pi \\
&= -\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\cos t \\
&= -\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right)\cos t \\
&= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right) \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to \frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)}
\end{aligned}$$

6. *Utilisant directement la formule de Taylor-Young, on trouve :*

$$\arctan x = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^3\right)}$$

Exercice 14.9 ♡♡

Trouver le DL(0,2) de la fonction définie par

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$$

Solution : *Écrivons la fonction sous forme exponentielle et utilisons les DL classiques :*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} &= e^{\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \\
&= e^{\frac{3}{x^2}\ln\left(1 - 1/6x^2 + 1/120x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)} \\
&= e^{\frac{3}{x^2}\left(-1/6x^2 - 1/180x^4 \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)} \\
&= e^{-1/2 - 1/60x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= e^{-1/2}e^{-1/60x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= e^{-1/2}\left(1 - 1/60x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{60\sqrt{e}}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 14.10 ♡♡

Déterminer le DL(0,4) de la fonction définie par :

$$(\cos x)^{1+\sin x}$$

Solution : *On met la fonction sous forme exponentielle et on utilise les DL classiques :*

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{1+\sin x} &= e^{(1+\sin x)\ln(\cos x)} \\
&= e^{(1+x-1/6x^3)(-1/6*x^2-1/180x^4)+\underset{x\to 0}{o}(x^4)} \\
&= e^{-1/2x^2-1/2x^3-1/12x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)} \\
&= \boxed{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 14.11 ♡♡

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 *en* 0 *de la fonction définie par*

$$x \mapsto e^{3+\cos x}$$

Solution :

$$e^{3+\cos x} = e^{4-1/2x^2+1/24x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)} \quad (14.1)$$

$$= e^4 e^{-1/2x^2+1/24x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)} \quad (14.2)$$

$$= \boxed{e^4\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)} \quad (14.3)$$

Exercice 14.12 ♡♡

Déterminer le DL(0,4) de la fonction définie par

$$(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2}$$

Solution :

$$(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2} = \left(2+1/2x^2-1/8x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)^{1/2} \quad (14.4)$$

$$= \sqrt{2}\left(1+1/4x^2-1/16x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)^{1/2} \quad (14.5)$$

$$= \sqrt{2}\left(1+1/8x^2-5/128x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right) \quad (14.6)$$

$$= \boxed{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x^2-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^4+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} \quad (14.7)$$

Exercice 14.13 ♡♡

Déterminer le DL(0,2) *de la fonction définie par :*

$$\arcsin\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$$

Solution :

La fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$ *est* $\mathscr{C}^1$ *est voisinage de* 0 *et au voisinage de* 0*, on a :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(2+x)\sqrt{3+2x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1+x/2}\frac{1}{\sqrt{1+2/3x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1-1/2x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)\left(1-1/3x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1-5/6x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right) \end{aligned}$$

donc par primitivation :

$$\boxed{\arcsin\left(\frac{1+x}{2+x}\right) = \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}(x-\frac{5}{12}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right))}$$

Exercice 14.14

- *Calculer* $\int_0^x (1+\tan^2 t)\,dt$.
- *Déterminer le* DL(0,10) *de* $x \mapsto \tan x$.

Solution :

– On a $\int_0^x (1+\tan^2 t)\,dt = \tan x$.
– On va se servir de deux arguments : 1) La primitivation fait gagner un ordre. 2) pour les fonctions paires ou impaires, la moitié des coefficients sont nuls, ce qui permet de gagner aussi un ordre. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \tan x$ admet des développements limités en 0 à tous ordres. On a donc successivement, en intégrant puis en élevant au carré :

$$\begin{aligned}
1+\tan^2 x &= 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)\\
\tan x &= x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\
1+\tan^2 x &= 1 + x^2 \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\
1+\tan^2 x &= 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)\\
1+\tan^2 x &= 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + 2\frac{2x^6}{15} + \frac{x^6}{9} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^8\right)\\
1+\tan^2 x &= 1 + x^2 + 2\frac{x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{34x^8}{315} + \frac{4x^8}{45} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^9\right)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^8}{2835} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{10}\right)
\end{aligned}$$

On pourrait continuer, mais les calculs de $\tan^2 x$ deviennent vite fastidieux. En revanche on peut ainsi démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \tan^{(2n+1)}(0) > 0$.

14.4.2 Limites

Exercice 14.15 ♡

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}
x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x - \left(x - \frac{1}{2} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)\right)\\
&= \frac{1}{2} + \underset{x\to+\infty}{o}(1) \xrightarrow[x\to\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x} &= \frac{-\frac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1)}{\frac{1}{3}+\underset{x\to 0}{o}(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= e^{\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}} \\ &= e^{\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)}{x^2}} \\ &= e^{\frac{\frac{x^2}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}} \\ &= e^{\frac{1}{3}+\underset{x\to 0}{o}(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{e^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} &= \frac{\frac{3}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2} \\ &= \frac{3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1}-x &= x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right) \\ &\underset{\mathrm{X}=\frac{1}{x}}{=\!=} \frac{1}{\mathrm{X}}\left(\sqrt{1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2}-1\right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{X}}\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{X}-1+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(\mathrm{X})\right) \\ &= \frac{1}{2}+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(1) \xrightarrow[\mathrm{X}\to 0]{} \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}} &\underset{\mathrm{X}=x-2}{=\!=} \frac{\sqrt{\mathrm{X}+4}-2}{1-\sqrt{3\mathrm{X}+1}} \\ &= 2\frac{\sqrt{1+\frac{\mathrm{X}}{4}}-1}{1-\sqrt{1+3\mathrm{X}}} \\ &= 2\frac{\frac{1}{8}\mathrm{X}+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(\mathrm{X})}{-\frac{3}{2}\mathrm{X}+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(\mathrm{X})} \\ &= \frac{\frac{1}{4}+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(1)}{-\frac{3}{2}+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(1)} \\ &\xrightarrow[\mathrm{X}\to 0]{} \boxed{-\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

Exercice 14.16 ♡

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2}-x$
2. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-\cos x}{x^2}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+2}-x &= x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)\\ &\underset{X=\frac{1}{x}}{=\!=} \frac{\sqrt{1+3X+2X^2}-1}{X}\\ &= \frac{\frac{3}{2}X+\underset{X\to 0}{o}(X)}{X}\\ &= \frac{3}{2}+\underset{X\to 0}{o}(1)\xrightarrow[X\to 0]{}\boxed{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}}\\ &= e^{\frac{\ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{x^2}}\\ &= e^{\frac{-\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2}}\\ &= e^{-\frac{1}{6}+\underset{x\to 0}{o}(1)}\xrightarrow[x\to 0]{}\boxed{e^{-\frac{1}{6}}}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1} &= \frac{\sin\left(\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)}{\frac{1}{2}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\ &= \frac{\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}{\frac{1}{2}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\ &= \frac{\frac{1}{6}+\underset{x\to 0}{o}(1)}{\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1)}\xrightarrow[x\to 0]{}\boxed{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x} &= \frac{-\frac{7}{6}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\ &= \frac{-\frac{7}{6}+\underset{x\to 0}{o}(1)}{-\frac{1}{6}+\underset{x\to 0}{o}(1)}\xrightarrow[x\to 0]{}\boxed{7}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{e^x - x - \cos x}{x^2} &= \frac{x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}\\ &= 1 + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{1}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}\\ &= -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Exercice 14.17 ♡

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\tan(x-1)}$
2. $\lim_{x\to +\infty} x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
6. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1^x + 2^x + \ldots + n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\tan(x-1)} &\underset{X=x-1}{=\!=} \frac{\ln\left(1+4X+2X^2\right)}{\tan X}\\ &= \frac{4X + \underset{X\to 0}{o}(X)}{X + \underset{X\to 0}{o}(X)}\\ &= \frac{4 + \underset{X\to 0}{o}(1)}{1 + \underset{X\to 0}{o}(1)}\\ &\xrightarrow[X\to 0]{} \boxed{4}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &\underset{X=\frac{1}{x}}{=\!=} \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2}\ln(1+X)\\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2}\left(X - \frac{X^2}{2} + \underset{X\to 0}{o}\left(X^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2} + \underset{X\to 0}{o}(X)\\ &\xrightarrow[X\to 0]{} \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{x-\arctan x}{\sin^3 x} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x-\arctan x}{x^3}\\ &= \frac{\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{x^3}\\ &= \frac{1}{3}+\underset{x\to 0}{o}(1)\\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x} &= \frac{\sin^3 x - x^3}{x^3\sin^3 x}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin^3 x - x^3}{x^6}\\ &= \frac{-\frac{x^5}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}{x^6}\\ &= -\frac{1}{2x}+\underset{x\to 0}{o}(1)\end{aligned}$$

et $\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}=-\infty}$ *tandis que* $\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}=+\infty}$

5.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\ &= \frac{-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2}\\ &= -\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1)\\ &\xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1^x+2^x+\ldots+n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} &= \left(\frac{(1+x\ln 1)+(1+x\ln 2)+\ldots+(1+x\ln n)+\underset{x\to 0}{o}(x)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\\ &= \left(\frac{n+(\ln 1+\ldots+\ln n)\,x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\\ &= \left(1+\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^{\frac{1}{x}}\\ &= e^{\frac{\ln\left(1+\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)}{x}}\\ &= e^{\frac{\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x}}\\ &= e^{\left(\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)+\underset{x\to 0}{o}(1)\right)}\\ &\xrightarrow[x\to 0]{} e^{\ln\left(n!^{\frac{1}{n}}\right)}=\boxed{n!^{\frac{1}{n}}}\end{aligned}$$

Exercice 14.18 ♡♡

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Solution : *Par le changement de variables $h=\dfrac{1}{x}$, on se ramène à la limite lorsque $h\to 0$ de la fonction définie par*

$$g(h)=(\operatorname{ch}h)^{1/h^2}=e^{1/h^2\ln(\operatorname{ch}h)}$$

Mais

$$\ln(\operatorname{ch}h)=\ln(1+\frac{h^2}{2}+o(h^2))=\frac{h^2}{2}+o(h^2)$$

et donc $\dfrac{1}{h^2}\ln(\operatorname{ch}h)\sim\dfrac{1}{2}$ *et par conséquent* $g(h)\xrightarrow[h\to0]{}e^{1/2}$. *La limite cherchée vaut donc* $\boxed{\sqrt{e}}$.

Exercice 14.19 ♡♡

Déterminer la imite lorsque $x\longrightarrow 0$ de la fonction définie par :

$$u(x)=\frac{\ln(\operatorname{ch}x)+\ln(\cos x)}{\sqrt{\operatorname{ch}x}+\sqrt{\cos x}-2}$$

Solution : *Par opérations sur les DLs, on trouve :*

$$\ln(\operatorname{ch}x)=1/2x^2-1/12x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^5\right),\quad \ln(\cos x)=-1/2x^2-1/12x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^5\right)$$

$$\sqrt{\operatorname{ch}x}=1+1/4x^2-1/96x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^5\right),\quad \sqrt{\cos x}=1-1/4x^2-1/96x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^5\right)$$

donc

$$u(x)=\frac{-1/6x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^5\right)}{-1/48x^4+\underset{x\to0}{o}\left(x^5\right)}\xrightarrow[x\to0]{}\boxed{8}$$

Exercice 14.20 ♡♡

Déterminer la limite lorsque $x\to+\infty$ de la fonction définie par :

$$u(x)=\left(\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1\right)\ln x$$

Solution : *On écrit $u(x)$ sous forme exponentielle :*

$$u(x)=\left(e^{x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}-1\right)\ln x=\left(e^{x\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right)}-1\right)\ln x$$

et en utilisant les DLs et les équivalents usuels :

$$\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right)=\ln\left(1+1/(x\ln x)+1/\ln x\underset{x\to+\infty}{o}(1/x)\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}1/(x\ln x)$$

donc $x\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}1/\ln x$ *et* $\exp\left(x\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right)\right)-1\underset{x\to+\infty}{\sim}1/\ln x$. *Donc* $u(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x/\ln x=1$. *On en déduit que* $\boxed{\lim_{+\infty}u=1}$.

Exercice 14.21 ♡♡

Déterminer la limite lorsque $x\to+\infty$ de la fonction définie par :

$$u(x)=\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

Solution : *Par opérations sur les développements limités, on calcule :*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e - \frac{e}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc

$$u(x) = \left(\frac{e}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{e}{2x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

mais

$$\frac{1}{x}\ \ln\left(\frac{e}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{\overline{\overline{X=e/(2x)}}}{} \frac{2X}{e}\ln\left(X + \underset{X\to0^+}{o}(X)\right) \xrightarrow[X\to0^+]{} 0$$

donc $\boxed{u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$.

Exercice 14.22 ♡♡

Trouver la limite lorsque $x\to0^+$ *de la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$$

Solution : *On utilise les équivalents usuels :*

$$f(x) = \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1} = \frac{x^{x^x}\ln x}{e^{x\ln x}-1} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{x^{x^x}\ln x}{x\ln x} = x^{x^x-1}$$

car $x\ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$. *Mais* $x^{x^x-1} = e^{(x^x-1)\ln x}$ *et* $x^x-1 = e^{x\ln x}-1 \underset{x\to0^+}{\sim} x\ln x$ *donc* $(x^x-1)\ln x \underset{x\to0^+}{\sim} x\ln^2 x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ *donc par composition de limite* $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} e^0 = 1}$.

Exercice 14.23 ♡♡

Déterminer la limite lorsque $x\to1^+$ *de la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$$

Solution : *On utilise les équivalents usuels :*

$$f(x) = \frac{x^x-x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} = x\frac{x^{x-1}-1}{\ln(1+\sqrt{(x-1)(x+1)})} \underset{\overline{\overline{X=x-1}}}{} (X+1)\frac{(X+1)^X-1}{\ln\left(1+\sqrt{X(X+2)}\right)}$$
$$\underset{X\to0^+}{\sim} \frac{e^{X\ln(1+X)}-1}{\ln\left(1+\sqrt{X(X+2)}\right)} \underset{X\to0^+}{\sim} \frac{X\ln(1+X)}{\sqrt{X(X+2)}} \underset{X\to0^+}{\sim} \frac{\sqrt{X}\ln(1+X)}{\sqrt{2}} \xrightarrow[X\to0^+]{} \boxed{0}$$

Exercice 14.24 ♡♡♡

1. *Écrire le DL(0,n) de* $\dfrac{1}{1+u}$ *en écrivant le reste exact.*
2. *Que donne cette formule pour* $\dfrac{1}{1+e^{-2t}}$ *?*
3. *Montrer que*

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t}\,dt = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n (-1)^k\frac{e^{-(2k+1)\pi}+1}{(2k+1)^2+1}$$

Solution :

1. *Pour tout* $u\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$,

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^n u^k + \frac{u^{n+1}}{1-u}$$

donc

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k + (-1)^{n+1}\frac{u^{n+1}}{1+u}.$$

2. *On obtient alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{1}{1+e^{-2t}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt} + (-1)^{n+1} \frac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}}.$$

3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} = \frac{2\sin t}{e^t + e^{-t}} = \frac{2\sin t}{e^t} \frac{1}{1+e^{-2t}} = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \sin t + (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t} \sin t}{1+e^{-2t}}.$$

En effectuant deux intégrations par parties successives, on calcule que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\int_0^{\pi} e^{-(2k+1)t} \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{e^{-(2k+1)\pi} + 1}{(2k+1)^2 + 1}$$

donc en passant à l'intégrale dans la somme, on obtient :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} dt = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{e^{-(2k+1)\pi} + 1}{(2k+1)^2 + 1} + \int_0^{\pi} (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t} \sin t}{1+e^{-2t}} \, \mathrm{d}t.$$

Mais

$$\left| \int_0^{\pi} (-1)^{n+1} \frac{2e^{-(2n+3)t} \sin t}{1+e^{-2t}} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{\pi} e^{-2(n+1)t} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} e^{-2(n+1)t} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2(n+1)} \left(e^{-2(n+1)\pi} - 1 \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

d'où le résultat.

14.4.3 Applications à l'étude de fonctions

Exercice 14.25 ♡

Déterminer un équivalent des fonctions suivantes au voisinage du point indiqué :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - \sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)(x+3)}$ *en* $x = 0$.
2. $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{\sin x} - \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{sh} x}$ *en* $x = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + \cos x - \operatorname{ch} x}{\sqrt{x}}$ *en* $x = 0$.
4. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin x}$ *en* $x = 0^+$.
5. $f(x) = \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$ *en* $x = 0$.
6. $f(x) = \arctan(2x) - 2\arctan(x)$ *en* $x = 0$.
7. $f(x) = \arctan \sin x - \sin \arctan x$ *en* $x = 0$.
8. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$ *en* $x = +\infty$.

Solution :

1. *On a* $e^x - \sqrt{1+x} = (1+x) - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x) = \dfrac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$ *et* $\left(x^2+1\right)(x+3) \underset{x\to 0}{\sim} 3$. *Donc*

$$\frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)(x+3)} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{x}{6}}.$$

2. *On a :* $\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{\sin x} = 1 + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$ *et* $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{sh} x} = 1 - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$ *donc :*

$$\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{\sin x} - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \tag{14.8}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{1}{3}x^3} \tag{14.9}$$

3.

$$\frac{x^2 + \cos x - \operatorname{ch} x}{\sqrt{x}} = \frac{-\frac{1}{360}x^6 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}{\sqrt{x}} \tag{14.10}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{-\frac{x^{\frac{11}{2}}}{360}} \tag{14.11}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}-\sqrt{\sin x} &= \sqrt{x}-\sqrt{x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} && (14.12)\\
&= \sqrt{x}\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2}{6}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}\right) && (14.13)\\
&= \sqrt{x}\left(\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) && (14.14)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{x^{\frac{5}{2}}}{12}} && (14.15)
\end{aligned}$$

car $\dfrac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

5. *On a :* $\operatorname{sh}(\sin x)=x-\dfrac{x^5}{15}+\dfrac{x^7}{90}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$ *et* $\sin(\operatorname{sh}x)=x-\dfrac{x^5}{15}-\dfrac{x^7}{90}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$ *donc :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(\sin x)-\sin(\operatorname{sh}x) &= \frac{x^7}{45}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right) && (14.16)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{x^7}{45}} && (14.17)
\end{aligned}$$

6. *On a :* $\arctan x = x-\dfrac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$ *et donc :* $\arctan 2x = 2x-\dfrac{8x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$ *ce qui amène :*

$$\begin{aligned}
\arctan(2x)-2\arctan(x) &= -2x^3+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) && (14.18)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{-2x^3} && (14.19)
\end{aligned}$$

7. *On a* $\arctan(\sin(x)) = x-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{8}x^5-\dfrac{83}{240}x^7+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$ *et* $\sin(\arctan(x)) = x-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{8}x^5-\dfrac{5}{16}x^7+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)$ *donc :*

$$\begin{aligned}
\arctan\sin x-\sin\arctan x &= -\frac{x^7}{30}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{-\frac{x^7}{30}}
\end{aligned}$$

8. *Posons* $\mathrm{X}=\dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}} &= e^{\mathrm{X}}-e^{\frac{\mathrm{X}}{1+\mathrm{X}}}\\
&= e^{\mathrm{X}}-e^{\mathrm{X}\left(1+\mathrm{X}+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(\mathrm{X})\right)}\\
&= e^{\mathrm{X}}-e^{\mathrm{X}+\mathrm{X}^2+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(\mathrm{X}^2)}\\
&= 1+\mathrm{X}+\frac{\mathrm{X}^2}{2}-\left(1+\mathrm{X}-\frac{\mathrm{X}^2}{2}\right)+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}\left(\mathrm{X}^2\right)\\
&= \mathrm{X}^2+\underset{\mathrm{X}\to 0}{o}\left(\mathrm{X}^2\right)\\
&\underset{\mathrm{X}\to 0}{\sim} \mathrm{X}^2\\
&\underset{x\to +\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 14.26 ♡

Étudier la position du graphe de l'application $f : x\mapsto \ln(1+x+x^2)$ *par rapport à sa tangente en* 0 *et* 1.

Solution : On écrit le DL de f à l'ordre 2 en 0 et en 1 :

$$\ln(1+x+x^2) = x + 1/2x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x+x^2) = \ln(3) + (x-1) - 1/6(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)$$

Une équation de la tangente au graphe de f est :

– en 0 : $y = x$

– en 1 : $y = x - 1 + \ln 3$

Donc :

$$f(x) - x = 1/2x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} 1/2x^2$$

et le graphe de f est au dessus de sa tangente au voisinage de 0. De même :

$$f(x) - ((x-1) + \ln 3) = -1/6(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right) \underset{x\to 1}{\sim} -1/6(x-1)^2$$

donc le graphe de f est en dessous de sa tangente au voisinage de 1.

Exercice 14.27 ♡

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que la fonction f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente au graphe de f en 0 puis étudier la position de la courbe de f par rapport cette tangente.

Solution :

1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par opération sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons que f est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en 0. Pour ce faire, calculons le développement limité de f en 0. Dans l'objectif d'étudier la position du graphe de f relativement à sa tangente en 0, poussons ce développement limité à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \\
&= \boxed{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}
\end{aligned}$$

On peut donc prolonger f par continuité et dérivabilité en 0 en posant $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Il peut être utile de le vérifier :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x + \underset{x\to 0}{o}(x) \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$.

Reste à montrer que f' est continue en 0. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{(x-1)e^x+1}{x^2} \\ &= -\frac{\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{o}(1) \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En résumé, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. *Une équation de la tangente en 0 au graphe de f est $\boxed{y=-\frac{x}{2}+1}$. De plus :*

$$\begin{aligned} f(x)-\left(-\frac{x}{2}+1\right) &= \frac{1}{12}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= \frac{x^2}{12}\left(1+\underset{x\to 0}{o}(1)\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{x^2}{12}} \end{aligned}$$

La quantité $f(x)-\left(-\frac{x}{2}+1\right)$ est donc positive dans un voisinage de 0. On en déduit que le graphe de f est situé au dessus de sa tangente en 0 dans un voisinage de 0.

Exercice 14.28

On considère la fonction f donnée pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[-\{0\}$ par $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

1. *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.*
2. *Étudier la dérivabilité du prolongement de f.*

Solution : *On a :*

$$\begin{aligned} (\cos x)^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}} \\ &= e^{\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{x}} \\ &= e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)} \\ &= \boxed{1-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)} \end{aligned}$$

1. *On déduit de ce calcul que $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. On peut alors prolonger f par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=1}$.*
2. *L'existence d'un DL à l'ordre 1 équivaut à l'existence de la dérivée (du moins pour la fonction prolongée). Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$.*

Exercice 14.29

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3}-\dfrac{1}{x^2}$.

1. *Donner le domaine de définition de f.*
2. *Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.*
3. *Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.*

Solution :

1. f *est définie sur* $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
2. *Calculons le développement limité de* f *à l'ordre* 2 *:*

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan x}{(\sin x)^3}-\frac{1}{x^2} &= \frac{x^2\arctan x-\sin^3 x}{x^2\sin^3 x}\\
&= \frac{x^2\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)-\left(x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{13}{120}x^7+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\right)}{x^2\left(x^3-\frac{x^5}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)}\\
&= \frac{\frac{1}{6}x^5+\frac{11}{120}x^7+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)}{x^5-\frac{1}{2}x^7+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)}\\
&= \frac{\frac{1}{6}+\frac{11}{120}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{1-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}\\
&= \left(\frac{1}{6}+\frac{11}{120}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\\
&= \boxed{\frac{1}{6}+\frac{7}{40}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}
\end{aligned}$$

L'existence du DL en 0 *à l'ordre* 1 *assure que l' on peut prolonger* f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0)=\frac{1}{6}$ *et par dérivabilité en posant* $f'(0)=0$.

3. *Une équation de la tangente en* 0 *est* $\boxed{y=\frac{1}{6}}$*. De plus :*

$$\begin{aligned}
f(x)-\frac{1}{6} &= \frac{7}{40}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\
&= \frac{7}{40}x^2\left(1+\underset{x\to 0}{o}(1)\right)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{7}{40}x^2}
\end{aligned}$$

donc la quantité $f(x)-\frac{1}{6}$ *est positive dans un voisinage de* 0 *et on en déduit que le graphe de* f *est au dessus de sa tangente en* 0 *dans un voisinage de* 0.

Exercice 14.30 ♡♡

Faire l'étude locale en 0 *de la fonction définie par :*

$$f(x)=\left(\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$$

Solution : *En effectuant un* $\mathrm{DL}(0,n)$ *de* $\sin$, *on trouvera :*

$$\frac{2}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2(\cdots+o(x^{n-2}))}$$

et de même avec un $\mathrm{DL}(0,n)$ *de* $\cos x$, *on trouvera :*

$$\frac{1}{\ln(\cos x)}=\frac{1}{x^2(\cdots+o(x^{n-2}))}$$

et finalement, on aura à la fin :

$$f(x)=\cdots+o(x^{n-4})$$

Pour faire l'étude locale complète en 0, *il nous faut un terme significatif qui tend vers* 0, *et donc* $n-4\geqslant 1$, *donc* $n\geqslant 5$. *Faisons donc nos développements limités à l'ordre* 5. *On trouve après calculs que*

$$f(x)=1+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)$$

Donc f se prolonge en une fonction $\widetilde{f}$ dérivable en 0, avec $\widetilde{f}(0) = 1$, $\widetilde{f}'(0) = 0$ et localement la courbe représentative de $\widetilde{f}$ est située au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1$.

Exercice 14.31 ♡♡

Étudier le prolongement en 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$$

Solution : *Effectuons un* DL(0,2) *de $f(x)$:*

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

Donc $f(x)$ se prolonge par continuité en 0 en une fonction $\widetilde{f}$ dérivable en 0, avec $\widetilde{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\widetilde{f}'(0) = 0$. Localement, la courbe est située en dessous de sa tangente en 0.

14.4.4 Branches infinies

Exercice 14.32 ♡

Construire la courbe

$$y = \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Solution : *Introduisons la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)}$. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:*

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\left(-\ln(\frac{e^x+1}{2}) + \frac{xe^x}{e^x+1}\right)$$

Étudions la fonction g donnée par $g(x) = \frac{xe^x}{e^x+1} - \ln(\frac{e^x+1}{2})$. On a : $g'(x) = \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}$, de quoi on tire facilement les variations de g puis celles de f : f est croissante sur $\mathbb{R}$. En utilisant les règles de calcul avec les DLs, on montre que : $f(x) = e^{1/2} + \frac{e^{1/2}}{8}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = e^{1/2}$ et le prolongement est dérivable en 0. En $+\infty$, on remarque que

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(x + \ln\left(1+e^{-x}\right) - \ln 2\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc $\lim_{+\infty} f = e$.

Exercice 14.33 ♡

Étudier les branches infinies de la courbe

$$y = x\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Solution : *Introduisons la fonction $f : x \mapsto x\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Elle est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.*
On a une branche infinie d'asymptote $x = 1$ quand $x \to 1^+$ ou quand $x \to 1^-$. On vérifie facilement que $\lim_{+infty} f = +\infty$. Étudions la branche infinie quand $x \to +\infty$. À cette fin, formons un développement asymptotique de $f(1/x)$ au voisinage $x = 0$. On obtient, avec $X = 1/x$: $f(X) = \frac{1}{X}\arctan\frac{1}{1-X} = \frac{\pi}{4X} + \frac{1}{2} + \frac{X}{4} + \underset{X\to 0}{o}(X)$ ou encore $f(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^{-1}\right)$. On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe en $+\infty$. On fait de même en $-\infty$.

Exercice 14.34 ♡

Étudier les branches infinies de la fonction définie par

$$f(x) = x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Solution : *Remarquons que* $f(x) \xrightarrow[x\to -1^\pm]{} \mp\frac{\pi}{2}$. *On vérifie facilement que* $\lim_{+\infty} f = +\infty$. *Au voisinage de* $+\infty$*, on a :*

$$f(x) \overset{X=1/x}{=\!=\!=} \frac{1}{X^2}\arctan\left(\frac{X}{1+X}\right) = \frac{1}{X^2}\arctan\left(X - X^2 + X^3 \underset{X\to 0^+}{o}\left(X^3\right)\right) = \frac{1}{X^2}\left(X - X^2 + 2/3X^3 + \underset{X\to 0^+}{o}\left(X^3\right)\right)$$
$$= \frac{1}{X} - 1 + 2/3X + \underset{X\to 0^+}{o}(X) = x - 1 + \frac{2}{3x} + \underset{x\to+\infty}{o}(1/x)$$

donc la droite d'équation $y = x-1$ *est asymptote à la courbe en* $+\infty$*. On procède de même en* $-\infty$*.*

Exercice 14.35 ♡

Étudier les branches infinies de la fonction définie par

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-3}}$$

Solution : *Comme* $\lim_{3^+} f = +\infty$*,* f *admet une branche infinie d'asymptote* $x = 3$*. En* $\pm\infty$*, on a :* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$*. Calculons un développement asymptotique de* $f(1/x)$ *au voisinage de* 0 *de* $f(1/x)$ *:*

$$f(1/x) = \frac{1-x}{x}e^{\frac{x}{1-3x}} = \frac{1-x}{x}e^{x+3x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} = \frac{1-x}{x}\left(1 + x + 7/2x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) = 1/x + 5/2x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

et $f(x) = x + 5/(2x) + \underset{x\to+\infty}{o}(1/x)$ *donc la droite d'équation* $y = x$ *est asymptote au graphe de* f *en* $+\infty$*. On fait de même en* $-\infty$*.*

Exercice 14.36 ♡♡

Construire les courbes représentatives des deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

On précisera les asymptotes éventuelles, la position de la courbe par rapport aux asymptotes, et on étudiera éventuellement les prolongements par continuité.

Solution :

– *Le domaine de définition de* f *est* $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$*. Cette fonction est dérivable sur son domaine de définition par opérations sur les fonctions dérivables et pour tout* $x \in D_f$*,* $f'(x) = \dfrac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} \leqslant 0$ *(car* $x\ln x \leqslant (x+1)\ln(x+1)$*). Donc la fonction* f *est décroissante. On remarque que* $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x}{\ln x}$ *et donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$*. Puisque* $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$*, la courbe présente une tangente verticale en* 0*. Lorsque* $x \to +\infty$*,* $f(x) = \dfrac{\ln x(1+\frac{1}{x})}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}$ *et donc* $f(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$*. La droite* $y = 1$ *est une asymptote, et la position par rapport à l'asymptote se lit sur le tableau de variations.*
– *Le domaine de définition de* g *est* $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$*.* $g(x) = \exp\left[\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)\right]$*.* g *est dérivable sur son domaine de définition par opération sur les fonctions dérivables et pour tout* $x \in D_g$*,*

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[2x\frac{e^x}{e^x+1} - \ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)\right]$$

Étudions le signe de $\varphi(x) = 2x\dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)$*. On remarque que* $\varphi'(x) = \dfrac{2xe^x}{(e^x+1)^2}$ *est du signe de* x*. Comme* $\varphi(0) = 0$*, il vient que* $g'(x) \geqslant 0$*.*
Lorsque $x \to 0$*, posons*

$$a(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{e^x-1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x - \frac{1}{192}x^3 + o(x^3)$$

On a alors

$$\boxed{g(x) = \sqrt{e} + \frac{\sqrt{e}}{8}x + \frac{\sqrt{e}}{128}x^2 + o(x^2)}$$

Donc g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = \sqrt{e}$. La fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, de dérivée $g'(0) = \dfrac{\sqrt{e}}{8}$ et localement, la courbe se situe au dessus de sa tangente.
Lorsque $x \to +\infty$, posons $h = \dfrac{1}{x}$,

$$\widetilde{g}(h) = \exp\left(h \ln\left[\frac{e^{\frac{1}{h}}+1}{2}\right]\right) = \exp\left(1 + h\ln\left[\frac{1+e^{-\frac{1}{h}}}{2}\right]\right)$$

Lorsque $h \to 0^-$, $e^{\frac{1}{h}} \to 0$, et donc $\widetilde{g}(h) \to 1$. Lorsque $h \to 0^+$, on utilise la deuxième expression : $e^{-\frac{1}{h}} \to 0$ et donc $\widetilde{g}(h) \to e$. On trouve donc que lorsque $x \to -\infty$, $g(x) \to 1$ et lorsque $x \to +\infty$, $g(x) \to e$. La position par rapport aux asymptotes se lit sur le tableau de variations.

Exercice 14.37 ♡♡♡

Étudier le prolongement en 0 et les branches infinies de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)\arctan x}$$

Solution : On a au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)\arctan x} = \frac{x^3}{x + 2/3x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} = \frac{x^2}{1 + 2/3x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)} = x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$

donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)$. Son prolongement est dérivable en 0. La tangente au graphe de f en 0 est l'axe des abscisses et le graphe est au dessus de la tangente.
Pour étudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$, calculons un développement asymptotique au voisinage de 0 de $f(1/x)$. On sait que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ (voir la proposition 4.32 page 166) donc $\arctan 1/x = \pi/2 - x + 1/3x^3 - 1/5x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$ et on a :

$$f(1/x) = \frac{1}{x\left(1+x^2\right)\left(\pi/2 - x + 1/3x^3 - 1/5x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)\right)} = \frac{2}{\pi x}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1 - 2/\pi x + 2/(3\pi)x^3 - (2/5\pi)x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)}$$

et $f(x) = 2\frac{x}{\pi} + 4\pi^{-2} + 2\frac{-1+4\pi^{-2}}{\pi x} + 2\frac{-2/3\pi^{-1} - 2\frac{\pi^2-4}{\pi^3}}{\pi x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^2\right)$ donc la droite d'équation $y = 2\frac{x}{\pi} + 4\pi^{-2}$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

14.4.5 Développements asymptotiques

Exercice 14.38 ♡

Considérons la fonction définie par l'intégrale

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le $\mathrm{DL}(0,10)$ de la fonction f.
3. Déterminer un développement asymptotique de la fonction f au voisinage de $+\infty$ à la précision $1/x^{10}$.

Solution :

1. La fonction $g : t \mapsto 1/\sqrt{1+t^4}$ est définie et continue sur R. D'après le théorème fondamental, elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. De plus G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{G}\left(x^2\right) - \mathrm{G}(x).$$

On en déduit que f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. *Il vient alors que fonction f' est de classe $\mathscr{C}^9$ sur $\mathbb{R}$ et en primitivant le* $\mathrm{DL}(0,9)$ *de f', on obtient le* $\mathrm{DL}(0,10)$ *de f :*

$$f(x) = -x + x^2 + \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{24} - \frac{x^{10}}{10} + o(x^{10}).$$

3. *Posons ensuite* $\mathrm{X} = \dfrac{1}{x}$. *On a*

$$f(\mathrm{X}) = \int_{1/x}^{1/x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{x^2} \frac{-1}{u^2}\frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}}\,\mathrm{d}u = -f(x)$$

en effectuant le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$. *On trouve qu'au voisinage de* $+\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{24x^9} + \frac{1}{10x^{10}} + o(x^{-10})$$

Exercice 14.39 ♡

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{(x^2+1)e^{1/x}}{\sqrt{x^2+2}}$$

Étudier la branche infinie lorsque $x \to +\infty$.

Solution : *On pose* $\mathrm{X} = 1/x$ *et on utilise les DLs usuels en* 0 *:*

$$\begin{aligned}
f(1/\mathrm{X}) &= \frac{1}{\mathrm{X}}\frac{(\mathrm{X}^2+1)e^{\mathrm{X}}}{\sqrt{1+2\mathrm{X}^2}}\\
&= \frac{\mathrm{X}^2+1}{\mathrm{X}}\left(1+\mathrm{X}+\frac{\mathrm{X}^2}{2}+\underset{\mathrm{X}\to0^+}{o}(\mathrm{X}^2)\right)\left(1-\mathrm{X}^2+\underset{\mathrm{X}\to0^+}{o}(\mathrm{X}^2)\right)\\
&= \frac{\mathrm{X}^2+1}{\mathrm{X}}\left(1+\mathrm{X}-1/2\mathrm{X}^2+\underset{\mathrm{X}\to0^+}{o}(\mathrm{X}^2)\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{X}}+1+\frac{\mathrm{X}}{2}+\underset{\mathrm{X}\to0^+}{o}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

et $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}(1/x)$

Exercice 14.40 ♡♡

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \arctan(x^2)\ln\left(2\sqrt{x}+1\right)$$

Trouver un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $1/\sqrt{x}$. En déduire une courbe asymptote simple et la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Solution : *Posons* $\mathrm{X} = 1/x$ *et utilisons les développements limités usuels en* 0^+ *ainsi que la formule 4.32 page 166 :*

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{X}) &= \arctan\left(1/\mathrm{X}^2\right)\ln\left(2/\sqrt{\mathrm{X}}+1\right)\\
&= \left(\pi/2-\arctan\mathrm{X}^2\right)\left(\ln2+\ln\left(1+\sqrt{\mathrm{X}}/2\right)-\ln\sqrt{\mathrm{X}}\right)\\
&= \left(\pi/2-\mathrm{X}^2+\underset{\mathrm{X}\to0^+}{o}(\mathrm{X}^2)\right)\left(\ln2-\frac{1}{2}\ln\mathrm{X}+\frac{1}{2}\mathrm{X}^{1/2}-\frac{1}{8}\mathrm{X}+1/24\mathrm{X}^{3/2}-\frac{1}{64}\mathrm{X}^2+\underset{x\to0^+}{o}(\mathrm{X}^2)\right)\\
&= -\frac{\pi}{4}\ln\mathrm{X}+\frac{\pi\ln2}{2}+\frac{\pi}{4}\sqrt{\mathrm{X}}+\underset{\mathrm{X}\to0^+}{o}\left(\sqrt{\mathrm{X}}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\ln x + \frac{\pi\ln2}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(1/\sqrt{x}\right)$$

La courbe d'équation $y = \dfrac{\pi}{4}\ln x + \dfrac{\pi\ln2}{2}$ *est donc asymptote et la courbe* C_f *est située localement au dessus.*

14.4.6 Applications à l'étude de suites

Exercice 14.41

Déterminer un équivalent des suites dont le terme général est donné par :

1. $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$
2. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Solution :

1. *On utilise le DL(0,1) de* exp *et le fait que* $\ln n / n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*. Il existe des suites* $(\gamma_n), (\tilde{\gamma}_n)$ *toutes deux convergentes vers* 0 *tels que :*

$$\begin{aligned}(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}}\\ &= 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \gamma_n \frac{\ln(n+1)}{n+1} - 1 - \frac{\ln n}{n} + \tilde{\gamma}_n \frac{\ln n}{n}\\ &= \frac{\ln n}{n+1} - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} + \gamma_n \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \tilde{\gamma}_n \frac{\ln n}{n}\\ &= -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} + \gamma_n \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \tilde{\gamma}_n \frac{\ln n}{n}\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que $\dfrac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ *et donc* $\dfrac{\ln(1+1/n)}{n+1}$ *est négligeable par rapport au terme* $\dfrac{\ln n}{n(n+1)}$.

Mais qu'en est-il des autres termes ? Pour le savoir, il faut aller plus loin dans le développement limité. Mais auparavant, pour éviter les redites, notons que $\ln(n+1) - \ln n \sim \dfrac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}}\\ &= 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} + \varepsilon_n \frac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} - 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{n^2} + \tilde{\varepsilon}_n \frac{\ln^2 n}{n^2}\\ &= \frac{\ln n}{n+1} - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} + \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2 n}{2(n+1)^2} + \frac{\ln^2 n}{2(n+1)^2} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + \varepsilon_n \frac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} + \tilde{\varepsilon}_n \frac{\ln^2 n}{n^2}\end{aligned}$$

Maintenant

- $\dfrac{\ln n}{n+1} - \dfrac{\ln n}{n} \sim -\dfrac{\ln n}{n^2}$.
- $\dfrac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim \dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.
- $\dfrac{\ln^2(n+1) - \ln^2 n}{2(n+1)^2} \sim \dfrac{\ln(n+1) + \ln n}{2n(n+1)^2} = o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.
- *Bien entendu* $\varepsilon_n \dfrac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} = o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$ *et* $\tilde{\varepsilon}_n \dfrac{\ln^2 n}{n^2} = o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

Finalement, on a bien $u_n \sim -\dfrac{\ln n}{n^2}$.

2. *Comme* $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ *et que* $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$*, on a :*

$$\begin{aligned}2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n}\left(2 - \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\\ &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}\end{aligned}$$

3. *Comme* $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ *et que* $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{2}{\sqrt{n}}}
\end{aligned}$$

Exercice 14.42

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}
n\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} &= e^{n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{n^2\ln\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)} \\
&= e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{-n^2\left(\frac{1}{6n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{-\frac{1}{6}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{e^{-\frac{1}{6}}}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right) &= n^2\left(e^{\frac{\ln(n+1)}{n}} - e^{\frac{\ln n}{n}}\right) \\
&= n^2 e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}} - 1\right) \\
&= n^2 e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}-1\right) \\
&= n^2 e^{\frac{\ln n}{n}}\left(\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= e^{\frac{\ln n}{n}}\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}
\end{aligned}$$

Exercice 14.43 ♡♡

On considère la suite de terme général :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{e^x}{1+x^2}\,dx$$

Déterminer le $\mathrm{DL}(0,3)$ *de* I_n.

Solution : *Remarquons que comme* $f : x \mapsto e^x/(1+x^2)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, elle admet, d'après le théorème fondamental, une unique primitive* F *sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* 0*. On calcule facilement que* $e^x/(1+x^2) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *donc par primitivation :* $\mathrm{F}(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$*. Il vient alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{F}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 14.44 ♡♡

Montrer que les suites suivantes (u_n) *et* (v_n)*, données par leur terme général, sont adjacentes :*

$$u_n = n - \left(\cos 1 + \cos\frac{1}{2} + \ldots + \cos\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \sin\frac{1}{n}$$

Solution : *La suite* (u_n) *est clairement croissante et* $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*. Reste à montrer que* (v_n) *est décroissante. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On calcule en utilisant les développements limités usuels :*

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \sin\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n} \\
&= n+1-n-\cos\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n+2n(n+1)-2(n+1)^2}{2n(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= -\frac{n+2}{2n(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n+2}{2n(n+1)^2}
\end{aligned}$$

La suite $(v_{n+1} - v_n)$ *est équivalente à une suite négative donc à partir d'un certain rang on a* $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$*. On montre ainsi que* (v_n) *est décroissante à partir d'un certain rang. Les deux suites sont bien adjacentes et elles convergent vers une même limite.*

Exercice 14.45 ♡♡♡

Etudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{1 + \frac{k}{n(n+1)}} - 1\right]$$

Solution : *Utilisons le* $\mathrm{DL}(0,1)$ *de* $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 + \underset{u\to 0}{o}(u)$*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$*, il vient alors*

$$\sqrt{1 + \frac{k}{n(n+1)}} - 1 = \frac{k}{2n(n+1)} + \frac{k}{n(n+1)}\gamma\left(\frac{k}{n(n+1)}\right) \quad \text{et} \quad \lim_0 \gamma = 0.$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2} + k\gamma(\frac{k}{n(n+1)})\right) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n+1)}\gamma\left(\frac{k}{n(n+1)}\right)$$

et

$$\left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n+1)}\left|\gamma(\frac{k}{n(n+1)})\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$*. Comme* $\lim_0 \gamma = 0$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que si* $|x| \leqslant \varepsilon$ *alors* $\left|\gamma(x)\right| \leqslant \varepsilon$*. Par ailleurs, comme* $k \in [\![1,n]\!]$ *:*

$$\frac{k}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc à partir d'un certain rang N*, si* $n \geqslant \mathrm{N}$ *alors* $1/(n+1) \leqslant \eta$ *et pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$*,* $\frac{k}{n(n+1)} \leqslant \eta$*. Il vient alors pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$ *que* $\left|\gamma\left(\frac{k}{n(n+1)}\right)\right| \leqslant \varepsilon$ *et on peut écrire :*

$$\left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a ainsi montré que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/4}$.

14.4.7 Applications à l'étude locale des courbes paramétrées

Exercice 14.46 ♡

Pour chacune des courbes suivantes, déterminer les points stationnaires ainsi que l'allure de la courbe au voisinage de ces points stationnaires.

$$\begin{cases} x(t) = t - \tanh t \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^3 + t^5 \\ y(t) = 1 + t^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -2t + t^2 \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + t^4 \\ y(t) = t^5 + t^7 \end{cases}$$

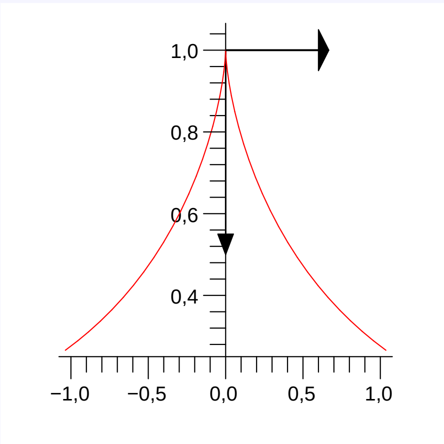
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2} + t \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Solution :

1. *On a : $x'(t) = \operatorname{th}^2 t$ et $y'(t) = -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$. Le seul point stationnaire de la courbe est celui de paramètre $t = 0$. De plus :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3} t^3 \underset{t\to0}{o}\left(t^3\right) \\ y(t) &= 1 - \frac{1}{2} t^2 + \underset{t\to0}{o}\left(t^2\right) \end{aligned}$$

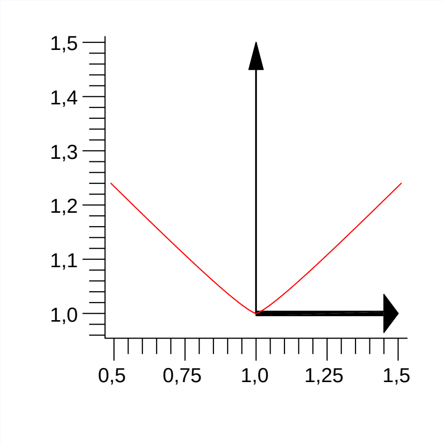
donc le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce.



2. *On montre facilement que le seul point stationnaire de la courbe est celui de paramètre $t = 0$. De plus, comme :*

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + t^3 + t^5 \\ y(t) &= 1 + t^4 \end{aligned}$$

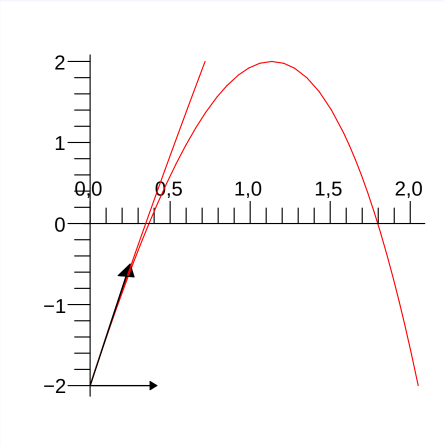
ce point stationnaire est donc un point banal.



3. *On a :* $x'(t) = e^{t-1} - 1$ *et* $y'(t) = 3t^2 - 3$*. Le seul point stationnaire de la courbe est celui de paramètre* $t = 1$*. De plus :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{6}(t-1)^3 + \frac{1}{24}(t-1)^4 + \underset{t\to1}{o}\left((t-1)^4\right) \\ y(t) &= -2 + 3(t-1)^2 + (t-1)^3 \end{aligned}$$

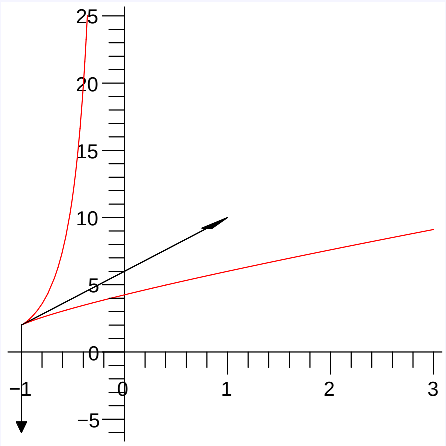
donc le point stationnaire est un point de rebroussement de seconde espèce.



4. *On a :* $x'(t) = -2 + 2t$ *et* $y'(t) = 2t - \frac{2}{t^3}$*. Le seul point stationnaire de la courbe est celui de paramètre* $t = 1$*. De plus :*

$$\begin{aligned} x(t) &= -1 + (t-1)^2 \\ y(t) &= 2 + 2(t-1)^2 - 2(t-1)^3 + \underset{t\to1}{o}\left((t-1)^3\right) \end{aligned}$$

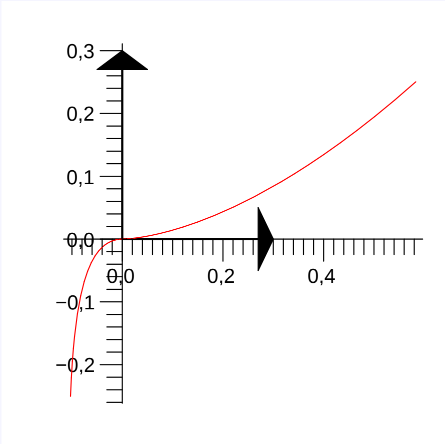
donc le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce.



5. On montre facilement que le seul point stationnaire de la courbe est celui de paramètre $t = 0$. De plus, comme :

$$\begin{aligned} x(t) &= t^3 + t^4 \\ y(t) &= t^5 + t^7 \end{aligned}$$

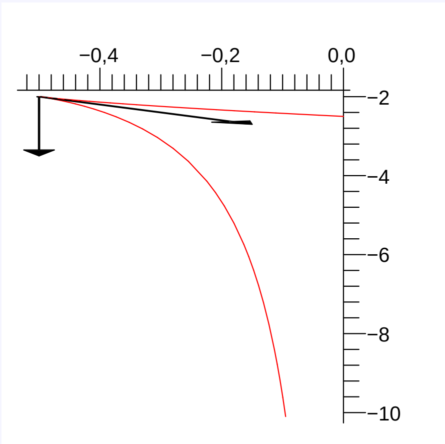
ce point stationnaire est un point d'inflexion.



6. On a : $x'(t) = 1 + t$ et $y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$. Le seul point stationnaire de la courbe est celui de paramètre $t = -1$. De plus :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t+1)^2 \\ y(t) &= -2 - (t+1)^2 - (t+1)^3 + \underset{t\to -1}{o}\left((t+1)^3\right) \end{aligned}$$

donc le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce.



Exercice 14.47 ♡

Étudier les courbes suivantes au voisinage du point de paramètre t_0 :

$$\begin{cases} x(t) = (t+1)\ln t - 2t + 2 \\ y(t) = (t-1)\ln t \end{cases} \quad \text{et } t_0 = 1.$$

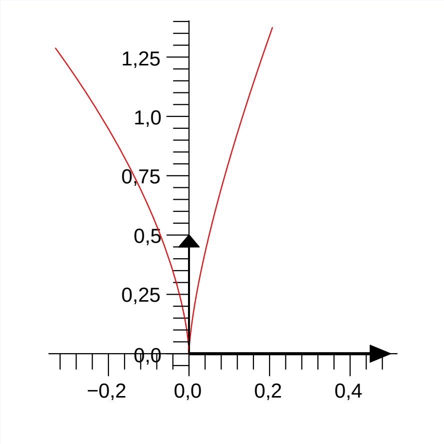
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \frac{1}{2}\cos 2t \\ y(t) = \sin(t) - \frac{1}{2}\sin 2t \end{cases} \quad \text{et } t_0 = 0$$

Solution :

1. On vérifie que le point de paramètre $t_0 = 1$ est bien un point stationnaire de la courbe. De plus :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{6}(t-1)^3 + \underset{t\to 1}{o}\left((t-1)^3\right) \\ y(t) &= (t-1)^2 - \frac{1}{2}(t-1)^3 + \underset{t\to 1}{o}\left((t-1)^3\right) \end{aligned}$$

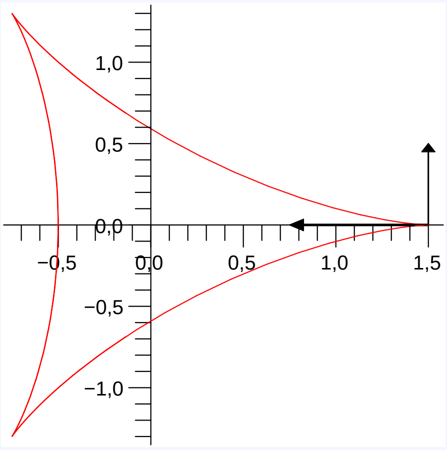
donc le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce.



2. *On vérifie que le point de paramètre* $t_0 = 0$ *est bien un point stationnaire de la courbe. De plus :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^3\right) \\ y(t) &= \frac{1}{2}t^3 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^3\right) \end{aligned}$$

donc le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce.



14.4.8 Application aux équations différentielles linéaires du premier ordre avec problèmes de raccord des solutions

Exercice 14.48 ♡♡

On considère l'équation différentielle (L) : $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

a) Résoudre (L) *dans chacun des sous-intervalles* $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ *et* $I_4 =]1, +\infty[$.

b) Existe-t-il des solutions de (L) *définies sur* $\mathbb{R}$.

Solution :

a) Soit (N) : $y' + \dfrac{2y}{x\left(x^2-1\right)} = \dfrac{x^2}{x\left(x^2-1\right)}$. (N) *est définie sur* $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$. *Notons* (H) *l'équation homogène associée à* (N) *et introduisons la fonction* a : $\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{x\left(x^2-1\right)} = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} \end{array}\right.$. *Pour tout* $k = 1,2,3,4$, *une primitive de* a *sur* I_k *est donnée par :*

$$x \mapsto \ln \frac{|1+x|\,|x-1|}{x^2}.$$

Par conséquent, pour tout $k = 1,2,3,4$, *les solutions de* (H) *sur* I_k *sont, par application du théorème de résolution des équations linéaires du premier degré, de la forme :*

$$\varphi_{\alpha_k} : \left\{\begin{array}{ccc} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha_k \dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)} \end{array}\right. ; \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in [\![1,4]\!]$. Déterminons une solution particulière de (N) *sur* I_k *en utilisant la méthode de variation de la constante. On la cherche sous la forme* $x \mapsto \alpha(x)\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}$ *où* α *est une fonction* $\mathscr{C}^1$ *sur* I_k. *On a :* $\alpha'(x)\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2}{x(x+1)(x-1)}$ *c'est-à-dire* $\alpha'(x) = \frac{1}{x}$ *et donc on peut prendre* $\alpha(x) = \ln|x|$. *En résumé, pour tout* $k \in [\![1,4]\!]$, *les solutions de* (N) *et donc de* (E) *sont, sur* I_k, *de la forme :*

$$\boxed{x \mapsto (\ln|x| + \alpha_k)\frac{x^2}{x^2-1}} \text{ où } \alpha_k \in \mathbb{R}$$

b) *Cherchons s'il existe des solutions de* (E) *définies sur* $\mathbb{R}$. *Si une telle solution* φ *existe alors :*

1. φ *doit être continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$.
2. $\forall k \in [\![1,4]\!], \quad \exists \beta_k \in \mathbb{R} : \quad \varphi_{|I_k} = \left(\ln|x| + \beta_k\right)\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Mais

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\ln x + \beta_3\right)\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x}{x-1} + \frac{\beta_3}{x-1}\right)\frac{x^2}{x+1}$$

qui n'est définie (et vaut $\frac{1}{2}$*) que si* $\beta_3 = 0$. *On montre de même que* $\lim_{x\to 1^+}\varphi(x)$ *n'est définie que si* $\beta_4 = 0$, $\lim_{x\to -1^+}\varphi(x)$ *n'est définie que si* $\beta_2 = 0$ *et* $\lim_{x\to -1^-}\varphi(x)$ *n'est définie que si* $\beta_1 = 0$. *De plus* $\dfrac{\ln|x|}{x^2-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *La fonction* φ *définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln|x|}{x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \pm 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est donc continue sur $\mathbb{R}$. *Montrons qu'elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $x \in I$ *:*

$\boxed{\textit{En } 0}$ $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \dfrac{x^2\ln|x|}{x\left(x^2-1\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *donc* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 0$.

$\boxed{\textit{En } 1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2\ln x}{\left(x^2-1\right)} - \frac{1}{2}}{x-1} \underset{X=x-1}{=\!=} \lim_{X\to 0}\frac{2(X+1)^2\ln(X+1) - (X+2)X}{2X^2(X+2)}$$

et, comme $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \underset{X\to 0}{o}\left(X^2\right)$,

$$\frac{2(X+1)^2\ln(X+1) - (X+2)X}{2X^2(X+2)} = \frac{1}{X+2} + \underset{X\to 0}{o}(1) \xrightarrow[X\to 0]{} \frac{1}{2}$$

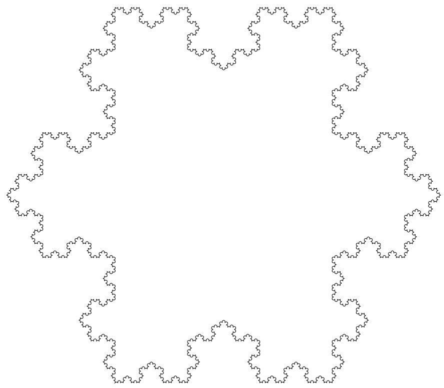
f *est dérivable en* 1 *et* $f'(1) = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\textit{En } -1}$ *On montre de même que* f *est dérivable en* -1 *et que* $f'(-1) = 0$.
On vérifie réciproquement que la fonction f *ainsi construite est solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Chapitre 15

Propriétés métriques des arcs

Pour bien aborder ce chapitre



Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du chapitre 6 qu'il parachève. Les différentes propriétés des courbes planes qu'on a étudié jusqu'ici : présence de point stationnaire, de branche infinie, d'asymptotes sont préservées si on applique à notre courbe une application affine (c'est-à-dire une translation, une homothétie, une rotation, une affinité,...). On dit que ce sont des propriétés affines ou géométriques. Ce n'est pas le cas par exemple de la longueur de la courbe. Ainsi, dans la proposition 7.10 page 277, on a montré que l'image d'un cercle par une affinité orthogonale est une ellipse. Cette ellipse n'a évidemment pas le même périmètre que le cercle initial. La longueur n'est pas une propriété affine. Par contre, si on applique une isométrie à notre courbe, la courbe image sera de même longueur que la courbe initiale. On dit que la longueur est une propriété métrique et ce sont sur ces propriétés que nous allons nous focaliser ici.
Nous définirons en particulier ce qu'est la longueur d'un arc paramétré. Afin d'éviter les arcs trop pathologiques comme le flocon de Von Koch, nous nous limiterons aux arcs de classe $\mathscr{C}^1$. Puis nous définirons la courbure d'un arc. Cette quantité peut être vue de différentes façons. Si un mobile M parcourt la courbe à vitesse constante égale à 1, on verra que la courbure en M est égale, en valeur absolue, à la norme du vecteur accélération. On verra aussi que la courbure en M est l'inverse du rayon du cercle qui épouse la courbe au plus près au voisinage de M [1]. On comprend que la courbure permet de mesurer le virage effectuer par notre mobile : plus la courbure est grande plus le virage est serré.

15.0.9 Difféomorphismes

DÉFINITION 15.1 ♡ **$\mathscr{C}^1$ difféomorphisme**

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ t & \longmapsto & \varphi(t) \end{array} \right.$$

On dit que φ est un $\mathscr{C}^1$-*difféomorphisme* de I vers J lorsque :

1. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
2. φ est bijective ;
3. φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.

PROPOSITION 15.1 ♡ **Caractérisation des $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes**
Soit $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(H1) φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

1. Le cercle osculateur à la courbe au point M

(H2) $\forall t \in I, \varphi'(t) \neq 0$

alors φ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de l'intervalle I vers l'intervalle $J = \varphi(I)$.

Démonstration *Puisque φ' est continue sur I et qu'elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant. Si par exemple $\forall t \in I$, $\varphi'(t) > 0$, alors φ est strictement croissante sur I et d'après le théorème de la bijection 4.1 page 151, φ réalise une bijection bicontinue de I vers l'intervalle $J = f(I)$. Comme de plus, φ' ne s'annule pas sur I, d'après un théorème, la bijection réciproque φ^{-1} est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.*

Remarque 15.1 On définit de la même façon un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de I vers J :
- φ est de classe $\mathscr{C}^k$,
- φ est bijective de I vers J,
- La bijection réciproque $\varphi^{-1} : J \mapsto I$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

15.0.10 Arcs paramétrés

Rappelons qu'un arc paramétré constitue en la donnée d'un couple $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $\overrightarrow{F} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$. le support de l'arc paramétré $(I, \overrightarrow{F})$ est l'ensemble des points du plan :

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathscr{P} \mid \exists t \in I : \ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(t) \right\}$$

Pour tout $t \in I$, on notera $M(t)$ le point du support de l'arc $(I, \overrightarrow{F})$ tel que $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{F}(t)$.

DÉFINITION 15.2 ♡ **Changement de paramétrage**
Soit $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$ un arc paramétré et $\varphi : J \mapsto I$ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de l'intervalle J vers l'intervalle I. On définit la fonction $G = \overrightarrow{F} \circ \varphi : J \mapsto I$ et l'arc paramétré $\gamma' = (J, G)$. On dit que les deux arcs γ et γ' sont $\mathscr{C}^k$-équivalents. En particulier, ils ont même support Γ.

Remarque 15.2
On dit que φ définit un *paramétrage admissible* de la courbe Γ.

DÉFINITION 15.3 **Orientation d'un arc paramétré**
On dit que deux arcs $\mathscr{C}^k$-équivalents ont même orientation si le $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme φ de la définition précédente est strictement croissant de J dans I.

15.1 Propriétés métriques des courbes planes

Les arcs paramétrés de ce paragraphe n'ont pas de points stationnaires et sont de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 2$.

Remarque 15.3 La notion de point régulier ne dépend pas du paramétrage admissible, c'est une notion géométrique. En effet, si $\overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{F} \circ \varphi(t)$, $\overrightarrow{G'}(t) = \varphi'(t).\overrightarrow{F'(\varphi(t))}$. En notant $s_0 = \varphi(t_0)$, puisque $\varphi'(t_0) \neq 0$, $\overrightarrow{F'(t_0)} \neq \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{G'}(s_0) \neq \overrightarrow{0}$.
On peut montrer de même que la notion de tangente en un point ne dépend pas du paramétrage admissible, c'est une notion indépendante du paramétrage choisie.

15.1.1 Longueur, abscisse curviligne d'un arc paramétré

DÉFINITION 15.4 **Longueur d'un arc paramétré**
Soit $\gamma = ([t_0, t_1], \overrightarrow{F})$ un arc paramétré $\mathscr{C}^k$ $(k \geqslant 1)$. On appelle *longueur* de cet arc,

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\overrightarrow{F'(t)}\| \, dt$$

PROPOSITION 15.2 **Indépendance du paramétrage**
Si $\gamma' = ([c, d], \overrightarrow{G})$ est un paramétrage admissible de l'arc, $L(\gamma') = L(\gamma)$ ce qui montre que la longueur est une notion géométrique.

Démonstration *Si* $\overrightarrow{\mathrm{F}}:[a,b]\mapsto\mathbb{R}^2$ *et* $\varphi:[c,d]\mapsto[a,b]$ *est un* $\mathscr{C}^1$*-difféomorphisme croissant, en notant* $\overrightarrow{\mathrm{G}}=\overrightarrow{\mathrm{F}}\circ\varphi$ *et* $\gamma'=([c,d],\overrightarrow{\mathrm{G}})$, $\mathrm{L}(\gamma')=\int_c^d\|\overrightarrow{\mathrm{G}}'(s)\|\,\mathrm{d}s=\int_c^d\|\overrightarrow{\mathrm{F}}'(\varphi(s))\||\varphi'(s)|\,\mathrm{d}s$ *et par le changement de variables* $t=\varphi(s)$, $\mathrm{d}t=\varphi'(s)\,\mathrm{d}s$, *comme* $\varphi(c)=a$ *et* $\varphi(d)=b$, *on trouve que* $\mathrm{L}(\gamma')=\int_a^b\|\overrightarrow{\mathrm{F}}'(t)\|\,\mathrm{d}t=\mathrm{L}(\gamma)$. *On trouve le même résultat si* φ *est décroissante car dans ce cas,* $\varphi(c)=b$, $\varphi(d)=a$ *et* $|\varphi'(t)|=-\varphi'(t)$.

PLAN 15.1 : Pour calculer la longueur d'une courbe dont on connaît une équation polaire

On suppose que l'arc γ *est donné par l'équation polaire :* $\rho=f(\theta)$ *avec* f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[-\pi,\pi]$. *On se place dans le repère polaire* $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{u}_r,\overrightarrow{u}_\theta\right)$. *On a :*

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(\theta)=f(\theta)\,\overrightarrow{u}_r\quad\text{et}\quad\overrightarrow{\mathrm{F}}'(\theta)=f'(\theta)\,\overrightarrow{u}_r+f(\theta)\,\overrightarrow{u}_\theta$$

On calcule alors : $\mathrm{L}(\gamma)=\int_{-\pi}^{\pi}\|\overrightarrow{\mathrm{F}}'(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta$.

PLAN 15.2 : Pour calculer la longueur du graphe d'une fonction

Pour calculer le graphe de la fonction $f:\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *entre deux points* a *et* b *de* I, *on la paramétrise par :*

$$\begin{cases}x(t)&=t\\y(t)&=f(t)\end{cases}$$

et

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(t)=\left(x(t),y(t)\right)\implies\overrightarrow{\mathrm{F}}'(t)=\left(1,f'(t)\right)$$

donc : $\mathrm{L}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 15.1 Calculons la longueur d'un arc d'astroïde (voir l'exemple 6.8 page 242).

$$\begin{cases}x(t)&=a\cos^3t\\y(t)&=a\sin^3t\end{cases}$$

pour $t\in[0,\pi/2]$.

$$\|\overrightarrow{\mathrm{F}}'(t)\|=3a|\cos t\sin t|=\frac{3a}{2}|\sin(2t)|$$

$\mathrm{L}(\gamma)=\dfrac{3a}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{3a}{2}$.

Exemple 15.2 Calculons la longueur d'un arc de parabole d'équation $y=\dfrac{x^2}{2p}$ pour $x\in[0,\mathrm{L}]$. La courbe peut être paramétrée par

$$\begin{cases}x(t)&=t\\y(t)&=\dfrac{t^2}{2p}\end{cases}$$

d'où $\mathrm{L}(\gamma)=\displaystyle\int_0^{\mathrm{L}}\sqrt{1+t^2/p^2}\,\mathrm{d}t=p\int_0^{p\mathrm{L}}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. Avec une intégration par parties (pour utiliser $\int\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\operatorname{argsh}u=\ln(1+\sqrt{1+u^2})$), on trouve que $\mathrm{L}=\dfrac{\mathrm{L}\sqrt{p^2+\mathrm{L}^2}}{2p}+\dfrac{p}{2}\ln\left(\dfrac{\mathrm{L}+\sqrt{p^2+\mathrm{L}^2}}{p}\right)$.

DÉFINITION 15.5 **Abscisse curviligne**
Soit un arc $\gamma=(\mathrm{I},\overrightarrow{\mathrm{F}})$ régulier (sans point stationnaire) et $t_0\in\mathrm{I}$. On appelle *abscisse curviligne* d'origine t_0, la fonction

$$s:\begin{cases}\mathrm{I}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\t&\longmapsto&\displaystyle\int_{t_0}^t\|\overrightarrow{\mathrm{F}}'(u)\|\,\mathrm{d}u\end{cases}$$

Le réel $s(t)$ représente la longueur de la portion de la courbe située entre $\mathrm{M}(t_0)$ et $\mathrm{M}(t)$.

PROPOSITION 15.3 **Paramétrage normal**
Une abscisse curviligne définit un $\mathscr{C}^{k-1}$-difféomorphisme de $\mathrm{I}=[a,b]$ vers $\mathrm{J}=[c,d]$. Le paramétrage admissible associé

$\overrightarrow{G} = \overrightarrow{F} \circ s^{-1}$ décrit la même courbe Γ avec la même orientation, mais parcourue à vitesse constante 1 :

$$\forall s \in J, \quad \|\overrightarrow{G'}(s)\| = 1$$

Démonstration *La fonction $s : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable (théorème fondamental) et $\forall t \in [a,b]$, $s'(t) = \|\overrightarrow{F'(t)}\| > 0$ puisqu'on a supposé que la courbe n'avait pas de point stationnaire. La fonction s est donc strictement croissante sur $[a,b]$ et d'après le théorème de la bijection, elle définit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[a,b]$ vers $[c,d]$. Comme $\overrightarrow{G}(u) = \overrightarrow{F}(s^{-1}(u))$, en dérivant pour $u \in [c,d]$, $\overrightarrow{G'(u)} = \dfrac{1}{s'(s^{-1}(u))}\overrightarrow{F}'(s^{-1}(u))$ d'où $\|G'(u)\| = \dfrac{\|\overrightarrow{F}'(s^{-1}(u))\|}{s'(s^{-1}(u))} = 1$ puisque $s'(t) = \|\overrightarrow{F}'(t)\|$.*

DÉFINITION 15.6 **Repère de Frenet**
Soit $M = O + \overrightarrow{F}(t)$ un point régulier d'un arc paramétré plan $(I, \overrightarrow{F})$. On définit le *vecteur tangente unitaire* au point M par $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|}$ et on définit le *vecteur normal unitaire* comme étant le vecteur unitaire $\overrightarrow{N}$ faisant un angle orienté de $+\dfrac{\pi}{2}$ avec le vecteur $\overrightarrow{T}$. On appelle *repère de Frenet* au point M, le repère $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$.

15.1.2 Courbure

THÉORÈME 15.4 ♡ **Relèvement**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $F : I \mapsto \mathbb{U}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{U})$ $(k \geqslant 1)$. Alors il existe une application $\theta \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I, \quad F(t) = e^{i\theta(t)}$$

Démonstration *Soit $t_0 \in I$, comme $f(t_0) \in \mathbb{U}$, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F(t_0) = e^{i\theta_0}$.*

1. ***Analyse :*** *si θ existe, en dérivant,*
$$F'(t) = i\theta'(t)F(t)$$
Comme $|F(t)| = 1$, $\theta'(t) = \dfrac{F'(t)}{iF(t)}$ donc $\forall t \in I$,
$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{F'(s)}{iF(s)}\,ds$$
2. ***Synthèse :*** *Définissons θ comme ci-dessus. Comme $F \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{U})$, θ est bien définie et $\theta \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{C})$. Posons $g(t) = e^{-i\theta(t)}F(t)$, $g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{C})$. et $\forall t \in I$,*
$$g'(t) = e^{-i\theta(t)}\left[F'(t) - i\theta'(t)F(t)\right] = 0$$
Donc g est constante sur I et comme $g(t_0) = e^{-i\theta_0}F(t_0) = 1$, $g = 1$. Donc $\forall t \in I$, $F(t) = e^{i\theta(t)}$. On conclut en remarquant que puisque $|F(t)| = 1$, $\mathrm{Im}(\theta(t)) = 0$ et donc θ est à valeurs réelles. Remarque : Comme $\forall t \in I$, $F(t)\overline{F}(t) = 1$, en dérivant,
$$F(t)\overline{F'}(t) + F'(t)\overline{F}(t) = 0$$
et l'on retrouve que $F'/F \in i\mathbb{R}$ et donc que θ est à valeurs réelles.

PROPOSITION 15.5 ♡ **Paramètre angulaire**
On considère un arc paramétré plan $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$ de classe $\mathscr{C}^k$, où $k \geqslant 2$. Il existe une fonction $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall t \in I$,

$$\overrightarrow{T}(t)\begin{vmatrix}\cos\alpha(t)\\ \sin\alpha(t)\end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{N}(t)\begin{vmatrix}-\sin\alpha(t)\\ \cos\alpha(t)\end{vmatrix}$$

Démonstration *Comme $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{F}'(t)}{\|\overrightarrow{F}'(t)\|}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ de norme 1, on peut la considérer comme une fonction complexe à valeur dans le cercle unité. Il suffit alors d'appliquer le théorème de relèvement pour obtenir une fonction α de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.*

Notation 15.3 **Notations différentielles.** Nous allons adopter de nouvelles notations très pratiques pour manipuler des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes. Si $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} [c,d] & \longrightarrow & [a,b] \\ s & \longmapsto & t=\varphi(s) \end{array}\right.$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, on note $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \varphi'(s)$. Alors on justifie la notation :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = (\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}t)} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}}$$

De même pour une composée de difféomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} [a,b] & \xrightarrow{\varphi} & [c,d] & \xrightarrow{\psi} & [e,f] \\ t & \longmapsto & s & \longmapsto & u \end{array}$$

avec $\theta = \psi\circ\varphi$,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \theta'(s) = \psi'(\varphi(s)) \times \psi'(s) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$$

On notera par la suite pour les courbes paramétrées, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{F}}'(t)$. Si s est une abscisse curviligne sur la courbe, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\|$. Nous avons vu qu'une abscisse curviligne définissait un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[c,d]$ vers $[a,b]$ et qu'on pouvait utiliser un paramétrage admissible $\overrightarrow{\mathrm{G}} = \overrightarrow{\mathrm{F}}\circ s^{-1} : [c,d] \mapsto \mathbb{R}^2$ de notre courbe. Pour $t\in[a,b]$, on note $s = s(t)\in[c,d]$ et M le point de la courbe tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{F}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{G}}(s)$. En notant $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\mathrm{G}}'(s)$, on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}$$

DÉFINITION 15.7 ♡ **Courbure d'un arc plan**

On définit la courbure d'un arc $(\mathrm{I},\overrightarrow{\mathrm{F}})$ sans point stationnaire au point $\mathrm{M}(s)$ par

$$\boxed{c(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}}$$

où s est une abscisse curviligne. Si $c\neq 0$, l'inverse de la courbure au point $\mathrm{M}(s)$, $r = \dfrac{1}{c}$ est appelé rayon de courbure de l'arc au point $\mathrm{M}(s)$.

Remarque 15.4 Si on suppose que la courbure ne s'annule pas sur notre arc, la fonction α définit un nouveau $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme et nous pouvons l'utiliser pour obtenir un nouveau paramétrage admissible. Cette remarque justifie les calculs avec les notations différentielles qui vont suivre.

THÉORÈME 15.6 ♡ **Formules de Frenet**

Pour un arc paramétré $\gamma = (\mathrm{I},\overrightarrow{\mathrm{F}})$ de classe $\mathscr{C}^2$,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} = c\overrightarrow{\mathrm{N}},\quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}s} = -c\overrightarrow{\mathrm{T}}}$$

Démonstration *Il suffit de dériver les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{N}}$:*

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\begin{vmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{vmatrix} = c\overrightarrow{\mathrm{N}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\begin{vmatrix}-\cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{vmatrix} = -c\overrightarrow{\mathrm{T}}$$

15.1.3 Calcul pratique de la courbure

1. **Pour un arc paramétré** $\gamma = (\mathrm{I}, \overrightarrow{\mathrm{F}})$, avec $\overrightarrow{\mathrm{F}}(t)\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$:

   (a) Rectification : on introduit une abscisse curviligne s :

   $$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\overrightarrow{\mathrm{F}'}(t)\|$$

   (b) on introduit le paramètre angulaire α :

   $$c = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

   (c) Puisque α représente l'angle entre l'horizontale et le vecteur tangente unitaire $\overrightarrow{\mathrm{T}}$, c'est également l'angle entre l'horizontale et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{F}}'(t)\begin{vmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{vmatrix}$:

   $$\boxed{\tan\alpha = \frac{y'}{x'}}$$

   Il arrive souvent que cette quantité puisse se mettre sous la forme $\tan f(t)$, auquel cas $\alpha = f(t) + k\pi$ et $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = f'(t)$.

   (d) sinon on dérive :

   $$(1+\tan^2\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{y''x' - y'x''}{x'^2}$$

   (e) On en déduit l'expression finale de la courbure (ne pas la retenir par coeur) :

   $$c(t) = \frac{[\overrightarrow{\mathrm{F}'}(t), \overrightarrow{\mathrm{F}''}(t)]}{\|\overrightarrow{\mathrm{F}'}(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{3/2}}$$

2. **Pour une courbe polaire** $\rho = \rho(\theta)$:

   (a) Rectification : introduisons une abscisse curviligne sur notre arc. Puisque $\overrightarrow{\mathrm{F}}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u(\theta)}$, $\overrightarrow{\mathrm{F}}'(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u}(\theta) + \rho(\theta)\overrightarrow{v}(\theta)$ et comme $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormale, $\|\overrightarrow{\mathrm{F}}'(\theta)\| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ d'où

   $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}$$

   (b) On introduit l'"angle α entre l'horizontale et le vecteur tangente unitaire. Si V désigne l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{u}(\theta)$ et le vecteur tangente unitaire $\overrightarrow{\mathrm{T}(\theta)}$,

   $$\boxed{\alpha = \theta + \mathrm{V}}$$

   De la relation

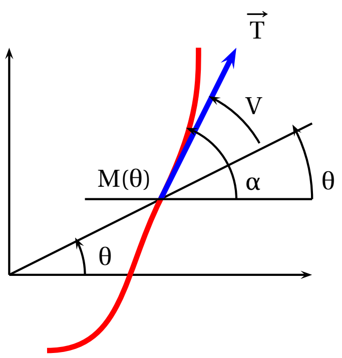


FIGURE 15.1 – $\alpha = \theta + \mathrm{V}$

$$\tan \mathrm{V}(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$$

que l'on essaie de mettre sous la forme $\tan g(\theta)$. Sinon, en dérivant on trouve $\dfrac{dV}{d\theta}$, et alors

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}$$

(c) Courbure :

$$c(\theta) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta} \times \frac{1}{\dfrac{ds}{d\theta}}$$

(d) Expression finale de la courbure au point $M(\theta)$ (ne pas l'apprendre par coeur) :

$$c(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

3. **Pour une courbe cartésienne** $y = f(x)$, on la considère comme une courbe paramétrée de paramètre x :

(a) Rectification : si s est une abscisse curviligne sur la courbe, comme $\overrightarrow{F}'(x) = \begin{vmatrix} 1 \\ f'(x) \end{vmatrix}$,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

(b) En notant α l'angle entre l'horizontale et le vecteur tangente unitaire (ou le vecteur $\overrightarrow{F}'(x)$,

$$\tan\alpha(x) = y'(x)$$

En dérivant l'expression, on tire

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''(x)}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

(c) On en déduit la courbure :

$$c(x) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{dx}{ds}$$

(d) d'où l'expression finale de la courbure au point $M(x)$ (ne pas l'apprendre par coeur) :

$$c(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$$

Exemple 15.4 Calculons la courbure en un point régulier $M(t)$, $t \in]0, \pi/2[$ de l'astroïde (voir l'exemple 6.8 page 242) :

$$\begin{cases} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\sin^3 t \end{cases}$$

Introduisons une abscisse curviligne s sur notre courbe :

$$\frac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{F}'(t)\| = 3a|\cos t \sin t| = \frac{3a}{2}\sin(2t)$$

Si α désigne l'angle entre l'horizontale et le vecteur tangente unitaire ($\overrightarrow{F}'(t)$),

$$\tan\alpha = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t = \tan(-t)$$

d'où $\dfrac{d\alpha}{dt} = -1$. On en déduit l'expression de la courbure au point $M(t)$:

$$c = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2}{3a\sin(2t)}$$

Le résultat trouvé est cohérent, lorsqu'on parcourt la courbe dans le sens des t croissants entre 0 et $\pi/2$, l'angle α est négatif. D'autre part, lorsque $t \to 0$ et $t \to \pi/2$, on se rapproche d'un point stationnaire où la courbure devient infinie.

Exemple 15.5 Calculons la courbure en un point $M(\theta)$ de la cardioïde d'équation polaire

$$\rho = a(1+\cos\theta)$$

où $\theta \in [0,\pi[$ (voir la section 6.3.3 page 246). Si s est une abscisse curviligne sur notre courbe,

$$\frac{ds}{d\theta} = \|\overrightarrow{F}'(\theta)\| = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = 2a|\cos(\theta/2)|$$

En notant α l'angle entre l'horizontale et le vecteur tangente unitaire (ou $\overrightarrow{F}'(\theta)$), V l'angle entre la droite polaire $\mathscr{D}_\theta$ et $\overrightarrow{F}'(\theta)$,

$$\alpha = \theta + V$$

$$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} = \tan(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})$$

d'où $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On en tire l'expression de la coubure au point $M(\theta)$:

$$c = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}}\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{3}{4a\cos(\theta/2)}$$

Exemple 15.6 Calculons la courbure en un point $M(x)$ de la courbe $y = e^x$. Comme $\overrightarrow{F}(x)\left|\begin{matrix}x\\e^x\end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{F}'(x)\left|\begin{matrix}1\\e^x\end{matrix}\right.$, si s est une abscisse curviligne,

$$\frac{ds}{dx} = \|\overrightarrow{F}'(x)\| = \sqrt{1+e^{2x}}$$

En notant α le paramètre angulaire, $\tan\alpha = e^x$ d'où en dérivant,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

On en tire la courbure :

$$c = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}}\frac{d\alpha}{dx} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$$

DÉFINITION 15.8 **Centre de courbure**
On appelle *centre de courbure* en un point M d'un arc paramétré Γ, le point I défini par

$$\boxed{I = M + r.\overrightarrow{N}}$$

où r est le rayon de courbure au point M et $\overrightarrow{N}$ le vecteur normale unitaire au point M. On appelle *cercle de courbure* ou *cercle osculateur*, le cercle de centre I et de rayon r. On montre que c'est le cercle qui « colle »le mieux à la courbe au point M.

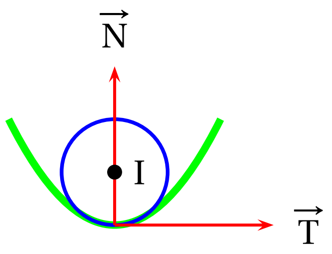


FIGURE 15.2 – Centre de courbure

Pour calculer en pratique le centre de courbure, on commence par exprimer le vecteur tangente unitaire au point M :

$$\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{vmatrix}$$

d'où l'on déduit l'expression du vecteur normale unitaire au point M :

$$\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{dy}{ds} \\ \frac{dx}{ds} \end{vmatrix}$$

Par conséquent, en notant $I\begin{vmatrix} x_I \\ y_I \end{vmatrix}$ et puisque $r = \frac{ds}{d\alpha}$, on tire :

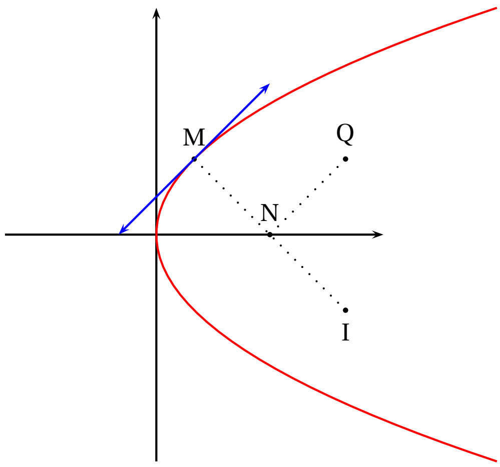
$$\begin{cases} x_I = x_M - \frac{ds}{d\alpha} \times \frac{dy}{ds} = x_M - \frac{dt}{d\alpha} \times \frac{dy}{dt} \\ y_I = y_M + \frac{ds}{d\alpha} \times \frac{dx}{ds} = y_M + \frac{dt}{d\alpha} \times \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Il suffit donc d'exprimer $\tan\alpha = \frac{dx/dt}{dy/dt}$ et de dériver pour trouver $\frac{d\alpha}{dt}$ et de reporter dans les formules précédentes pour obtenir les coordonnées du point I.

Exemple 15.7 On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation

$$(\mathscr{P}) : y^2 = 2px \quad (p > 0)$$

Soit $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ un point de cette parabole. On note N l'intersection de la normale en M à la parabole avec l'axe (Ox). Soit $\mathscr{D}$ la parallèle à la tangente à la parabole au point M passant par le point N. On note Q l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec la parallèle à (Ox) passant par M. Montrer que le centre de courbure I au point M et le point Q ont même abscisse.



Commençons par paramétrer cette parabole :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{t^2}{2p} \\ y(t) &= t \end{cases}$$

La tangente au point M(t) est dirigée par $\overrightarrow{F}'(t)\begin{vmatrix} t/p \\ 1 \end{vmatrix}$, et la normale par $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} 1 \\ -t/p \end{vmatrix}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $N = M + \lambda\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} t^2/2p + \lambda \\ t - \lambda t/p \end{vmatrix}$. Comme $y_N = 0$, on en tire $N\begin{vmatrix} \frac{t^2 + 2p^2}{2p} \\ 0 \end{vmatrix}$. Comme il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q = N + \mu\overrightarrow{F}'(t)$, et que $y_Q = t$,

on en tire $Q\left|\begin{array}{l}\dfrac{3t^2+2p^2}{2p}\\ t\end{array}\right.$. Introduisons maintenant le paramètre angulaire α. Le vecteur tangente unitaire en M s'écrit $\overrightarrow{T}\left|\begin{array}{l}\cos\alpha=\dfrac{dx}{ds}\\ \sin\alpha=\dfrac{dy}{ds}\end{array}\right.$ et le vecteur normale unitaire $\overrightarrow{N}\left|\begin{array}{l}-\sin\alpha=-\dfrac{dy}{ds}\\ \cos\alpha=\dfrac{dx}{ds}\end{array}\right.$. Les cordonnées du centre de courbure vérifient :

$$\begin{cases} x_I &= x-\dfrac{ds}{d\alpha}\dfrac{dy}{ds}=x-\dfrac{dt}{d\alpha}\dfrac{dy}{dt}\\ y_I &= y+\dfrac{ds}{d\alpha}\dfrac{dx}{ds}=y+\dfrac{dt}{d\alpha}\dfrac{dx}{dt}\end{cases}$$

et comme $\tan\alpha=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{p}{t}$, en dérivant on tire $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{p}{t^2+p^2}$. En reportant, on trouve finalement que

$$x_I=\frac{t^2}{2p}+\frac{t^2+p^2}{p}=\frac{3t^2+2p^2}{2p}$$

et le centre de courbure a même abscisse que le point Q.

Exemple 15.8 Tracer l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t)=t-\operatorname{th} t\\ y(t)=\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\end{cases}$$

Cette courbe s'appelle la *tractrice* (voir l'exercice 6.7 page 253). Déterminer l'ensemble des centres de courbure de cette courbe (développée).

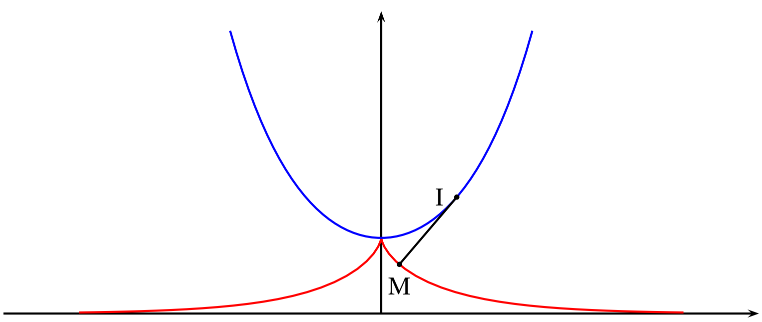
L'étude de la courbe ne présente pas de difficulté. Le point $(0,1)$ est un point de rebroussement de première espèce à tangente verticale. En introduisant le paramètre angulaire α,

$$\tan\alpha=\frac{y'}{x'}=-\frac{1}{\operatorname{sh} t}$$

En dérivant, on trouve que $\dfrac{d\alpha}{dt}=\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$. En reportant dans les coordonnées du centre de courbure,

$$\begin{cases} x_I &= t-\operatorname{th} t+\operatorname{ch} t\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}=t\\ y_I &= \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}+\operatorname{ch} t\operatorname{th}^2 t=\dfrac{\operatorname{sh}^2 t+1}{\operatorname{ch} t}=\operatorname{ch} t\end{cases}$$

On reconnaît la chaînette d'équation cartésienne $y=\operatorname{ch}(x)$.



La *développée d'une courbe* est le lieu des centres de courbure de la courbe. On remarque sur cet exemple que la normale à la tractrice au point M est la tangente à la développée au point I. Montrons que cette propriété est vraie dans le cas général en utilisant les notations différentielles :

$$I=M+r\overrightarrow{N}$$

Dérivons cette relation par rapport à l'abscisse curviligne (qui définit un paramétrage admissible sur la courbe et sa développée). En utilisant la deuxième formule de Frenet,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}.\overrightarrow{\mathrm{N}} + r.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}s} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}.\overrightarrow{\mathrm{N}} - rc.\overrightarrow{\mathrm{T}} \\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}.\overrightarrow{\mathrm{N}}\end{aligned}$$

Comme le vecteur $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}s}$ est tangent à la développée au point I et que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ est normal à la courbe au point M, on a prouvé le résultat.

15.2 Exercices

15.2.1 Calcul de longueur

Exercice 15.1 ♡

Calculer les longueurs des courbes données par :

1. *le paramétrage* $\begin{cases} x(t) &= 3\cos t - \cos 3t \\ y(t) &= 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$.
2. *l'équation polaire* $\rho(\theta) = \cos^2\theta$
3. *l'équation cartésienne* $y = \operatorname{ch} x$ *pour* $x \in [-a, a]$ *avec* $a > 0$.

Solution :

1. *On utilise la trigonométrie :*

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{9(-\sin t + \sin 3t)^2 + 9(\cos t - \cos 3t)^2}\,\mathrm{d}t = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\sin t \sin 3t - \cos t \cos 3t)}\,\mathrm{d}t =$$
$$3\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2t}\,\mathrm{d}t = 6\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 12\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \boxed{24}.$$

2. *On utilise la méthode 37 page 641. Dans le repère polaire* $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$*, on considère la fonction vectorielle* $\overrightarrow{\mathrm{F}}(\theta) = \cos^2\theta\,\overrightarrow{u}_r$ *et on calcule :*
$$\overrightarrow{\mathrm{F}}'(\theta) = -2\sin\theta\cos\theta\,\overrightarrow{u}_r + \cos^2\theta\,\overrightarrow{u}_\theta.$$
En raison des symétries de la courbe, on peut calculer la longueur de la courbe par une intégrale de 0 *à* $\pi/2$*. On mulipliera le résultat obtenu par* 4*. Comme* $\overrightarrow{u}_r$ *et* $\overrightarrow{u}_\theta$ *sont orthogonaux :*
$$\mathrm{L}(\gamma) = 4\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sqrt{4\sin^2\theta + \cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sqrt{1+3\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^1 \sqrt{1+3u^2}\,\mathrm{d}u = \boxed{4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$$
en posant $u = \sin\theta$.
3. *On utilise la méthode 37 page 641 et on se limite à l'intervalle* $[0, a]$ *en raison des symétries de la courbe :*
$$\mathrm{L}(\gamma) = 2\int_0^a \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a 1 + \operatorname{sh}^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^a \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}r = \int_0^a \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2a + a}.$$

15.2.2 Calcul de courbure

Exercice 15.2 ♡♡

On considère une courbe passant par l'origine, et tangente à l'axe $(\mathrm{O}x)$ *d'équation :*

$$(\mathrm{C}) \quad y = f(x)$$

avec f *de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur un voisinage de* 0 *et* $f(0) = f'(0) = 0$ *et* $f''(0) \neq 0$.

1. *Déterminer le rayon de courbure à la courbe* (C) *au point* $(0,0)$.
2. *On considère la famille de cercles centrés en* $\Omega\begin{vmatrix} 0 \\ \lambda \end{vmatrix}$ *passant par le point* 0*. Au voisinage de* 0*, on peut écrire l'équation de la branche de ce cercle passant par l'origine sous la forme :*
$$(\mathscr{C}_\lambda \quad y = g(x)$$
Déterminer λ *pour que l'on aît* $g(x) - f(x) = o(x^2)$.

Solution :

1. *On calcule le rayon de courbure au point* O *par*

$$r = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{d\alpha}$$

et puisque $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(0)}$ *et que* $\tan\alpha(t) = f'(t)$*, en dérivant, on trouve que*

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{f''(t)}{1 + f'^2(t)}$$

Donc le rayon de courbure en 0 *vaut :*

$$r = \frac{\left(1 + f'^2(0)\right)^{3/2}}{f''(0)} = \frac{1}{f''(0)}$$

2. *L'équation cartésienne d'un cercle centré en* Ω *et passant par l'origine s'écrit*

$$y^2 - 2\lambda y + x^2 = 0$$

d'où l'on tire localement au voisinage de 0 *:*

$$y = g(x) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - x^2} = \lambda\left[1 - \left(1 - (x/\lambda)^2\right)^{1/2}\right]$$

En effectuant un DL(0,2) *de la fonction* g*, on trouve*

$$g(x) = \frac{x^2}{2\lambda} + o(x^2)$$

Et donc

$$g(x) - f(x) = \left[f''(0) - 1/\lambda\right]\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Pour avoir un contact d'ordre supérieur à 2 *des deux courbes, il faut donc que* $\lambda = \frac{1}{f''(0)} = r$.

Exercice 15.3 ♡♡

On considère une hyperbole équilatère $\mathscr{H}$ *et un point* M *de cette hyperbole. On note* I *le centre de courbure à l'hyperbole au point* M*. La normale à l'hyperbole au point* M *recoupe l'hyperbole en un autre point* N*. Montrez que*

$$\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{MI}$$

Solution : *Considérons le repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *défini par les asymptotes à l'hyperbole. Dans ce repère l'équation de l'hyperbole est*

$$(\mathscr{H}): \quad xy = 1$$

Soit $M\left|\begin{matrix} x \\ 1/x \end{matrix}\right.$ *un point de l'hyperbole. Comme le vecteur* $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} 1 \\ -1/x^2 \end{matrix}\right.$ *dirige la tangente à l'hyperbole au point* M*, le vecteur* $\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix} 1 \\ x^2 \end{matrix}\right.$ *dirige la normale. On a* $N = M + \lambda\overrightarrow{n}$ *avec* $N \in \mathscr{H}$*. On tire*

$$N\left|\begin{matrix} -1/x^3 \\ -x^3 \end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NM}\left|\begin{matrix} \dfrac{x^4+1}{x^3} \\ \dfrac{x^4+1}{x} \end{matrix}\right.$$

Pour déterminer le centre de courbure au point M*, calculons le rayon de courbure défini par*

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{d\alpha}$$

Comme

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 1/x^4} = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$$

et que

$$\tan\alpha(x) = -1/x^2 \implies \frac{d\alpha}{dx} = \frac{2x}{x^4+1}$$

on tire

$$R = \frac{(x^4+1)^{3/2}}{x^4+1}$$

et puisque le vecteur normale unitaire au point M *s'écrit*

$$\overrightarrow{N}\left|\begin{array}{l} 1/\sqrt{x^4+1} \\ x^2/\sqrt{x^4+1}\end{array}\right.$$

on détermine

$$\overrightarrow{MI} = R.\overrightarrow{N} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{x^4+1}{2x^3} \\ \dfrac{x^4+1}{2x}\end{array}\right. = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$$

15.2.3 Développée, développante

Exercice 15.4 ♡

Déterminer la développée (ensemble des centres de courbures) de la cardioïde d'équation polaire

$$\rho = a(1+\cos\theta) \quad (a>0)$$

Solution : *On trouve en notant* $I\left|\begin{array}{l} x_I \\ y_I\end{array}\right.$ *le centre de courbure au point* $M(\theta)$ *que*

$$\begin{cases} x_I = 2a/3 + a/3(\cos\theta(1-\cos\theta) \\ y_I = a/3\sin\theta(1-\cos\theta)\end{cases}$$

et donc si l'on se place dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $A\left|\begin{array}{l} 2a/3 \\ a/3\end{array}\right.$*, l'équation polaire de la développée est*

$$\rho = \frac{a}{3}\left(1-\cos\theta\right)$$

On trouve une cardioïde (par une rotation d'angle π*).*

Exercice 15.5 ♡

Déterminer la développée d'une ellipse d'équation

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solution : *Paramétrons l'ellipse :*

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t\end{cases}$$

Si α *désigne l'angle entre l'horizontale et le vecteur tangente unitaire au point* $M(t)$*,*

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}\tan(t+\pi/2)$$

et en dérivant,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

D'où l'on tire, si x_I *et* y_I *désignent les coordonnées du centre de courbure :*

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t = c\cos^3 t \\ y_I = \dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t = (-a/b)c\sin^3 t\end{cases}$$

En notant $c = \dfrac{a^2-b^2}{a}$. Par conséquent, la développée de l'ellipse est l'image par l'affinité de rapport $-a/b$ par rapport à (Oy) de l'astroïde d'équation paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = c\cos^3 t \\ y(t) = c\sin^3 t \end{cases}$$

15.2.4 Exercices divers

Exercice 15.6 ♡♡

On considère dans le plan ramené à un repère orthonormé $\mathscr{R}$ la parabole d'équation

$$(\mathscr{P}) : y^2 = 2px$$

et un point M de cette parabole. On note N l'intersection de la normale en M à $\mathscr{P}$ et l'axe (Ox). On note $\mathscr{D}$ la parallèle à la tangente à la parabole passant par le point N, et Q l'intersubsection de la droite $\mathscr{D}$ avec la parallèle à (Ox) passant par M. Montrer que le centre de courbure I à la parabole en M et le point Q ont même abscisse.

Solution :

1. Paramétrons la parabole :
$$\begin{cases} x(t) = t^2/(2p) \\ y(t) = t \end{cases}$$

2. $M\left|\begin{array}{l} x_M = t^2/2p \\ y_M = t \end{array}\right.$. Le vecteur $\overrightarrow{F}'(t)\left|\begin{array}{l} t/p \\ -1 \end{array}\right.$ dirige la tangente à $\mathscr{P}$ au point M et donc le vecteur $\overrightarrow{u}\left|\begin{array}{l} -1 \\ t/p \end{array}\right.$ dirige la normale à la parabole au point M.

3. En notant $N\left|\begin{array}{l} x_N \\ y_N \end{array}\right.$, puisque $N = M + \lambda.\overrightarrow{u}$, on obtient
$$\begin{cases} x_N = t^2/(2p) - \lambda \\ y_N = t + \lambda t/p \end{cases}$$
d'où l'on tire $\lambda = -p$ et
$$N\left|\begin{array}{c} \dfrac{t^2+2p^2}{2p} \\ 0 \end{array}\right.$$

4. Notons $Q\left|\begin{array}{l} x_Q \\ y_Q \end{array}\right.$. Comme $Q = N + \lambda\overrightarrow{F}'(t)$, on tire
$$\begin{cases} x_Q = \dfrac{t^2+2p^2}{2p} + \lambda\dfrac{t}{p} \\ y_Q = \lambda \end{cases}$$
et puisque $y_Q = y_M = t$, on obtient $\lambda = t$ d'où
$$Q\left|\begin{array}{c} \dfrac{3t^2+2p^2}{2p} \\ t \end{array}\right.$$

5. Notons $I\left|\begin{array}{l} x_I \\ y_I \end{array}\right.$ le centre de courbure au point M à la parabole. D'après le cours, on a
$$x_I = x_M - \frac{ds}{d\alpha}\frac{dy}{ds} = x_M - \frac{dt}{d\alpha}\frac{dy}{dt} = x_M - \frac{dt}{d\alpha}$$
(puisque $\frac{dy}{dt} = 1$). Comme
$$\tan\alpha = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{p}{t}$$

en dérivant, on tire

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{p}{p^2 + t^2}$$

et donc

$$x_\mathrm{I} = \frac{t^2}{2p} + \frac{t^2 + p^2}{p} = \frac{3t^2 + 2p^2}{2p} = x_\mathrm{Q}$$

Chapitre 16

Suites et fonctions à valeurs complexes

Pour bien aborder ce chapitre

On généralise aux suites et fonctions à valeurs complexes certain des résultats des chapitres 10, 11, 12 et 13. Il n'existe pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ compatible avec l'addition aussi certaines notions ou certains théorèmes énoncés dans le cas réel n'ont pas de traduction dans le cas complexe. On pense au théorème des gendarmes, au théorème de la limite monotone, à la notion de suite adjacente, à l'égalité des accroissements finis...

16.1 Suites complexes

DÉFINITION 16.1 **Convergence d'une suite de complexes**
On dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) converge vers un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle $|z_n - a|$ converge vers 0.
On dit que la suite (z_n) diverge vers l'infini lorsque la suite réelle $|z_n|$ diverge vers $+\infty$.

Remarque 16.1 Une autre façon de dire que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$:

$$\forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geqslant N,\ z_n \in D(a, r)$$

où $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\}$ est le disque de centre a et de rayon r.

Multimédia : Une suite qui tourne en se rapprochant de sa limite

Remarque 16.2 Toutes les propriétés démontrées sur les suites réelles *ne faisant pas intervenir d'inégalités* sont encore valables pour les suites complexes (les démonstrations n'utilisent que l'inégalité triangulaire). En particulier, on dispose des théorèmes généraux sur les sommes, produits, quotients, l'unicité de la limite, une suite convergente est bornée. Par contre, le passage à la limite dans les inégalités, le théorème de la limite monotone et le théorème des gendarmes ne sont plus valables. Le théorème suivant permet de montrer en pratique qu'une suite de complexes converge vers une limite connue.

THÉORÈME 16.1 **Théorème de majoration**
Soit (z_n) une suite de complexes et $a \in \mathbb{C}$. Si (α_n) est une suite de réels vérifiant :

1. $|z_n - a| \leqslant \alpha_n$ à partir d'un certain rang ;
2. $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

Alors $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Démonstration *D'après le théorème 10.8 page 358 pour les suites réelles, la suite réelle* $(|z_n - a|)$ *converge vers* 0.
Une autre façon d'étudier une suite complexe consiste à étudier deux suites réelles.

THÉORÈME 16.2 **La convergence d'une suite complexe correspond à la convergence des parties réelles et imaginaires**

$$\left(z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\right) \iff \left(\begin{cases} \operatorname{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Re}(a) \\ \operatorname{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Im}(a) \end{cases}\right)$$

Démonstration

⇒ *Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, on sait que $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et que $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$ donc $|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(a)| = |\mathrm{Re}(z_n - a)| \leqslant |z_n - a|$ et donc $\mathrm{Re}\, z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(a)$.*

⇐ *Il suffit d'écrire $|z_n - a| = \sqrt{\mathrm{Re}(z_n - a)^2 + \mathrm{Im}(z_n - a)^2}$ d'où le résultat grâce à la continuité de la fonction racine en 0 et les théorèmes généraux sur les suites réelles.*

THÉORÈME 16.3 **Suites géométriques complexes**

Soit un nombre complexe $k \in \mathbb{C}$. On appelle *suite géométrique* de raison k, la suite définie par $z_n = k^n$. Elle vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = kz_n$.

1. $|k| < 1 \implies (z_n)$ converge vers 0.
2. $|k| \geqslant 1$ et $k \neq 1 \implies (z_n)$ diverge.
3. $k = 1 \implies (z_n)$ est constante et vaut 1.

Démonstration

– *Si $|k| < 1$, $|z_n| = |k|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (on utilise la suite géométrique réelle de raison $|k| < 1$).*

– *Si $|k| > 1$, $|z_n| = |k|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la suite (z_n) diverge vers l'infini.*

– *Si $|k| = 1$ avec $k \neq 1$, la démonstration est plus astucieuse. On utilise la relation de récurrence vérifiée par la suite (z_n). Si par l'absurde la suite (z_n) convergeait vers un complexe a, la suite extraite (z_{n+1}) convergerait également vers a, la suite (kz_n) convergerait vers ka et par unicité de la limite, on aurait $a = ka$ d'où $(1-k)a = 0$ et donc $a = 0$ puisque $k \neq 1$. Mais avec l'inégalité triangulaire, comme $||z_n| - |a|| \leqslant |z_n - a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la suite $(|z_n|)$ convergerait vers $|a| = 0$ ce qui est impossible puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| = |k|^n = 1$.*

THÉORÈME 16.4 **Séries géométriques complexes**

On appelle série géométrique de raison k, la suite complexe de terme général

$$S_n = 1 + k + \cdots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i$$

1. $|k| < 1 \implies S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-k}$
2. $|k| \geqslant 1 \implies (S_n)$ diverge.

Démonstration *Lorsque $k = 1$, on calcule $S_n = (n+1)$ et donc la suite (S_n) diverge. Lorsque $k \neq 1$, on dispose de l'expression d'une somme géométrique :*

$$S_n = \frac{1 - k^{n+1}}{1-k}$$

Lorsque $|k| < 1$, la suite géométrique complexe (k^n) converge vers 0 donc la suite (S_n) converge vers $\dfrac{1}{1-k}$. Lorsque $|k| \geqslant 1$ et $k \neq 1$, on raisonne par l'absurde. Si la suite (S_n) convergeait vers un complexe a, on aurait

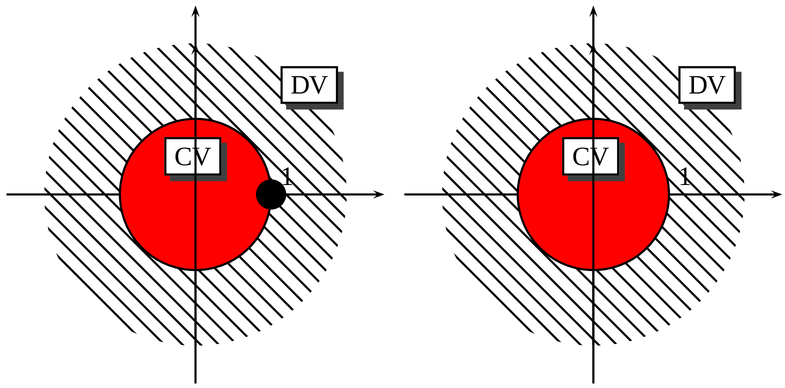
$$k^n = \frac{1 + (k-1)S_n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1 + (k-1)a}{k}$$

ce qui est absurde puisqu'on a vu que la suite géométrique complexe (k^n) diverge.

THÉORÈME 16.5 **Théorème de Bolzano-Weierstrass**

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration *Soit $z_n = x_n + i\,y_n$ une suite complexe bornée. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, on peut en extaire une sous-suite $\left(x_{n_k\, k\in\mathbb{N}}\right)$ qui converge vers un réel x. La suite $\left(y_{n_k\, k\in\mathbb{N}}\right)$ est une sous-suite d'une suite bornée, donc elle est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, on peut en extaire une sous-suite $\left(y_{n_{k_p}\, p\in\mathbb{N}}\right)$ qui converge vers un réel y. Maintenant la suite $\left(x_{n_{k_p}\, p\in\mathbb{N}}\right)$ est une suite extraite d'une suite convergente, donc elle est convergente vers la même limite. Finalement la suite $\left(z_{n_{k_p}\, p\in\mathbb{N}}\right)$ converge (vers $x + i\,y$). Ce qu'il fallait démontrer.*



(a) Convergence d'une suite géométrique complexe (b) Convergence d'une série géométrique complexe

FIGURE 16.1 – Suites et séries géométriques complexe

16.2 Continuité des fonctions à valeurs complexes

Si on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui s'identifie au module du complexe $z = x + iy$ de telle sorte que tous les résultats suivants seront valables pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
On considère dans ce paragraphe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$. On peut considérer pour $x \in I$, la partie réelle et imaginaire de $f(x)$ et écrire $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ où $f_1, f_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles. On écrira $f_1 = \operatorname{Re}(f)$, $f_2 = im(f)$, $\overline{f} = f_1 - i f_2$, $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$.

DÉFINITION 16.2 **Limite d'une fonction à valeurs complexes**
Soit un réel $x_0 \in I$ et un complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} z$ si et seulement si

$$|f(x) - z| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

(La fonction $x \mapsto \left|f(x) - z\right|$ est à valeurs réelles).
Cette définition est équivalente à dire que les deux fonctions réelles $f_1(x)$ et $f_2(x)$ tendent respectivement vers a et b lorsque x tend vers x_0.

DÉFINITION 16.3 **Fonctions continues**
Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$ et on dira que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point $x_0 \in I$.

Remarque 16.3
– On montre que f est continue sur I si et seulement si les deux fonctions f_1 et f_2 sont continues sur I.
– On montre qu'une fonction continue en un point x_0 est bornée au voisinage de ce point.
– Les opérations algébriques sur les limites vues pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont encore valables (limite d'une somme, produit, quotient).
– L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ forme une algèbre.

16.3 Dérivabilité des fonctions à valeurs complexes

DÉFINITION 16.4 **Dérivée d'une fonction à valeurs complexes**
Soit $x_0 \in I$.
– On dit que f est dérivable au point x_0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Cette limite finie se note $f'(x_0)$.
– On dit qu'une fonction est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I et on note $\mathbb{D}(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.
– On définit de même les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Remarque 16.4
- $f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t)$.
- On a les mêmes règles pour le calcul de la dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit et d'un quotient que pour les fonctions à valeurs réelles.
- L'ensemble $\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathbb{C})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}(k)$ sur l'intervalle I est une $\mathbb{C}$ algèbre.
- On note $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle I.

THÉORÈME 16.6 **Dérivation de l'exponentielle complexe**
Soit un nombre complexe $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} \end{cases}$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable sur I et $\forall t \in \mathrm{I}$, $f'(t) = \alpha e^{\alpha t}$.
Si $\varphi : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction dérivable sur I, alors la fonction définie par $g(t) = e^{\varphi(t)}$ est dérivable sur I avec $\forall t \in \mathrm{I}$, $g'(t) = e^{\varphi(t)}\varphi'(t)$.

Démonstration *Il suffit d'utiliser la définition de l'exponentielle d'un nombre complexe. Pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}\cos(bt) + ie^{at}\sin(bt)$. Les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall t \in \mathbb{R}$,*

$$f'(t) = e^{at}(-b\sin(bt) + a\cos(bt)) + ie^{at}(b\cos(bt) + a\sin(bt)) = (a+ib)e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) = \alpha e^{\alpha t}$$

L'autre résultat se montre de même en examinant la partie réelle et imaginaire de la fonction g.

Remarque 16.5 Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis ne sont plus valables pour les fonctions à valeurs complexes comme le montre la fonction définie par $f(t) = e^{it}$. Elle est continue sur le segment $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, avec $f(0) = f(2\pi) = 1$ et pourtant $\forall t \in]0,2\pi[$, $f'(t) = ie^{it} \neq 0$.

16.4 Intégration des fonctions à valeurs complexes

DÉFINITION 16.5 **Intégrale d'une fonction complexe**
Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, on définit son intégrale comme étant le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 16.6 Les techniques de changement de variables et d'intégration par parties sont encore valables pour les intégrales de fonctions à valeurs complexes.

THÉORÈME 16.7 **Majoration du module d'une intégrale complexe**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ continue sur le segment $[a,b]$. On peut majorer le module de l'intégrale par l'intégrale du module

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

avec égalité si et seulement si la fonction f est de la forme $f(t) = g(t)e^{i\theta}$ avec g une fonction réelle positive. En d'autres termes, il y a égalité si et seulement si la fonction complexe f prend ses valeurs dans une demi-droite issue de l'origine.

Démonstration *Cette démonstration n'est pas évidente et mérite une attention particulière. Posons $z = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et écrivons ce complexe sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \geqslant 0$. On a donc*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \rho = e^{-i\theta}z = \int_a^b e^{-i\theta}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définissons la fonction complexe g par $g(t) = e^{-i\theta}f(t) = \mathrm{Re}(g) + i\mathrm{Im}(g)$. Puisque $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \rho \in \mathbb{R}$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(g)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(g)(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b \mathrm{Im}(g)(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Utilisons maintenant la majoration de la valeur absolue d'une intégrale d'une fonction réelle :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^g \mathrm{Re}(g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |\mathrm{Re}(g)(t)|\,\mathrm{d}t$$

Mais $\forall t \in [a,b]$, $|\mathrm{Re}(g)(t)| \leqslant |g(t)| = |e^{-i\theta} f(t)| = |f(t)|$ *d'où finalement* $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Le cas d'égalité dans cette majoration se produit si et seulement si $\int_a^b \mathrm{Re}(g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |g|(t)\,\mathrm{d}t$*, c'est à dire si et seulement si* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(g)(t) = 0$ *et* $\mathrm{Re}(g)(t) \geqslant 0$. *En d'autres termes, la fonction* g *doit être à valeurs réelles positives et alors* $f(t) = e^{i\theta} g(t)$ *ce qui montre que la fonction* f *prend ses valeurs dans la demi-droite issue de l'origine faisant un angle* θ *avec l'axe* $(\mathrm{O}x)$. *On vérifie facilement la réciproque.*

THÉORÈME 16.8 **Théorème fondamental de l'analyse**
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$ continue sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$. Alors la fonction définie sur I par

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\forall x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Démonstration *Il suffit d'appliquer le théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions réelles aux deux fonctions* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *et utiliser la définition de la dérivée d'une fonction complexe.*

Bien que l'égalité des accroissements finis soit fausse pour une fonction complexe, on dispose tout de même de l'inégalité des accroissements finis avec une hypothèse un peu plus forte.

THÉORÈME 16.9 **Inégalité des accroissements finis**
Soit une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

et par majoration, on en déduit l'inégalité des accroissements finis

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant (b-a) \sup_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|$$

Démonstration *Il suffit d'utiliser le théorème fondamental deuxième forme pour les fonctions réelles et les deux fonctions* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *et de majorer ensuite grâce au théorème 16.7,*

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

La fonction f' *étant continue sur un segment, elle est bornée sur ce segment et donc en notant* $\|f'\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$, *on obtient l'inégalité souhaitée.*

THÉORÈME 16.10 **Formules de Taylor**
Soit un intervalle I et une fonction $f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{C}$.

1. *Formule de Taylor-intégrale :* si $[a,x] \subset \mathrm{I}$ et si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,x]$, alors

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

2. *Formule de Taylor-Lagrange :* si $x \in \mathrm{I}$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $[x, x+h] \subset \mathrm{I}$ et si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[x, x+h]$, alors

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \mathrm{R}_n(h)$$

avec $|\mathrm{R}_n(h)| \leqslant \frac{\mathrm{M}_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1}$ où $\mathrm{M}_{n+1} = \sup_{t\in[x,x+h]} |f^{(n+1)}(t)|$.

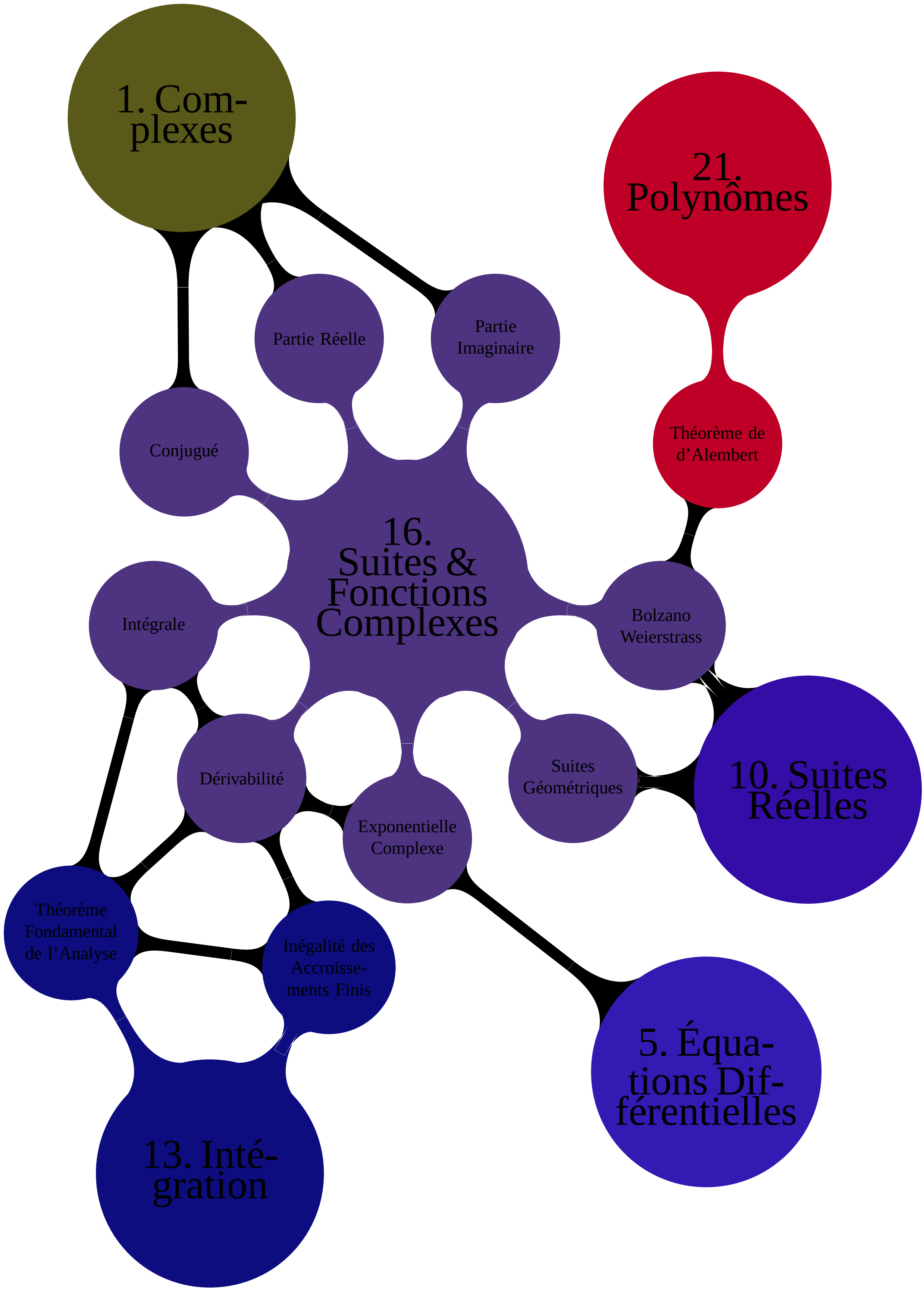
3. *Formule de Taylor-Young :* si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I, et si $a \in \mathrm{I}$, alors $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + o\big((x-a)^n\big)$$

Démonstration *Il suffit d'écrire les formules de Taylor pour les fonctions réelles et les fonctions* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 16.7 La formule de Taylor-Young permet de trouver les développements limités d'une fonction à valeurs complexes.

Exemple 16.1 Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $f(t) = \dfrac{1}{1-tz}$, on a $f(t) = 1 + zt + z^2t^2 + z^nt^n + o(x^n)$.



16.5 Exercices

16.5.1 Suites

Exercice 16.1 ♡

VRAI ou FAUX :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes telle que* $\lim_{n\to\infty}|u_n| = +\infty$ *alors on a* $\lim_{n\to\infty}|\mathrm{Re}(u_n)| = +\infty$ *ou* $\lim_{n\to\infty}|\mathrm{I}m(u_n)| = +\infty$.

Solution : *FAUX. On considère* $u_n = n$ *si* n *est pair et* $u_n = in$ *si* n *est impair.*

Exercice 16.2 ♡♡

Soit $z\in\mathbb{C}$. *Démontrer que* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Solution :

On pose $z = x+iy.u_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n.|u_n(z)|^2 = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^n.\ \ln|u_n(z)|^2 = n\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\sim n.\frac{2x}{n}\sim 2x$. *(pour* $x\neq 0$*) D'où* $\lim_{n\to\infty}\ln|u_n(z)|^2 = 2x$ *(même pour* $x=0$*) et* $\lim_{n\to\infty}|u_n(z)| = e^x$. *Soit* ϑ_n *un argument de* $1+\frac{z}{n}.\tan\vartheta_n = \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{y}{n+x}$. *D'où* $\lim_{n\to\infty}\tan\vartheta_n = 0.\vartheta_n$ *est déterminé modulo* 2π. *On peut choisir* ϑ_n *dans* $]-\pi;\pi]$. $\lim_{n\to\infty}\tan\vartheta_n = \pi$ *ou* $\lim_{n\to\infty}\tan\vartheta_n = -\pi$ *est impossible car* $\lim_{n\to\infty}1+\dfrac{z}{n} = 1$. *reste* $\lim_{n\to\infty}\tan\vartheta_n = 0$. *Donc* $\tan\vartheta_n\sim\vartheta_n$. *Donc* $n.\tan\vartheta_n\sim n\vartheta_n$. *Or* $\lim_{n\to\infty}n.\tan\vartheta_n = y.n\vartheta_n$ *qui est un argument de* $u_n(z)$ *tend vers* y. *Finalement* $u_n(z) = |u_n(z)|.(\cos n\vartheta_n + i\sin n\vartheta_n)\to e^x(\cos y + i.\sin y) = e^{z\cdot}$.

Exercice 16.3 ♡♡

Démontrer que $(\cos n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente.*

Solution : *Supposons le contraire et notons* $\lim_{n\to\infty}\cos n^2 = \ell$.

La suite extraite $(\cos 4n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\cos 9n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers* ℓ. *On a* $\cos 4x = \mathrm{T}_4(\cos x)$ *et* $\cos 9x = \mathrm{T}_9(\cos x)$ *où* T_4 *et* T_9 *sont des polynômes de degrés* 4 *et* 9 *respectivement. Voir paragraphe B.3.1 p. 1164. On a donc* $\mathrm{T}_4(\ell) = \ell$ *et* $\mathrm{T}_9(\ell) = \ell$. *Donc* ℓ *est une racine commune des polynômes* $\mathrm{T}_4(\mathrm{X})-\mathrm{X}$ *et* $\mathrm{T}_9(\mathrm{X})-\mathrm{X}$.

Pour les racines de $\mathrm{T}_4(\mathrm{X})-\mathrm{X}$, *on cherche les différentes valeurs de* $\cos x$ *vérifiant* $\cos 4x = \cos x$. *Or* $\cos 4x = \cos x$ *pour* $4x = x+2k\pi$ *ou* $4x = -x+2k\pi$. *On prend les* x *dans* $[0,\pi]$ *pour avoir des valeurs distinctes du cosinus. On obtient ainsi les quatre valeurs distinctes* $\cos 0, \cos\frac{2\pi}{3}$ *et* $\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}$. *Ces quatre racines sont distinctes. Ce sont donc les quatre racines de* $\mathrm{T}_4(\mathrm{X})-\mathrm{X}$.

On travaille de même pour $\mathrm{T}_9(\mathrm{X})-\mathrm{X}$ *en résolvant* $\cos 9x = \cos x$. *Malheureusement, on trouve parmi les neuf racines,* $1, \cos\frac{2\pi}{5}$ *et* $\cos\frac{4\pi}{5}$ *ce qui n'arrange pas nos affaires. On retrouve encore ces trois racines chez* $\mathrm{T}_{16}(\mathrm{X})-\mathrm{X}$, *donc on va chercher* $\mathrm{T}_{25}(\mathrm{X})-\mathrm{X}$ *dont les racines sont données par*

$25x = x+2k\pi$: $1, \cos\frac{2\pi}{24}, \cos\frac{4\pi}{24}, \cos\frac{6\pi}{24}, \cos\frac{8\pi}{24}, \cos\frac{10\pi}{24}, \cos\frac{12\pi}{24}, \cos\frac{14\pi}{24}, \cos\frac{16\pi}{24}, \cos\frac{18\pi}{24}, \cos\frac{20\pi}{24}, \cos\frac{22\pi}{24}$ *et* -1. *(13 racines)*

et $25x = -x+2k\pi$: $\cos\frac{2\pi}{26}, \cos\frac{4\pi}{26}, \cos\frac{6\pi}{26}, \cos\frac{8\pi}{26}, \cos\frac{10\pi}{26}, \cos\frac{12\pi}{26}, \cos\frac{14\pi}{26}, \cos\frac{16\pi}{26}, \cos\frac{18\pi}{26}, \cos\frac{20\pi}{26}, \cos\frac{22\pi}{26}$ *et* $\cos\frac{22\pi}{26}$ *(outre* -1 *et* 1*) ce qui fait 12 racines.*

Soit 25 racines en tout. La seule racine commune à $\mathrm{T}_4(\mathrm{X})-\mathrm{X}, \mathrm{T}_9(\mathrm{X})-\mathrm{X}$ *et* $\mathrm{T}_{25}(\mathrm{X})-\mathrm{X}$ *est donc* 1. *Si* $(\cos n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, ce ne peut être que vers* 1. *De là, on déduit que* $(\sin n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0, *donc que* $(\exp(in^2))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 1. *La suite* $(\exp(i(n+1)^2))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge elle aussi vers* 1. *Donc la suite* $\left(\dfrac{\exp(i(n+1)^2)}{\exp(in^2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergerait elle aussi vers* 1. *Autrement dit la suite* $(\exp(2in))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergerait vers* $\exp(-i)$. *Donc la suite constante* $\exp(2i) = \dfrac{\exp(2i(n+1))}{\exp(2in)}$ *tendrait vers* $\dfrac{\exp(-i)}{\exp(-i)} = 1$ *ce qui n'est pas possible.*

16.5.2 Dérivées

Exercice 16.4 ♡♡

Calculer la dérivée n*-ième de* $f(x) = \cos x\,\mathrm{ch}\,x$.

Solution : *Soit* $\mathrm{F}(x) = e^{(1+i)x}$, *on a* $\mathrm{F}^{(n)}(x) = (1+i)^n e^{(1+i)x} = \sqrt{2^n}e^{in\pi/4}e^{(1+i)x}$. *En prenant la partie réelle et en posant* $f_1(x) = e^x\cos x$, $f_1^{(n)}(x) = \sqrt{2^n}e^x\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos x - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sin x\right) = \sqrt{2^n}e^x\cos\left(\frac{n\pi}{4}+x\right)$. *De même, soit* $\mathrm{G}(x) = e^{(-1+i)x}$, *on a* $\mathrm{G}^{(n)}(x) = (-1+i)^n e^{(-1+i)x} = \sqrt{2^n}e^{3in\pi/4}e^{(-1+i)x}$. *En prenant la partie réelle et en posant* $g_1(x) = e^{-x}\cos x$,

$g_1^{(n)}(x) = \sqrt{2^n}e^{-x}\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\cos x - \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\sin x\right) = \sqrt{2^n}e^{-x}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}+x\right)$. *Donc* $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2^n}e^{x}\cos\left(\frac{n\pi}{4}+x\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2^n}e^{-x}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}+x\right)$.

16.5.3 Intégrales et primitives

Exercice 16.5 ♡

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$.

Solution :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \exp((1+i)x)\; dx &= \frac{1}{1+i}\left[\exp((1+i)x)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{ie^{\pi/2}-1}{1+i} \\ &= \frac{\left(ie^{\pi/2}-1\right)(1-i)}{2} \\ &= \frac{\left(-1+e^{\pi/2}\right)+i\left(1+e^{\pi/2}\right)}{2}\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\, dx = \frac{e^{\pi/2}-1}{2}.$$

Exercice 16.6 ♡

Calculer $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution : *Deux solutions : par les complexes, ou intégrer deux fois par parties.*

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ix}e^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+i}\left[e^{(1+i)x}\right]_0^{\pi} = -\frac{e^{\pi}+1}{1+i} = -\frac{1-i}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$ *et* $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ix}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+i}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)$. *En effectuant la demi-différence des parties imaginaires,* $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\pi$.
2. $\displaystyle\mathrm{I} = \int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}x = [\sin x\,\mathrm{ch}\,x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(t)\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}x = 0 - [\cos x\,\mathrm{sh}\,x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(t)\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\,\pi - \mathrm{I}$. *D'où* $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\pi$.

Exercice 16.7 ♡♡♡

1. *Soit* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. *Démontrer que* $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{P}^2(x)dx = -i\int_0^{\pi}\mathrm{P}^2\left(e^{i\vartheta}\right)e^{i\vartheta}d\vartheta$.
2. *En déduire que* $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall (a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\ell\leqslant n}\frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1} \leqslant \sum_{q=1}^{n} a_q^2$.

Solution :

1. *Il suffit de montrer que pour* $\mathrm{Q}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. *Démontrer que* $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{Q}(x)dx = -i\int_0^{\pi}\mathrm{Q}\left(e^{i\vartheta}\right)e^{i\vartheta}d\vartheta$. *Ce qui se montre par linéarité. En effet, soit* $0\leqslant k\leqslant n$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^k dx = \frac{1+(-1)^k}{k+1} = -i\int_0^{\pi}\left(e^{ki\vartheta}\right)e^{i\vartheta}d\vartheta$.
2. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, *on pose* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\mathrm{X}^k$.

   On a alors $\mathrm{P}^2(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\ell\leqslant n}a_k a_\ell \mathrm{X}^{k+l}$ *et* $\displaystyle\int_0^1\mathrm{P}^2(x)dx = \sum_{1\leqslant k\ell\leqslant n}\frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1}$.

   D'où $\displaystyle\int_0^1\mathrm{P}^2(x)dx \leqslant \int_{-1}^{1}\mathrm{P}^2(x)dx \leqslant -i\int_0^{\pi}\mathrm{P}^2\left(e^{i\vartheta}\right)e^{i\vartheta}d\vartheta \leqslant \left|-i\int_0^{\pi}\mathrm{P}^2\left(e^{i\vartheta}\right)e^{i\vartheta}d\vartheta\right| \leqslant \int_0^{\pi}\left|\mathrm{P}^2\left(e^{i\vartheta}\right)\right|d\vartheta$.

   Maintenant $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\mathrm{P}^2\left(e^{i\vartheta}\right)\right|d\vartheta = \int_0^{\pi}\mathrm{P}\left(e^{i\vartheta}\right)\overline{\mathrm{P}\left(e^{i\vartheta}\right)}d\vartheta = \int_0^{\pi}\mathrm{P}\left(e^{i\vartheta}\right)\mathrm{P}\left(e^{-i\vartheta}\right)d\vartheta$ *car* P *est un polynôme réel.*

Enfin $\int_0^{\pi} \mathrm{P}\left(e^{i\vartheta}\right)\mathrm{P}\left(e^{-i\vartheta}\right)d\vartheta = \sum_{1\leqslant k\ell\leqslant n} a_k a_\ell \int_0^{\pi} e^{i(k-\ell)\vartheta}d\vartheta = \pi\sum_{q=1}^{n} a_q^2 + \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\int_0^{\pi} 2\cos(k-\ell)\vartheta d\vartheta = \pi\sum_{q=1}^{n} a_q^2$ *puisque* $\int_0^{\pi}\cos p\vartheta d\vartheta = 0$ *pour* $p \in \mathbb{Z}^*$.

Chapitre 17

Notions sur les fonctions de deux variables réelles

Pour bien aborder ce chapitre

Ce chapitre a pour vocation de servir d'introduction aux fonctions de plusieurs variables. Ces fonctions sont bien évidemment importantes que ce soit en maths ou en physique. Un phénomène physique en particulier dépend souvent de plusieurs paramètres. Nous nous cantonnerons ici aux fonctions de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$. Vous étudierez le cas général en deuxième année dans le cadre des espaces vectoriels normés. Vous verrez alors que tout a déjà été dit ou presque dans le cas simplifié qui va nous occuper ici.
On verra que l'on transpose facilement les notions de limite et de continuité aux fonctions de deux variables. Il n'en est malheureusement pas de même pour la notion de dérivée. Ainsi, le taux d'accroissement pour une fonction $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point $a \in \mathrm{I}$ est donné par :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}.$$

La même quantité n'a pas de sens pour les fonctions de deux variables car x et a sont dans ce cas des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
C'est à ce niveau que va intervenir la notion de différentielle et qu'un pont va être posé entre l'analyse et l'algèbre linéaire. Plutôt que de chercher à définir une dérivée, on va approximer la fonction étudiée par une application linéaire.
On verra qu'alors la théorie sera très proche de celle que vous connaissez pour les fonctions d'une variable réelle. En particulier, on pourra écrire une inégalité des accroissements finis et une formule de Taylor-Young pour les fonctions de deux variables.
Nous terminerons ce chapitre par quelques éléments sur les équations aux dérivées partielles. Elles sont aux fonctions de plusieurs variables ce que les équations différentielles sont aux fonctions d'une seule. Elles sont aussi évidemment très importantes en physique.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne usuelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

17.1 Continuité des fonctions à deux variables

DÉFINITION 17.1 ♡ **Boule ouverte**
On appelle *boule ouverte* de centre $\mathrm{M}_0 \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ noté $\mathrm{B}(\mathrm{M}_0, r)$ défini par :

$$\mathrm{B}(\mathrm{M}_0, r) = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathrm{M} - \mathrm{M}_0\| < r\right\}.$$

DÉFINITION 17.2 ♡ **Partie ouverte**
On dit que $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2$ est une *partie ouverte* de $\mathbb{R}^2$ si pour tout point $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{U}$ il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre M_0 et de rayon r soit incluse dans U.

DÉFINITION 17.3 ♡ **Voisinage d'un point**
Soit $\mathrm{M}_0 \in \mathbb{R}^2$. On dit qu'une partie $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}^2$ est *un voisinage du point* M_0 s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre M_0 et de rayon r soit incluse dans V. Avec ce vocabulaire, une partie U est ouverte si et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points.

On s'intéresse dans ce chapitre aux fonctions f définies sur une partie ouverte $U \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles :

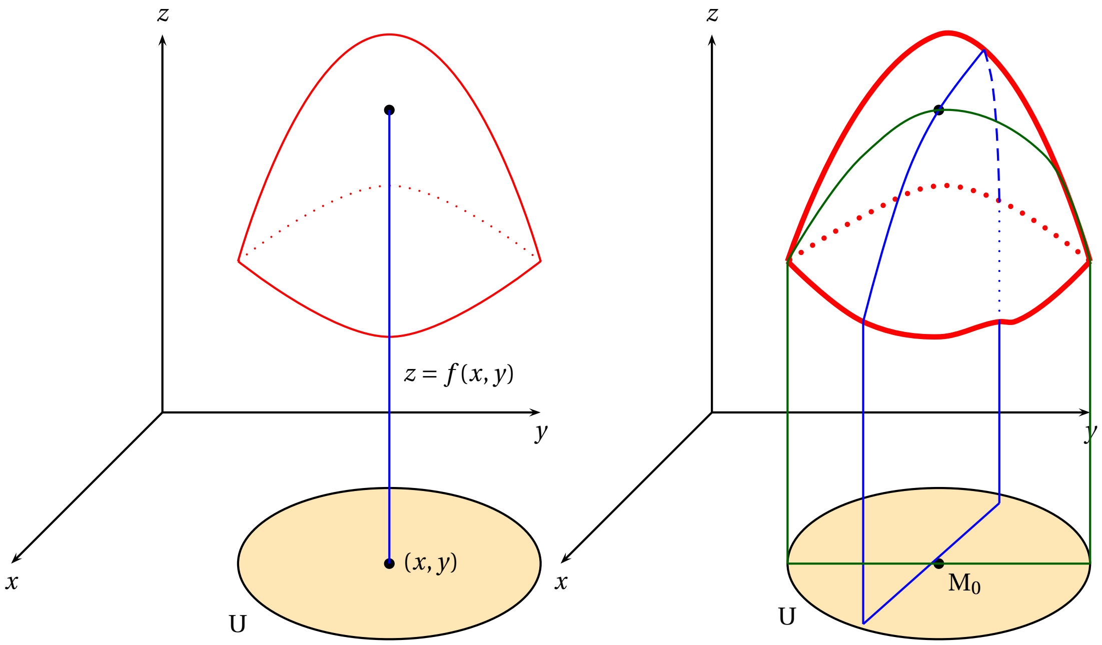
$$\left\{\begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}\right.$$

On peut représenter le *graphe* d'une telle fonction : en tout point $(x,y) \in U$, on associe une hauteur $z = f(x,y)$ et lorsque (x,y) varie dans U, on décrit une surface de $\mathbb{R}^3$ de base l'ouvert U :

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U,\ z = f(x,y)\}$$

Pour un point $(x_0,y_0) \in U$, comme U est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall u \in]-\alpha,\alpha[$, $(x_0+u,y_0) \in U$ et $(x_0,y_0+u) \in U$. On peut donc définir deux fonctions d'une variable f_1 (définie sur un voisinage de x_0) et f_2 (définie sur un voisinage de y_0) appelées *applications partielles* de f au point (x_0,y_0) :

$$f_1 : \left\{\begin{array}{ccc}]x_0-\alpha, x_0+\alpha[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t,y_0) \end{array}\right. \qquad f_2 : \left\{\begin{array}{ccc}]y_0-\alpha, y_0+\alpha[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x_0,t) \end{array}\right.$$



(a) Fonction de deux variables (b) Applications partielles en M_0

FIGURE 17.1 – Fonction de deux variables

DÉFINITION 17.4 ♡ Limite en un point
Soient $U \subset \mathbb{R}^2$ une partie ouverte, $M_0 = (x_0,y_0) \in U$ et $f : U \mapsto \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers** $l \in \mathbb{R}$ **quand** $M = (x,y)$ **tend vers** M_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in U, \quad \|M - M_0\| \leqslant \eta \implies |f(M) - l| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $f(M) \xrightarrow[M \to M_0]{} l$.

Remarque 17.1 Si f admet une limite quand M tend vers M_0 alors cette limite est unique.

DÉFINITION 17.5 ♡ Continuité en un point
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $M_0 \in U$ et $f : U \mapsto \mathbb{R}$. On dit que f **est continue en** M_0 si et seulement si

$$f(M) \xrightarrow[M \to M_0]{} f(M_0)$$

THÉORÈME 17.1 ♡ Théorème de majoration
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $M_0 \in U$, $l \in \mathbb{R}$, $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de M_0 on ait :

H1 $\left|f(\mathrm{M})-l\right| \leqslant \theta(\|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\|)$

H2 $\theta(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

alors : $f(\mathrm{M}) \xrightarrow[\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0]{} l$.

Démonstration *Soit* $\varepsilon > 0$. *Puisque* $\theta(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\forall t \in]-\eta,\eta[$, $|\theta(t)| \leqslant \varepsilon$. *Soit* $\mathrm{M} \in \mathrm{U}$ *tel que* $\|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\| \leqslant \eta$, *on a*

$$|f(\mathrm{M})-l| \leqslant \theta(\|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\|) \leqslant \varepsilon$$

Pour montrer en pratique qu'une fonction de deux variables admet une limite en $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$, on utilise les coordonnées polaires de pôle M_0. Pour $\mathrm{M} = (x, y) \in \mathrm{U}$, en écrivant

$$\begin{cases} x &= x_0 + r\cos\theta \\ y &= y_0 + r\sin\theta \end{cases}$$

on a $r = \|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\|$ et il suffit alors de majorer $|f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M}_0)|$ par une fonction qui ne dépend que de r, $\theta(r)$ avec $\theta(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$.

Exemple 17.1 Étudier la limite lorsque $(x, y) \to (0,0)$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$$

Introduisons des coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$|f(x,y)| = r\cos^2\theta|\sin\theta| \leqslant r$$

Par conséquent, $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

Exemple 17.2 Même question pour $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}$. Avec les coordonnées polaires,

$$|f(x,y)| = r\frac{|\cos\theta|^3\sin^2\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} \leqslant \frac{r}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$$

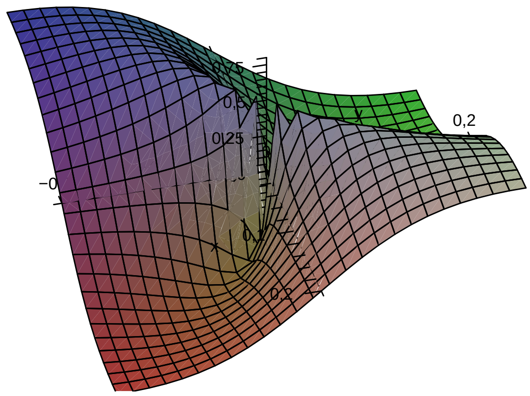
Comme la fonction $\varphi : \theta \mapsto \cos^4\theta + \sin^4\theta$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, elle possède un minimum qui est strictement positif (le cosinus et le sinus ne peuvent s'annuler simultanément) : $\forall\theta \in [0,2\pi]$, $\cos^4\theta+\sin^4\theta \geqslant \alpha > 0$ et alors $|f(x,y)| \leqslant r/\alpha$ ce qui montre que $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

PROPOSITION 17.2 ♡♡ **Caractérisation séquentielle de la limite**
Si $f(\mathrm{M}) \xrightarrow[\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0]{} l$, alors pour *toute* suite $\mathrm{M}_n = (x_n, y_n)$ vérifiant $\|\mathrm{M}_n - \mathrm{M}_0\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (on note $\mathrm{M}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{M}_0$), on a $f(\mathrm{M}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Démonstration *Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* $f(\mathrm{M}) \xrightarrow[\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0]{}$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que* $\forall \mathrm{M} \in \mathrm{U}$, $\|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\| \leqslant \eta \implies |f(\mathrm{M})-l| \leqslant \varepsilon$. *Puisque* $\mathrm{M}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{M}_0$, *il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $\|\mathrm{M}_n - \mathrm{M}_0\| \leqslant \eta$. *Alors pour* $n \geqslant \mathrm{N}$, $|f(\mathrm{M}_n) - l| \leqslant \varepsilon$.

On se sert souvent de cette propriété séquentielle pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite.

Exemple 17.3 Étudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Avec les coordonnées polaires à l'origine, $f(x,y) = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$. On voit que les valeurs que prend f dépendent de l'angle θ selon lequel on s'approche de l'origine. Montrons que f n'a pas de limite en $(0,0)$ en exhibant deux suites : $\mathrm{X}_n = (1/n, 0)$ et $\mathrm{Y}_n = (1/n, 1/n)$. Si f admettait une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors comme $\mathrm{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ et $\mathrm{Y}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$, on aurait $f(\mathrm{X}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $f(\mathrm{Y}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ mais $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $f(\mathrm{X}_n) = 0$ et $f(\mathrm{Y}_n) = 1/2$. On devrait avoir $l = 0 = 1/2$, une absurdité.



PROPOSITION 17.3 ♡ **Continuité des applications partielles**
Si f est continue au point $M_0 = (x_0, y_0)$, alors les deux applications partielles au point M_0, f_1 et f_2 sont continues respectivement en x_0 et y_0.

Démonstration *Soit $\varepsilon > 0$. Comme U est ouvert, les deux applications partielles f_1 et f_2 sont définies respectivement sur un voisinage de x_0, $f_1 :]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\mapsto \mathbb{R}$ et sur un voisinage de y_0 : $f_2 :]y_0-\alpha, y_0+\alpha[\mapsto \mathbb{R}$. Puisque f est continue au point $M_0 = (x_0, y_0)$, il existe $0 < \eta \leqslant \alpha$ tel que $\forall M \in U$, $\|M - M_0\| \leqslant \eta \implies |f(M) - f(M_0)| \leqslant \varepsilon$. Soit alors $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ vérifiant $|x - x_0| \leqslant \eta$. Posons $M = (x, y_0)$, $\|M - M_0\| = |x - x_0| \leqslant \eta$ d'où*

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$$

De même, puisque $\|(x_0, y) - (x_0, y_0)\| = |y - y_0| \leqslant \eta$,

$$|f_2(y) - f_2(y_0)| = |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$$

Il est important de comprendre que la réciproque de ce résultat est fausse comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 17.4

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Les deux applications partielles en $(0,0)$ sont définies par $f_1(x) = f(x,0) = 0$ et $f_2(y) = f(0,y) = 0$. Ces deux fonctions sont continues alors qu'on a vu précédemment que f n'admettait pas de limite à l'origine.

Exemple 17.5 Il se peut qu'une fonction admette un limite à l'origine dans toutes les directions sans qu'elle soit continue comme le montre l'exemple suivant :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^6}{x^6+y^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Considérons la restriction de f à une droite d'équation $y = \alpha x$:

$$f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, \alpha x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^6 x}{1+\alpha^8 x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

On a bien $f_\alpha(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f_\alpha(0)$ ce qui montre que toutes les applications f_α sont continues en 0, mais la fonction f n'admet pas de limite en $(0,0)$. En effet, si l'on s'approche de l'origine suivant la parabole d'équation $x = y^2$ avec la suite $M_n = (1/n^2, 1/n)$,

$$f(M_n) = \frac{1}{1 + 1/n^4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \neq f(0,0)$$

Multimédia : animation pour illustrer cet exemple, sur un graphe on voit la coupe par un plan qui tourne, une bosse qui tend vers 0 et la parabole mise en évidence

THÉORÈME 17.4 ♡♡ **Composée de fonctions continues**
On considère une fonction

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)\end{array}\right.$$

continue au point $(x_0,y_0)\in \mathrm{U}$ et une fonction

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{V}\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathrm{U} \\ (u,v) & \longmapsto & (x(u,v),y(u,v))\end{array}\right.$$

On suppose que les deux fonctions $x:\mathrm{V}\mapsto\mathbb{R}$ et $y:\mathrm{V}\mapsto\mathbb{R}$ sont continues au point (u_0,v_0). Alors la composée :

$$\mathrm{F}:\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(x(u,v),y(u,v))\end{array}\right.$$

est continue au point (u_0,v_0).

Démonstration *Il suffit d'écrire les définitions de continuité.*

Remarque 17.2 Si $f:\mathrm{U}\subset\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ est continue et $x,y:\mathrm{I}\subset\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I vérifiant $\forall t\in \mathrm{I}$, $(x(t),y(t))\in\mathrm{U}$, la composée

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x(t),y(t))\end{array}\right.$$

est continue en tout point de I.

17.2 Dérivées partielles, fonctions $\mathscr{C}^1$

Soit $\mathrm{U}\subset\mathbb{R}^2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 17.6 ♡ **Dérivée selon un vecteur**
Soit $f:\mathrm{U}\mapsto\mathbb{R}$, $\mathrm{M}_0\in\mathrm{U}$ et un vecteur non nul $\overrightarrow{\mathrm{H}}\in\mathbb{R}^2$. On dit que f possède une **dérivée au point** M_0 **selon le vecteur** $\overrightarrow{\mathrm{H}}$ s'il existe un réel $l\in\mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{t}\left[f(\mathrm{M}_0+t.\overrightarrow{\mathrm{H}})-f(\mathrm{M}_0)\right]\xrightarrow[t\to 0]{} l$$

On note alors $l=\mathrm{D}_{\overrightarrow{\mathrm{H}}}f(\mathrm{M}_0)$.

Exemple 17.6 Pour la fonction

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=0\end{cases}\end{array}\right.$$

On considère un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{H}}=(h,k)\in\mathbb{R}^2$. Formons le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t}\left[f(th,tk)-f(0,0)\right]=\frac{h^2k}{h^2+k^2}\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{h^2k}{h^2+k^2}$$

ce qui montre que f possède une dérivée selon le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{H}}$ en $(0,0)$ et $\mathrm{D}_{\overrightarrow{\mathrm{H}}}f(0,0)=\dfrac{h^2k}{h^2+k^2}$.

Multimédia : Coupe de la surface par un plan qu'on fait tourner et représenter le graphe de la fonction partielle avec la pente de la tangente

DÉFINITION 17.7 ♡ **Dérivées partielles en un point**
Soit $f:\mathrm{U}\mapsto\mathbb{R}$ et $a\in\mathrm{U}$. On considère la base canonique $e=(e_1,e_2)$ de $\mathbb{R}^2$. On appelle **dérivées partielles** de f au point $\mathrm{M}_0\in\mathrm{U}$ les dérivées de f, si elles existent, selon les vecteurs e_1 et e_2 et on note alors

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{M}_0)=\mathrm{D}_{e_1}f(\mathrm{M}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{M}_0+te_1)-f(\mathrm{M}_0)}{t}}\quad\text{et}\quad\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{M}_0)=\mathrm{D}_{e_2}f(\mathrm{M}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{M}_0+te_2)-f(\mathrm{M}_0)}{t}}$$

Remarque 17.3 En notant f_1 et f_2 les applications partielles au point $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{f_1(x_0+t) - f_1(x_0)}{t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{f_2(y_0+t) - f_2(y_0)}{t} \end{cases}$$

Ces limites existent si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables respectivement en x_0 et y_0. De plus, dans ce cas :

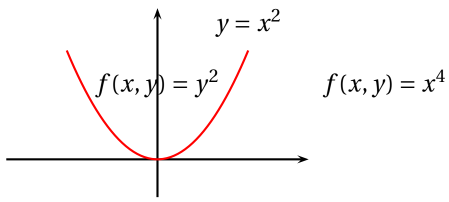
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & = f_1'(x_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & = f_2'(y_0) \end{cases}$$

Par exemple, si $f(x,y) = x^2\cos(y)$, pour calculer en un point (x,y) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on fixe la variable y, la première fonction partielle en (x,y) est définie par $f_1(t) = f(t,y) = t^2\cos(y)$, elle est dérivable en $t = x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1'(x) = 2x\cos(y)$. La deuxième fonction partielle en (x,y) est définie par $f_2(t) = f(x,t) = x^2\cos(t)$, elle est dérivable en $t = y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2'(y) = -x^2\sin(y)$.

On retient la règle de calcul suivante : pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, on « gèle » la variable y (considérée comme constante) et on dérive par rapport à x. De même, pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on fixe x et on dérive l'expression par rapport à y.

Exemple 17.7 Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y \leqslant x^2 \\ y^2 & \text{si } y > x^2 \end{cases}$$



Étudions l'existence de dérivées partielles de f en un point $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$.

1. Si $y_0 < x_0^2$, sur un voisinage de M_0, la fonction f est définie par $f(x,y) = x^2$. On peut appliquer la règle de calcul ci-dessus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
2. Si $y_0 > x_0^2$, sur un voisinage de M_0, $f(x,y) = y^2$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0$.
3. Si $\mathrm{M}_0 = (x_0, x_0^2)$ avec $x_0 > 0$, on se trouve sur un point de la parabole et les applications partielles sont définies par :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} y_0^2 & \text{si } t < x_0 \\ t^4 & \text{si } t \geqslant x_0 \end{cases} \end{array} \right. \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} x_0^4 & \text{si } t < y_0 \\ t^2 & \text{si } t \geqslant y_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

   La fonction f_1 est dérivable à droite en x_0, avec $f_{1d}'(x_0) = 4x_0^3$. Elle est dérivable à gauche en x_0 avec $f_{1g}'(x_0) = 0$. On en déduit que f_1 n'est pas dérivable en x_0 donc que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_0^2)$ n'existe pas. De la même façon, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_0^2)$ n'existe pas.
4. Si $\mathrm{M}_0 = (0,0)$, les deux fonctions partielles en $(0,0)$ sont définies par

$$f_1(t) = t^4, \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t^2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

   Puisque ces fonctions sont dérivables en 0, on en tire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

DÉFINITION 17.8 ♡♡♡ **Fonction de classe $\mathscr{C}^1$**

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U lorsque :

1. En tout point $(x, y) \in U$, f possède des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2. Chacune des fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array} \right.$$

   est continue sur U.

On note $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Exemple 17.8 Considérons la fonction définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Étudions l'existence de dérivées partielles en M_0.

– Si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, sur un voisinage de M_0, la première application partielle f_1 en M_0 est définie par

$$f_1(t) = \frac{\sin(t^3) - \sin(y_0^3)}{t^2 + y_0^2}$$

Elle est dérivable en x_0 et $f_1'(x_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{3x_0^2 \cos(x_0^3)}{x_0^2 + y_0^2} - 2x_0 \dfrac{\sin(x_0^3) - \sin(y_0^3)}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$ On calcule de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

– Si $(x_0, y_0) = (0,0)$, revenons à la définition de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et formons le taux d'accroissement

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\sin(t^3)}{t^3} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 1. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.

Nous pouvons donc définir les deux fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{3x^2 \cos(x^3)}{x^2 + y^2} - 2x \dfrac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} -\dfrac{3y^2 \sin(y^3)}{x^2 + y^2} - 2y \dfrac{\sin(x^3) - \sin(y^3)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

Étudions maintenant la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, t) = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \neq \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, on en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Cela suffit pour affirmer que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

THÉORÈME 17.5 ♡ **Théorème d'opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.**

Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles et de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Alors :

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall i = 1,2, \quad \boxed{\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}}$$

2. fg est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et :

$$\forall i = 1,2, \quad \boxed{\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = g\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial g}{\partial x_i}}$$

3. si g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est définie et $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus :

$$\forall i = 1,2, \quad \boxed{\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x_i} - f\frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}}$$

COROLLAIRE 17.6 ♡
- $\left(\mathscr{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R}),+,.\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{U},\mathbb{R})$
- $\left(\mathscr{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un sous-anneau de $\mathscr{F}(\mathrm{U},\mathbb{R})$

Le théorème suivant (la démonstration est admise) est le résultat fondamental de ce chapitre :

THÉORÈME 17.7 ♡♡♡ **Dl d'ordre** 1
Soit $f : \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U et $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : \mathrm{V} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage V de $(0,0)$ telle que :

1. Pour tout accroissement $\overrightarrow{\mathrm{H}} = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{M}_0 + \overrightarrow{\mathrm{H}} \in \mathrm{U}$, on a :

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k)}$$

2. $\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$

On dit alors que f admet un développement limité d'ordre 1 en M_0.

La définition de f de classe $\mathscr{C}^1$ ne suppose pas que f est continue sur U. C'est une conséquence du résultat suivant :

COROLLAIRE 17.8 ♡ **Une fonction $\mathscr{C}^1$ est continue**
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U alors f est continue en tout point de U.

Démonstration *Soit* $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ *et* $\mathrm{M} = (x,y)$. *Notons* $\overrightarrow{\mathrm{H}} = \mathrm{M} - \mathrm{M}_0 = (x - x_0, y - y_0)$. *Puisque* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U, *il existe* ε *définie sur un voisinage de* $(0,0)$ *telle que* $f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\|\varepsilon(x-x_0, y-y_0)$ *avec* $\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$. *La fonction* ε *est bornée sur un voisinage de* $(0,0)$ *donc si* $\|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\| \leqslant \eta$, $|\varepsilon(\mathrm{M}-\mathrm{M}_0)| \leqslant \mathrm{K}$ *et comme* $|x-x_0| \leqslant \|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\|$, $|y-y_0| \leqslant \|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\|$, $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant |x-x_0|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| + |y-y_0|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right| + \mathrm{K}\|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\| \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{M}-\mathrm{M}_0\|$. *Par conséquent,* $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} f(x_0,y_0)$.

Plus intéressant, si f admet des dérivées dans les deux directions de la base canonique, elle admet une dérivée dans toutes les directions qui se calcule comme combinaison linéaire des dérivées partielles comme le précise le résultat suivant :

COROLLAIRE 17.9 ♡♡ **Une fonction $\mathscr{C}^1$ admet des dérivées selon tout vecteur**
Si $f : \mathrm{U} \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U, alors pour tout point $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ et tout vecteur non nul $\overrightarrow{\mathrm{H}} = (h,k)$, f admet une dérivée selon le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{H}}$ au point M_0 et

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{\mathrm{H}}} f(\mathrm{M}_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Démonstration *Avec le DL à l'ordre* 1, *le taux d'accroissement s'écrit :* $\frac{1}{t}\left[f(x_0+th, y_0+tk) - f(x_0,y_0)\right] = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{|t|}{t}\|(h,k)\|\varepsilon(th,tk)$. *Puisque* $||t|/t| = 1$ *et que* $\varepsilon(th,tk) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, *on en déduit le résultat.*

17.3 Différentielle

DÉFINITION 17.9 ♡ **Différentielle**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ un point. On définit la forme linéaire :

$$\mathrm{d}f_{M_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,k) & \longmapsto & h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array} \right.$$

C'est la *différentielle* de la fonction f au point M_0.

DÉFINITION 17.10 **Gradient**
On définit le *gradient* de f au point M_0 comme étant le vecteur $\overrightarrow{\nabla} f(M_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$. Alors pour tout accroissement $\overrightarrow{H} = (h,k)$,

$$D_{\overrightarrow{H}} f(M_0) = \mathrm{d}f_{M_0}(\overrightarrow{H}) = \left(\overrightarrow{\nabla} f(M_0) \mid \overrightarrow{H}\right)$$

THÉORÈME 17.10 ♡♡♡ **Dérivation d'une composée**
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $u, v : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On définit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(u(t), v(t)\big) \end{array} \right.$. On suppose que :

- (H1) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U.
- (H2) Les deux fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- (H3) $\forall t \in I, \varphi(t) \in U$.

On peut alors définir la fonction

$$g = f \circ \varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\big(u(t), v(t)\big) \end{array} \right.$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée vaut :

$$g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t),v(t)\big) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t),v(t)\big)$$

Démonstration *Soit $t_0 \in I$. Nous allons montrer que g admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, elle admet un développement limité au point $M_0 = (u(t_0), v(t_0))$. Pour $t \in I$, on peut écrire : $f(u(t_0+h), v(t_0+h)) = f(u(t), v(t)) + \left[u(t_0+h) - u(t_0)\right]\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t_0, v(t_0)) + \left[v(t_0+h) - v(t_0)\right]\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0)) + \|(u(t_0+h) - u(t_0), v(t_0+h) - v(t_0))\|\varepsilon(u(t_0+h) - u(t_0), v(t_0+h) - v(t_0))$. Puisque les fonctions u et v sont dérivables en t_0, elles possèdent un développement limité à l'ordre 1 : $u(t_0+h) = u(t_0) + hu'(t_0) + h\varepsilon_1(h)$, $v(t_0+h) = v(t_0) + hv'(t_0) + \varepsilon_2(h)$. En reportant dans le DL de f, on trouve que $g(t_0+h) = g(t_0) + h\left[u'(t_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t_0), v(t_0)) + v'(t_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t_0), v(t_0))\right] + R(h)$ et par une majoration simple, on vérifie que $R(h) = o(h)$. Nous avons donc vérifié que g était dérivable en t_0 et obtenu l'expression de $g'(t_0)$. Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, u' et v' sont des fonctions continues, la fonction g' est également continue.*

Remarque 17.4 On peut exprimer $g'(t_0)$ à l'aide de la différentielle et du gradient de f en M_0 : $g'(t) = \mathrm{d}f_{M_0}(\varphi'(t)) = \left(\overrightarrow{\nabla} f(M_0) \mid \varphi'(t)\right)$.

THÉORÈME 17.11 ♡♡♡ **Dérivées partielles d'une composée**
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $x, y : V \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\forall (u,v) \in V$, $\big(x(u,v), y(u,v)\big) \in U$. On peut alors définir la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{array} \right.$$

La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ et en tout point $(u,v)\in V$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)) \\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) &= \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)) \end{cases}$$

Démonstration *Soit un point* $K=(u,v)\in V$, *considérons la première fonction partielle de* F *en* K *définie par* $F_1(t)=F(t,v)=f\big(x(t,v),y(t,v)\big)=f\big(g_1(t),g_2(t)\big)$. *Les fonctions* g_1 *et* g_2 *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *et* $g_1'(t)=\dfrac{\partial x}{\partial u}(t,v)$, $g_2'(t)=\dfrac{\partial y}{\partial u}(t,v)$. *On peut utiliser le théorème précédent : la fonction* F_1 *est dérivable en tout point* t *et* $F_1'(t)=\dfrac{\partial x}{\partial u}(t,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(g_1(t),g_2(t))+\dfrac{\partial y}{\partial u}(t,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(g_1(t),g_2(t))$. *On en déduit que* F *admet une première dérivée partielle au point* (u,v) *et que* $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v)=F_1'(u)=\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))+\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))$. *On fait de même pour la deuxième dérivée partielle. Ces dérivées partielles s'expriment comme composées de fonctions continues donc la fonction* F *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* V.

17.4 Extremum d'une fonction à deux variables

DÉFINITION 17.11 ♡ **Maximum, minimum, extremum**
Soient $f : U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $M_0\in U$. On dit que M_0 est :

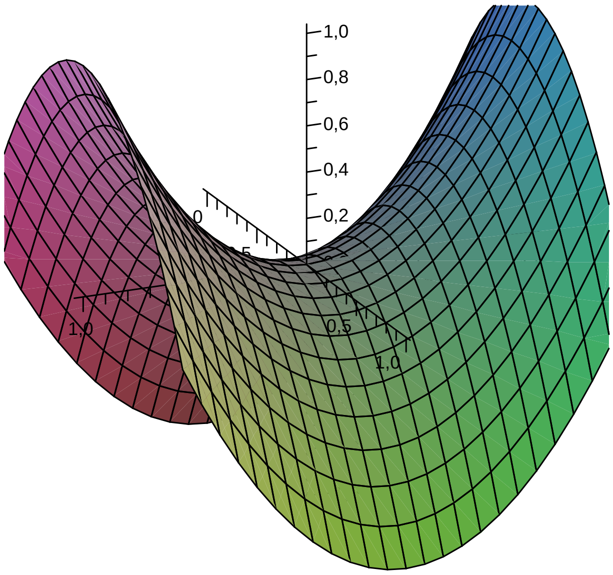
- un **maximum local** (respectivement un maximum local strict) de f si et seulement si il existe un voisinage V de M_0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall x\in V\cap U,\quad f(x)\leqslant f(M_0)\quad (\text{respectivement } f(x)<f(M_0))$$
- un **minimum local** (respectivement un minimum local strict) de f si et seulement si il existe un voisinage V de M_0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall x\in V\cap U,\quad f(x)\geqslant f(M_0)\quad (\text{respectivement } f(x)>f(M_0))$$
- un **extremum local** si M_0 est un maximum ou un minimum local.
- un **maximum global** si :
$$\forall x\in U,\quad f(x)\leqslant f(M_0)$$
- un **minimum global** si :
$$\forall x\in U,\quad f(x)\geqslant f(M_0)$$
- un **extremum global** si M_0 est un maximum ou un minimum global.

THÉORÈME 17.12 ♡♡♡ **La différentielle est nulle en un extremum local**
Soient $f : U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et $M_0=(x_0,y_0)\in U$. Si M_0 est un extremum local de f alors $\mathrm{d}f_{M_0}=0$ c'est à dire : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Démonstration *Supposons par exemple qu'il existe un voisinage* V *de* M_0 *tel que* M_0 *est un maximum de* f *sur* V. *Considérons la première fonction partielle* f_1 *de* f *au point* M_0 *définie sur un voisinage de* x_0 *par* $f_1(t)=f(t,y_0)$. *Puisque* x_0 *est un maximum de* f_1, *on sait que* $f_1'(x_0)=0$, *c'est à dire* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$. *On fait de même avec la deuxième fonction partielle pour montrer que* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Remarque 17.5 Un point où la différentielle s'annule s'appelle un *point critique* de la fonction.

⚠ *Attention 17.9* La réciproque est en général fausse, même pour des fonctions d'une variable : la fonction définie par $f(x)=x^3$ a une dérivée nulle en 0 et pourtant 0 n'est pas un extrémum local. Pour des fonctions de deux variables, on peut également avoir des *points selles*. Si f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2-y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ et pourtant le point $(0,0)$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local : $f_1(t)=f(t,0)=t^2$ et $f_2(t)=f(0,t)=-t^2$.



Exemple 17.10 Cherchons les extremums de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x+y)^2 + x^4 + y^4$$

Commençons par chercher les points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 2(x+y) + 4x^3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 2(x+y) + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Le seul point critique est $(0,0)$. Puisque $f(x,y) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $(x,y) = (0,0)$, l'origine est un minimum global de la fonction f est c'est le seul extrémum.

Exemple 17.11 On considère une boîte rectangulaire sans son couvercle de volume V. Déterminer les dimensions de cette boîte pour la fabriquer avec le moins de carton possible.
Notons x, y les longueurs de la base et h sa hauteur. Puisque le volume est fixé, on a $xyh = \mathrm{V}$. L'aire des parois en carton que l'on cherche à minimiser vaut :

$$f(x,y) = 2xh + 2yh + xy = \frac{2\mathrm{V}}{y} + \frac{2\mathrm{V}}{x} + xy$$

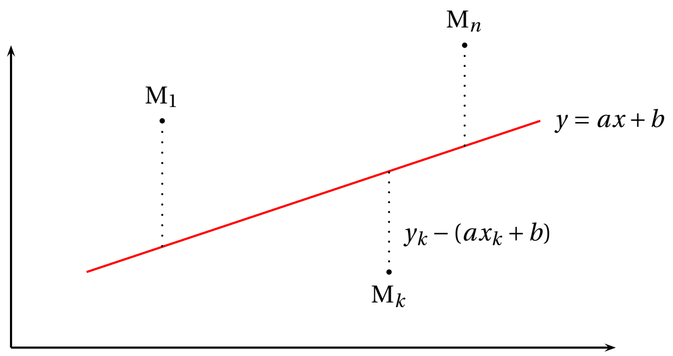
Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathrm{U} =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = y - \dfrac{2\mathrm{V}}{x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = x - \dfrac{2\mathrm{V}}{y^2} \end{cases}$$

Un point critique doit vérifier $xy = \dfrac{2\mathrm{V}}{x} = \dfrac{2\mathrm{V}}{y}$ d'où l'on tire $x = y = (2\mathrm{V})^{1/3}$ et $h = \mathrm{V}^{1/3}/2^{2/3}$. Il est clair dans notre contexte que cet unique point critique est le minimum global de la fonction.

Exemple 17.12 On considère un nuage de points dans le plan : $\mathrm{M}_1 = (x_1, y_1), \dots, \mathrm{M}_n = (x_n, y_n)$ que l'on suppose non alignés sur une même verticale. On recherche la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité :

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$$



La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) & = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]x_i = a\sum_{k=1}^{n}x_i^2+b\sum_{k=1}^{n}x_i-\sum_{k=1}^{n}x_iy_i \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) & = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)] = a\sum_{k=1}^{n}x_i+nb-\sum_{k=1}^{n}y_i \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, définissons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ suivants : $X=(x_1,\dots,x_n)$, $Y=(y_1,\dots,y_n)$ et $N=(1,\dots,1)$. Les points critiques (a,b) vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} \|X\|^2 a + (N\mid X)\,b & = (X\mid Y) \\ (N\mid X)\,a+\|N\|^2 b & = (N\mid Y) \end{cases}$$

Le déterminant du système vaut $\det(S)=\|X\|^2\|N\|^2-(N\mid X)^2\geqslant 0$. Il est positif d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et s'il était nul, d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, les deux vecteurs N et X seraient liés et tous les points seraient sur une même verticale, ce qui est faux. Le système possède donc une solution unique et on trouve que

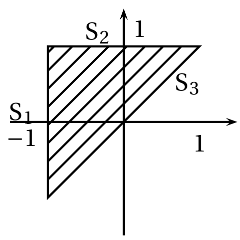
$$\begin{cases} a & = \dfrac{n\,(X\mid Y)-(N\mid X)\,(N\mid Y)}{n\|X\|^2-(N\mid X)^2} \\ b & = \dfrac{\|X\|^2\,(N\mid Y)-(N\mid x)\,(X\mid Y)}{n\|X\|^2-(N\mid X)^2} \end{cases}$$

Le seul point critique est ici le minimum global de la fonction.

Remarque 17.6 En pratique, on définit souvent des fonctions $f : K \mapsto \mathbb{R}$ où K n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour trouver les extremums de f, on procède comme suit :

- Déterminer les points critiques *intérieurs* à K, c'est à dire les points $M\in K$ tels qu'il existe une boule ouverte centrée en M incluse dans K avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(M)=0$.
- Étudier la nature de ces points critiques intérieurs (maximum, minimum local, ou point selle). Cette partie est difficile à traiter avec les connaissances de math. sup. En deuxième année, vous disposerez d'un outil agréable pour déterminer la nature d'un point critique.
- Étudier f sur le *bord* de K.

Exemple 17.13 On considère le domaine $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$ et la fonction f définie sur Δ par $f(x,y)=(y-x)^3+6xy$. Déterminer son maximum et son minimum global.
Le domaine Δ est un triangle :



La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intérieur du domaine : $\overset{\circ}{\Delta}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<x<y<1\}$ et on calcule

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 6y-3(y-x)^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 6x+3(y-x)^2 \end{cases}$$

On trouve les points critiques intérieurs (x, y) qui doivent vérifier $(y-x)^2 = 2y = -2x$ d'où $y = -x$ puis $y = -x = 1/2$. On calcule $f(-1/2, 1/2) = -1/2$. Étudions ensuite la restriction de f sur les trois segments qui forment le bord du domaine. Sur le segment S_1, $g(t) = f(-1, t) = (1+t)^3 - 6t$. On étudie la fonction g définie sur $[-1, 1]$ et on trouve que g atteint son minimum en $t = \sqrt{2} - 1$ et ce minimum vaut $6 - 4\sqrt{2}$ et atteint son maximum en $t = -1$ avec $g(-1) = 6$. On fait de même pour la restriction de f à S_2 en étudiant $h(t) = f(t, 1)$ puis sur S_3 avec $k(t) = f(t, t)$ pour $t \in [-1, 1]$. On trouve finalement que f admet son minimum global au point critique intérieur et que ce minimum vaut $-1/2$ et que f admet son maximum global sur la frontière qui vaut 6.

17.5 Dérivées partielles d'ordre 2

DÉFINITION 17.12 ♡ **Dérivées partielles d'ordre** 2
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. On peut donc définir les fonctions dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{array} \right.$$

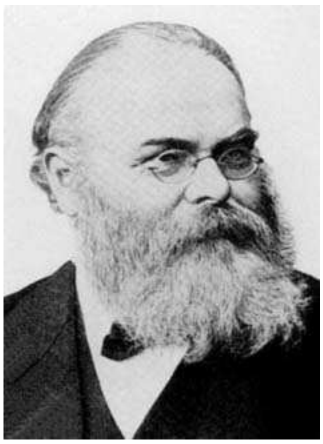
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ lorsque les 2 fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. On note alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(a),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(a).$$

BIO 14 | Hermann Schwarz né le 25 Janvier 1843 à Hermsdorf (Silésie) et mort le 30 Novembre 1921 à Berlin

Hermann Schwarz a commencé ses études à l'université de Berlin pour apprendre la chimie mais les cours de Kümmer et de Weierstrass lui font abandonner son idée première et il décide de se consacrer aux mathématiques. Il effectue sa thèse sous la direction de Weierstrass.
Il est nommé maître de conférence à Halle en 1867, puis professeur à Zurich en 1869 et rejoint l'université de Göttingen en 1875 pour finalement prendre un poste à Berlin en 1892. Schwarz est au départ très intéressé par la géométrie et, au contact de Weierstrass, il apprend à traduire ses idées avec les outils de l'analyse. En 1870, il résout le problème de Dirichlet qui consiste à trouver une fonction harmonique définie sur un ouvert prolongeant une fonction continue définie sur la frontière de l'ouvert. La plus importante de ses contributions a été celle aux surfaces minimales (les surfaces minimisant leur aire relativement à une contrainte donnée). C'est dans un travail relatif à ce sujet qu'il publie, pour des intégrales doubles, l'inégalité 13.24 page 528 qui porte maintenant son nom. Elle est en fait due à Bunyakowsky qui l'énonça le premier pour des intégrales simples. Notons que Cauchy, dans son cours à Polytechnique, l'avait aussi énoncé dans le cas des suites.



THÉORÈME 17.13 ♡ **Théorème de Schwarz**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$. Alors en tout point $a \in U$,

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)}$$

Démonstration *Admise.*

Exemple 17.14 Considérons la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y-y^3}{(x^2+y^2)} - \dfrac{2x(yx^3-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} - \dfrac{2y(yx^3-xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Formons le taux d'accroissement :

$$\frac{1}{t}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = -1 \xrightarrow[t\to 0]{} -1$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(0,0) = -1$. De même, formons le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = 1 \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(0,0) = 1$. Les deux dérivées partielles secondes croisées sont différentes. On peut vérifier l'existence des quatre fonctions dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$, mais on vérifie qu'elles ne sont pas continues en $(0,0)$.

THÉORÈME 17.14 **Formule de Taylor intégrale à l'ordre** 2

Soit $f : \mathrm{U} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que U est un ouvert convexe. Soit $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ et un accroissement $\overrightarrow{\mathrm{H}} = (h,k)$ tel que $\mathrm{M}_0 + \overrightarrow{\mathrm{H}} \in \mathrm{U}$. On a :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\left[h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]}_{\mathrm{d}f_{\mathrm{M}_0}(\overrightarrow{\mathrm{H}})} + \mathrm{R}(h,k)$$

où

$$\mathrm{R}(h,k) = \int_0^1 (1-t)\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th, y_0+tk) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+th, y_0+tk) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+th, y_0+tk)\right] \mathrm{d}t$$

Démonstration ♡♡ *La preuve est instructive. On se ramène aux théorèmes déjà prouvés pour les fonctions d'une variable en considérant la fonction*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x_0+th, y_0+tk) \end{array} \right.$$

Cette fonction est définie sur $[0,1]$ *car on a supposé que l'ouvert* U *était convexe. Elle est de classe* $\mathscr{C}^1$ *d'après le théorème de dérivée d'une composée (17.10 page 672) et* $\forall t \in [0,1]$,

$$\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th, y_0+tk)$$

En ré-appliquant le même théorème, on vérifie que φ *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $[0,1]$ *avec* $\varphi''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th, y_0+tk) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+th, y_0+tk) + kh\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+th, y_0+tk) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+th, y_0+tk)$. *Avec le théorème de Schwarz,* $\varphi''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th, y_0+tk) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+th, y_0+tk) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+th, y_0+tk)$. *Il suffit alors d'écrire la formule de Taylor intégrale à l'ordre* 1 *pour la fonction* φ *entre* 0 *et* 1 *:*

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t$$

pour obtenir le résultat.

THÉORÈME 17.15 ♡♡♡ **Formule de Taylor-Young à l'ordre** 2
Si $f : \mathrm{U} \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert convexe $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2$, pour $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h, y_0+k) \in \mathrm{U}$,

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\big[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial (^2} x_0,y_0)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\big]+\|(h,k)\|^2 \mathrm{R}(h,k)$$

avec $\mathrm{R}(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$.

Démonstration *Reprenons la formule de Taylor-intégrale et travaillons sur le reste. Écrivons* $\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th, y_0+tk)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon_1(h,k)$ *où* $\varepsilon_1(h,k) = \int_0^1 (1-t)\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th, y_0+tk) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\big]\,\mathrm{d}t$*. Puisque* $\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = 1/2$*, on fait apparaître dans* $\mathrm{R}(h,k)$*,* $\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$*. Puisque la fonction* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *est continue en* (x_0,y_0)*, on montre avec* ε *que* $\varepsilon_1(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$*. On fait de même avec les deux autres termes du reste pour obtenir le résultat.*

Remarque 17.7 La partie entre crochet est une forme quadratique $q(h,k)$ en l'accroissement (h,k). Le reste peut s'écrire $o(\|(h,k)\|^2)$. La formule de Taylor-Young permettra d'étudier la nature d'un point critique en math. spé.

17.6 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Le but de ce paragraphe est de résoudre quelques équations aux dérivées partielles simples. Pour simplifier l'étude, on considère un ouvert de la forme $\mathrm{U} =]a,b[\times]c,d[$. Commençons par résoudre des équations aux dérivées partielles fondamentales :

PROPOSITION 17.16 ♡ **EDP** $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$(\mathrm{E}_1) \ : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R})$ est solution de (E_1) si et seulement s'il existe une fonction d'une variable $k \in \mathscr{C}^1(]c,d[,\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathrm{U}$, $\boxed{f(x,y) = k(y)}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R})$ *est solution de* (E_1)*. Fixons* $y \in]c,d[$*. La fonction :* $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc}]a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t,y) \end{array}\right.$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et de dérivée nulle. Elle est donc constante :* $\forall t \in]a,b[$, $\varphi(t) = \varphi(0)$ *et on a donc :* $\forall (x,y) \in \mathrm{U}$, $f(x,y) = k(y)$ *avec* $k : \left\{\begin{array}{ccc}]c,d[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(0,y) \end{array}\right.$ *qui est une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]c,d[$ *d'après le théorème de composée 17.10 page 672.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, une fonction* $k \in \mathscr{C}^1(]c,d[,\mathbb{R})$ *est clairement solution de* (E_1)*.*

PROPOSITION 17.17 ♡ **EDP** $\frac{\partial f}{\partial x} = h$
Soit $h \in \mathscr{C}^0(]a,b[,\mathbb{R})$.

$$(\mathrm{E}_2) \ : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$$

Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R})$ est solution de (E_2) si et seulement s'il existe une fonction d'une variable $k \in \mathscr{C}^1(]c,d[,\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathrm{U}$, $\boxed{f(x,y) = \mathrm{H}(x) + k(y)}$ où H est une primitive de h sur $]a,b[$.

Démonstration *D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme* h *est continue sur* $]a,b[$*, elle possède une primitive* H *sur* $]a,b[$*. Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{U},\mathbb{R})$*. Introduisons la fonction* $\psi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) - \mathrm{H}(x) \end{array}\right.$*. Supposons que* f *est solution de* (E_2)*,*

alors :

$$\begin{aligned}
& \forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=h(x)\\
\Longrightarrow\quad & \forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad \frac{\partial \left(f-\mathrm{H}\right)}{\partial x}(x,y)=0\\
\Longrightarrow\quad & \psi \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0)\\
\Longrightarrow\quad & \forall \left(x,y\right)\in \mathrm{U},\quad \psi\left(x,y\right)=k\left(y\right) \text{ avec } k:\begin{cases}]c,d[& \longrightarrow \mathbb{R}\\ y & \longmapsto f\left(0,y\right)\end{cases}\\
\Longrightarrow\quad & \forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad f(x,y)=\mathrm{H}(x)+k(y)
\end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_2).

PROPOSITION 17.18 ♡ **EDP** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$

$$\boxed{(\mathrm{E}_3)\ :\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0}$$

Une fonction $f\in\mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})$ est solution de (E_3) si et seulement s'il existe deux fonctions $\mathrm{H}\in\mathscr{C}^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et $\mathrm{K}\in\mathscr{C}^2(]c,d[,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad \boxed{f(x,y)=\mathrm{H}(x)+\mathrm{K}(y)}$$

Démonstration *Soit* $f\in\mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})$. *Supposons que* f *est solution de* (E_3). *Alors :*

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial y} \text{ est solution de } (\mathrm{E}_1)\\
\Longrightarrow\quad & \exists k\in\mathscr{C}^1(]c,d[,\mathbb{R}):\quad \forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=k(y)\\
\Longrightarrow\quad & f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2)\\
\Longrightarrow\quad & \forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad f(x,y)=\mathrm{H}(x)+\mathrm{K}(y)
\end{aligned}$$

où K *est une primitive de* k *et est donc de classe* $\mathscr{C}^2$ *et où* $\mathrm{K}\in\mathscr{C}^1(]c,d[,\mathbb{R})$. *Comme :* $\forall (x,y)\in\mathrm{U},\quad \mathrm{K}(y)=\mathrm{H}(x)-f(x,y)$, K *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *comme différence de fonctions de classe* $\mathscr{C}^2$.
Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_3).

PROPOSITION 17.19 ♡ **EDP** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

$$\boxed{(\mathrm{E}_4)\ :\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0}$$

Une fonction $f\in\mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})$ est solution de (E_4) si et seulement s'il existe une fonction $\varphi\in\mathscr{C}^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et $\psi\in\mathscr{C}^2(]a,b[,\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad \boxed{f(x,y)=y\varphi(x)+\psi(x)}$$

Démonstration *Soit* $f\in\mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})$. *Supposons que* f *est solution de* (E_4) *alors :*

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial y} \text{ est solution de } (\mathrm{E}_1)\\
\Longrightarrow\quad & \exists \varphi\in\mathscr{C}^1(]a,b[,\mathbb{R}):\quad \forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\varphi(x)\\
\Longrightarrow\quad & \forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad \frac{\partial\left(f-y\varphi\right)}{\partial y}(x,y)=0\\
\Longrightarrow\quad & f-y\varphi \text{ est solution de } (\mathrm{E}_1)\\
\Longrightarrow\quad & \exists \psi\in\mathscr{C}^1(]a,b[,\mathbb{R}):\quad \forall (x,y)\in \mathrm{U},\quad f\left(x,y\right)-y\varphi\left(x\right)=\psi(x)
\end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de cette forme est solution de (E_4).

DÉFINITION 17.13 ♡♡♡ **Difféomorphisme**
Soit $\mathrm{U}\subset\mathrm{E}$ et $\mathrm{V}\subset\mathrm{F}$. On dit qu'une application $\varphi:\mathrm{U}\mapsto\mathrm{V}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme lorsque :

1. φ est une bijection de U vers V ;
2. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U ;
3. $\varphi^{-1} : V \mapsto U$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

Exemple 17.15 Considérons une application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax+by, cx+dy) \end{cases}$$

Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et est bijective si et seulement si $\det(\varphi) = ad - bc \neq 0$. La bijection réciproque est encore une application de classe $\mathscr{C}^1$ et donc φ définit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

Exemple 17.16 Considérons l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Tout point $M = (x,y) \in U$ peut être décrit à l'aide de coordonnées polaires $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ avec $(r,\theta) \in V =]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[$. Vérifions que l'application

$$\varphi : \begin{cases} V & \longrightarrow & U \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V vers U. L'application φ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et on calcule facilement sa bijection réciproque :

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} U & \longrightarrow & V \\ (x,y) & \longmapsto & (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)) \end{cases}$$

qui est également de classe $\mathscr{C}^1$.

PLAN 17.1 : Pour résoudre une équation aux dérivées partielles

1. *On utilise un changement de variables pour se ramener à une EDP plus simple. Soit* $\varphi : U_1 \mapsto U_2$ *un* $\mathscr{C}^k$*-difféomorphisme.*
2. *On pose* $g = f\circ\varphi^{-1}$, $f = g\circ\varphi$. f *est une fonction* $\mathscr{C}^k(U_1,\mathbb{R})$ *solution d'une EDP* (E_1) *si et seulement si* g *est une fonction* $\mathscr{C}^k(U_2,\mathbb{R})$ *solution d'une EDP* (E_2).

Exemple 17.17 On considère l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Résoudre sur U les équations aux dérivées partielles

a. $(E_1)\ : y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$

b. $(E_2)\ : x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$

c. $(E)\ : x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y) - (x^2+y^2).$

Considérons le changement de variables polaires, c'est à dire le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme φ de la remarque précédente. Pour $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on pose $g = f\circ\varphi$:

$$g : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\rho,\theta) & \longmapsto & f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{cases}$$

et on calcule :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) & = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) & = -\rho\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \end{cases}$$

a Si f est solution de (E_1), on doit avoir $\forall(\rho,\theta) \in V$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) = 0$ et donc il existe une fonction $h :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g(\rho,\theta) = h(r)$. Par conséquent, $f(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})$. Définissons une nouvelle fonction $H :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ par $H(u) = h(\sqrt{u})$ (elle est encore $\mathscr{C}^1$), $f(x,y) = H(x^2+y^2)$. On vérifie réciproquement que pour toute fonction $H \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, f ainsi définie est solution de (E_1).

b. Si f est solution de (E_2), la fonction g doit vérifier $\dfrac{\partial g}{\partial \rho} = 0$ et donc il existe une fonction $h \in \mathscr{C}^1(]-\pi/2,\pi/2[)$ telle que $\forall(\rho,\theta) \in V$, $g(\rho,\theta) = h(\theta)$. On en déduit alors que $\forall(x,y) \in U$, $f(x,y) = g(\arctan(y/x))$ et en définissant une nouvelle fonction par $G(u) = g(\arctan u)$, $f(x,y) = G(y/x)$. Réciproquement, pour toute fonction $G \in \mathscr{C}^1(]-\pi/2,\pi/2[)$, f ainsi définie est solution de (E_2).

c. Si f est solution de (E_3),

$$\rho\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta)-g(\rho,\theta)=-\rho^2$$

En posant $h(\rho,\theta)=e^{-\ln\rho}g(\rho,\theta)=\dfrac{1}{\rho}g(\rho,\theta)$, $\dfrac{\partial h}{\partial\rho}(\rho,\theta)=-1$ d'où $g(\rho,\theta)=-\rho^2+\rho k(\theta)$ avec $k\in\mathscr{C}^1(]-\pi,\pi[,\mathbb{R})$. Finalement,

$$f(x,y)=-(x^2+y^2)+\sqrt{x^2+y^2}\,k\left(2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Exemple 17.18 Résoudre sur $U=\mathbb{R}^2$ l'équation des ondes :

$$(E)\ :\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$$

On pose $\varphi:(x,t)\to(u,v)=\big(\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t)\big)=(x-t,x+t)$. Si $f=g\circ\varphi$, on a :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) & \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial u}\big(\varphi(x,t)\big) & \dfrac{\partial g}{\partial v}\big(\varphi(x,t)\big)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x,t) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}(x,t)\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,t) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}(x,t)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial u}\big(\varphi(x,t)\big) & \dfrac{\partial g}{\partial v}\big(\varphi(x,t)\big)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}\right)\\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}\right)\\ &= -\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\\ &= -\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\end{aligned}$$

et $(E)\Leftrightarrow(\tilde{E})\ :\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ qui est du type (E_3). Les solutions de $(\tilde{E})$ sont donc de la forme : $g:(u,v)\mapsto H(u)+K(v)$ où $H\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $K\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. et les solutions de (E) sont alors de la forme : $f:(x,t)\mapsto H\left(\frac{x+y}{2}\right)+K\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Exemple 17.19 Résoudre sur $U=]0,+\infty[^2$ l'équation

$$(E)\ :x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

On pose

$$\varphi:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U\\ (u,v) & \longmapsto & (e^u,e^v)\end{cases}$$

On vérifie facilement que φ est un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme et on posant $g=f\circ\varphi$, on a $f(x,y)=g(\ln x,\ln y)$. Après calculs, la fonction g vérifie l'équation des ondes donc il existe deux fonctions d'une variable de classe $\mathscr{C}^2$ H et K telles que $g(u,v)=H(u+v)+K(u-v)$ d'où l'existence de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ d'une variable telles que

$$f(x,y)=\varphi(xy)+\psi(x/y)$$

On vérifie réciproquement que toute fonction de cette forme est solution de l’EDP.

17.7 Exercices

17.7.1 Limite et continuité

Exercice 17.1 ♡

Déterminer si elle existe la limite en $(0,0)$ des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ données par :

1. $f(x,y)=\dfrac{x^3}{y}$
2. $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{ch}(xy)-\cos(xy)}{x^2y^2}$
3. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x-y}$
4. $f(x,y)=xy\sin\frac{1}{x}$
5. $f(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$
6. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Solution :

1. *Pour* $x\neq 0$, $f_1(x)=f(0,x)=0$ *et* $f_2(x)=f(x,x^3)=1$*. Si* f *avait une limite* ℓ *en* $(0,0)$*, ces deux fonctions composées* f_1 *et* f_2 *auraient la même limite* ℓ *en* 0*, ce qui est impossible.*
2. *Pour tout* $x,y\neq 0$, $f(x,y)=\frac{\operatorname{ch}(xy)-1}{x^2y^2}-\frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$ *et comme* $\operatorname{ch}x-1\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^2}{2}$, $\cos x-1\underset{x\to0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$*, il vient que* $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}1$.
3. *Pour* $x\neq 0$, $f_1(x)=f(x,x+x^3)=\dfrac{x^2+x^4}{-x^3}=-x-\dfrac{1}{x}$ *n'admet pas de limite en zéro. Donc* f *ne peut pas avoir de limite en* $(0,0)$.
4. $|f(x,y)|\leqslant|xy|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ *donc* $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.
5. *Pour* $y\neq 0$, $f_1(y)=f(2y,y)=\dfrac{4y}{3y^2}$ *n'admet pas de limite en* 0*, donc* f *ne peut pas avoir de limite en* $(0,0)$.
6. *Pour* $x\neq 0$, $f(x,x)=\dfrac{1}{2}$ *et* $f(x,-x)=-\dfrac{1}{2}$*. Donc* f *ne peut pas avoir de limite en* $(0,0)$.

Exercice 17.2 ♡

Déterminer si elle existe la limite en $(0,0)$ des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ données par :

1. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
3. $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}{x+y}$
4. $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{xy}$
5. $f(x,y)=\dfrac{xy}{\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y}$
6. $f(x,y)=\dfrac{\sin x-y}{x-\sin y}$.

Solution :

1. *En polaire,* $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho\cos^2\theta\sin\theta$ *donc* $|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|\leqslant\rho$ *et donc* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.
2. $f(x,y)=\dfrac{2\sin^2\left(\frac{xy}{2}\right)}{xy^2}$ *donc* $|f(x,y)|\leqslant 2\left|\dfrac{x^2y^2}{4xy^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{2}$*. Donc* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.
3. *Pour* $x\neq 0$, $f(x)=f(x,-x+x^3)=\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(-x+x^3)}{x^3}\sim-\dfrac{1}{x}$*. Donc* f *ne peut pas avoir de limite en* $(0,0)$.
4. *Pour* $x\neq 0$, $f_1(x)=f(x,x^3)=\dfrac{x^3+x^9}{x^4}$*. Donc* f *ne peut pas avoir de limite en* $(0,0)$.
5. $f(x,x)=\frac{x^2}{2\operatorname{sh}x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ *et en utilisant les formules de trigonométrie hyperbolique, pour* $(x,y)\neq 0$, $f(x,y)=\frac{xy}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x-y}{2}\right)}$ *donc* $f(x,-x+x^2)=\frac{x^2}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x^2}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{2x-x^2}{2}\right)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$ *donc* f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$.
6. $f(x,0)\to1$, $f(x,x)\to-1$*. Donc pas de limite.*

Exercice 17.3 ♡♡

Déterminer la limite lorsque $(x,y)\to(0,0)$ de

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$

Solution : *En polaire, $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\dfrac{\rho}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}$. La fonction $\theta\longmapsto|\cos\theta|+|\sin\theta|$ ne s'annule pas sur $[0,2\pi]$ et admet donc un minimum strictement positif m (il n'est pas difficile de voir que $m=1$). Donc $|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|\leqslant\dfrac{\rho}{m}$ et donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.*

Exercice 17.4 ♡♡

Déterminer la limite lorsque $(x,y)\to(0,0)$ de

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}{|x|+|y|}$$

Solution : *Il est clair que si la limite existe, c'est 0. Par ailleurs $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}{xy}\dfrac{xy}{|x|+|y|}$. Les deux fonctions $(x,y)\longmapsto\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x} & \text{si } x\neq0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ et $(x,y)\longmapsto\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}y}{y} & \text{si } y\neq0\\ 1 & \text{si } y=0\end{cases}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, il en est de même de leur produit. Reste $g:(x,y)\longmapsto\dfrac{xy}{|x|+|y|}$. En polaire, $g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\dfrac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}$. La fonction $\theta\longmapsto|\cos\theta|+|\sin\theta|$ ne s'annule pas sur $[0,2\pi]$ et admet donc un minimum strictement positif m (il n'est pas difficile de voir que $m=1$). Donc $|g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|\leqslant\dfrac{\rho^2}{m}$ et donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$ et donc finalement $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.*

Exercice 17.5 ♡♡

Déterminer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Solution : *A partir de l'inégalité $|\sin u|\leqslant|u|$, on a, en passant en polaire, $|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|\leqslant\dfrac{\rho^2|\cos\theta\sin\theta|}{\rho}\leqslant\rho$ et donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.*

Exercice 17.6 ♡♡

Soit

$$f(x,y)=\frac{\sin^4x+(1-\cos y)^2}{4x^4+y^4}$$

Montrer en utilisant un DL que $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}\dfrac{1}{4}$.

Solution : *On a $\sin^4x=x^4+x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\lim_0\varepsilon_1=0$ et $1-\cos y=\dfrac{y^2}{2}+o(y^2)$ soit $(1-\cos y)^2=\dfrac{y^4}{4}+y^4\varepsilon_2(y)$ avec $\lim_0\varepsilon_2=0$. Donc $f(x,y)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{x^4\varepsilon_1(x)+y^4\varepsilon_2(y)}{4x^4+y^4}$, ce avec $\lim_{x\to0}\varepsilon_1(x)=0$ et $\lim_{y\to0}\varepsilon_2(y)=0$. Donc pour $|x|<\eta$ et $|y|<\eta$, $|\varepsilon_1(x)|<\varepsilon$ et $|\varepsilon_1(y)|<\varepsilon$ et par la suite $\left|\dfrac{x^4\varepsilon_1(x)+y^4\varepsilon_2(y)}{4x^4+y^4}\right|<\varepsilon$. Ce qui veut bien dire que $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}\dfrac{1}{4}$.*

Exercice 17.7 ♡♡

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ 03/11/09 et

$$F:\begin{cases}\mathbb{R}^2\setminus(0,0) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2}\end{cases}$$

Déterminer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Solution : La fonction f est dérivable en zéro, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, 0 < |h| < \eta \Longrightarrow \left|\dfrac{f(h)-f(0)}{h} - f'(0)\right| < \varepsilon$. Donc en prenant $h = x^2 + y^2$, dès que $\|(x, y)\| < \sqrt{\eta}$, on a $|F(x, y) - f'(0)| < \varepsilon$. C'est bien dire que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x, y) = f'(0)$.
On peut aussi résoudre l'exercice en appliquant le théorème des accroissements finis à f sur le segment $[0, x^2 + y^2]$.

Exercice 17.8 ♡♡
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Solution : La fonction f est la somme de deux fonctions : $f_1(x, y) = -\dfrac{x^2}{2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$ par exemple parce que c'est une fonction polynôme, et la fonction $f_2(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_2 est une fonction radiale, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que du rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. C'est la composée des fonctions continues :
- $g(R) = \sup(0, R - 1)$ est une fonction continue d'une variable comme sup de deux fonctions continues
- et $R(x, y) = x^2 + y^2$.

Donc f_2 est une fonction continue comme composée de deux fonctions continues. Donc f est la somme de deux fonctions continues, elle est donc continue.

17.7.2 Dérivées partielles

Exercice 17.9 ♡
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \ln(\text{ch}(xy))$
2. $f(x, y) = x^y$ avec $y > 0$
3. $f(x, y) = \text{argsh}(x + y)$.
4. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
5. $f(x, y) = \arctan(x \tan y)$ avec $y \in \mathbb{R} \setminus \pi/2\mathbb{Z}$.
6. $f(x, y) = y\cos(x + y)$

Solution :
1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y\,\text{sh}(xy)}{\text{ch}(xy)} = y\,\text{th}(xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\,\text{th}(xy)$.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$ et comme $x^y = \exp(y\ln x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ln x \exp(y\ln x) = \ln x\, x^y$.
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2 + 2xy + y^2}} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
5. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\tan y}{1 + x^2\tan^2 y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\dfrac{1 + \tan^2 y}{1 + x^2\tan^2 y}$.
6. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y\sin(x + y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y) - y\sin(x + y)$.

Exercice 17.10 ♡
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Prouver que f admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
2. Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Solution :

1. Soit (h,k) avec $h \neq 0$. On a, pour $t \neq 0$, $f(th,tk) = \dfrac{t^2 k}{th} = \dfrac{tk}{h}$. Donc la dérivée au point $(0,0)$ suivant le vecteur (h,k) existe et vaut $\dfrac{k}{h}$. Effectuons le même travail suivant le vecteur $(0,k)$. Pour $t \neq 0$, $f(0,tk) = 0$. Donc la dérivée en $(0,0)$ suivant $(0,k)$ existe et vaut 0.
2. Pour $x \neq 0$, on a $f\left(x^2,x\right) = 1$ et $f(x,0) = 0$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 17.11 ♡

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } \left(x,y\right) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \left(x,y\right) = 0 \end{cases}$$

1. *Prouver que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.*

Solution : ♡

1. Soit $(h,k) \neq (0,0)$, $\dfrac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \dfrac{th^2 k}{t^2 h^4 + k^2}$. Donc si $k \neq 0$ la dérivée au point $(0,0)$ suivant le vecteur (h,k) existe et vaut $\dfrac{h^2}{k}$ et si $k = 0$, cette dérivée existe encore et vaut 0.
2. Pour $x \neq 0$, on a $f\left(x,x^2\right) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x,0) = 0$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 17.12 ♡

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \left\|(x,y)\right\|$ (norme euclidienne). Étudier la continuité de f et étudier les dérivées partielles de f.

Solution : $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\left|f(\mathrm{X}) - f(\mathrm{Y})\right| \leqslant |\|\mathrm{X}\| - \|\mathrm{Y}\|| \leqslant \|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|$$

grâce à l'inégalité triangulaire. Ensuite,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. En $(0,0)$

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{|t|}{t} = sg(t)$$

qui n'a pas de limite lorsque $t \to 0$. Donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$. Même calcul pour la dérivée partielle par rapport à y.
Ce résultat est valable pour une norme quelconque comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 17.13 ♡

On considère une norme $\|.\|$ quelconque sur $\mathbb{R}^2$ et on définit $f(x,y) = \left\|(x,y)\right\|$. Soit $\vec{h} \neq 0$ un vecteur. Montrer que $\mathrm{D}_{\vec{h}} f(0,0)$ n'existe pas.

Solution : Calculons

$$\frac{f(t\overrightarrow{h}) - f(\overrightarrow{0})}{t} = \frac{|t|}{t}\|h\|$$

qui tend vers $\|h\|$ lorsque $t \to 0^+$ et $-\|h\|$ lorsque $t \to 0^-$. Donc la dérivée selon le vecteur $\overrightarrow{h}$ en $(0,0)$ n'existe pas.

Exercice 17.14 ♡

Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y > x^2 \\ y^2 & \text{si } y \leqslant x^2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles.

Solution : *Les problèmes de continuité ou de dérivées partielles ne peuvent se produire qu'en* $(x,x^2), x\in\mathbb{R}$. *On a* $f(x,x^2)=x^4$ *et* $f(x+h,x^2+k)=(x+h)^4$ *ou* $(x^2+k)^2$ *suivant que* $x^2+k>(x+h)^2$ *ou non. Lorsque* $(h,k)\to(0,0)$ *ces deux expressions tendent vers* x^4, *donc* $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} f(x+h,x^2+k)=f(x,x^2)$. *Donc* f *est continue en* $(x,x^2), x\in\mathbb{R}$, *donc partout.*
Prenons $x>0$. *Á gauche de* x, *la première fonction partielle* $t\longmapsto f(t,x^2)$ *a pour dérivée* $4t^3$ *et à droite,* 0. *Il n'y a donc pas de première dérivée partielle. Á gauche de* x^2, *la deuxième fonction partielle* $t\longmapsto f(x,t)$ *a pour dérivée* $2t$ *et à droite,* 0. *Il n'y a donc pas de deuxième dérivée partielle. Idem pour* (x,x^2) *avec* $x<0$. *En* $(0,0)$ *les dérivées à droite et à gauche sont égales à zéro et donc* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Exercice 17.15 ♡
La fonction $f(x,y)=|xy|^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ *est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Solution : *Oui si* $\alpha>1$, *sinon, non.*

Exercice 17.16 ♡♡
On considère la fonction f *donnée par*

$$f(x,y)=\arccos\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right).$$

1. *Calculer les dérivées partielles de* f.
2. *En déduire une expression simplifiée de* f.

Solution :

1. *On remarque que* $1+x^2+y^2+x^2y^2=(1+x^2)(1+y^2)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(1-xy)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}}}\times\left(-\frac{y}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}-\frac{1-xy}{\left((1+x^2)(1+y^2)\right)^{3/2}}\times\frac{1}{2}(2x+2xy^2)\right)\\&=\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2-1-x^2y^2+2xy}}\left(\frac{y(1+x^2)(1+y^2)+(1-xy)x(1+y^2)}{\left((1+x^2)(1+y^2)\right)^{3/2}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}\,\frac{(1+y^2)(y+yx^2+x-x^2y)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\boxed{\varepsilon\frac{1}{1+x^2}}\end{aligned}$$

Où ε *désigne le signe de* $x+y$. *De même* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\varepsilon\dfrac{1}{1+y^2}}$.

2. *En intégrant* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{1+y^2}$ *pour* $x+y>0$ *on obtient que* $f(x,y)=\arctan y+\varphi(x)$. *En dérivant par rapport à* x, *on obtient* $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, *d'où* $\varphi(x)=\arctan x+\mathrm{C}$ *et* $f(x,y)=\arctan y+\arctan x+\mathrm{C}$. *En faisant tendre* y *vers* $-x$ *par valeurs supérieures, on trouve* $\mathrm{C}=\arccos 1=0$. *Donc pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $x+y>0$, $\boxed{f(x,y)=\arctan x+\arctan y}$. *Si* $x+y<0$ *alors comme précédemment, on trouve que* $f(x,y)=-\arctan y-\arctan x+\mathrm{C}'$ *et en faisant tendre* y *vers* $-x$ *par valeurs inférieures, il vient que* $\mathrm{C}'=\arccos(1)=0$ *et on trouve que* $f(x,y)=-\arctan x-\arctan y$. *Si* $x+y=0$, *alors il est clair que* $f(x,y)=0$.

17.7.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 17.17 ♡♡
Étudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f *:*

1. $f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y)\neq 0\\ 0 & \text{si } (x,y)=0\end{cases}$
2. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq 0\\ 0 & \text{si } (x,y)=0\end{cases}$
3. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^4}-e^{y^4}}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=0\end{cases}$.

Solution :

1. *En polaire,* $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln\left(\rho^2\right)$. *Donc* $|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|\leqslant-\rho^4\ln\left(\rho^2\right)$ *(pour* $\rho<1$*). Comme* $\lim_{\rho\to0}\rho^4\ln\left(\rho^2\right)=0$ *on en déduit que* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. *Donc* f *est continue en* $(0,0)$.
   En dehors de $(0,0)$, f *est de classe* $\mathscr{C}^1$. *On a, pour* $(x,y)\neq(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^2\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2y^2\,\frac{2x}{x^2+y^2}$.
   Toujours en polaire, $\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=2\rho^3\cos\theta\sin^2\theta\ln\left(\rho^2\right)+\frac{2\rho^5\cos^3\theta\sin^2\theta}{\rho^2}$. *Donc* $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right|\leqslant -2\rho^3\ln\left(\rho^2\right)+2\rho^3$ *(pour* $\rho<1$*). Là encore, comme* $\lim_{\rho\to0}-2\rho^3\ln\left(\rho^2\right)+2\rho^3=0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$. *Par ailleurs, pour* $x\neq0$, $\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x}=xy^2\ln(x^2+y^2)$. *Toujours en polaire, on obtient* $\rho^3\cos\theta\sin^2\theta\ln\left(\rho^2\right)$, *et comme* $\lim_{\rho\to0}\rho^3\ln\left(\rho^2\right)=0$, *on a* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x}=0$, *autrement dit* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
   On a donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. *C'est bien dire que* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est continue en* $(0,0)$. *De même* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue en* $(0,0)$ *et donc* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *La fonction* $r\longmapsto r^2\sin\left(\frac{1}{r}\right)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *mais n'est pas de classe* $\mathscr{C}^1$ *car sa dérivée* $2r\sin\left(\frac{1}{r}\right)+\cos\left(\frac{1}{r}\right)$ *n'a pas de limite en zéro. Pour la même raison, la première fonction partielle en* $(0,0)$, $x\longmapsto x^2\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ *admet comme dérivée* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=2x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)-\operatorname{signe}(x)\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)$ *qui n'a pas de limite en* $(0,0)$ *et où* $\operatorname{signe}(x)$ *représente le signe de* x. *A fortiori* $(x,y)\longmapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *n'admet pas de limite en* $(0,0)$.
3. *Aïe ! En polaire, on a* $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\frac{\exp\left(\rho^4\cos^4\theta\right)-\exp\left(\rho^4\sin^4\theta\right)}{\rho^4}=\cos^4\theta-\sin^4\theta+o(1)$ *et on se rend compte qu'il y a un problème en zéro et que la limite dépend de la direction choisie : pour* $x\neq0$, *on a* $f(x,x)=0$ *et* $f(2x,x)=\frac{e^{16x^4}-e^{x^4}}{(5x^2)^2}\sim\frac{3}{5}$ *donc* f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$. *Il n'est donc pas question de classe* $\mathscr{C}^1$.

Exercice 17.18 ♡♡

Soit la fonction de deux variables $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y)=\frac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}$ *lorsque* $(x,y)\neq(0,0)$ *et* $f(0,0)=0$.
Étudier la continuité de f*, l'existence et la continuité des dérivéees partielles de* f*. La fonction* f *est-elle de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Solution : *Continuité de* f *en* $(0,0)$ *: en faisant un DL de* $\sin$*, on trouve*

$$\left|f(x,y)\right|=\left|\frac{xy^3(1+o(y))-yx^3(1+o(x))}{6(x^2+y^2)}\right|\leqslant\left|xy\right|\frac{C(x^2+y^2)}{6(x^2+y^2)}\leqslant\frac{C}{12}(x^2+y^2)\leqslant C'\|(x,y)\|^2$$

où $C,C'\in\mathbb{R}$. *On a utilisé le fait que* $o(x)$, $o(y)$ *sont des fonctions majorées sur un voisinage de* 0*, et que* $xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$ *(on aurait pu également passer en coordonnées polaires en examinant l'homogénéité du numérateur et du dénominateur). Donc* f *est continue en* $(0,0)$*. D'après les théorèmes généraux,* f *est continue en* $(x,y)\neq(0,0)$.
Pour $(x,y)\neq(0,0)$*, on calcule*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\sin y-y\cos x}{x^2+y^2}-\frac{2x(x\sin y-y\sin x)}{(x^2+y^2)^2}$$

et de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$*, mais lorsque* $(x,y)\to(0,0)$*, en faisant un DL de* $\sin$ *et* $\cos$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-y^3+3x^2y+y^3\varepsilon(y)+yx^2\varepsilon(x)}{6(x^2+y^2)}-\frac{x^2y(x^2(1+\varepsilon(x))-y^2(1+\varepsilon(y))}{3(x^2+y^2)^2}$$

et en passant en coordonnées polaires, cette quantité tend vers 0 *lorsque* $(x,y)\to0$.
De plus,

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$*, donc* f *admet une dérivée partielle par rapport à* x *qui est continue en* $(0,0)$*. On traite de même la dérivée partielle par rapport à* y *et donc* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17.19 ♡

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Solution : *D'après le théorème fondamental de l'analyse, φ admet une primitive ψ sur $\mathbb{R}$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\psi(y) - \psi(x)\right) = -\psi'(x) = -\varphi(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\psi(y) - \psi(x)\right) = \psi'(y) = \varphi(y)$. Ce sont bien entendu des fonctions continues des deux variables x et y.*

Exercice 17.20 ♡♡

Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ en posant $f(x,y) = \int_0^y (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles de f.

Solution : *On écrit*

$$f(x,y) = x\int_0^y \varphi(t)\,dt - \int_0^y t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

et puisque $t \mapsto \varphi(t)$, $t \mapsto t\varphi(t)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental, $\mathrm{F}(y) = \int_0^y \varphi(t)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(y) = \int_0^y t\varphi(t)\mathrm{d}t$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\mathrm{F}'(y) = \varphi(y), \quad \mathrm{G}'(y) = y\varphi(y)$$

Par application des théorèmes généraux, f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^y \varphi(t)\mathrm{d}t, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\varphi(y) - y\varphi(y)$$

qui sont encore des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ par application des théorèmes généraux. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17.21 ♡♡♡

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\mathrm{F}(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Montrer que F est continue.*
2. *On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Indication 17.19 : On pourra se placer en (a,a) et poser $\varphi(t) = f(t) - (t-a)f'(a) - \dfrac{(t-a)^2}{2}f''(a)$.

Solution :

1. *La continuité de F en (x,y) avec $x \neq y$ est évidente. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathrm{F}(x+h, x+k) = \dfrac{f(x+h) - f(x+k)}{h-k}$ pour $h \neq k$. D'après le théorème des accroissements finis, $\mathrm{F}(x+h, x+k) = f'(\xi)$ pour un certain ξ compris entre $x+h$ et $x+k$. De même pour $h = k$, $\mathrm{F}(x+h, x+k) = f'(\xi)$ pour un certain ξ compris entre $x+h$ et $x+k$, dans ce cas $\xi = x+h = x+k$. Donc lorsque (h,k) tend vers $(0,0)$, d'après la continuité de $x \mapsto f'(x)$, on a $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \mathrm{F}(x+h, x+k) = f'(x) = \mathrm{F}(x,x)$. C'est bien dire que F est continue en (x,x).*
2. *φ est dérivable et $\varphi'(t) = f'(t) - f'(a) - (t-a)f''(a) = (t-a)\left[\dfrac{f'(t) - f'(a)}{t-a} - f''(a)\right]$ pour $t \neq a$. Comme $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{f'(t) - f'(a)}{t-a} = f''(a)$,*

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall t \in \mathbb{R}, |t-a| < \eta \Longrightarrow \left|\frac{f'(t) - f'(a)}{t-a} - f''(a)\right| < \varepsilon$$

et donc $\left|\varphi'(t)\right| < \varepsilon|t-a|$. D'après l'inégalité des accroissements finis, lorsqu'on prend $|x-a| < \eta$,

$$\left|\varphi(x) - \varphi(a)\right| \leqslant \left|\int_a^x \left|\varphi'(t)\right|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\left|\int_a^x |t-a|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Donc si on prend $|x-a|<\eta$ *et* $|y-a|<\eta$,

$$\left|\varphi(y)-\varphi(x)\right|\leqslant\left|\varphi(y)-\varphi(a)\right|+\left|\varphi(a)-\varphi(x)\right|\leqslant\varepsilon\frac{(y-a)^2+(x-a)^2}{2}.$$

Autrement dit

$$\left|f(y)-f(x)-(y-x)f'(a)-\frac{y^2-x^2-2a(y-x)}{2}f''(a)\right|\leqslant\varepsilon\frac{(y-a)^2+(x-a)^2}{2}.$$

On divise par $|y-x|$ *:*

– *Si on prend* a *entre* x *et* y*, alors* $|y-x|=|y-a|+|a-x|\geqslant\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$*, d'où*

$$\left|\mathrm{F}(x,y)-\mathrm{F}(a,a)-\frac{y-a+x-a}{2}f''(a)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}.$$

– *Si* x *et* y *sont du même côté de* a*, il faut procéder différemment :*

$$\left|\varphi(y)-\varphi(x)\right|\leqslant\left|\int_x^y\left|\varphi'(t)\right|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon\left|\int_x^y|t-a|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon\left|\frac{(y-a)^2-(x-a)^2}{2}\right|\leqslant\varepsilon\left|\frac{y^2-x^2-2a(y-x)}{2}\right|.$$

et en divisant par $|y-x|$ *on obtient :*

$$\left|\mathrm{F}(x,y)-\mathrm{F}(a,a)-\frac{y-a+x-a}{2}f''(a)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|y-a+x-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}.$$

Dans tous les cas $\left|\mathrm{F}(x,y)-\mathrm{F}(a,a)-\frac{y-a+x-a}{2}f''(a)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$*, ce qui signifie que* F *admet en* (a,a) *des dérivées partielles et que* $\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}(a,a)=\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}(a,a)=\frac{f''(a)}{2}$.

Pour finir, soit $x\neq y$*. On a* $\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}(x,y)=\frac{f'(x)(x-y)-(f(x)-f(y))}{(x-y)^2}$*. Or en écrivant une formule de Taylor à l'ordre 2,* $f(y)=f(x)+(y-x)f'(x)+\frac{(y-x)^2}{2}f''(\xi)$ *avec* $\xi\in[x,y]$*. Donc* $\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}(x,y)=\frac{f''(\xi)}{2}$ *et la continuité de* f'' *en* a *assure que* $\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}(x,y)=\frac{f''(a)}{2}=\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}(a,a)$*, c'est-à-dire que la première dérivée partielle est continue en* (a,a)*. Il en est de même pour la deuxième dérivée partielle. On a bien établi que* F *est de classe* $\mathscr{C}^1$.

17.7.4 Dérivées de fonctions composées

Exercice 17.22 ♡

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *admettant des dérivées partielles en ses deux variables et en tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*. Soit*

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ t&\longmapsto&f\left(2t,1+t^2\right)\end{array}\right.$$

Exprimer $g'(t)$ *en fonction des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solution : *On a* $\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}$*, soit* $g'(t)=2\frac{\partial f}{\partial x}\left(2t,1+t^2\right)+2t\frac{\partial f}{\partial y}\left(2t,1+t^2\right)$.

Exercice 17.23 ♡

Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *et*

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ (\rho,\theta)&\longmapsto&f\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta\right)\end{array}\right..$$

1. *Prouver que* g *est de classe* $\mathscr{C}^1$.
2. *Exprimer les dérivées partielles de* g *en fonction de celles de* f.
3. *Exprimer les dérivées partielles de* f *en fonction de celles de* g*.inversé les deux dernières questions.*

Solution :

1. g est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

2. $$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \rho} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \end{cases}$$

3. Par combinaison :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) & \Big\| \times \quad \cos\theta \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\rho\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) & \Big\| \times \quad -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta \end{cases}$$
En additionnant on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \cos\theta \dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) - \dfrac{1}{\rho}\sin\theta \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta)$.
De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \sin\theta \dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) + \dfrac{1}{\rho}\cos\theta \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta)$.

Exercice 17.24 ♡

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y)$$

Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Solution : On pose $g(t) = f(x+t, y+t)$. Par hypothèse, cette fonction ne dépend pas de t, donc sa dérivée est nulle pour tout t : $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+t,y+t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+t,y+t) = 0$, d'où le résultat pour $t = 0$.

Exercice 17.25 ♡

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx, ty) = f(x,y)$$

Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Solution : $g(t) = f(x+t, y+t)$. Par hypothèse, cette fonction ne dépend pas de t, donc sa dérivée est nulle pour tout t : $g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = 0$, d'où le résultat pour $t = 1$.

17.7.5 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Exercice 17.26 ♡

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y$
2. $f(x,y) = y^2(x-y)$

Solution :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x \operatorname{sh} y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin x \operatorname{ch} y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y$.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(x-y) - y^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x - 6y$.

Exercice 17.27 ♡

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Montrer que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?*

Solution :

1. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3(x^2+y^2)-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{3y^2x(x^2+y^2)-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2x(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \rho\sin^3\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \rho\sin^2\theta\cos\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$. Ce qui veut dire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \dfrac{1}{y}\dfrac{y^5}{y^4} = 1$. On en déduit, à la limite, que $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right](0,0) = 1$.
   $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \dfrac{1}{x}\times 0 = 0$. On en déduit, à la limite, que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right](0,0) = 0$.
   Comme les deux dérivées croisées sont différentes en $(0,0)$, d'après le théorème de Schwarz, c'est le signe que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17.28 ♡

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & f(x+\varphi(y))\end{cases}$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier l'égalité :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Solution : On a $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x+\varphi(y))$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y)f'(x+\varphi(y))$, puis $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x+\varphi(y))$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = \varphi'(y)f''(x+\varphi(y))$. D'où le résultat.

17.7.6 Extremum de fonctions de deux variables

Exercice 17.29 ♡♡

Déterminer les extremums locaux des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes : ev 6/11/09

1. $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-6y$
2. $f(x,y) = x^2+2y^2-2xy-2y+5$
3. $f(x,y) = x^3+y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2+(x+y)^3$
5. $f(x,y) = x^3+xy^2+x^2-y^2$
6. $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$
7. $f(x,y) = x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy$
8. $f(x,y) = xe^y+ye^x$
9. $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

Solution :

1. La recherche des points critiques conduit à résoudre le système : $\begin{cases}2x+y-3=0\\ x+2y-6=0\end{cases}$
   qui donne $(x,y)=(3,0)$. On se place alors au voisinage de $(3,0)$ en regardant $f(h,3+k) = h^2+h(3+k)+(3+k)^2-3h-6(3+k) = h^2+hk+k^2-9$. Pour tous h et k, $h^2+hk+k^2 = (h+\frac{1}{2}k)^2+\frac{3}{4}k^2 \geqslant 0$, on en déduit que f présente un minimum en $(3,0)$.
2. La recherche des points critiques conduit à résoudre le système : $\begin{cases}2x-2y=0\\ -2x+4y-2=0\end{cases}$
   qui donne $(x,y)=(1,1)$. On se place alors au voisinage de $(1,1)$ en regardant $f(1+h,1+k) = (1+h)^2+2(1+k)^2-2(1+h)(1+k)-2(1+k) = h^2-2hk+2k^2+1$. Pour tous h et k, $h^2-2hk+2k^2 = (h-k)^2+k^2 \geqslant 0$, on en déduit que f présente un minimum en $(1,1)$.
3. La recherche des points critiques conduit à $(x,y)=(0,0)$. On a un point de selle car dans le premier quadrant f prend des valeurs positives et dans le troisième, des valeurs négatives.
4. La recherche des points critiques conduit à résoudre le système : $\begin{cases}2x-2y+3x^2+6xy+3y^2=0\\ -2x+2y+3x^2+6xy+3y^2=0\end{cases}$
   En soustrayant les deux lignes on obtient $x=y$. En reportant dans l'une des lignes, on a $12x^2=0$. Donc le seul point critique est $(0,0)$. On a un point de selle. En effet la fonction $\varphi(x) = f(x,x) = 8x^3$ admet un point d'inflexion en 0.

5. La recherche des points critiques conduit à résoudre le système : $\begin{cases} 3x^2+y^2+2x &= 0 \\ 2xy-2y &= 0 \end{cases}$. On déduit de la deuxième égalité que $x=1$ ou $y=0$. $x=1$ ne donne pas de solution et $y=0$ donne $x=0$ ou $x=-\frac{2}{3}$.
En $(0,0)$: $f(x,0)=x^3+x^2=x^2(1+x)$ présente en 0 un minimum, tandis que $(0,y)=-y^2$ présente en 0 un maximum. On a un point de selle.
En $\left(-\frac{2}{3},0\right)$: $f\left(-\frac{2}{3}+h,k\right)=\dfrac{4}{27}-h^2-\dfrac{2}{3}k^2+hk^2=-h^2-\left(\dfrac{2}{3}-h\right)$. Or $-h^2-\left(\dfrac{2}{3}-h\right)<0$ pour $|h|<\frac{2}{3}$. Donc f présente un minimum local.
6. La recherche des points critiques conduit à résoudre le système : $\begin{cases} 3y^2 - 3x = 0 \\ 3x^2 - 3y = 0 \end{cases}$
Donc $y^2=x$ et $x^2=y$ donc $x^4=x$ donc les points critiques sont $(1,1)$ et $(0,0)$. En $(0,0)$, la fonction $\varphi(x)=f(x,0)=x^3$ admet un point d'inflexion en 0. On a un point de selle en $(0,0)$.
$f(1+h,1+k)=-1+3h^2+3k^2-3hk+h^3+k^3$. Or $3h^2+3k^2-3hk+h^3+k^3=(3+h)h^2-3hk+(3+k)k^2=(3+h)\left(h-\dfrac{3}{2(3+h)}k\right)^2+\left(\dfrac{4(3+h)(3+k)-9}{4(3+h)}\right)k^2$. Pour h et k assez petits, $4(3+h)(3+k)-9\geqslant 0$ ce qui veut dire que f admet un minimum local en $(1,1)$. Ce minimum n'est pas global.
7. La recherche des points critiques conduit à résoudre le système : $\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 3x^2 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$
En additionnant on trouve $4(x^2+y^3)=0$ d'où $x=-y$, avec x racine de $4x^3-8x=0$, soit $x=0$ ou $x=\pm\sqrt{2}$.
En $(0,0)$, $f(x,y)=-2(x-y)^2+x^4+y^4$. Or $f(x,x)=2x^4$ présente un minimum en 0, et $f(x,0)=-2x^2+x^4$ présente un maximum en 0. On a donc un point de selle en $(0,0)$.
En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$: $f\left(\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+k\right)=-8+10(h^2+k^2)+4hk+4\sqrt{2}(h^3-k^3)+h^4+k^4=-8+2(h+k)^2+h^2(8+4\sqrt{2}h+h^2)+k^2(8-4\sqrt{2}k+k^2)$. Comme les deux derniers termes sont positifs au voisinage de $h=0$ et $k=0$ respectivement, f présente en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ un minimum local. Il en est de même pour des raisons de symétrie en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
8. La recherche des points critiques conduit à résoudre le système : $\begin{cases} e^y + ye^x = 0 \\ xe^y + e^y = 0 \end{cases}$
On en déduit $xy=1$ (par exemple en calculant un déterminant) puis $+xe^{1/x}+e^x=0$ et $x+e^{x-1/x}=0$. Comme $x\mapsto x+e^{x-1/x}$ est strictement croissante, on a au plus une solution. Donc -1 est l'unique solution et donc $(-1,-1)$ est l'unique point critique pour f. Maintenant $\varphi(h)=f(-1+h,-1+h)=2(-1+h)e^{-1+h}=\frac{2}{e}(h-1)e^h$ admet un minimum en 0 ($\varphi''(0)=2>0$), tandis que $\psi(h)=f(-1+h,-1)=(-1+h)\frac{1}{e}-e^{-1+h}=\frac{1}{e}(h-1-e^h)$ admet un maximum en 0 ($\psi''(0)=-\frac{1}{e}<0$). Donc f admet un point de selle.
9. 8/11/09) La méthode des dérivées partielles ne permet de détecter que des extremums stricts. Comme ce n'est pas le cas ici, cette méthode est désespérée ! Il s'agit de remarquer que $f(x,y)=\mathrm{AM}+\mathrm{MB}$ avec $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(0,1)$ et $\mathrm{M}(x,y)$. Les minimums de f forment le segment $[\mathrm{AB}]$.

Exercice 17.30 ♡

Soit

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x^2(1+y)^3+y^4 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle possède un unique point critique qui est un minimum local, mais que f n'a pas de minimum global.

Solution : Le point $(0,0)$ est le seul point critique, et pour $(x,y)\in\mathbb{R}\times[-1,+\infty[$,

$$f(x,y)-f(0,0)=x^2(1+y)^3+y^4\geqslant 0 \text{ pour } |y|<\frac{1}{2}$$

Mais $f(x,x)=x^2(1+x)^3+x^4\sim x^5\to-\infty$ lorsque $x\to-\infty$, et donc f n'admet pas de minimum global.

Exercice 17.31 ♡

Soit

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x^2+(x+y-1)^2+y^2 \end{cases}$$

Déterminer les extremums locaux et globaux de f.

Solution : Le seul point critique de f est $(1/3,1/3)$ et en notant $h=x-1/3$, $k=y-1/3$,

$$f(x,y)-f(1/3,1/3)=h^2+k^2+(h+k)^2\geqslant 0$$

donc $(1/3;1/3)$ est un minimum global. f n'a pas de maximum global.

Exercice 17.32 ♡♡

Déterminer les extremums locaux de la fonction $f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2$.

Indication 17.19 : Montrer que le second extrémum n'est ni un minimum ni un maximum local. Pour cela, faire un changement de variables $\widetilde{f}(u,v)$ pour se ramener en $(0,0)$ et étudier les fonctions $\widetilde{f}(t,0)$ et $\widetilde{f}(0,t)$ pour montrer que $\widetilde{f}(u,v) - \widetilde{f}(0,0)$ prend des valeurs positives et négatives sur un voisinage de $(0,0)$.

Solution : *On vérifie que $\nabla f(\mathrm{M}) = (0,0) \iff \mathrm{M} = (0,0)$ ou $\mathrm{M} = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Puisque $f(x,y) = x^2(1+x) + y^2 \geqslant 0$ lorsque $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que $(0,0)$ est un minimum local de f (il n'est pas global, car $f(x,0) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$). Pour $\mathrm{M} = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, posons $u = x + \frac{2}{3}$ et $v = y$,*

$$\widetilde{f}(u,v) = \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 \left(u - \frac{1}{3}\right) + v^2.$$

En calculant $\varphi(t) = \widetilde{f}(t,0) = t^3 - t^2 - \frac{4}{27}$, il vient que pour $t \to 0$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(0)$ et donc il y a des valeurs de (u,v) aussi proches de $(0,0)$ que l'on veut telles que $\widetilde{f}(u,v) \leqslant \widetilde{f}(0,0)$.
D'autre part, $\psi(t) = \widetilde{f}(0,t) = t^2 + \frac{4}{27}$ et il y a donc des valeurs de (u,v) aussi proche de $(0,0)$ que l'on veut pour lesquelles $\widetilde{f}(u,v) \geqslant \widetilde{f}(0,0)$. Donc $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Exercice 17.33 ♡♡

On considère une boîte sans couvercle de forme parallélépipédique de volume 1. Trouver les dimensions de la boîte pour que la somme des aires des 5 faces soit minimale.

Solution : *Notons a, b les dimensions de la base et c la hauteur de la boite. Le volume vaut $abc = 1$. La somme des aires des 5 faces vaut $2bc + 2ac + ab$. En remplaçant c par $1/(ab)$, on cherche à minimiser la fonction de deux variables*

$$f(a,b) = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + ab$$

On calcule ses dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,b) &= \dfrac{a^2 b - 2}{a^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial b}(a,b) &= \dfrac{ab^2 - 2}{b^2} \end{cases}$$

d'où le seul point critique $(a,b) = (2^{1/3}, 2^{1/3})$. On vérifie par un dessin que c'est un minimum global.

Exercice 17.34 ♡♡

Soit $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. *Démontrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum (local).*
2. *f admet-elle un minimum en $(0,0)$?*

Solution :

1. *Soit θ l'angle polaire d'une droite passant par $(0,0)$: $x = t\cos\theta$, $y = t\sin\theta$. On a $g_\theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta) = (t^2\cos^2\theta - t\sin\theta).(3t^2\cos^2\theta - t\sin\theta) = t^2(3\cos^4\theta\, t^4 - 4\cos^2\theta\sin\theta\, t + \sin^2\theta)$.*
   - *Si $\sin\theta \neq 0$, alors $g_\theta(t) \geqslant 0$ au voisinage de $(0,0)$. C'est bien dire que g_θ admet un minimum local en 0.*
   - *Sinon $g_\theta(t) = 3t^4$ admet aussi un minimum local en 0.*
2. *Non ! $f(x, 2x^2) = -x^4$ admet un maximum local en 0.*

17.7.7 Équations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 17.35 ♡

En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$ déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Solution : On écrit $g(u,v) = f(x,y)$, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \times \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$. De même $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \times \frac{\partial g}{\partial u} + 3\frac{\partial g}{\partial v}$. Par combinaison de ces deux résultats : $0 = 3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}$. Donc g est une fonction de v seul : $g(uv) = \varphi(v)$, ce qui, traduit en (x,y), donne $f(x,y) = \varphi(2x+3y)$.

Exercice 17.36 ♡

En utilisant le changement de variables $\begin{cases} u &= x \\ v &= y - x \end{cases}$ *déterminer les fonctions* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *solutions de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Solution : On écrit $g(u,v) = f(x,y)$, ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$. De même $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}$. En additionnant ces deux résultats, on obtient $g(u,v) = f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}$.
Pour résoudre l'équation $\frac{\partial g}{\partial u} = g$, on travaille à v constant. On obtient alors $g = \mathrm{K}e^u$ où K est une constante ... qui dépend de v : C'est donc une fonction de v, $g = \mathrm{K}(v)e^u$, ce qui, traduit en (x,y) donne $f(x,y) = \mathrm{K}(y-x)e^x$.
Réciproquement, si $f(x,y) = \mathrm{K}(y-x)e^x$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \left[-\mathrm{K}'(y-x) + \mathrm{K}(y-x)\right] e^x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{K}(y-x)e^x$, donc on a bien $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$.

Exercice 17.37 ♡

En utilisant un changement de coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *solutions de l'équation aux dérivées partielles :*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Solution : On pose $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Par hypothèse on a :

$$\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) - \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = 0.$$

Soit $\rho\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta) - \frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}(\rho,\theta)\right) - \rho\cos\theta\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}(\rho,\theta)\right) = 0$, ce qui donne après simplifications $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\theta}(\rho,\theta) = 0$. Donc $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \varphi(\rho)$. Autrement dit f est une fonction radiale : $f(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. On vérifie réciproquement qu'une telle fonction est solution de l'équation.

Exercice 17.38 ♡

En utilisant un changement de coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Solution : On pose $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Par hypothèse on a :

$$\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \rho.$$

Cette fois cela se traduit par $\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta) = 1$ soit $g(\rho,\theta) = \rho + \varphi(\theta)$. Pour remonter jusqu'à f, on remarque que $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ou $\operatorname{cotan}\theta = \frac{x}{y}$ et on écrit $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$. Vérifions :

– Pour $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$.
– Pour $f_0(x,y) = \psi\left(\frac{x}{y}\right)$, $x\frac{\partial f_0}{\partial x} + y\frac{\partial f_0}{\partial y} = x\frac{1}{y}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) - y\frac{x}{y^2}\psi'\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Autrement dit f_0 est un élément du noyau de l'application linéaire $f \longmapsto x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$.

17.7.8 Équations aux dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 17.39 ♡

Soit $c>0$. En utilisant le changement de variable : $\begin{cases} u = x+ct \\ v = x-ct \end{cases}$ *déterminer les fonctions* $f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}\right.$ *de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Solution : *On pose $g(u,v) = f(x,t)$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial t} = c\dfrac{\partial g}{\partial u} - c\dfrac{\partial g}{\partial v}$. Donc :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u} - c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Il vient alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2(1+c^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}.$$

On est donc amené à résoudre $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u} = 0$. En intégrant par rapport à v on en déduit que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}$ ne dépend pas de v, c'est donc une fonction de u seul : $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \varphi_1(u)$. On intègre par rapport à u : $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$, où φ est une primitive de φ_1 et ψ est une "constante d'intégration". En traduisant dans (x,t), on a alors $f(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$. On vérifie que ces fonctions conviennent. On connaît l'interprétation physique. L'équation s'appelle l'équation des ondes. La constante c est la célérité de l'onde dans le milieu, ψ désigne l'onde incidente et φ l'onde réfléchie. Ces deux ondes dépendent des conditions aux limites.

Exercice 17.40 ♡

Soit $c>0$. En utilisant le changement de variable : $\begin{cases} u = x \\ v = x+y \end{cases}$ *déterminer les fonctions* $f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}\right.$ *de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Solution : *On pose $g(u,v) = f(x,y)$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial v}$. Donc*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. Il vient que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$, d'où $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \varphi(v)$ et $g(u,v) = \varphi(v)u + \psi(v)$. En traduisant dans (x,t), on a alors $f(x,y) = x\varphi(x+y) + \psi(x+y)$. On vérifie réciproquement que de telles fonctions conviennent.

Exercice 17.41 ♡♡

Une fonction $f : \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est dite harmonique *ssi*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

1. *Montrer que la fonction $f(x,y) = \ln\|(x,y)\|$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.*
2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction harmonique de classe $\mathscr{C}^3$. Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $(y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y})$ sont aussi harmoniques.*
3. *Trouver toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que l'application $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ soit harmonique sur l'ouvert $x>0$.*

Indication 17.19 : Pour la dernière question, poser $z = \dfrac{y}{x}$ et trouver une équation différentielle vérifiée par $\varphi(z)$.

Solution : *Les deux premières questions se montrent par le calcul. Pour la dernière,*

$$\Delta f(x,y) = \frac{1}{x^2}\left(\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)+2\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

en posant $z=\dfrac{y}{x}$, il suffit que φ vérifie l'équation différentielle

$$(z^2+1)\varphi''(z)+2z\varphi'(z)=0$$

pour que f soit harmonique. En posant $\psi(z)=\varphi'(z)$, ψ vérifie l'équation du premier ordre :

$$(z^2+1)\psi'+2z\psi=0$$

On résout et on trouve

$$\psi(t)=\frac{C}{z^2+1} \implies \psi(t)=C\arctan z+C'$$

et donc

$$f(x,y)=C\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+C'$$

sont des fonctions harmoniques sur $\{x>0\}$. On vérifie

17.7.9 Pour aller plus loin

Exercice 17.42 ♡♡♡

Démontrer le théorème sur les DL d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables réelles :
Soit $f : U\subset\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U et $M_0=(x_0,y_0)\in U$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : V\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie sur un voisinage V de $(0,0)$ telle que :

1. *Pour tout accroissement $\overrightarrow{H}=(h,k)\in\mathbb{R}^2$ tel que $M_0+\overrightarrow{H}\in U$, on a :*

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k)}$$

2. $\varepsilon(h,k)\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$

Solution : *On utilise le procédé déjà vu lors de la Formule de Taylor intégrale à l'ordre 2 : U est un ouvert, donc il existe une boule B centrée en M_0 et incluse dans U. On considère (h,k) tel que $(x_0+h,y_0+k)\in B$. Soit $\varphi : \begin{cases}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & f(x_0+th,y_0+tk)\end{cases}$. φ est définie car le segment d'extrémités (x_0,y_0) et (x_0+h,y_0+k) est inclus dans B donc dans U. Par application du théorème de composition des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, φ est dérivable sur $[0,1]$, et $\forall t\in[0,1], \varphi'(t)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y_0+tk)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th,y_0+tk)$. On écrit alors $\varphi(1)=\varphi(0)+\int_0^1\varphi'(t)\,dt$, soit $f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\int_0^1 h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y_0+tk)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)+k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th,y_0+tk)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)dt$. Reste à démontrer que $\int_0^1 h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y_0+tk)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)+k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th,y_0+tk)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)dt=\|(h,k)\|\,\varepsilon(h,k)$, avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$. Soit $\varepsilon>0$, puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, $\exists\eta>0, \|(u,v)\|<\eta\Longrightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y_0+tk)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y_0+tk)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$. Donc si on prend $\|(h,k)\|<\eta$ alors $\forall t\in[0,1], \|(th,tk)\|<\eta$ et donc $\left|\int_0^1 h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th,y_0+tk)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)+k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th,y_0+tk)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)dt\right|<|h|\varepsilon+|k|\varepsilon<2\varepsilon\sqrt{h^2+k^2}$, ce qu'il fallait démontrer.*

Exercice 17.43 ♡♡♡

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^2$, à valeurs dans R, et admettant en $(a,b)\in U$ des dérivées partielles d'ordre 2 continues.
Soit $(a,b)\in U$. Soient $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(a+h,b+k),(a+h,b),(a,b+k)\in U$. On pose

$$\Delta=f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b).$$

On introduit F *et* G *données par :*

$$\mathrm{F}(x) = f(x, b+k) - f(x, b) \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(y) = f(a+h, y) - f(a, y).$$

1. *En remarquant que* $\Delta = \mathrm{F}(a+h) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{G}(a+k) - \mathrm{G}(a)$*, démontrer qu'il existe* $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4) \in [0,1]^4$ *tels que*

$$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \vartheta_1 h, b + \vartheta_2 k) = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \vartheta_3 h, b + \vartheta_4 k).$$

2. *Après simplification par* hk*, on fait tendre* (h, k) *vers* $(0,0)$*. Quel résultat obtient-on ?*

Solution :

1. *On a bien* $\mathrm{F}(a+h) - \mathrm{F}(a) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) = \Delta$*. D'après l'égalité des accroissements finis,* $\exists \zeta \in [a, a+h], \mathrm{F}(a+h) - \mathrm{F}(a) = h\mathrm{F}'(\zeta)$*. On peut écrire* $\zeta = a + \vartheta_1 h$*, avec* $\vartheta_1 \in [0,1]$*. D'autre part,* $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, b+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, b)$*. Donc on peut écrire* $\Delta = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a + \vartheta_1 h, b+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a + \vartheta_1 h, b) = d_1(b+k) - d_1(b)$*, en posant* $d_1(y) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a + \vartheta_1 h, y)$*. Là encore, d'après l'égalité des accroissements finis,* $\exists \xi \in [b, b+k], d_1(b+k) - d_1(b) = kd_1'(\xi)$*. De nouveau on peut écrire* $\xi = b + \vartheta_2 k$*, avec* $\vartheta_2 \in [0,1]$ *et* $d_1'(y) = h\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a + \vartheta_1 h, y)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \vartheta_1 h, y)$*. On a donc bien* $\Delta = hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \vartheta_1 h, b + \vartheta_2 k)$*. De façon symétrique, on trouve* $(\vartheta_3, \vartheta_4) \in [0,1]^4$ *tels que* $\Delta = \mathrm{G}(a+k) - \mathrm{G}(a) = kh\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \vartheta_3 h, b + \vartheta_4 k)$*, ce qui achève d'établir l'égalité demandée.*
2. *On a donc* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \vartheta_1 h, b + \vartheta_2 k) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \vartheta_3 h, b + \vartheta_4 k)$*. On sait que* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$*, donc* $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1, \sqrt{h^2 + k^2} < \eta_1 \Longrightarrow \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+h, b+k) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)\right| < \varepsilon$*. Mais si on a* $\sqrt{h^2 + k^2} < \eta_1$*, a fortiori on a* $\sqrt{(\vartheta_1 h)^2 + (\vartheta_2 k)^2} < \eta_1$ *et donc* $\left|\dfrac{\Delta}{hk} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)\right| < \varepsilon$*. De même* $\left|\dfrac{\Delta}{hk} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right| < \varepsilon$ *pour* $\sqrt{h^2 + k^2} < \eta_2$*. Donc en prenant* $\sqrt{h^2 + k^2} < \inf(\eta_1, \eta_2)$ *on obtient* $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right| < 2\varepsilon$*, et ce pour tous les* $\varepsilon > 0$*. Donc on a* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$*. On en déduit le théorème de Schwarz.*

Chapitre 18

Intégrales multiples

18.1 Intégrales doubles

Si une fonction f est constante et vaut α sur un petit pavé $[a,b]\times[c,d]$, on définit son intégrale double comme étant le *volume* de l'espace de base le rectangle $[a,b]\times[c,d]$ et de hauteur α. Ce volume vaut $\mathrm{V}=\alpha\times(b-a)\times(d-c)$. On vérifie que

$$\mathrm{V}=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Pour définir l'intégrale double d'une fonction bornée $f:[a,b]\times[c,d]\mapsto\mathbb{R}$, on commence par subdiviser le rectangle $[a,b]\times[c,d]$ en $n\times p$ petits rectangles, et on définit l'intégrale d'une fonction en escalier (constante sur chacun des rectangles) comme la somme des volumes des parallélépipèdes. On définit ensuite l'intégrale supérieure de la fonction f

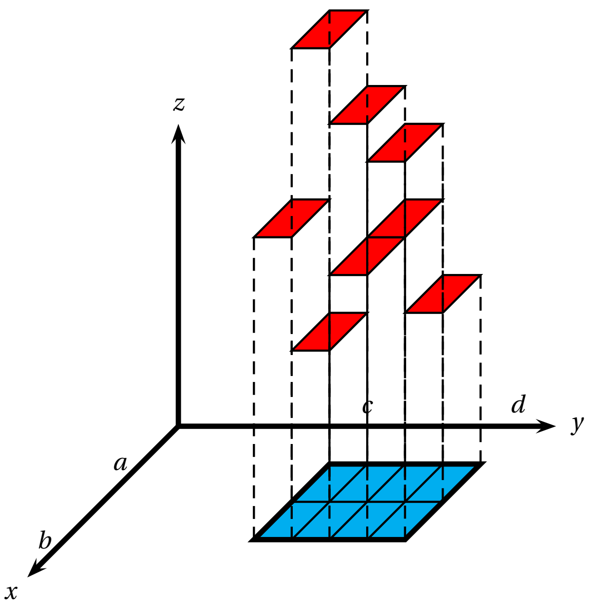


FIGURE 18.1 – Fonction en escalier

comme étant la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier majorant f, et l'intégrale inférieure de la fonction f comme étant la borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant f. Lorsque l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure sont égales, on dit que la fonction f est intégrable, et on note

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

son intégrale qui est la valeur commune de ces deux bornes. On montre que toute fonction $f:[a,b]\times[c,d]\mapsto\mathbb{R}$ continue est intégrable.

La construction devient beaucoup plus compliquée si l'on considère des domaines $\mathrm{U}\subset\mathbb{R}^2$ qui ne sont plus des rectangles. Comment « subdiviser » un tel domaine U ? Quelle régularité imposer à U ? Ce procédé de construction est inadapté, et on utilise une autre définition de l'intégrale, l'intégrale de Lebesgue que vous étudierez en école d'ingénieurs. Heureusement,

les calculs avec l'intégrale de Lebesgue ressemblent aux calculs habituels avec l'intégrale de Riemann. Nous admettrons les résultats qui suivent.

18.1.1 Le théorème de Fubini

Nous allons considérer une région $U \subset \mathbb{R}^2$ « admissible » définie à l'aide de deux fonctions d'une variable

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ et } \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$$

ou alors

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqslant y \leqslant d \text{ et } \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\}$$

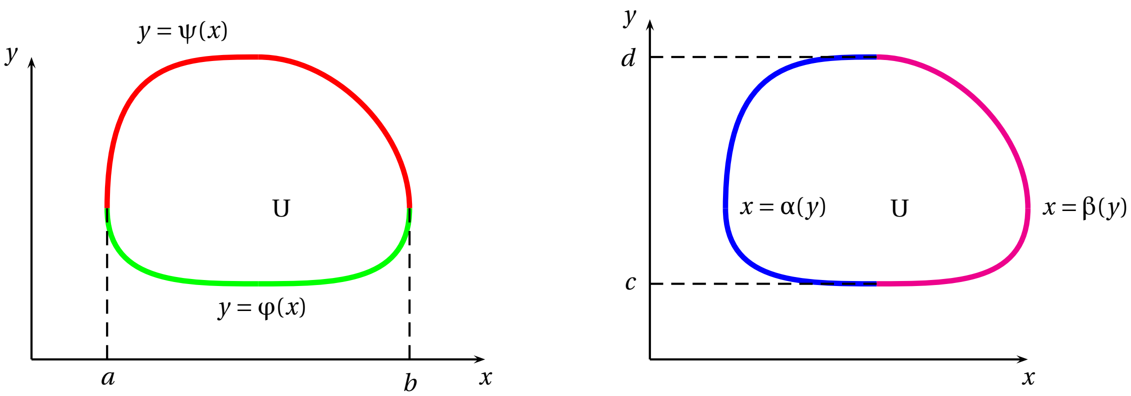


FIGURE 18.2 – un domaine U délimité par le graphe de deux fonctions

Le théorème suivant permet de calculer une intégrale double sur un tel domaine.

THÉORÈME 18.1 ♡ **Théorème de Fubini**

Si f est une fonction continue sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^2$ admissible, alors on peut calculer l'intégrale double de f sur U en calculant deux intégrales simples :

$$\iint_U f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx\right] dy$$

Exemple 18.1 Calculons l'intégrale double $I = \iint_D (x^2 + y)\,dx\,dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + y^2/2\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x^2(1-x) + (1-x)^2/2\,dx = \frac{5}{6}$$

THÉORÈME 18.2 **Propriétés de l'intégrale double**

1. **Linéarité** :
$$\iint_D (\lambda f + \mu g)(x, y)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x, y)\,dx\,dy + \mu \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$
2. **Additivité** : si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \varnothing$,
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy$$
3. **Positivité** : si $f \geqslant 0$ sur D, alors
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \geqslant 0$$

Remarque 18.1 Souvent, on doit calculer une intégrale double sur un pavé $D = [a,b] \times [c,d]$ où la fonction à intégrer est un produit de deux fonctions d'une variable. Dans ce cas, l'intégrale double est le produit de deux intégrales simples.

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \int_a^b \varphi(x)\left[\int_c^d \psi(y)\,dy\right]\,dx = \left(\int_c^d \psi(y)\,dy\right)\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)$$

Nous avons utilisé le théorème de Fubini et remarqué que le réel $\int_c^d \psi(y)\,dy$ était indépendant de x. On peut donc le mettre en facteur de l'intégrale.

18.1.2 Changement de variables

THÉORÈME 18.3 **Changement de variables**

On considère deux domaines « admissibles » , $D \subset \mathbb{R}^2$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ et une application

$$\varphi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v)) \end{cases}$$

On dit que cette application est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme du domaine Δ vers le domaine D lorsque :
- φ est bijective,
- φ est de classe $\mathscr{C}^1$,
- la bijection réciproque $\varphi^{-1} : D \mapsto \Delta$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

On appelle *Jacobien* d'un tel $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme φ au point (u,v), le déterminant

$$J\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

Alors

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|J\varphi(u,v)\right|\,du\,dv}$$

Deux cas importants de changement de variable sont à connaître.
- Changement de coordonnées affine.

$$\begin{cases} x = au + bv + \alpha \\ y = cu + dv + \beta \end{cases}$$

  alors $\boxed{J\varphi = (ad - bc)}$
- Changement en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

  alors $\boxed{J\varphi = \rho}$.

Exemple 18.2 Calculons l'intégrale double $I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ où le domaine d'intégration D est défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Le domaine D est un demi-disque de rayon 1 de centre $(0,1)$ avec $x \geqslant 0$. Passons en coordonnées polaires. L'application $\varphi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow & D \\ (\rho,\theta) & \longmapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{cases}$ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme du domaine $D = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, 0 \leqslant \rho \leqslant 1\}$ et alors

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Exemple 18.3 Calculons l'intégrale double $I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$$

Le domaine D est une ellipse et l'application affine $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \mathrm{D} \\ (u,v) & \longmapsto & (au,bv) \end{array} \right.$ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Δ vers D où Δ est le disque unité. Alors

$$\mathrm{I} = \iint_{\Delta} (a^2u^2 + b^2v^2)\, ab \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Effectuons ensuite le changement de variables polaires. L'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \longrightarrow & \Delta \\ (\rho,\theta) & \longmapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array} \right.$ réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre le domaine $\mathrm{U} = [0,1] \times [0,2\pi]$ et le domaine Δ. Par conséquent,

$$\mathrm{I} = ab \iint_{\mathrm{U}} (\rho^2 a^2 \cos^2\theta + \rho^2 b^2 \sin^2\theta)|\rho|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème de Fubini pour calculer cette dernière intégrale.

$$\mathrm{I} = ab\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 a^2\rho^3\cos^2\theta + b^2\rho^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta = ab\left[a^2\left(\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right) + b^2\left(\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\right] = \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$$

Exemple 18.4 Posons pour $\mathrm{R} > 0$,

$$\mathrm{F}(\mathrm{R}) = \int_0^{\mathrm{R}} e^{-x^2}\,dx$$

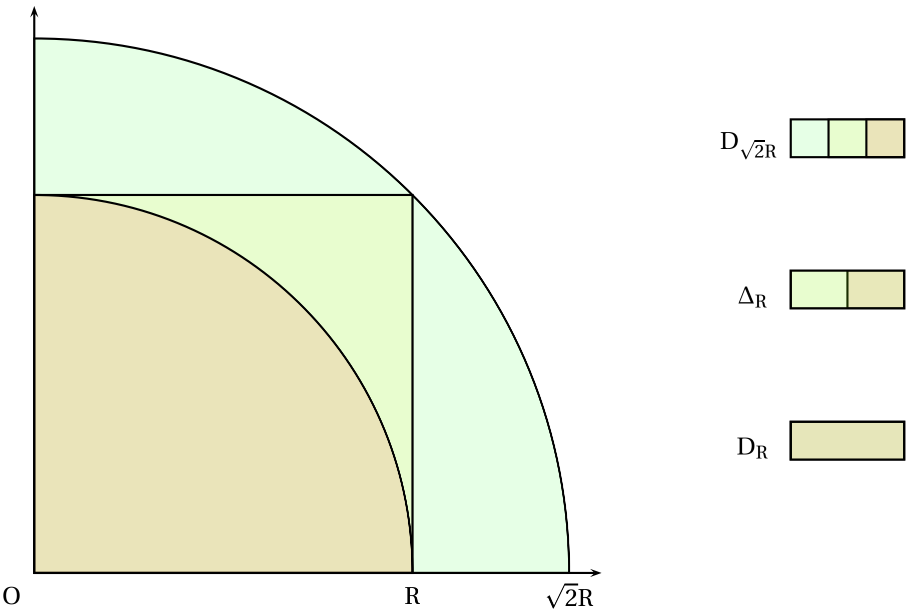
$$\mathrm{D_R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant \mathrm{R}^2\} \quad \Delta_\mathrm{R} = [0,\mathrm{R}] \times [0,\mathrm{R}]$$

$$\mathrm{I}(\mathrm{R}) = \int_{\Delta_\mathrm{R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \mathrm{J}(\mathrm{R}) = \iint_{\mathrm{D_R}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

1. En utilisant Fubini, on trouve une relation simple entre F(R) et I(R) :

$$\mathrm{I}(\mathrm{R}) = \int_0^{\mathrm{R}} e^{-y^2}\left(\int_0^{\mathrm{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \left(\int_0^{\mathrm{R}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^{\mathrm{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{F}(\mathrm{R})^2$$

2. Puisque la fonction à intégrer est positive et que $\mathrm{D_R} \subset \Delta_\mathrm{R} \subset \mathrm{D}_{\sqrt{2}\mathrm{R}}$, on obtient



$$\mathrm{J}(\mathrm{R}) = \iint_{\mathrm{D_R}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \mathrm{I}(\mathrm{R}) \leqslant \iint_{\Delta_{\sqrt{2}\mathrm{R}}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{J}(\sqrt{2}\mathrm{R})$$

3. En passant en coordonnées polaires, on calcule facilement

$$\mathrm{J}(\mathrm{R}) = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\mathrm{R}} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-\mathrm{R}^2}\right)$$

4. Puisque $\mathrm{J}(\mathrm{R}) \xrightarrow[\mathrm{R}\to+\infty]{} \pi/2$ et que $\mathrm{J}(\sqrt{2}\mathrm{R}) \xrightarrow[\mathrm{R}\to+\infty]{} \pi/2$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\mathrm{F}(\mathrm{R}) \xrightarrow[\mathrm{R}\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.

18.1.3 Aire d'un domaine plan

DÉFINITION 18.1 **Aire d'un domaine plan**
On définit l'aire d'un domaine admissible $D \subset \mathbb{R}^2$ par

$$\mathscr{A}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy$$

Remarque 18.2 L'aire du domaine plan D est donc le volume de base D et de hauteur 1.

Exemple 18.5 Calculons l'aire délimitée par une ellipse d'équation cartésienne

$$D: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

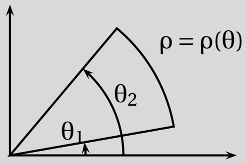
Il suffit d'effectuer un premier changement de variables affine puis de passer en coordonnées polaires. Si nous notons Δ le disque unité,

$$\mathscr{A}(D) = ab \iint_\Delta \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = ab\mathscr{A}(\Delta) = ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

THÉORÈME 18.4 **Aire d'un secteur délimité par une courbe polaire**

Soit une courbe polaire d'équation $\rho = \rho(\theta)$ et le domaine Ω délimité par les deux demi-droites d'équation polaire θ_1, θ_2 et par la courbe polaire (voir figure 18.4). Alors l'aire de ce domaine se calcule par la formule

$$\mathscr{A}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$



Démonstration *Il suffit d'effectuer un changement de variables polaires. L'application* $\varphi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow & \Omega \\ (\rho,\theta) & \longmapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{cases}$ *réalise un* $\mathscr{C}^1$*-difféomorphisme du domaine* $\Delta = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\theta)\}$ *vers le domaine* Ω *et en utilisant Fubini,*

$$\mathscr{A}(\Omega) = \iint_\Delta \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{\rho(\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)/2\,\mathrm{d}\theta$$

Exemple 18.6 Calculons l'aire délimitée par une cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta) \quad (a > 0)$. Par symétrie, l'aire est le double de l'aire du domaine avec $y \geqslant 0$. D'après la formule précédente,

$$\mathscr{A} = 2\frac{a^2}{2}\int_0^\pi (1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{3a\pi}{2}$$

18.2 Champs de vecteurs dans le plan et dans l'espace

DÉFINITION 18.2 **Champ de vecteurs**
On appelle *champ de vecteurs* défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, une application

$$\overrightarrow{F} : \begin{cases} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{F}(M) \end{cases}$$

qui à tout point $M = (x, y)$ de U associe un vecteur $\overrightarrow{F}(x,y)\left| \begin{matrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{matrix} \right.$. On dit que ce champ de vecteur est de classe $\mathscr{C}^k$ lorsque les deux fonctions F_1 et F_2 sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur U.

DÉFINITION 18.3 **Potentiel scalaire**
On dit qu'un champ de vecteur $F : U \mapsto \mathbb{R}^n$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe une application

$$V : \begin{cases} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & V(M) \end{cases}$$

telle que $\forall (x,y) \in U$, $\overrightarrow{F}((x,y)) = \overrightarrow{\nabla} V((x,y))$, c'est à dire $F_1(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y)$ et $F_2(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)$.

PROPOSITION 18.5 **Théorème de Poincaré**
Soit un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ convexe. Un champ de vecteurs $\overrightarrow{F} : U \mapsto \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U dérive d'un potentiel scalaire V si et seulement si

$$\forall (x,y) \in U, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$$

Démonstration *Si $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire, il existe une fonction $V : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telle que $\forall (x,y) \in U$, $F_1(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y)$ et $F_2(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)$. Puisque les fonctions F_1, F_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction V est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et d'après le théorème de Schwarz (17.13 page 676), en tout point $(x,y) \in U$,*

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$$

Remarque 18.3

1. On peut définir formellement le rotationnel du champ de vecteurs comme étant le champ de vecteurs

$$\operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) : \begin{cases} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & F_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} & F_2(x,y) \end{vmatrix} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

Le théorème précédent s'énonce alors en disant que si un champ de vecteur dérive d'un potentiel scalaire, son rotationnel est nul.

2. On peut également considérer des champs de vecteurs sur un ouvert convexe $U \subset \mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{F}\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} : U \mapsto \mathbb{R}^3$. Un tel champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire $V : U \mapsto \mathbb{R}$ si et seulement si son rotationnel est nul où

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} : \begin{cases} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \\ F_3(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} \end{cases}$$

3. Il faut une condition géométrique sur l'ouvert U pour que le théorème de Poincaré s'applique. Vous verrez en deuxième année une condition plus précise que la convexité et des contre-exemples dans le cas où l'ouvert ne vérifie pas cette condition.

Exemple 18.7 Considérons le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ en entier par

$$\overrightarrow{F} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{vmatrix} 3x^2y + 2x + y^3 \\ x^3 + 3xy^2 - 2y \end{vmatrix} \end{cases}$$

On calcule pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2$$

D'après le théorème de Poincaré, ce champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Déterminons ces potentiels scalaires. La fonction V est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y + 2x + y^3$$

Il existe donc une fonction $C : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$V(x, y) = x^3 y + x^2 + y^3 x + C(y)$$

Puisque $\dfrac{\partial V}{\partial y} = F_2$, on trouve que $x^3 + 3y^2 x + C'(y) = x^3 + 3xy^2 - 2y$, c'est à dire que $\forall y \in \mathbb{R}$, $C'(y) = -2y$ d'où $C(y) = -y^2 + K$ où K est une constante. Finalement,

$$V(x, y) = x^3 y + +x^2 + y^3 x - y^2 + K$$

BIO 15 George Green, né le 14 juillet à Sneinton (Angleterre), mort le 31 mai 1841 à Nottingham

Mathématicien anglais. Il était physicien. Il n'a passé qu'un an de sa vie à l'école et était boulanger de métier. Il a appris la physique en autodidacte en lisant principalement les mémoires de Poisson. Il est le père de la théorie du potentiel et le théorème qui porte son nom fut publié dans un article qui passa quasiment inaperçu à l'époque : ``An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism´´. Il intégra l'université de Cambridge à 40 ans et fit, une fois son diplôme obtenu, une carrière brillante, même si son travail ne fut pas reconnu de son vivant.



THÉORÈME 18.6 **Formule de Green-Riemann**

On considère un champ de vecteurs défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ par

$$\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{vmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

Soit Ω une partie de U fermée et bornée, délimitée par une courbe fermée paramétrée par une fonction

$$\overrightarrow{G} : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right. .$$

Cette courbe paramétrée est parcourue dans le sens trigonométrique. Alors la formule de Green-Riemann ramène le calcul d'une intégrale double à celui d'une intégrale simple :

$$\iint_\Omega \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} \, dx\, dy \stackrel{def}{\equiv} \iint_\Omega \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx\, dy = \int_a^b \left[P\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) y'(t) \right] dt$$

THÉORÈME 18.7 **Calcul de l'aire d'un domaine plan**

Soit Ω un domaine fermé du plan délimité par une courbe γ (avec les mêmes notations que dans la formule de Green-

Riemann). L'aire du domaine Ω est donnée par

$$\mathscr{A}(\Omega) = \int_a^b x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration *Considérons le champ de vecteurs défini par*

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{vmatrix} 0 \\ x \end{vmatrix} \end{cases}$$

D'après la formule de Green-Riemann appliquée à ce champ de vecteurs,

$$\iint_\Omega \mathrm{rot}\,\overrightarrow{\mathrm{F}}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathscr{A}(\Omega) = \int_a^b \big[0 + x(t)y'(t)\big]\,\mathrm{d}t$$

On montre la deuxième formule en considérant le champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{\mathrm{G}}(x,y) = \begin{vmatrix} -y \\ 0 \end{vmatrix}$ *et la troisième formule s'obtient en additionnant les deux premières.*

Exemple 18.8 Utilisons la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire intérieure à l'astroïde, courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) & = a\cos^3 t \\ y(t) & = a\sin^3 t \end{cases}$$

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = 3a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{8}$$

18.3 Exercices

18.3.1 Calculs élémentaires

Exercice 18.1 ♡

Calculer $\iint_D (x+y)e^{x+y}\,dx\,dy$ *avec* $D = \{0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

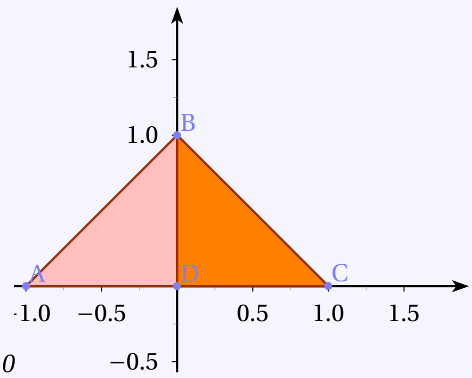
Solution :

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)e^{x+y}\,dx\,dy &= \int_0^2 dx \int_1^2 (x+y)e^{x+y}\,dy\\ &= \int_0^2 xe^x\,dx \int_1^2 e^y\,dy + \int_0^2 e^x\,dx \int_1^2 ye^y\,dy\\ &= \left[(x-1)e^x\right]_0^2 \left[e^y\right]_1^2 + \left[e^x\right]_0^2 \left[(y-1)e^y\right]_1^2\\ &= (e^2+1)(e^2-e) + (e^2-1)e^2\\ &= e\left(e^3 - e^2 + e - 1 + e^3 - e\right)\\ &= e\left(2e^3 - e^2 - 1\right)\end{aligned}$$

Exercice 18.2 ♡

Calculer $\iint_D x^2 y\,dx\,dy$ *avec* $D = \{y \geqslant 0, x+y \leqslant 1, y-x \leqslant 1\}$

Solution :



Par symétrie par rapport à l'axe Oy *:*

$$\iint_D x^2 y\,dx\,dy = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} y\,dy = 2\int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

Exercice 18.3 ♡

Calculer $\iint_{\mathscr{D}} x^2 y\,dx\,dy$ *avec* $D = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$

Solution : *L'intégrale est nulle par symétrie par rapport à l'axe* Ox*.*

Exercice 18.4 ♡

Calculer

$$I = \int\int_{\mathscr{D}} xy\;dxdy$$

où $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x+y \leqslant 1\right\}$.

Solution :

$$I = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} y\,dy = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)x^2}{2}\,dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

Exercice 18.5 ♡

Calculer

$$I = \int\int_{\mathscr{D}} \sin\left(x+y\right)\ \mathrm{dxdy}$$

où $\mathscr{D} = \left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0\quad \text{et}\quad x+y\leqslant \pi\right\}$.

Solution :

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\pi-x} \sin\left(x+y\right)\ \mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \left[-\cos\left(x+y\right)\right]_0^{\pi-x}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (1+\cos x)\ \mathrm{d}x = \pi.$$

Exercice 18.6 ♡

Calculer

$$I = \int\int_{\mathscr{D}} yx^2\ \mathrm{dxdy}$$

où $\mathscr{D} = \left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant 1,\quad y\geqslant 0\quad \text{et}\quad y^2\leqslant x\right\}$.

Solution :

$$I = \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} y\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{8}.$$

Exercice 18.7 ♡♡

Calculer les intégrales $\iint_T \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ *et* $\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ *où*

1) $T = (x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant y\leqslant x, \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$

2) $D = (x,y)\in\mathbb{R}^2/\frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0$

Solution : *On rend l'ensemble d'intégration symétrique :* $T' = (x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant x\leqslant y, \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$

$$\begin{aligned}\iint_T \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \frac{1}{2}\iint_{T'\cup T} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{T'\cup T} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{4}\iint_{T'\cup T} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{16}\end{aligned}$$

De même pour la deuxième :

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \frac{1}{2}\iint_{\frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{\frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{4}\iint_{\frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

en utilisant les symétries

Exercice 18.8 ♡♡

Soit f *et* g *deux applications continues, croissantes sur* $[0,1]$. *Démontrer que*

$$\int_0^1 f(x).g(x)\,dx \geqslant \int_0^1 f(x)\,dx.\int_0^1 g(x)\,dx.$$

Solution : *Dans un premier temps,*

$$\int_0^1 f(x)\,dx.\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.\int_0^1 g(y)\,dy = \iint_D f(x)g(y)\,dx\,dy.$$

Avec $D = [0,1]^2$. *En écrivant* $D = D_1\cup D_2$ *avec* $D_1 = \{(x,y)\in D, y\leqslant x\}$ *et* $D_1 = \{(x,y)\in D, x\leqslant y\}$.
Comme f *et* g *sont croissantes sur* $[0,1]$, *sur* D_1 *on a* $g(y)\leqslant g(x)$ *et sur* D_2 *on a* $f(x)\leqslant f(y)$. *Donc on a*

$$\left[f(x)-f(y)\right]\left[g(x)-g(y)\right]\geqslant 0$$

que ce soit sur D_1 *ou sur* D_2, *donc sur* D *tout entier :*

$$\iint_D \left[f(x)-f(y)\right]\left[g(x)-g(y)\right]\,dx\,dy\geqslant 0$$

Soit en développant,

$$\iint_D f(x).g(x)\,dx\,dy + \iint_D f(y).g(y)\,dx\,dy \geqslant \iint_D f(y).g(x)\,dx\,dy + \iint_D f(x).g(y)\,dx\,dy$$

Comme $\iint_D f(x).g(x)\,dx\,dy = \int_0^1 f(x).g(x)\,dx = \int_0^1 f(y).g(y)\,dy = \iint_D f(y).g(y)\,dx\,dy$, *on en déduit bien, en divisant par 2, que*

$$\int_0^1 f(x).g(x)\,dx \geqslant \int_0^1 f(x)\,dx.\int_0^1 g(x)\,dx.$$

Exercice 18.9 ♡♡

Soit f *une application de classe* $\mathscr{C}^4$ *sur* $[0,1]\times[0,1]$, *qui s'annule sur le bord du carré et telle que* $\forall (x,y)\in[0,1]\times[0,1] \left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right| \leqslant \mathrm{A}$.

Démontrer que $\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{A}}{144}$.

Indication 18.8 : On pourra commencer par considérer $g(x,y) = x.(1-x).y.(1-y)$.

Solution : *Soit* $g(x,y) = x(1-x)y(1-y)$, *et* $\mathrm{S} = [0;1]\times[0;1]$. *On a* $\dfrac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}(x,y) = 4$, *et* $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{36} = \frac{4}{144}$. *En intégrant quatre fois par parties , on a*

$$\iint_S \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = \iint_S \frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)f(x,y)\,dx\,dy = 4\iint_S f(x,y)\,dx\,dy.$$

Donc

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)g(x,y)\right|\,dx\,dy \leqslant \frac{\mathrm{A}}{4}\int_0^1\int_0^1 g(x,y)\,dx\,dy \leqslant \frac{\mathrm{A}}{144}$$

18.3.2 Changement de variables

Exercice 18.10 ♡

Calculer

$$\mathrm{I} = \int\int_{\mathscr{D}} x^2\ \mathrm{dxdy}$$

où $\mathscr{D}$ *est l'intérieur de l'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solution : *On fait le changement* $x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, *d'où*

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} a^2r^2\cos^2\varphi\, abr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^3b\pi}{4}.$$

Exercice 18.11 ♡

Calculer $\iint_D \ln(x+y+1)\,dx\,dy$ *avec* $\mathrm{D} = \{|x+y|\leqslant 1, |x-y|\leqslant 1\}$

Solution : *En posant* $u = x+y$ *et* $v = x-y$ *d'où* $x = \dfrac{u+v}{2}$ *et* $y = \dfrac{u-v}{2}$.

et $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$

$$\iint_{\mathscr{D}} \ln(x+y+1)\,dx\,dy = \iint_{[0,1]^2} \ln(1+u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 dv\int_{-1}^1 \ln(1+u)\,du = \int_{-1}^1 \ln(1+u)\,du$$
$$= \int_0^2 \ln t\,dt = [t\ln t - t]_0^2 = 2(\ln 2 - 1).$$

Exercice 18.12 ♡♡

On considère le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant xy \leqslant 9;\ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 4x\}$$

1. *Dessiner le domaine* D.
2. *Calculer l'intégrale double*

$$I = \iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dx\, dy$$

en effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} u &= \sqrt{\dfrac{y}{x}} \\ v &= \sqrt{xy} \end{cases}$$

Solution : *Le domaine* D *est limité par deux hyperboles et deux droites. On résout et on tire*

$$x = \frac{u}{v} \qquad y = uv$$

L'application $\varphi : \begin{cases} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,v) & \longmapsto & (u/v, uv) \end{cases}$ *est une bijection avec* $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant u \leqslant 2,\ 1 \leqslant v \leqslant 3\}$. *Le Jacobien de* φ *vaut*

$$|J| = 2\frac{v}{u}$$

et l'intégrale devient

$$I = 2\int_1^2 \int_1^3 \left(v + \frac{v^2}{u}\right) dv\, du = \frac{4}{3}(6 + 13\ln 2)$$

Exercice 18.13 ♡♡

Soit $\mathscr{E}$ *l'ellipse d'équation* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *(*$0 < b < a$*). On pose* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. E *le domaine limité par* $\mathscr{E}$ *et* F, F' *les foyers de* $\mathscr{E}$.

1. *Calculer* $I = \iint_{M \in E} (MF^2 + MF'^2)\, dx\, dy$.
2. *Calculer* $J = \iint_{M \in E} (MF + MF')\, dx\, dy$.
3. *Calculer* $K = \iint_{M \in E} (MF.MF')\, dx\, dy$.

Solution :

1. *On a par exemple,* $MF^2 = (x+c)^2 + y^2$ *et* $MF'^2 = (x-c)^2 + y^2$.
   D'où $I = 2\iint_E (x^2 + y^2 + c^2)\, dx\, dy$. *En effectuant le changement de variable :* $x = ar\sqrt{u^2+c^2}\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$,

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (a^2r^2\cos^2\varphi + b^2r^2\sin^2\varphi + c^2)\, abr\, dr = 2ab\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + 2c^2}{4}\, d\varphi$$

$$= 2ab \times 2\pi \times \left(\frac{a^2 + b^2 + 4c^2}{8}\right) = ab \times \frac{\pi}{2} \times (a^2 + b^2 + 4(a^2 - b^2)) = ab \times \frac{\pi}{2} \times (5a^2 - 3b^2)$$

2. *Pour* M *appartenant à l'ellipse* $\mathscr{E}_u$ *de mêmes foyers et de petit axe* u, *la quantité* $MF + MF'$ *est constante et vaut deux fois le grand axe soit* $2\sqrt{u^2+c^2}$. *On effectue le changement de variable :* $x = \sqrt{u^2+c^2}\cos v$, $y = u\sin v$.
   $u \in [0, b]$ *et* $v \in [0, 2\pi]$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{u}{\sqrt{u^2+c^2}}\cos v & -\sqrt{u^2+c^2}\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = \frac{u^2 + c^2\sin^2 v}{\sqrt{u^2+c^2}}$$

$$J = \int_0^b du \int_0^{2\pi} 2\sqrt{u^2+c^2}\,\frac{u^2 + c^2\sin^2 v}{\sqrt{u^2+c^2}}\, dv = 2\int_0^b du \int_0^{2\pi} u^2 + c^2\sin^2 v\, dv = 2\int_0^b 2\pi\left(u^2 + \frac{c^2}{2}\right) du$$

$$= 4\pi\left(\frac{b^3}{3} + \frac{c^2 b}{2}\right) = \frac{2\pi b}{3}(2b^2 + 3(a^2 - b^2)) = 2\pi b\left(a^2 - \frac{b^2}{3}\right)$$

3. *Soit* $L=\iint_{M\in E}(MF+MF')^2\,dx\,dy=I+2K$. *En reprenant le changement de variable précédent,*

$$L=\int_0^b du\int_0^{2\pi}\left(2\sqrt{u^2+c^2}\right)^2\frac{u^2+c^2\sin^2 v}{\sqrt{u^2+c^2}}\,dv=4\int_0^b du\int_0^{2\pi}\sqrt{u^2+c^2}(u^2+c^2\sin^2 v)\,dv=4\int_0^b 2\pi\sqrt{u^2+c^2}\left(u^2+\frac{c^2}{2}\right)du$$

En posant $u=c\ \mathrm{sh}\,t$, $du=c\ \mathrm{ch}\,t\,dt$
et $\alpha=\mathrm{argsh}\left(\frac{b}{c}\right)=\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2}+1}\right)=\ln\frac{a+b}{c}$,

$$L=4\pi\int_0^\alpha c^2(2\,\mathrm{sh}^2 t+1).c\,\mathrm{ch}\,t.c\,\mathrm{ch}\,t\,dt=4\pi c^4\int_0^\alpha(2\,\mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t+\mathrm{ch}^2 t)\,dt=2\pi c^4\int_0^\alpha(\mathrm{sh}^2 2t+1+\mathrm{ch}2t)\,dt$$
$$=\pi c^4\int_0^\alpha(\mathrm{ch}4t-1+2+2\,\mathrm{ch}2t)\,dt=\pi c^4\left[\alpha+\mathrm{sh}2\alpha+\frac{1}{4}\mathrm{sh}4\alpha\right]$$

Or $\mathrm{sh}2\alpha=2\,\mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{ch}\alpha=2\frac{b}{c}\sqrt{\frac{b^2}{c^2}+1}=\frac{2ab}{c^2}$
et $\mathrm{sh}4\alpha=2\,\mathrm{sh}2\alpha\,\mathrm{ch}2\alpha=2\frac{2ab}{c^2}\sqrt{\frac{4a^2b^2}{c^2}+1}=\frac{4ab}{c^4}(a^2+b^2)$.

$$D\text{'où } L=\pi c^4\ln\frac{a+b}{c}+\pi ab(2c^2+a^2+b^2)=\pi c^4\ln\frac{a+b}{c}+\pi ab(3a^2-b^2)$$

$$\text{Enfin } K=\frac{1}{2}(L-I)=\frac{1}{2}\pi c^4\ln\frac{a+b}{c}+\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)=\frac{\pi}{4}\left((a^2-b^2)^2\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)+ab(a^2+b^2)\right)$$

Exercice 18.14 ♡♡

Calculer $\iint_D\exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)dx\,dy$ *avec* $D=\{x^2\leqslant 2py, y^2\leqslant 2px\}$

Solution : *L'ensemble d'intégration a pour frontière des arcs de paraboles sécants en* $O(0,0)$ *et* $A(2p^{2/3}q^{1/3},2p^{1/3}q^{2/3})$. *On a*

$$\iint_D\exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)dx\,dy=\iint_{\mathscr{D}}\exp\left(\frac{x^2}{y}\right)\exp\left(\frac{y^2}{x}\right)dx\,dy.$$

On considère le changement de variables Φ *défini par* $\Phi(x,y)=(u,v)=\left(\frac{x^2}{y},\frac{y^2}{x}\right)$.
Φ *est un* $\mathscr{C}^1$ *est un difféomorphisme de* $\mathring{D}=\{x^2<2py,y^2<2px\}$ *sur* $\mathring{\Delta}=]0,2p[\times]0,2q[$, *avec* $\Phi^{-1}(u,v)=(x,y)=\left(u^{2/3}v^{1/3},u^{1/3}v^{2/3}\right)$.
Le jacobien de Φ^{-1} *est*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3}&\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3}\\\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3}&\frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}.$$

Donc
$$\iint_D\exp\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)dx\,dy=\frac{1}{3}\iint_\Delta e^{u+v}\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_0^{2p}e^u\,du\int_0^{2q}e^v\,dv=\frac{(e^{2p}-1)^2(e^{2q}-1)^2}{3}.$$

18.3.3 Intégration en coordonnées polaires

Exercice 18.15 ♡

Calculer
$$I=\int\int_{\mathscr{D}}\cos\left(x^2+y^2\right)\,dxdy$$
où $\mathscr{D}$ *est le disque de centre* O *et de rayon* $R>0$.

Solution :
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho\cos\rho^2\,d\rho=2\pi\int_0^{R^2}\frac{1}{2}\cos t\,dt=\pi\sin R^2.$$

Exercice 18.16 ♡

Calculer

$$\mathrm{I} = \int\int_{\mathscr{D}} \sin\left(x^2+y^2\right)\ \mathrm{dxdy}$$

où $\mathscr{D}$ *est le disque de centre* O *et de rayon* $\sqrt{\pi}$.

Solution :

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\mathrm{R}} \rho \sin\rho^2\ \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\mathrm{R}^2} \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t = \pi(1-\cos \mathrm{R}^2).$$

Exercice 18.17 ♡

Calculer

$$\mathrm{I} = \int\int_{\mathscr{D}} \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{dxdy}$$

où $\mathscr{D}$ *est le quart de disque unité inclus dans* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Solution :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{\rho^2}{\rho\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{3}\left[\tan\varphi\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 18.18 ♡

Calculer $\iint_{\mathrm{D}} (x+y)^2\,dx\,dy$ *avec* $\mathrm{D} = \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$

Solution : *En se servant de la symétrie par rapport à l'axe* $\mathrm{O}x$ *:*

$$\iint_{\mathrm{D}} (x+y)^2\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{D}} (x^2+2xy+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{D}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^3\,d\rho = 2\pi\times\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 18.19 ♡

Calculer

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{D}} \frac{xy\sqrt{1-x^2-y^2}}{2x^2+y^2}$$

où $\mathrm{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Solution : *En passant en polaires,*

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2(2\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{JK}$$

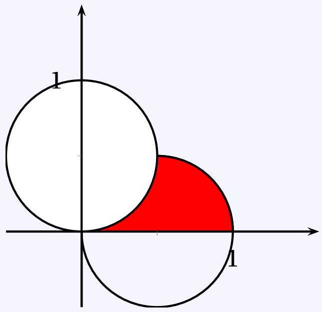
où $\mathrm{J} = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ *se calculer par le changement de variables* $u=\sin^2\theta$, $\mathrm{J} = \frac{\ln 2}{2}$ *et* $\mathrm{K} = \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho = 1/3$. *Finalement,*

$$\mathrm{I} = \frac{\ln 2}{6}$$

Exercice 18.20 ♡

Calculer $\mathrm{I} = \iint_{\Delta} (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *où* $\Delta = \{(x,y)$ tels que $y\geqslant 0$ et $x^2+y^2-x\leqslant 0$ et $x^2+y^2-y\geqslant 0\}$.

Solution :



$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\vartheta\int_{\sin\vartheta}^{\cos\vartheta}(\rho\cos\vartheta+\rho\sin\vartheta)^2\rho\,\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\vartheta+\sin\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta\int_{\sin\vartheta}^{\cos\vartheta}\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin2\vartheta)\frac{1}{4}(\cos^4\vartheta-\sin^4\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin2\vartheta)(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin2\vartheta)\cos2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta+\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$
$$=\frac{1}{8}[\sin2\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{32}[\cos4\vartheta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$$

Exercice 18.21 ♡♡

Calculer l'intégrale double

$$I=\iint_D\frac{x^3}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant 2x,\ \ y\geqslant 0\}$

Solution : *Le domaine est un demi disque de rayon* 1 *centré en* $(1,0)$*. En passant en polaires,* $\Delta=\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$*. Alors*

$$I=\iint_\Delta\rho^2\cos^3\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta$$

En utilisant les intégrales de Wallis, on trouve que $I=\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 18.22 ♡♡

Calculer $\displaystyle\iint_D\frac{xy\,dx\,dy}{1+x^2+y^2}$ *avec* $D=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, x^2+y^2\geqslant 1\}$

Solution : *Par symétrie,* $I=\displaystyle\iint_D\frac{xy\,dx\,dy}{1+x^2+y^2}=2\iint_{D'}\frac{xy\,dx\,dy}{1+x^2+y^2}$*, avec* $D'=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, x^2+y^2\geqslant 1, y\leqslant x\}$*. On passe en polaire,* $I=2\displaystyle\iint_\Delta\frac{\rho^3\cos\vartheta\sin\vartheta}{1+\rho^2}\,d\rho\,d\vartheta$ *avec* $\Delta=\left\{0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{4}, 1\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{\cos\vartheta}\right\}$*. Or* $\Delta=\left\{1\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2}, \arccos\frac{1}{\rho}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$*. Comme* $\displaystyle\int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\pi/4}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta=-\frac{1}{2}\left[\cos^2\vartheta\right]_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\pi/4}=\frac{2-\rho^2}{4\rho^2}$*, on a*

$$I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2\rho-\rho^3}{2(1+\rho^2)}\,d\rho=\int_1^{\sqrt{2}}\left(-\rho+\frac{3\rho}{1+\rho^2}\right)d\rho=\left[-\frac{\rho^2}{2}+\frac{3}{2}\ln(1+\rho^2)\right]_1^{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Exercice 18.23 ♡♡

Calculer $\displaystyle\iint_D y\exp(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy$ *avec* $D=\{x^2+y^2-2y\leqslant 0\}$

Solution : *En prenant la translation* $u=x$*,* $v=y-1$*, on obtient*

$$\iint_D y\exp(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{v+1}{e}\exp(u^2+v^2)\,du\,dv$$
$$=\frac{1}{e}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\exp(u^2+v^2)\,du\,dv,$$

car l'intégrale $\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} v\exp(u^2+v^2)\,du\,dv$ est nulle pour des raisons de symétrie. Donc en passant en polaire,

$$\iint_D y\exp(x^2+y^2-2y)\,dx\,dy = \frac{2\pi}{e}\int_0^1 \rho e^{\rho^2}\,d\rho = \frac{\pi}{e}\int_0^1 e^t\,dt = \frac{\pi}{e}(e-1) = \pi(1-\frac{1}{e}).$$

Exercice 18.24 ♡♡

Calculer $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ *avec* $D = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ -x\leqslant y\leqslant x\}$

Solution : $D' = \left\{(\rho,\vartheta) \mid 0\leqslant r\leqslant \frac{1}{\cos\vartheta}\ \vartheta\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]\right\}$ *Puis*

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos\vartheta}\right)^3 d\vartheta = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\vartheta}{\left(1-\sin^2\vartheta\right)^2}\,d\vartheta = \frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{du}{\left(1-u^2\right)^2}.$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{\left(1-u^2\right)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right).$$

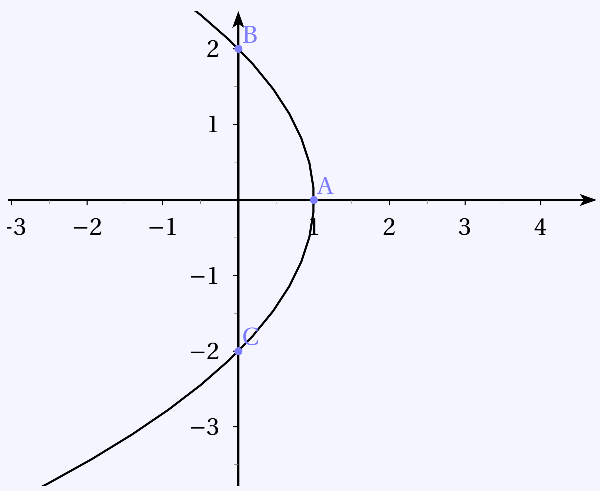
Donc

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}+\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_0^{\sqrt{2}/2}\\
&= \frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)+\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-2\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}-2\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 18.25 ♡♡

Calculer $\iint_D x^2+y^2\,dx\,dy$ *avec* $D = \left\{0\leqslant x\leqslant 1-\frac{y^2}{4}\right\}$

Solution :



En remarquant que O *est le foyer de la parabole, une équation en polaire est donc* $\rho = \frac{2}{1+\cos\vartheta}$.

En utilisant la symétrie par rapport à l'axe Ox *:*

$$\iint_{\mathscr{D}} x^2+y^2\,dx\,dy = 2\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\frac{2}{1+\cos\vartheta}} \rho^3\,d\rho = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2^4}{4(1+\cos\vartheta)^4}\,d\vartheta = 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{4\cos^8\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\cos^8\varphi}$$

En posant $t=\tan\varphi$, $dt=\dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\dfrac{1}{\cos^2\varphi}=1+\tan^2\varphi=1+t^2$.

$$\iint_{\mathscr{D}} x^2+y^2\,dx\,dy = \int_0^1 (t^2+1)^3\,dt = \int_0^1 t^6+3t^4+3t^2+1\,dt = \frac{1}{7}+\frac{3}{5}+1+1 = \frac{70+5+21}{35} = \frac{96}{35}.$$

18.3.4 Application du théorème de Fubini

Exercice 18.26 ♡

1. *Montrer que :* $\forall x\in[0,1]$, $\ln(1+x)=\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\mathrm{dy}$.
2. *En déduire la valeur de l'intégrale* $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{dx}$.

Solution :

1.
$$\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(1+x).$$

2.
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y = \iint_{[0,1]^2} \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+xy)}$$

D'après la propriété de Fubini. Maintenant on a aussi bien sûr, par symétrie : $\mathrm{I}=\displaystyle\iint_{[0,1]^2}\frac{y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)(1+xy)}$*, donc*

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}\left(\frac{y}{(1+y^2)(1+xy)}+\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2}\frac{(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \iint_{[0,1]^2}\frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

de nouveau grâce à la symétrie. Donc $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\ln 2}{2}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

18.3.5 Green-Riemann

Exercice 18.27 ♡

Calculer $\displaystyle\iint_{\mathrm{A}} dx\,dy$ *où* $\mathrm{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1 \text{ et } \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leqslant 1\right\}$.

Solution : *On suppose* $a\leqslant b$. *Par symétries, on ne calcule que l'aire de la figure dans le premier quadrant, sous la première bissectrice. C'est donc un huitième de* A. *Le bord est paramétré par* $x(t)=a\cos t$; $y(t)=b\sin t$, t *variant de* 0 *à* t_0. *Attention,* t *n'est* **pas** *l'angle polaire.* t_0 *est défini par* $x=y$, *c'est-à-dire* $a\cos t_0=b\sin t_0$, *soit* $t_0=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$.
Pour calculer l'aire, on fait circuler $\dfrac{1}{2}(x\,dy-y\,dx)$. *La circulation est nulle sur chacun des deux segments. Seul reste*

$$\int_0^{t_0}(a\cos t\times b\cos t - b\sin t\times(-a\sin t)\,dt = \frac{abt_0}{2}.$$

Donc l'aire de A *égale* $8\times\dfrac{abt_0}{2}=4ab\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$.

Exercice 18.28 ♡♡

Calculer $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} x^2+y^2\,dx\,dy$ *avec* $\mathrm{D}=\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.
Cet exemple a déjà été vu dans le cours. Ici on cherchera une solution à l'aide de la formule de Green-Riemann.

Solution : *On cherche* $Q(x,y)$ *tel que* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2$. *On prend par exemple* $Q(x,y) = xy^2$. *De même* $P(x,y) = -x^2 y$ *vérifie* $-\dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2$. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $\begin{cases} dx = -a\sin t\,dt \\ dy = b\cos t\,dt \end{cases}$ *D'après la formule de Green-Riemann,*

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 + y^2\,dx\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\mathscr{D}} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} ab\cos t\sin t(a^2\cos t\sin t + b^2\cos t\sin t)\,dt \\ &= ab(a^2+b^2)\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{ab(a^2+b^2)}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt = \frac{ab(a^2+b^2)}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt \\ &= \frac{ab(a^2+b^2)}{8}\times 2\pi = \frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)\end{aligned}$$

18.3.6 Centres de gravité

Exercice 18.29 ♡♡

Déterminez le centre de gravité d'une plaque homogène limitée par une cardioïde.
(C'est le point G *tel que* $M\overrightarrow{OG} = \iint_S \sigma\overrightarrow{OM}\,dx\,dy$ *avec* $M = \iint_S \sigma\,dx\,dy$*.)*

Solution : *Notons* σ *la densité massique constante de la plaque. La cardioïde a pour équation polaire*

$$\rho = a(1+\cos\theta)$$

Déterminons la masse de la plaque :

$$M = \iint_D \sigma\,dx\,dy.$$

En passant en coordonnées polaires, on trouve (en posant $\varphi = \theta/2$*) :*

$$M = 2\sigma\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho\,d\rho\,d\theta = 8a^2\sigma\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^2\sigma I_4$$

en utilisant les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n\varphi\,d\varphi$$

qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 2,\quad \frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$$

Par symétrie, le centre de gravité de la plaque se trouve sur l'axe $(0x)$*, et son abscisse est donnée par*

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\,dx\,dy$$

En passant en coordonnées polaires :

$$x_G = \frac{1}{16a^2 I_4}\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{2a}{3}\frac{I_6}{I_4}\left(2\frac{I_8}{I_6} - 1\right)$$

et on trouve finalement $x_G = \dfrac{1}{8a^2 I_4}\times 2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta}\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \dfrac{4a}{3}\times\dfrac{I_6}{I_4}\left(2\dfrac{I_8}{I_6} - 1\right) = \dfrac{4a}{3}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{5a}{6}$.
On a bien sûr $y_G = 0$.

Chapitre 19

Structures algébriques

Pour bien aborder ce chapitre

La notion de groupe est apparue dès la fin du 18e de manière parallèle dans différents domaines des mathématiques.
En 1798, Karl Friedrich Gauss, dans ses « Disquisitiones Arithmeticae », utilise implicitement la notion de groupe abélien.
Plus tard, au milieu du 19e, Ernst Kummer établie des résultats de factorisation sur les groupes dans une tentative de prouver le grand théorème de Fermat.
Dans la première moitié du 19e siècle, le jeune mathématicien prodige Évariste Galois cherche à prouver que les équations polynomiales de degré $\geqslant 5$ à coefficients complexes ne peuvent être résolues par radicaux, ce qui signifie que leurs racines ne peuvent être écrites au moyen des opérations usuelles. Pour ce faire, il s'intéresse à un groupe relié aux racines de l'équation considérée. Son génie consiste alors à comprendre que les difficultés pour résoudre l'équation ne proviennent pas de son degré mais des propriétés mathématiques de ce groupe.
À la fin du 19e, Félix Klein utilise les groupes pour classifier les nouvelles géométries tout juste découvertes.
Les mathématiciens savent depuis que les groupes interviennent dans de très nombreux domaines. L'ensemble des isométries de l'espace ou du plan est un groupe appelé groupe orthogonal, voir le chapitre 27. L'ensemble des isométries préservant un objet donné (un polygone régulier, un solide platonicien, etc...) a une structure de groupe. L'ensemble des permutations $\mathfrak{S}_n$ d'un ensemble fini est un groupe qui fut étudié par Cauchy et Cayley à la fin du 19e siècle. Le chapitre 26 lui est consacré. Le groupe découvert par Galois est d'ailleurs un sous-groupe de ce groupe. L'ensemble des transformations qui, en relativité restreinte, permettent de changer de référentiel galiléen tout en préservant les lois de la physique et la vitesse de la lumière, forment un groupe appelé groupe de Lorenz. En chimie, les symétries des molécules permettent de leur associer des groupes qui aident à comprendre mieux leurs propriétés. Plus concrètement encore, l'ensemble des manipulations qu'on peut effectuer sur un Rubik's cube a lui aussi une structure de groupe. L'étude de ce groupe permet de mettre en place des stratégies gagnantes pour le reconstituer.
L'objet de ce chapitre, peu ambitieux, est d'introduire la notion de groupe ainsi que le vocabulaire attenant. Nous le terminerons par l'étude de deux autres structures, celles d'anneaux et de corps, qui sont elles aussi omniprésentes en mathématiques.

19.1 Groupe

19.1.1 Loi de composition interne

DÉFINITION 19.1 ♡ **Loi de composition interne**
Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne* une application de $E \times E$ dans E :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longmapsto & \varphi(a,b) \end{array} \right.$$

Exemple 19.1
- Si $E = \mathbb{N}$, la multiplication ou l'addition des entiers forme une loi de composition interne.
- Si E est un ensemble, la composition des applications est une loi de composition interne sur l'ensemble des fonctions de E dans E : $\mathscr{F}(E,E)$
- Si E est un ensemble, l'intersection ou la réunion sont des lois de composition interne sur l'ensemble des parties de E : $\mathscr{P}(E)$

Notation 19.2

- Pour alléger les notations, on écrit plus simplement $\varphi(a,b) = a_{\varphi}\, b$ ou $\varphi(a,b) = a \star b$ par exemple, ou encore $\varphi(a,b) = a.b$, et pour les moins courageux $\varphi(a,b) = ab$ etc.
- On note alors $(E,\star)$ un ensemble E muni d'une loi de composition interne $\star$.

Remarque 19.1

- Ce qui est important, bien entendu, c'est que $\varphi(a,b)$ reste dans E.
- Il n'y a aucune raison à priori pour que $a \star b = b \star a$.
- On peut itérer une loi de composition interne : si $(a,b,c) \in E^3$, on notera

$$(a \star b) \star c = \varphi\big(\varphi(a,b), c\big)$$

$$a \star (b \star c) = \varphi\big(a, \varphi(b,c)\big)$$

Il n'y a aucune raison à priori pour que ces deux éléments soient égaux.

Notation 19.3 Pour simplifier les notations, on utilisera, suivant le contexte, pour la loi de composition interne $\star$:

- une *notation additive* : $a + b = a \star b = \varphi(a,b)$.
- ou une *notation multiplicative* : $ab = a \star b = \varphi(a,b)$.

DÉFINITION 19.2 ♡ **Loi associative, commutative**

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E. On dit que $\star$ est :

- *commutative* si et seulement si $\forall (a,b) \in E^2$, $a \star b = b \star a$,
- *associative* si et seulement si $\forall (a,b,c) \in E^3$, $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.

On dit que plus que $\star$ admet $e \in E$ comme *élément neutre* si et seulement si $\forall x \in E$, $e \star x = x \star e = x$

PLAN 19.1 : Pour montrer que...

... $\star$ est commutative :

1. Soit $(x,y) \in E^2$
2. $x \star y = y \star x$
3. *Donc $\star$ est commutative*

... $\star$ est associative :

1. soit $(x,y,z) \in E^3$
2. $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
3. *Donc $\star$ est associative*

... $e \in E$ est neutre :

1. Soit $x \in E$
2. $e \star x = x$, $x \star e = x$
3. *Donc e est neutre.*

PROPOSITION 19.1 **Unicité de l'élément neutre**

Si $(E,\star)$ possède un élément neutre, il est unique.

Démonstration *Supposons que e' soit un autre élément neutre pour $\star$. Alors $e = e \star e' = e'$ et donc $e = e'$.*

Exemple 19.4

- Pour le couple $(\mathbb{N},+)$, $+$ est commutative et associative, l'élément neutre est 0.
- Pour le couple $(\mathbb{N},\times)$, $\times$ est commutative et associative, 1 est l'unique élément neutre .
- Pour le couple $(\mathscr{P}(G),\cup)$, la loi est commutative, associative, la partie $\varnothing$ est neutre pour cette loi.
- Soit E un ensemble. On considère l'ensemble des applications de E dans E muni de la composition : $(\mathscr{F}(E,E),\circ)$. La loi de composition interne $\circ$ est associative mais pas commutative. Id_E est l'élément neutre de cette loi.

Remarque 19.2 Si une loi de composition interne est *commutative* et *associative*, on définit les notations suivantes pour $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$:

- Lorsque la loi est notée additivement, on définit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n,$$

- et lorsque la loi est notée multiplicativement,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \star \cdots \star x_n.$$

Exemple 19.5 Soit E un ensemble. On considère l'ensemble des applications de E dans E muni de la composition : $(\mathscr{F}(E,E), \circ)$. La loi de composition interne $\circ$ est associative mais pas commutative. Id_E est l'élément neutre de cette loi.

Dans la suite, on suppose que $\star$ est associative et admet un élément neutre.

DÉFINITION 19.3 ♡ **Symétrique**
On suppose que $(E, \star)$ possède un élément neutre e. Soit un élément $x \in E$. On dit qu'un élément $y \in E$ est un *symétrique* (ou un *inverse*) de l'élément x si et seulement si :

$$x \star y = y \star x = e$$

Si tel est le cas, y est unique et est appelé le *symétrique de* x.

Démonstration *Supposons que x possède deux symétriques $y_1 \in E$ et $y_2 \in E$, alors, par application de la définition et par associativité de $\star$, il vient :*

$$y_2 = (x \star y_1) \star y_2 = (y_1 \star x) \star y_2 = y_1 \star (x \star y_2) = y_1 \star e = y_2.$$

PLAN 19.2 : Pour montrer que $y \in E$ est le symétrique de $x \in E$

1. *On montre que $x \star y = e$;*
2. *On montre que $y \star x = e$;*
3. *Donc y est le symétrique de x.*

Remarque 19.3 L'élément neutre est toujours son propre symétrique : $e^{-1} = e$.

Notation 19.6 Si un élément x de $(E, \star)$ admet un symétrique :
- on l'appelle *inverse* de x et on le note x^{-1} lorsque la loi est notée multiplicativement
- on l'appelle *opposé* de x et on le note de x et on le note $-x$ lorsque la loi est notée additivement.

Exemple 19.7
– Le seul élément de $(\mathbb{N}, +)$ qui admet un opposé est 0.
– Tout élément $n \in \mathbb{Z}$ muni de l'addition admet un opposé.
– Les deux seuls éléments de $\mathbb{Z}^*$ muni de la multiplication qui admettent un inverse sont 1 et -1.
– Tout élément p/q de $\mathbb{Q}^*$ admet un inverse donné par q/p.
– Si $f \in \mathscr{F}(E,E)$ muni de la loi de composition, f est inversible si et seulement si elle est bijective.

PROPOSITION 19.2 ♡ **Règles de calcul avec les inverses**
– Si x est symétrisable alors x^{-1} est aussi symétrisable et : $\boxed{(x^{-1})^{-1} = x}$.
– Si x et y sont symétrisables, $x \star y$ est aussi symétrisable et : $\boxed{(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}}$.

Démonstration
– *Soit x un élément symétrisable de E et soit $y = x^{-1}$. Comme $y \star x = x \star y = e$, y est symétrisable et $x = y^{-1} = (x^{-1})^{-1}$.*
– *Supposons que x et y sont symétrisables, alors, par associativité de $\star$, on a :*

$$(x \star y) \star \left(y^{-1} \star x^{-1}\right) = x \star \left(y \star y^{-1}\right) \star x^{-1} = x \star e \star x^{-1} = x \star x^{-1} = e.$$

On montre de même que $(y^{-1} \star x^{-1}) \star (x \star y) = e$, ce qui prouve bien que $x \star y$ est symétrisable et que $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

Remarque 19.4 La propriété $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$ dit simplement que l'on se déshabille dans l'ordre inverse de l'habillage. Si x désigne l'opération « je mets ma chaussette droite » et y l'opération « je mets ma chaussure droite », les opérations inverses sont x^{-1}, « j'ôte ma chaussette droite » et y^{-1} l'opération « j'ôte ma chaussure droite ». L'opération « je mets ma chaussette droite, puis ma chaussure droite » est désignée par $x \star y$. Son opération inverse est bien $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$ c'est-à-dire « j'ôte ma chaussure droite, puis ma chaussette droite ».
L'opération z « je mets ma chaussette gauche » commute avec x et y, (donc avec x^{-1} et y^{-1}). De ce fait $(x \star z)^{-1} = z^{-1} \star x^{-1}$, ce qui peut être facilement vérifié expérimentalement.

19.1.2 Groupe

DÉFINITION 19.4 ♡♡♡ **Groupe**
Soit G un ensemble. On dit que $(G, \star)$ est un *groupe* si $\star$ est une loi de composition interne sur G vérifiant :

1. la loi $\star$ est associative ;
2. G possède un élément neutre ;
3. tout élément x de G admet un symétrique.

Si de plus la loi $\star$ est commutative, on dit que le groupe est *abélien* (ou *commutatif*).

Exemple 19.8

– Les couples $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{C},+)$ sont des groupes.
– Les couples $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont des groupes.
– Rappelons que $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}=\{z\in\mathbb{C}\mid \exists\theta\in\mathbb{R} : z=e^{i\theta}\}$. On a montré dans la proposition 1.16 page 25 que $(\mathbb{U},\times)$ est un groupe.
– Les couples $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\times)$ ne sont pas des groupes. Pourquoi ?

Présentons maintenant un autre exemple essentiel.

PROPOSITION 19.3 ♡ **Groupes des bijections d'un ensemble**
Soit E un ensemble. On note $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ l'ensemble des bijections de E dans E. Alors $(\mathfrak{S}(\mathrm{E}),\circ)$ est un groupe (en général non abélien).

Démonstration

– *On a déjà prouvé que* $\circ$ *est une loi de composition interne : si* $(f,g)\in(\mathfrak{S}(\mathrm{E}))^2$ *alors* $f\circ g$ *et* $g\circ f$ *sont encore des bijections sur* E.
– *On a aussi déjà prouvé que* $\circ$ *est associative.*
– $\mathfrak{S}(\mathrm{E})$ *possède un élément neutre* Id_E.
– *Toute application* f *de* E *possède une application symétrique : son application réciproque* f^{-1}.

BIO 16 Évariste Galois né à Bourg-la-Reine le 25 octobre 1811, mort à Paris le 31 mai 1832.



Malgré une scolarité en dents de scie, Galois montre des capacités extraordinaires en mathématiques. Il a un tel goût pour cette matière qu'un de ses professeurs dira « C'est la fureur des mathématiques qui le domine ; aussi je pense qu'il vaudrait mieux pour lui que ses parents consentent à ce qu'il ne s'occupe que de cette étude ». En 1826, il obtient un prix en mathématiques au concours général. En 1828, il essaie d'intégrer l'école Polytechnique alors qu'il n'est pas élève, comme c'est normalement l'usage, en mathématiques spéciales. Il est recalé. Il entre alors en mathématiques spéciales à Louis-le-Grand dans la classe de Louis-Paul-Émile Richard. Ce dernier prend vite conscience du génie de son élève. Il conservera d'ailleurs ses copies. Le père de Galois se suicide pour des raisons politiques quelques jours avant que Galois ne se présente à nouveau à Polytechnique. Il est une seconde fois recalé, à la stupéfaction de son maître. La légende veut qu'il ait jeté le chiffon servant à effacer le tableau à la tête de son examinateur devant la stupidité des questions posées ... Il intègre cependant l'École préparatoire (appelée maintenant l'École Normale Supérieure, rue d'Ulm). Il publie cette même année son premier article de mathématiques dans les Annales de mathématiques pures et appliquées de Gergonne.
Il soumet dans les mois qui suivent plusieurs autres articles sur la résolubilité des équations algébriques. La légende veut que Cauchy, qui en était le rapporteur, les aurait égarés. Il est plus probable en fait qu'il les ait conservés pour que Galois puisse concourir au grand prix de mathématiques de l'Académie des sciences en 1830. Galois candidate à ce concours et Fourier qui est chargé de rapporter son manuscrit meurt peu après ... Le grand prix échoit à Abel et Jacobi.
Suite à la révolution de juillet 1830, Galois s'engage en politique au côté des républicains. Fin décembre 1830, il est expulsé de l'école préparatoire suite à la rédaction d'un texte critique à l'égard de son directeur. En 1831, lors d'un banquet, Galois porte maladroitement un toast à Louis-Philippe avec un couteau à la main ... Il est arrêté et passe un mois en prison. Quelques mois après, il est à nouveau arrêté et passe six mois en prison pour port illégal de l'uniforme de l'artillerie. Cette même année, il soumet un nouveau manuscrit à l'Académie des sciences, toujours sur la résolubilité des équations polynomiales. Poisson, qui le rapporte est rebuté par sa difficulté et le refuse. En prison, Galois poursuit ses recherches mathématiques et s'intéresse aux fonctions elliptiques.
Le 30 mai 1832, Galois se bat en duel au pistolet suite, semble-t-il, à une bête querelle amoureuse. Il décède le lendemain de ses blessures. La nuit précédant le duel, il rédige une lettre [a] à son ami Auguste Chevalier lui enjoignant de faire connaître ses travaux à Jacobi et Gauss. Elle se termine par cette phrase très émouvante qui permet de mesurer l'optimisme de Galois quant à l'issue du duel : « Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis ».
Liouville, dix ans plus tard, re-découvrira les travaux de Galois et qui les popularisera.

a. On peut consulter cette lettre à l'adresse http ://www.imnc.univ-paris7.fr/oliver/galois/LettreGaloisA4.ps

THÉORÈME 19.4 ♡♡♡ Règles de calcul dans un groupe

Soit $(G, \star)$ un groupe.

1. L'élément neutre est unique .
2. Tout élément possède un *unique* symétrique ;
3. Pour tout élément x d'un groupe, on a $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.
4. Règle de *simplification* : $\forall (a, x, y) \in G^3$;

$$\begin{cases} a \star x = a \star y & \Longrightarrow \ x = y \\ x \star a = y \star a & \Longrightarrow \ x = y \end{cases}.$$

5. Soit $(a, b) \in G^2$. L'équation $a \star x = b$ possède une unique solution :

$$x = a^{-1} \star b.$$

6. $\forall (x, y) \in G^2$, $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

PROPOSITION 19.5 ♡ Groupe produit

On considère deux groupes $(G, \star)$ et $(H, \bullet)$ et sur l'ensemble $G \times H$, on définit la loi $\bigstar$ par :

$$\forall ((x, y), (x', y')) \in (G \times H)^2, \quad (x, y) \bigstar (x', y') = (x \star x', y \bullet y')$$

Alors $(G \times H, \bigstar)$ est un groupe appelé *groupe produit*.

Démonstration *La preuve est laissée en exercice. Il suffit de vérifier chacun des axiomes définissant un groupe.*

DÉFINITION 19.5 ♡ Sous-groupe

Soit $(G, \star)$ un groupe. On dit qu'une partie $H \subset G$ est un *sous-groupe* de G si et seulement si :

1. $e \in H$.
2. la partie H est *stable* par la loi : $\forall (x, y) \in H^2, \ x \star y \in H$.
3. $\forall x \in H, \ x^{-1} \in H$.

Exemple 19.9

– $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour l'addition.
– $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ pour l'addition.
– L'ensemble des bijections croissantes est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
– L'ensemble des isométries du plan est un sous-groupe du groupe des bijections du plan. (Rappelons qu'une isométrie est une bijection conservant les distances).

PROPOSITION 19.6 ♡♡♡ Caractérisation des sous-groupes

Soient $(G, \star)$ un groupe et H une partie **non vide** de G. H est un sous-groupe de G si et seulement si

1. $e \in H$;
2. $\forall (x, y) \in H^2$, $\boxed{x \star y^{-1} \in H}$.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ *Soit* H *un sous-groupe non vide de* G *et soit* $(x, y) \in H^2$. y^{-1} *est élément de* H *et il en est de même du produit* $x \star y^{-1}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ *Soit* H *une partie non vide de* G *vérifiant :* $\forall (x, y) \in H^2, \quad x \star y^{-1} \in H$. *Soit* $x \in H$. *On a :* $e = x \star x^{-1} \in H$ *donc l'élément neutre de* G *est élément de* H. *Pour tout* $(e, x) \in H^2$, $e \star x^{-1} \in H$ *donc* $x^{-1} \in H$. *Enfin, pour tout* $(x, y) \in H^2$, *on a* $(x, y^{-1}) \in H^2$ *et donc* $x \star \left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$, *soit* $x \star y \in H$.

PLAN 19.3 : Pour montrer que $H \subset G$ est un sous-groupe du groupe $(G, \star)$

1. $e \in H$ *;*
2. Soit $(x, y) \in H^2$ *;*
3. *Vérifions que* $x \star y^{-1} \in H$ *...*
4. *Donc* H *est un sous-groupe de* G.

THÉORÈME 19.7 ♡♡♡ Un sous-groupe a une structure de groupe
Si la partie H est un sous-groupe de $(G, \star)$, alors puisque cette partie est stable pour la loi de composition interne, on peut définir la restriction de la loi $\star$ à H qui est une loi de composition interne sur H. Muni de cette loi restreinte, $(H, \star)$ est un groupe.

Ce théorème est d'une grande utilité pour prouver rapidement que des ensembles sont des groupes.

PLAN 19.4 : Pour montrer qu'un ensemble a une structure de groupe...

...il suffit de montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe connu.

Exemple 19.10
Montrons que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe avec : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Il suffit de prouver que c'est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. Comme $|1| = 1$, il est clair que $1 \in \mathbb{U}$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{U}$.
3. On a $\left|xy^{-1}\right| = |x|\left|y\right|^{-1} = 1$ donc $xy^{-1} \in \mathbb{U}$.
4. Donc $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ admet par conséquent une structure de groupe.

THÉORÈME 19.8 L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe
Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes d'un groupe G, alors $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G

Démonstration *Notons $H = H_1 \cap H_2$ et montrons que H est un sous-groupe de G. Utilisons la caractérisation précédente. Soit $(x, y) \in H^2$. On a alors $(x, y) \in H_1^2$ ce qui amène que $x \star y^{-1} \in H_1$ car H_1 est un sous-groupe de G et $(x, y) \in H_2^2$ ce qui amène aussi que $x \star y^{-1} \in H_2$. Donc $x \star y^{-1} \in H_1 \cap H_2 = H$ et H est bien un sous-groupe de G.*

⚠ *Attention 19.11* $H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous-groupe de G, sauf si $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$. Voir exercice 19.35 p. 735.

19.1.3 Morphisme de groupes

DÉFINITION 19.6 ♡♡♡ Morphisme
Soient deux groupes $(G_1, \star)$ et $(G_2, \bullet)$. Une application $f : G_1 \longrightarrow G_2$ est un *morphisme* de groupes ou *homomorphisme* si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in G_1^2, \quad f(x \star y) = f(x) \bullet f(y)$$

On dit de plus que φ est un :
- **endomorphisme** lorsque $G_1 = G_2$
- **isomorphisme** lorsque f est bijective
- **automorphisme** lorsque f est un endomorphisme et un isomorphisme.

PLAN 19.5 : Pour montrer que $f : G_1 \longrightarrow G_2$ est un morphisme

1. Soit $(x, y) \in G_1^2$;
2. *On a bien $f(x \star y) = f(x) \bullet f(y)$.*

Remarque 19.5
- Un morphisme entre un groupe $(G_1, \star_1)$ et un groupe $(G_2, \star_2)$ permet de transformer des produits pour la loi $\star_1$ dans le groupe de départ en des produits pour la loi $\star_2$ dans le groupe d'arrivée.
- La notion d'isomorphisme est fondamentale en mathématiques. Le mot isomorphisme provient du grec et peut se traduire en « même forme ». Deux groupes isomorphes ont non seulement le même nombre d'éléments mais aussi des tables de multiplication identiques. Du coup toute propriété algébrique vraie pour un des deux groupes est vraie pour l'autre. Si un de ces deux groupes est plus simple à étudier que l'autre, on préférera travailler avec celui-ci et on en tirera les propriétés de l'autre. Cette idée est à la base de la théorie des représentations. Par ailleurs, il est intéressant pour un groupe donné, de chercher s'il est isomorphe à un groupe connu. C'est ce qu'on appelle un problème de classification. La classification des groupes finis, terminée au 20e siècle pour ceux qu'on dit simples, occupe à l'heure actuelle encore de nombreux mathématiciens.

PROPOSITION 19.9 Propriétés des morphismes de groupes
Si $(G_1, \star)$ est un groupe d'élément neutre e_1, si $(G_2, \bullet)$ est un groupe d'élément neutre e_2 et si $f : G_1 \longrightarrow G_2$ est un morphisme de groupes, alors

1. $f(e_1) = e_2$;
2. $\forall x \in G_1$, $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$.

Démonstration

1. *Remarquons que $f(e_1) = f(e_1 \star e_1) = f(e_1) \bullet f(e_1) = \left(f(e_1)\right)^2$. On a par ailleurs l'égalité $f(e_1) \bullet e_2 = \left(f(e_1)\right)^2$. En multipliant cette égalité des deux côtés à gauche par $\left(f(e_1)\right)^{-1}$, on obtient $e_2 = f(e_1)$.*
2. *Soit $x \in G$. Comme f est un morphisme de groupes, $f\left(x \star x^{-1}\right) = f(x) \bullet f\left(x^{-1}\right)$. D'autre part, $f\left(x \star x^{-1}\right) = f(e_1) = e_2$. Donc $f(x) \bullet f\left(x^{-1}\right) = e_2$. On montrerait de même que $f\left(x^{-1}\right) \bullet f(x) = e_2$. Ce qui prouve que $f\left(x^{-1}\right) = [f(x)]^{-1}$.*

THÉORÈME 19.10 ♡ **Image directe et réciproque de sous-groupes par un morphisme**
Soient $(G_1, \star)$ et $(G_2, \bullet)$ deux groupes et soit $f : G_1 \mapsto G_2$ un morphisme de groupes.

1. Si H_1 est un sous-groupe de G_1, alors $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2 ;
2. Si H_2 est un sous-groupe de G_2, alors $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1.

Démonstration

1. *Comme $e_2 = f(e_1)$ et que $e_1 \in H_1$ alors $e_2 \in f(H_1)$. Soient $y, y' \in f(H_1)$. Montrons que $y \bullet y'^{-1} \in f(H_1)$. Il existe $x, x' \in H_1$ tels que $f(x) = y$ et $f\left(x'\right) = y'$. Comme $f\left(x'^{-1}\right) = \left(f\left(x'\right)\right)^{-1} = y'^{-1}$, il vient $y \bullet y'^{-1} = f(x) \bullet f\left(x'^{-1}\right) = f\left(x \star x'^{-1}\right)$. Mais H_1 est un sous-groupe de G_1 donc $x \star x'^{-1} \in H_1$. On prouve ainsi que $y \bullet y'^{-1}$ est l'image d'un élément de H_1 par f et donc que $y \bullet y'^{-1} \in f(H_1)$.*
2. *Comme $e_2 = f(e_1)$ et que $e_2 \in H_2$, $e_1 \in f^{-1}(H_2)$. Soient $x, x' \in f^{-1}(H_2)$. Montrons que $x \star x'^{-1} \in f^{-1}(H_2)$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $f\left(x \star x'^{-1}\right) \in H_2$. Mais $f\left(x \star x'^{-1}\right) = f(x) \bullet \left(f\left(x'\right)\right)^{-1} \in H_2$ car H_2 est un sous-groupe de G_2. On montre ainsi que $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1.*

DÉFINITION 19.7 ♡♡♡ **Noyau, image d'un morphisme de groupes**
On considère un morphisme de groupes $f : G_1 \mapsto G_2$. On note e_1 l'élément neutre du groupe G_1 et e_2 l'élément neutre du groupe G_2. On définit

– le *noyau* du morphisme f :
$$\operatorname{Ker} f = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}\left(\{e_2\}\right)$$
– l'*image* du morphisme f :
$$\operatorname{Im} f = f(G_1) = \{y \in G_2 \mid \exists x \in G_1 \; f(x) = y\}$$

PROPOSITION 19.11 ♡♡♡ **Le noyau et l'image d'un morphisme de groupes sont des sous-groupes**
On considère un morphisme de groupes $f : G_1 \mapsto G_2$. Alors

– $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G_1
– $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de G_2.

Démonstration

– *Comme $f(e_1) = e_2$, $\operatorname{Ker} f$ est un sous-ensemble non vide de G_1. De plus, $\{e_2\}$ est un sous-groupe de G_2 et $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{e_2\})$ donc $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G_1 d'après la proposition précédente.*
– *Comme $\operatorname{Im} f = f(G_1)$, on sait que $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de G_2 d'après la proposition précédente.*

THÉORÈME 19.12 ♡♡♡ **Caractérisation des morphismes injectifs**
Un morphisme f de $(G_1, \star)$ dans $(G_2, \bullet)$ est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$.

Démonstration

$\Longrightarrow$ *Supposons que f est injectif. Comme f est un morphisme, on a $e_1 \in \operatorname{Ker} f$. Comme f est injectif, e_1 est le seul élément de $f^{-1}(e_2)$ dans G_1, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$.*

$\Longleftarrow$ *Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$. Soient $(x, y) \in (G_1)^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$. On multiplie à droite l'égalité $f(x) = f(y)$ par $\left(f(y)\right)^{-1}$. On obtient $f(x) \bullet \left(f(y)\right)^{-1} = f(y) \bullet \left(f(y)\right)^{-1} = e_2$. D'après les propriétés des morphismes de groupe $f\left(x \star y^{-1}\right) = e_2$. Donc $x \star y^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ et nécéssairement $x \star y^{-1} = e_1$. On multiplie à droite par y les deux membres de cette égalité et on obtient $x = y$, ce qui prouve que f est injectif.*

PLAN 19.6 : Pour montrer qu'un morphisme $f : (G_1, \star) \mapsto (G_2, \bullet)$ est injectif

1. Soit $x \in G_1$ *tel que* $f(x) = e_2$
2. *Alors* $x = e_1$ *;*
3. *Donc* $\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$*, et puisque f est un morphisme, f est injectif.*

THÉORÈME 19.13 ♡♡♡ **Caractérisation des morphismes surjectifs**
Un morphisme f de $(G_1, \star)$ dans $(G_2, \bullet)$ est surjectif si et seulement si $\boxed{\operatorname{Im} f = G_2}$.

Démonstration *Par définition de la surjectivité !*
Ajoutons, à titre indicatif, les deux propositions suivantes. Leur preuves forment un exercice instructif laissé au lecteur.

PROPOSITION 19.14 **Composition de morphismes de groupes**
- La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.
- La bijection réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

PROPOSITION 19.15 **L'ensemble des automorphismes d'un groupe est un groupe pour la composition**
Si $(G, \star)$ est un groupe, on note $\operatorname{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. $(\operatorname{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.

19.2 Anneau, corps

19.2.1 Structure d'anneau

DÉFINITION 19.8 ♡♡♡ **Anneau**
Soit A un ensemble muni de deux loi de composition interne notées + et ×. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si et seulement si :

1. Le couple $(A, +)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi × est associative ;
3. la loi × est *distributive* par rapport à la loi + :

$$\forall (x, y, z) \in A^3, \quad \begin{aligned} x \times (y + z) &= x \times y + x \times z \\ (x + y) \times z &= x \times z + y \times z; \end{aligned}$$

4. il existe un élément neutre pour ×, noté 1.

Si en plus la loi × est commutative, on dit que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Exemple 19.12
- Les triplets $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs. Ce n'est pas le cas de $(\mathbb{N}, +, \times)$.
- Si E est un ensemble, l'ensemble $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ des applications définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et du produit des fonctions est un anneau commutatif.
- L'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition et du produit des fonctions est un anneau commutatif.
- L'ensemble des suites réelles (ou complexes) $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{S}(\mathbb{C})$) muni de l'addition et de la multiplication des suites est un anneau commutatif.
- On verra au chapitre 25 que l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels (ou complexes) muni de l'addition et du produit des matrices est un anneau en général non commutatif.

Notation 19.13 Dans un anneau $(A, +, \times)$, on note $-x$ le symétrique de l'élément x pour la loi + et 0 l'élément neutre de la loi +. Attention, un élément $x \in A$ n'a pas forcément de symétrique pour la loi ×, la notation x^{-1} n'a pas de sens en général.

THÉORÈME 19.16 ♡ **Règles de calcul dans un anneau**
On considère un anneau $(A, +, \times)$. On a les règles de calcul suivantes :

1. $\forall a \in A$, $a \times 0 = 0 \times a = 0$;
2. $\forall a \in A$, $(-1) \times a = -a$;
3. $\forall (a, b) \in A^2$, $(-a) \times b = -(a \times b)$.

Démonstration *Soit* $(a, b) \in A^2$

1. *La distributivité de la loi × par rapport à la loi + permet d'écrire :* $0 \times a + 0 \times a = (0 + 0)\, a = 0 \times a$. *Par soustraction de* $0 \times a$ *des deux côtés de cette égalité, on obtient :* $0 \times a = 0$. *On prouve de même que* $a \times 0 = 0$.
2. *Toujours par distributivité de la la loi × par rapport à la loi +, on a :* $a + (-1) \times a = 1 \times a + (-1) \times a = (1 - 1) \times a = 0 \times a = 0$. *De même, on montrerait que* $(-1) \times a + a = 0$. *Donc* $(-1) \times a$ *est l'opposé de* a *et* $(-1) \times a = -a$.

3. *La dernière relation se prouve de la même façon.*

Remarque 19.6 Si $(A, +, \times)$ est un anneau, $(A, \times)$ n'est pas un groupe. Sauf dans le cas où $1 = 0$ et $A = \{0\}$.

Attention 19.14 En général,

$$\boxed{a \times b = 0 \not\Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0}.$$

On dit que de tels éléments a et b sont des *diviseurs de zéro*. Par exemple, dans l'anneau $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérer les fonctions $\delta_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases}$ pour $a \in \mathbb{R}$. Il est clair que $\delta_2 \circ \delta_0 = 0$ et pourtant δ_2 et δ_0 ne sont pas identiquement nulles.

DÉFINITION 19.9 **Anneau intègre**
Soit un anneau $(A, +, \times)$. On dit que cet anneau est *intègre* si et seulement si :

1. $A \neq \{0\}$;
2. la loi $\times$ est commutative ;
3. $\forall (x, y) \in A^2,\ x \times y = 0 \implies x = 0$ ou $y = 0$.

Remarque 19.7 Dans un anneau *intègre*, on peut « simplifier » à gauche et à droite : Si $(a, y, z) \in A^3$, avec $ax = ay$, et si $a \neq 0$, alors $x = y$, que a soit inversible ou non. Cette propriété est fausse dans un anneau général.

DÉFINITION 19.10 **Notations**
On considère un anneau $(A, +, \times)$. Soit un élément $a \in A$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. On note

- $na = \begin{cases} \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
- $(-n)a = n(-a) = \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{n \text{ fois}}$
- $a^n = \begin{cases} \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
- a^{-n} n'a de sens que si a est inversible pour $\times$. On a alors $a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$.

DÉFINITION 19.11 **Élément nilpotent**
Soit un anneau $(A, +, \times)$. On dit qu'un élément $a \in A$ ($a \neq 0$) est *nilpotent* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. Le plus petit entier n vérifiant $a^n = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de l'élément a.

Remarque 19.8 Si l'anneau A est intègre, il n'y a pas d'élément nilpotent dans cet anneau.

THÉORÈME 19.17 ♡♡♡ **Formule du binôme de Newton et formule de factorisation**
Dans un anneau $(A, +, \times)$, si $(a, b) \in A^2$ vérifient

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule du *binôme de Newton*

$$\boxed{(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

et pour tout $n \geqslant 1$, la formule de factorisation suivante

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}.$$

Démonstration *La démonstration de la formule du binôme dans le cas où a et b sont des éléments d'un anneau A tels que $ab = ba$ se fait comme dans le cas où a et b sont des complexes. On consultera alors la démonstration 8.34 page 315*

Prouvons la seconde formule :

$$\begin{aligned} & (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) \\ = & \left(a^n+a^{n-1}b+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}\right)-\left(a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n\right) \\ = & a^n+\left(a^{n-1}b-a^{n-1}b\right)+\ldots+\left(a^2b^{n-2}-a^2b^{n-2}\right)+\left(ab^{n-1}-ab^{n-1}\right)-b^n \\ = & a^n-b^n. \end{aligned}$$

THÉORÈME 19.18 **Calcul d'une progression géométrique**
Soit un anneau $(A,+,\times)$ et un élément $a\in A$. On considère un entier $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$. De la formule de factorisation, on tire :

$$\boxed{1-a^n=(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})}$$

En particulier, si l'élément a est *nilpotent* d'indice n : $a^n=0$, alors l'élément $(1-a)$ est inversible pour la loi $\times$ et on sait calculer son inverse :

$$(1-a)^{-1}=1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$$

DÉFINITION 19.12 **Sous-anneau**
On considère un anneau $(A,+,\times)$ et une partie $A'\subset A$ de cet anneau. On dit que la partie A' est un sous-anneau de A si et seulement si :

1. $(A',+)$ est un sous-groupe du groupe $(A,+)$;
2. la partie A' est *stable* pour la loi$\times$: $\forall (a,b)\in {A'}^2$, $a\times b\in A'$;
3. l'élément neutre de l'anneau A est dans A' : $1\in A'$.

19.2.2 Structure de corps

DÉFINITION 19.13 ♡♡♡ **Corps**
On considère un ensemble K muni de deux lois de composition interne, notées + et ×. On dit que $(K,+,\times)$ est un *corps* si et seulement si :

1. $(K,+,\times)$ est un anneau intègre ;
2. $(K\setminus\{0\},\times)$ est un groupe commutatif.

Remarque 19.9 Comme $(K,+,\times)$ est intègre, la loi $\times$ (ou plutôt sa restriction à $K\setminus\{0\}\times K\setminus\{0\}$) est interne, ce qui permet d'envisager que $(K\setminus\{0\},\times)$ soit un groupe (commutatif).

Exemple 19.15 $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps, mais $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'en est pas un car ses seuls éléments inversibles sont 1 et -1.

DÉFINITION 19.14 **Sous-corps**
Soit $K'\setminus K$ un sous-ensemble d'un corps $(K,+,\times)$. On dit que la partie K' est un *sous-corps* du corps K si et seulement si :

1. K' est un sous-anneau de l'anneau $(K,+,\times)$;
2. l'inverse de tout élément non-nul de K' est dans K'.

THÉORÈME 19.19 **Calcul d'une somme géométrique dans un corps**
Soit un élément $k\in K$ du corps $(K,+,\times)$. Alors la formule suivante permet de calculer une progression géométrique de raison k :

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = 1+k+k^2+\cdots+k^n = \begin{cases} (1-k)^{-1}\left(1-k^{n+1}\right) & \text{si } k\neq 1 \\ (n+1)1_K & \text{si } k=1 \end{cases}$$

Démonstration *Laissée en exercice.*

19.3 Exercices

19.3.1 Loi de composition interne

Exercice 19.1 ♡

On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{R}$ par : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \star b = \ln\left(e^a + e^b\right)$. Quelles en sont les propriétés ? Possède-t-elle un élément neutre ? Y a-t-il des éléments réguliers ? (On dit qu'un élément a est régulier si pour tout $(b,c) \in \mathbb{R}$, $a \star b = a \star c \implies b = c$.

Solution : *On a bien une loi de composition interne : en effet $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^a + e^b > 0$ donc $a \star b$ est bien défini. On a facilement $(a \star b) \star c = \ln\left(\left(e^a + e^b\right) + e^c\right)$ et $a \star (b \star c) = \ln\left(e^a + \left(e^b + e^c\right)\right)$ et donc $\star$ est associative. Elle est aussi clairement commutative. Elle ne peut pas avoir d'élément neutre car $a \star b > b$. Tous les éléments sont réguliers car si $a \star b = a \star c$ alors $\ln\left(e^a + e^b\right) = \ln\left(e^a + e^c\right)$ donc $e^a + e^b = e^a + e^c$ donc $e^b = e^c$ donc $b = c$.*

Exercice 19.2 ♡

Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, étudier les propriétés de la loi définie par :

$$p \star q = p + q + pq$$

1. *Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative et associative.*
2. *Montrer que $\star$ possède un élément neutre.*
3. *Quels sont les éléments symétrisables ? réguliers ?*
4. *Est-ce que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe ?*
5. *L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ muni de la loi $\star$ définie par $\forall a,b \in \mathbb{R}, a \star b = a + b + ab$ est-il un groupe ?*

Solution :

1. *La loi $\star$ est clairement commutative. Soient $(p,q,r) \in \mathbb{Z}^3$. Calculons*
$$(p \star q) \star r = (p + q + pq) \star r = p + q + pq + r + pr + qr + pqr$$
et
$$p \star (q \star r) = p \star (q + r + qr) = p + q + r + qr + pq + pr + pqr.$$
La loi est donc associative.
2. *Cherchons un élément neutre. On cherche un élément $e \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall p \in \mathbb{Z}$,*
$$p \star e = e \star p = p \Longleftrightarrow e(1+p) = 0$$
On trouve donc un élément neutre : $e = 0$.
3. *Soit un entier $p \in \mathbb{Z}$. Est-ce que l'élément p possède un symétrique ? On cherche un élément $q \in \mathbb{Z}$ tel que $p \star q = q \star p = 0$, c'est-à- dire :*
$$p + q + pq = 0 \Longleftrightarrow q(1+p) = -p \Longleftrightarrow (1+p)(1+q) = 1$$
Les seuls éléments inversibles sont 0 et -2 qui sont leurs propres inverses.
On suppose $p \star q = p \star r$ soit $(1+p)(1+q) = (1+p)(1+r)$. On voit ainsi que tous les éléments sont réguliers, sauf $p = -1$.
4. *$(\mathbb{Z}, \star)$ n'est donc pas un groupe.*
5. *La stabilité vient de $1 + a \star b = (1+a)(1+b) \neq 0$. L'associativité se vérifie comme plus haut, $e = 0$ est élément neutre, et $1 + b = \dfrac{1}{1+a}$ fournit un inverse à a soit $b = \dfrac{1}{1+a} - 1 = -\dfrac{a}{1+a}$.*
Bref, $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$ est un groupe.

Exercice 19.3 ♡

Sur $\mathbb{N}$, étudier les lois définies par $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$,

$$x \star y = \min(x,y)$$

$$x \triangle y = \max(x,y)$$

Solution : *Les deux lois sont commutatives et associatives. La loi $\star$ ne possède pas d'élément neutre, car $\forall e \in \mathbb{N}$, $e \star (e+1) = e \neq e+1$. L'élément 0 est neutre pour $\triangle$ car $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \triangle 0 = 0 \triangle x = x$. Excepté 0, aucun élément n'a de symétrique pour la loi $\triangle$.*

Exercice 19.4 ♡♡

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ x \star (x \star y) = (y \star x) \star x = y.$$

Montrer que la loi $\star$ est commutative

Solution : *Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on pose $\mathrm{X} = x \star y$. On a*

$$y = \mathrm{X} \star (\mathrm{X} \star y) = \mathrm{X} \star ((x \star y) \star y) = \mathrm{X} \star x = (x \star y) \star x.$$

Donc en multipliant cette égalité à droite par x, on a

$$y \star x = ((x \star y) \star x) \star x = (\mathrm{X} \star x) \star x = \mathrm{X} = x \star y.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 19.5 ♡♡♡

*Soit $(\mathrm{E}, *)$ un ensemble fini muni d'une loi interne * associative.*
Démontrer qu'il existe un élément x de E tel que $x * x = x$.

Solution : *On propose deux solutions*

1. *Soit $y \in \mathrm{E}$. On considère $y_n = y^{2^n}$. Tous les y_n appartiennent à l'ensemble fini E. D'après le principe des tiroirs (proposition 8.18 p. 310), il existe deux entiers $n > p$ tels que $y_n = y_p$. En posant $z = y_p$ on a $z^{2^{n-p}} = z$. En multipliant par z^k on obtient $z^{2^{n-p}+k} = z^{k+1}$. L'entier k convenable est obtenu en résolvant $2^{n-p} + k = 2(k+1)$ soit $k = 2^{n-p} - 2 \geqslant 0$. On pose $x = z^{k+1} = z^{2^{n-p}-1}$. On a bien $x^2 = x$. Où l'hypothèse d'associativité intervient-elle ? On en a besoin pour définir z^k. Par exemple $z^3 = z(zz) = (zz)z$.*
2. *On considère $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ non vide, stable pour $*$ et qui a le plus petit nombre d'éléments parmi les parties non vides et stables pour $*$. On va démontrer que pour tout élément x de F on a $x * x = x$, et par suite que F est réduit à $\{x\}$.*
   Soit $x \in \mathrm{F}$ et soit $\mathrm{F}_x = \{y \in \mathrm{F} \mid \exists y' \in \mathrm{F}, y = x * y'\}$. F_x est stable par $*$. En effet, soit $(y, z) \in \mathrm{F}_x^2$. $\exists (y', z') \in \mathrm{F}^2$, $y * z = x * y' * x * z'$. Or $y' * x * z' \in \mathrm{F}$ puisque F est stable par $*$. Donc on a bien $y * z \in \mathrm{F}_x$.
   De plus, $\mathrm{F}_x \neq \varnothing$ puisque $x * x \in \mathrm{F}_x$. $\mathrm{F}_x \subset \mathrm{F}$ et F_x est stable par $*$. Donc $\mathrm{F}_x = \mathrm{F}$ puisque F a le plus petit nombre d''éléments. On en déduit que $x \in \mathrm{F}_x$.
   Maintenant l'ensemble G_x des y tel que $x * y = x$ est non vide d'après ce qui vient d'être démontré et est stable par $*$. En effet, soit $(y, z) \in \mathrm{F}_x^2$, $x * (y * z) = (x * y) * z = x * z = x$. Donc $\mathrm{G}_x = \mathrm{F}$, $x \in \mathrm{G}_x$ et $x * x = x$.

19.3.2 Groupes

Exercice 19.6 ♡

Soient $\mathrm{G} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\star$ la loi de composition interne définie sur G par

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. *Montrer que $(\mathrm{G}, \star)$ est un groupe.*
2. *Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}, \star)$.*

Solution :

1. - *C'est une loi interne : le produit de deux réels non nuls est non nul.*
   - *Pour tout $(x, y), (x', y'), px'', y'' \in \mathrm{G}$, $\big((x, y) \star (x', y')\big) \star (x'', y'') = (xx', xy' + y) \star (x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) =$ et $(x, y) \star \big((x', y') \star (x'', y'')\big) = (x, y) \star (x'x'', x'y'' + y') = (xx'x'', x(x'y'' + y') + y) = (xx'x'', xx'y + xy' + y)$. Donc $\star$ est associative.*
   - *La loi $\star$ n'est pas commutative : $(2,0) \star (1,1) = (2,2)$ et $(1,1) \star (2,0) = (2,1)$.*
   - *Le couple $(1,0)$ est élément neutre pour $\star$: $(1,0) \star (x, y) = (x, y) \star (1,0) = (x, y)$.*

- *Soit* $(x,y)\in G$. *On pose* $(x',y')=\left(\frac{1}{x},-\frac{y}{x}\right)$. *On vérifie que* $(x,y)\star(x',y')=(1,0)$ *et* $(x',y')\star(x,y)=(1,0)$. *Donc tout élément* $(x,y)\in G$ *admet un inverse pour* $\star$ *:* (x',y').

2. *La stabilité est assurée par le fait que le produit de deux nombres positifs est positif.*

> *Remarque 19.10* *Les vérifications sont très rapides si on considère les matrices* $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *qui forment un sous-groupe du groupe des matrices* 2×2 *inversibles. Encore faut-il le voir...et connaître les matrices ce qui ne va pas tarder...*

Exercice 19.7 ♡ **Groupe des vitesses en relativité restreinte**

Soit $G =]-1,1[$. *On définit sur* G *une loi* $\star$ *par*

$$\forall (x,y)\in G^2,\quad x\star y=\frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(G,\star)$ *est un groupe abélien.*

Solution : *On a* $\operatorname{th}(u+v)=\dfrac{\operatorname{th}u+\operatorname{th}v}{1+\operatorname{th}u\operatorname{th}v}$. *Donc on pose* $x=\operatorname{th}u$, $y=\operatorname{th}v$, *et on a* $x\star y=\operatorname{th}(u+v)=\operatorname{th}(\operatorname{argth}x+\operatorname{argth}y)$. *On en déduit :*

- *la loi* $\star$ *est interne, puisqu'une tangente hyperbolique appartient à* $]-1,1[$.
- $(x\star y)\star z=\operatorname{th}(\operatorname{argth}x+\operatorname{argth}y+\operatorname{argth}z)=x\star(y\star z)$.
- 0 *est élément neutre.*
- *L'opposé de* x *est aussi son inverse pour* $\star$.

Exercice 19.8 ♡ **Groupe de Klein**

Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ *dans* $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x)=x\qquad f_2(x)=\frac{1}{x}\qquad f_3(x)=-x\qquad f_4(x)=-\frac{1}{x}$$

Montrer que $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ *est un groupe pour la loi* $\circ$.

Solution : *Il suffit de démontrer que* G *est un sous-groupe du groupe des bijections de* $\mathbb{R}^*$ *dans* $\mathbb{R}^*$. $f_2\circ f_2=f_1$; $f_2\circ f_3=f_4$; $f_2\circ f_4=f_3$; $f_3\circ f_3=f_1$; $f_3\circ f_4=f_2$. *On a donc la stabilité, et tous les éléments sont leur propre inverse.*

Exercice 19.9 ♡

Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?

1. $C=\{z\in\mathbb{C} : |z|=2\}$ *pour la multiplication usuelle ;*
2. $\mathbb{R}_+$ *pour la multiplication usuelle ;*
3. $\{x\in\mathbb{R}\mapsto ax+b : a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, b\in\mathbb{R}\}$ *pour la loi de composition des applications.*

Solution :

1. *Non. Le seul élément qui peut être l'élément neutre est* 1 *qui n'appartient pas à l'ensemble. On peut aussi voir que* C *n'est pas stable par produit. Le produit de deux complexes de module 2 n'est pas de module 2.*
2. *Non.* 0 *n'a pas d'inverse.*
3. *Oui. Il s'agit du groupe affine de* $\mathbb{R}$. *Voir chapitre 28 page 1098 ou l'exercice 19.18 page 731.*

Exercice 19.10 ♡

L'ensemble $E=\{-1,1,i,-i\}\subseteq\mathbb{C}$ *muni de la loi usuelle de multiplication dans* $\mathbb{C}$ *est-il un groupe ?*

Solution : *Oui. C'est un sous-groupe des nombres complexes de module* 1, *lui-même sous-groupe de* $(\mathbb{C}^*,\times)$. *Il est noté* $\mathbb{U}_4$ *dans le chapitre sur les complexes p. 33.*

Exercice 19.11 ♡

Soient $(G,\star)$ *et* $(H,\triangle)$ *deux groupes. On définit sur* $G\times H$ *la loi* ♡ *par* $(x,y)\heartsuit(x',y')=(x\star x',y\triangle y')$.

1. *Montrer que* $(G\times H,\heartsuit)$ *est un groupe.*
2. *Si* G *est de cardinal 2, dresser la table de* $G\times G$ *et la reconnaître parmi les exemples des exercices précédents.*

Solution :

1. *C'est un groupe produit, c'est du cours ! Voir proposition 19.5 p. 721.*
2. *Soit $G = \{1, -1\}$ le groupe a deux éléments (pour la multiplication). On pose $e = (1,1)$; $a = (1,-1)$; $b = (-1,1)$; $c = (-1,-1)$. L'élément neutre pour ♡ est e puisqu'il est composé deux fois de l'élément neutre de $(G, \times)$. On a $x^2 = e$ pour tout x, ce qui remplit la diagonale. La deuxième ligne (celle de e) est identique à la première (celle de ♡) puisque e est l'élément neutre. Il s'agit du groupe de l'exercice 19.8. On a $ab = c$, puis $ac = a(ab) = (aa)b = b$ et enfin $bc = (ac)c = a$. On complète par symétrie puisque la loi ♡ est commutative. Ces deux groupes sont isomorphes.*

♡	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Exercice 19.12 ♡

Montrer qu'un groupe $(G, .)$ tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$ est commutatif.

Solution : *L'hypothèse de l'énoncé dit que tout élément est son propre symétrique :*

$$\forall x \in G, \quad x^{-1} = x.$$

Soit alors $(x, y) \in G^2$. Comme $(xy)^{-1} = (xy)$, on en déduit que $y^{-1}x^{-1} = xy$. Mais puisque $x^{-1} = x$ et $y^{-1} = y$, on trouve que $yx = xy$.
Autre rédaction : Soit $(x, y) \in G^2$. Puisque $(xy)^2 = e$, il vient que

$$xyxy = e \implies x(xyxy)y = xy \implies (x^2)(yx)(y^2) = xy \implies yx = xy.$$

Exercice 19.13 ♡

Soit

$$G = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 0\}$$

Montrer que $(G, +)$ est un groupe.

Solution : *Il suffit de montrer que G est un sous-groupe du groupe $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +)$.*

1. *On a $G \subset \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
2. *La fonction nulle est dans G et c'est l'élément neutre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
3. *Soient $(f, g) \in G^2$. Montrons que $f - g \in G$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a bien $(f - g)(n) = 0$ car $f, g \in G$.*

On prouve ainsi que G est un sous-groupe de $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +)$.

Exercice 19.14 ♡

Soit $E = \left\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0\right\}$. On munit E de la loi $+$ d'addition des fonctions d'une variable réelle. Montrer que $(E, +)$ est un groupe.

Solution : *Soit $G = \mathscr{F}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, et $F = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ On munit F et G de la loi $+$ d'addition des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement. Pour démontrer que E est un sous-groupe de F, on considère $\Phi : F \longrightarrow G$ qui à f associe la restriction de f à $\mathbb{Z}$. Φ est un morphisme de groupes (abéliens) et E est son noyau. Comme tel c'est un sous-groupe de F donc un groupe. Bien entendu une vérification directe est simple à rédiger.*

Exercice 19.15 ♡

Soit $(G, .)$ un groupe. On suppose que

$$\forall (a, b) \in G^2 \mid (ab)^2 = a^2b^2$$

Montrer que G est un groupe commutatif.

Solution : *Soit $a, b \in G$, on a $(ab)^2 = a^2b^2$ soit $abab = aabb$ donc $a^{-1}abab = a^{-1}aabb$ donc $bab = abb$ donc $babb^{-1} = abbb^{-1}$ donc $ba = ab$ ce qu'il fallait vérifier.*

Exercice 19.16 ♡

Soit $(G, .)$ un groupe commutatif d'élément neutre e. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$B = \{a \in G \mid a^n = e\}$$

Montrer que B est un sous-groupe de G.

Solution : *On a $e \in B$ donc B n'est pas vide. Si a et b appartiennent à B, $a^n = b^n = e$. Or G est commutatif, donc $(ab)^n = a^n b^n = e$ et $ab \in B$. Enfin $\left(a^{-1}\right)^n = (a^n)^{-1} = e^{-1} = e$, donc $a^{-1} \in B$.*

Exercice 19.17 ♡

Soit $(G, .)$ un groupe commutatif d'élément neutre e. On pose

$$B = \{a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^\star, a^n = e\}$$

Montrer que B est un sous-groupe de G.

Solution :

- *$e \in B$: posons $n = 1$, on a bien $e^n = e$.*
- *Soit $(x, y) \in B^2$. Montrons que $xy \in B$. Comme $x \in B$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x^{n_1} = e$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $y^{n_2} = e$. Posons $n = n_1 n_2$. Alors*
$$(xy)^n = (x^{n_1})^{n_2} (y^{n_2})^{n_1} = e.e = e$$
(car $xy = yx$). Donc $xy \in B$.
- *Soit $x \in B$. Vérifions que $x^{-1} \in B$. Comme $x \in B$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$. Alors on vérifie que $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$. Donc $x^{-1} \in B$.*

Exercice 19.18 ♡

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, on note

$$t_{a,b} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + b \end{array} \right.$$

Soit

$$G = \{t_{a,b} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}\}$$

1. *Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe.*
2. *Soit*
$$H = \{t_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$$
Montrer que H est un sous-groupe de G, isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Solution :

1. *Comme $\mathrm{id} = t_{1,0}$, $\mathrm{id} \in G$. La composée de deux fonctions affines bijective est affine et bijective. Plus précisément, $t_{a,b} \circ t_{a',b'} = t_{aa',ab'+b}$. Bref, la loi est interne. La bijection réciproque d'une fonction affine est affine. On a donc un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
2. *On vérifie que $b \mapsto t_{1,b}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(H, \circ)$.*

Exercice 19.19 ♡

Soit $(G, .)$ un groupe et E un ensemble. Soit $f : E \mapsto G$ une bijection. On définit sur E la loi de composition interne suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \star y = f^{-1}(f(x).f(y))$$

Montrer que $(E, \star)$ est un groupe, puis que f est un isomorphisme de groupes.

Solution : *La loi $\star$ est interne. Elle est associative : $(x \star y) \star z = f^{-1}(f(x).f(y)) \star z = f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(f(x).f(y))\right).f(z)\right) = f^{-1}\left((f(x).f(y)).f(z)\right) = f^{-1}\left(f(x).(f(y).f(z))\right) = \ldots = x \star (y \star z)$. Si on appelle e l'élément neutre de $(G, .)$, $\varepsilon = f^{-1}(e)$ est élément neutre de E. Soit $x \in E$, on pose $y = f^{-1}(f(x)^{-1})$. On a $f(y) = f(x)^{-1}$ donc $f(x).f(y) = f(y).f(x) = e$ et donc $x \star y = f^{-1}(f(x).f(y)) = f^{-1}(e) = \varepsilon$ et de même $f(y).f(x) = \varepsilon$. Donc y est l'inverse de x pour $\star$.*
Par ailleurs, $f(x \star y) = f\left(f^{-1}(f(x).f(y))\right) = f(x).f(y)$. C'est bien dire que f est un morphisme de groupes. Comme f est une biection, c'est un isomorphisme.
Cet exercice a déjà été vu dans des cas particuliers. Voir les exercices 19.1, 19.2 et 19.7, pp. 727, 727 et 729 pour $f(x) = e^x, x + 1$ et $\mathrm{th}(x)$.

Exercice 19.20 ♡♡

Soit un ensemble E non-vide muni d'une loi de composition interne $\star$ associative telle que :

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad \exists (x, y) \in E^2 : \quad b = a \star x = y \star a$$

Montrer que $(E, \star)$ est un groupe.
Indication 19.15 : Pour trouver un élément neutre, considérer $a = b = a_1$, ce qui donne l'existence de $(e, f) \in E^2$ vérifiant la propriété de l'énoncé. Considérer ensuite $b \in E$, et montrer que $b \star e = b$, $f \star b = b$. Montrer ensuite que $e = f$.

Solution :

1. On sait déjà que la loi de composition interne est associative ;
2. Élément neutre : Soit un élément $a_1 \in E$. En prenant $b = a_1$, on sait qu'il existe $(e, f) \in E^2$ tels que $a_1 = a_1 \star e = f \star a_1$. Montrons que e est neutre. Soit $b \in E$. Il existe $(x, y) \in E^2$ tel que $b = a_1 \star x = y \star a_1$. Alors
$$b \star e = (y \star a_1) \star e = y \star (a_1 \star e) = y \star a_1 = b$$
$$f \star b = f \star (a_1 \star x) = (f \star a_1) \star x = a_1 \star x = b$$
On a donc montré que $\forall b \in E$, $b \star e = b$ et $f \star b = b$. En particulier, si $b = f$, $f \star e = f$ et si $b = e$, $f \star e = e$. On en déduit que $e = f$ et donc que $\forall x \in E$, $e \star x = x \star e = x$: e est l'élément neutre pour $\star$.
3. Soit un élément $X \in E$. Montrons que cet élément admet un symétrique : En prenant $b = e$ et $a = X$, il existe $(x, y) \in E^2$ tels que $e = X \star x = y \star X$. Il suffit de montrer que $x = y$. Écrivons
$$y = y \star e = y \star (X \star x) = (y \star X) \star x = e \star x = x$$
Donc $x = y$ est le symétrique de X.

Exercice 19.21 ♡♡

Soit $(G, .)$ un groupe abélien et $S \subset G$ une partie de G non-vide et stable. On définit
$$S^\star = \{x.y^{-1} \mid (x, y) \in S^2\}.$$
Montrer que $S^\star$ est un sous-groupe de G.

Solution :

– Comme $S \neq \varnothing$, il existe $a \in S$. Alors $a.a^{-1} = e \in A^\star$.
– Soit $(a, b) \in \left(S^\star\right)^2$. Alors il existe $(x, y) \in S^2$ tels que $a = x.y^{-1}$ et il existe $(x', y') \in S^2$ tels que $b = x'.y'^{-1}$. Alors
$$a.b^{-1} = x.y^{-1}.y'.x'^{-1} = (x.y').(x'.y)^{-1}$$
car la loi est commutative. Comme S est stable, $x.y' \in S$ et $x'.y \in S$, donc $a.b^{-1} \in S^\star$.

Exercice 19.22 ♡♡

Soit E un ensemble. On munit $\mathscr{P}(E)$ de la loi de composition interne $A \triangle B$ (différence symétrique). Montrer que $(\mathscr{P}(E), \triangle)$ est un groupe.

Solution : On va faire travailler les groupes : On considère G l'ensemble des fonctions de E vers le groupe $(\{-1, 1\}, .)$. Muni de la multiplication des fonctions G est un groupe abélien. Maintenant, on considère
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & G \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \chi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right., \text{ si } A \in \mathscr{P}(E).$$
On vérifie que $f^{-1}(f(A).f(B)) = A \triangle B$. D'après l'exercice précédent, $(\mathscr{P}(E), \triangle)$ est un groupe.

Exercice 19.23 ♡♡

Soit $(E, *)$ et $e \in E$ tels que :
(i) $\forall (x, y, z, t) \in E^4, (xy)(zt) = (xz)(ty)$
(ii) $\forall x \in E$, $ex = x$
(iii) $\forall x \in E$, $\exists x' \in E : xx' = e$.
Montrer que $*$ est commutative, associative, puis que $(E, *)$ est un groupe.

Solution : On prend $x = z = e$. D'après (i), on a $(ey)(et) = (ee)(ty)$. D'après (ii) $ey = y, et = t$ et $ee = e$. Donc $yt = e(ty) = ty$. La loi est donc commutative.
On prend $z = e$. D'après (i), on a $(xy)(et) = (xe)(ty)$. Or $et = t$ d'après (ii) et comme $*$ est commutative, $xe = ex = x$. Donc on a $(xy)t = x(ty) = x(yt)$ puisque $*$ est commutative. La loi est donc associative.
D'après (ii), e est élément neutre à gauche, donc à droite puisque $*$ est commutative. D'après (iii), tout élément admet un inverse à gauche, donc à droite puisque $*$ est commutative. On a bien démontré que $(E, *)$ est un groupe (abélien).

Exercice 19.24 ♡♡

Soit $(G,*)$ *un groupe de cardinal fini et* $H \subset G$ *une partie non-vide de* G *stable pour la loi* $*$. *Montrer que* H *est un sous-groupe de* G.

Solution : *Comme* H *est non-vide, il existe* $a \in H$. *Considérons alors la translation à gauche suivante :*

$$\gamma_a : \begin{cases} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & a.x \end{cases} .$$

La fonction γ_a *est à valeurs dans* H *car* H *est stable. On vérifie facilement que* γ_a *est* injective *(on peut simplifier à gauche dans un groupe). Or* $\gamma_a : H \to H$ *va d'un ensemble fini vers lui-même. On sait alors qu'une telle application injective est également* surjective.
Par conséquent, $a \in H$ *possède un antécédent par* γ_a *: il existe* $b \in H$ *tel que* $\gamma_a(b) = a$ *:*

$$a.b = a$$

et alors on obtient que $b = e$ *et donc* $e \in H$.
Soit ensuite $x \in H$. *Comme* $\gamma_x : H \mapsto H$ *est surjective, et que* $e \in H$, e *possède un antécédent par* γ_x *:*

$$\exists y \in H \ : \gamma_x(y) = e \text{ donc } x.y = e.$$

En multipliant à gauche par x^{-1} *(symétrique de* x *dans* G*), on obtient que* $y = x^{-1}$. *Comme* $y \in H$, $x^{-1} \in H$.

Exercice 19.25 ♡♡

On considère le groupe $(\mathbb{R},+)$ *et* $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. *Trouver le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe contenant la partie* A.

Solution : *Un tel groupe contient tous les inverses d'entiers (non nuls) mais aussi toutes les sommes* $\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ *ainsi que leurs opposés. Donc un tel groupe contient* $\mathbb{Q}$. *Comme* $(\mathbb{Q},+)$ *est un groupe, c'est le plus petit d'entre eux.*

Exercice 19.26 ♡♡

On considère un groupe commutatif $(G,.)$. *On dit qu'un sous-groupe* H *est distingué lorsque* $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $g.h.g^{-1} \in H$. *Soient deux sous-groupes* G_1 *et* G_2 *distingués de* G. *Montrer que l'ensemble* $G_1G_2 = \{g_1.g_2 \mid (g_1,g_2) \in G_1 \times G_2\}$ *est un sous-groupe distingué.*

Solution : *Soit* $g \in G$, $h \in G_1G_2$. $\exists (g_1,g_2) \in G_1 \times G_2, h = g_1g_2$ *donc* $g.h.g^{-1} = g.g_1g_2.g^{-1} = \left(g.g_1g^{-1}\right)\left(gg_2.g^{-1}\right)$. *Or* G_1 *est distingués dans* G, *donc* $g_1' = g.g_1g^{-1} \in G_1$. *De même, comme* G_2 *est distingués dans* G, *donc* $g_2' = g.g_2g^{-1} \in G_2$. *Donc* $g.h.g^{-1} = g_1'g_2' \in G_1G_2$, *ce qu'il fallait vérifier.*

Exercice 19.27 ♡♡♡

Soit un groupe $(G,.)$ *et deux sous-groupes* H, K *du groupe* G.
On note

$$HK = \{x \in G \mid \exists h \in H : \exists k \in K : x = hk\}$$

1. *Soit* $x \in G$. *Montrer que*
$$x \in HK \Longleftrightarrow x^{-1} \in KH$$
2. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) HK *est un sous-groupe de* G.
(ii) KH *est un sous-groupe de* G.
(iii) $HK = KH$.

Indication 19.15 : Il faut bien comprendre la signification des notations. Par exemple, $HK = KH$ *ne revient pas à dire que* $\forall (h,k) \in H \times K$, $hk = kh$ *!*

Solution :

1. *Soit un élément* $x \in HK$, *il existe deux éléments* $(h,k) \in H \times K$ *tels que* $x = hk$. *Alors* $x^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. *Si* $x^{-1} \in KH$, *alors il existe* $(k,h) \in K \times H$ *tels que* $x^{-1} = kh$ *et donc* $x = (x^{-1})^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK$ *(car* H *et* K *sont des sous-groupes et donc si* $h \in H$, *on a aussi* $h^{-1} \in H$*).*

2. (a) $(i) \implies (ii)$: *Montrons que* KH *est un sous-groupe. Si* e *désigne l'élément neutre de* G*, alors puisque* $e \in \mathrm{K}$ *et* $e \in \mathrm{H}$ *(sous-groupes), par définition,* $e = ee \in \mathrm{KH}$*. Soit* $(x, y) \in (\mathrm{KH})^2$*. Montrons que* $xy^{-1} \in \mathrm{KH}$*. D'après 1), il suffit de montrer que* $(xy^{-1})^{-1} \in \mathrm{HK}$*. Or* $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}$ *et puisque* $y \in \mathrm{KH}$*,* $y^{-1} \in \mathrm{HK}$ *et* $x^{-1} \in \mathrm{HK}$*. Mais puisque* HK *est un groupe,* $y = (y^{-1})^{-1} \in \mathrm{HK}$ *et aussi* $yx^{-1} \in \mathrm{HK}$*.*

(b) $(ii) \implies (i)$ *se démontre de même. (A faire !).*

(c) *Montrons que* $(ii) \implies (iii)$*. Montrons que* $\mathrm{HK} \subset \mathrm{KH}$ *: Soit* $x \in \mathrm{HK}$*.* $\exists (h, k) \in \mathrm{H} \times \mathrm{K}$ *tel que* $x = hk$*. Mais puisque* KH *est un sous-groupe et qu'on a* $(ii) \implies (i)$*, on sait aussi que* HK *est un sous-groupe. Par conséquent,* $x^{-1} \in \mathrm{HK}$ *:* $\exists (h', k') \in \mathrm{H} \times \mathrm{K}$ *tels que* $x^{-1} = h'k'$*. Alors* $x = (k')^{-1}(h')^{-1} \in \mathrm{KH}$*. On démontre de la même façon que* $\mathrm{KH} \subset \mathrm{HK}$*.*

(d) $(iii) \implies (i)$ *: On a bien* $e = ee \in \mathrm{HK}$*. Soit* $x \in \mathrm{HK}$*. D'après 1),* $x^{-1} \in \mathrm{KH}$ *et puisque* $\mathrm{KH} = \mathrm{HK}$*, il vient que* $x^{-1} \in \mathrm{HK}$*. Soient* $(x, y) \in (\mathrm{HK})^2$*. Montrons que* $xy \in \mathrm{HK}$*. Comme* $x \in \mathrm{HK}$*, il existe* $(h, k) \in \mathrm{H} \times \mathrm{K}$ *tels que* $x = hk$*. De même, il existe* $(h', k') \in \mathrm{H} \times \mathrm{K}$ *tels que* $y = h'k'$*. Alors* $xy = h(kh')k'$*. Mais comme* $kh' \in \mathrm{KH}$ *et que* $\mathrm{KH} = \mathrm{HK}$*, il vient que* $kh' \in \mathrm{HK}$*. Donc il existe* $(h'', k'') \in \mathrm{H} \times \mathrm{K}$ *tels que* $kh' = h''k''$*. Alors* $xy = hh''k''k$*. Mais puisque* H *et* K *sont des sous-groupes,* $hh'' \in \mathrm{H}$ *et* $k''k \in \mathrm{K}$ *et donc* $xy = hh''k''k \in \mathrm{HK}$*.*

Exercice 19.28 ♡♡♡ ***Théorème de Lagrange***

Soit $(\mathrm{G}, .)$ *un groupe de cardinal* n *et* $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ *un sous-groupe de* G *de cardinal* p*. Pour* $a \in \mathrm{G}$*, on note*

$$a\mathrm{H} = \{ah; h \in \mathrm{H}\}$$

1. *Lorsque* $a \in \mathrm{H}$*, déterminer* $a\mathrm{H}$*.*
2. *Pour* $(a, b) \in \mathrm{G}^2$*, montrer que*
$$a\mathrm{H} \cap b\mathrm{H} \neq \varnothing \implies a\mathrm{H} = b\mathrm{H}$$
3. *En déduire que* p *divise* n*.*

Solution :

1. *Lorsque* $a \in \mathrm{H}$*, on montre que* $a\mathrm{H} = \mathrm{H}$*.*
2. *Supposons qu'il existe* $\theta \in a\mathrm{H} \cap b\mathrm{H}$*. Alors* $\exists (h, k) \in \mathrm{H}^2$ *tels que* $\theta = ah = bk$*. Montrons que* $a\mathrm{H} \subset b\mathrm{H}$*. Soit* $x \in a\mathrm{H}$*. Donc* $\exists l \in \mathrm{H}$ *tel que* $x = al$*. Mais puisque* $a = bkh^{-1}$*, il vient que* $x = bkh^{-1}l$ *et puisque* H *est un sous-groupe de* G*, et que* $(k, h, l) \in \mathrm{H}^3$*,* $kh^{-1}l \in \mathrm{H}$*. Par conséquent,* $x \in b\mathrm{H}$*. On montre de la même façon que* $b\mathrm{H} \subset a\mathrm{H}$*.*
3. *Considérons tous les ensembles* $a\mathrm{H}$ *lorsque* a *parcourt* G*. Deux tels ensembles sont disjoints ou confondus. On a donc un nombre fini de tels ensembles disjoints tels que l'union de ces ensembles soit égale à* G *: en effet, si* $a \in \mathrm{G}$*, alors* $a = ae \in a\mathrm{H}$*.*
Puisque l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{H} & \longrightarrow & a\mathrm{H} \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$ *est bijective,* $|a\mathrm{H}| = |\mathrm{H}|$ *et donc toutes les classes ont le même cardinal* p*.*
En notant q *le nombre de* $a\mathrm{H}$ *distincts, d'après le lemme des bergers (corollaire 8.22 p. 311), il vient que*
$$n = pq \implies p \text{ divise } n$$

Exercice 19.29 ♡♡♡

Soit un groupe $(\mathrm{G}, .)$ *non commutatif d'élément neutre* e*. On suppose qu'il existe deux éléments* $(s, t) \in \mathrm{G}^2$ *vérifiant* $s^2 = t^2 = e$*. On note*

$$\Gamma = \left\{(st)^n \ ; \ t.(st)^n \ ; \ (st)^n.s \ ; \ t.(st)^n.s \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

Montrer que Γ *est un sous-groupe du groupe* G*.*

Solution : Γ *est non vide. Démontrons qu'il est stable. Il y a* 16 *cas à vérifier. Par exemple il s'agit de démontrer - par récurrence sur* m *- que* $(st)^n.t(st)^m = (st)^{n-m}s$ *pour* $n < m$ *et* $t(st)^{m-n}$ *pour* $n \geqslant m$*. On en déduit que* $(st)^n.t(st)^m s = (st)^{n-m}s.s = (st)^{n-m}$ *pour* $n < m$ *et* $t(st)^{m-n}s$ *pour* $n \geqslant m$*, puis que* $t(st)^n.t(st)^m s = t(st)^{n-m}$ *pour* $n < m$ *et* $t.t(st)^{m-n}s = (st)^{m-n}s$ *pour* $n \geqslant m$*.*
De même, $(st)^n s.(st)^m = t(st)^{n-m}$ *pour* $n < m$ *et* $(st)^{m-n}s$ *pour* $n \geqslant m$*. On en déduit que* $(st)^n s.(st)^m s = t(st)^{n-m}s$ *pour* $n < m$ *et* $(st)^{m-n}$ *pour* $n \geqslant m$*, puis* $t(st)^n s.(st)^m = (st)^{n-m}$ *pour* $n < m$ *et* $t(st)^{m-n}s$ *pour* $n \geqslant m$*. Les autres cas sont rapidement vérifiés.*
Pour les inverses, $(st)^n.s$ *et* $t.(st)^n$ *sont leurs propres inverses. D'autre part* $(st)^n \left(t.(st)^{n-1}.s\right)$ *pour* $n \geqslant 1$ *montre que l'inverse de* $(st)^n$ *est* $t.(st)^{n-1}.s$*. On en déduit que l'inverse de* $t.(st)^n.s$ *est* $(st)^{n+1}$*.* Γ *est donc un sous-groupe du groupe* G*.*

19.3.3 Sous-groupe

Exercice 19.30 ♡ ***Réseau de*** $\mathbb{C}$

Soient $\omega \in \mathbb{C}$ *et* $H = \{a + \omega b \mid (a,b) \in \mathbb{Z}\}$. *Montrer que* H *est un sous-groupe de* $(\mathbb{C},+)$.

Solution : *Comme* $0 \in H$, H *est non vide. Soit* $z = a+\omega b$ *et* $z' = a'+\omega b'$ *appartenant à* H. *On a* $z-z' = (a-a')+\omega(b-b') \in H$. H *est donc bien un sous-groupe de* $(\mathbb{C},+)$.
H *est le sous-groupe de* $(\mathbb{C},+)$ *engendré par* 1 *et* ω.

Exercice 19.31 ♡

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. *Montrer que* H *est un sous-groupe de* $(C^*, \times)$.

Solution : *Comme* $1 \in H$, H *est non vide. Soit* $z = a^n$ *et* $z' = a^m$ *appartenant à* H. *On a* $zz' = a^{n+m} \in H$ *et* $z^{-1} = a^{-n} \in H$.
H *est donc un sous-groupe de* $(C^*, \times)$.
H *est le sous-groupe de* $(C^*, \times)$ *engendré par* a.

Exercice 19.32 ♡

Soit un ensemble E *non-vide et un élément* $a \in E$. *On note*

$$G = \{f \in \mathscr{B}(E,E) \mid f(a) = a\}$$

(c'est l'ensemble des bijections de G *laissant invariant l'élément* a*). Montrer que* $(G, \circ)$ *est un groupe.*

Solution : *Le sous-ensemble* G *est un sous-groupe du groupe des permutations de* E *:* $Id_E \in G$*, la composée de deux bijections est une bijection. Si de plus elles admettent* a *comme point fixe, la composée admet aussi* a *comme point fixe, la réciproque aussi.*

Exercice 19.33 ♡ ***Centre d'un groupe***

Soit $(G,.)$ *un groupe. On note*

$$C = \{x \in G \mid \forall g \in G,\ g.x = x.g\}$$

C'est l'ensemble des éléments de G *qui commutent avec tous les éléments de* G. *Montrer que* $(C,.)$ *est un sous-groupe de* G *(appelé* centre *du groupe* G*).*

Solution : *L'élément neutre de* G *appartient à* C. *Soient* $x, y \in C$, $g \in G$, $g.(xy) = (g.x).y = (x.g).y = x.(g.y) = x.(y.g) = (x.y).g$. *Donc* $xy \in C$. *Soient* $x \in C, g \in G$, $gx^{-1} = \left(xg^{-1}\right)^{-1} = \left(g^{-1}x\right)^{-1} = x^{-1}g$. *Donc* $x^{-1} \in C$. C *est bien un sous-groupe de* G.

Exercice 19.34 ♡♡

Les questions sont indépendantes. Soit j *le nombre complexe* $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. *Déterminer le sous-groupe du groupe additif* $\mathbb{C}$ *engendré par* i *et* j.
2. *Déterminer le sous-groupe du groupe multiplicatif* $\mathbb{C}^*$ *engendré par* i *et* j.

Solution :

1. *C'est le groupe* $\{ni + mj \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$. *En effet, si un sous-goupe de* $(\mathbb{C},+)$ *contient* i*, alors il contient tous les* $ni = \underbrace{i+\ldots+i}_{n \text{ fois.}}$, $n \in \mathbb{N}$ *ainsi que leurs opposés (symétriques pour +.) Il contient donc tous les* $ni, n \in \mathbb{Z}$. *De même, il contient les* $mj, m \in \mathbb{Z}$. *Il contient aussi toutes les sommes de ces éléments, c'est-à-dire tous les* $\{ni + mj \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$. *Comme cet ensemble est lui-même un sous-groupe de* $(\mathbb{C},+)$*, c'est le plus petit sous-groupe de* $(\mathbb{C},+)$ *contenant* i *et* j*, à savoir le groupe engendré par* i *et* j.
2. *C'est le groupe* $\mathbb{U}_{12}$ *des racines douzièmes de l'unité. En effet, comme précédemment, c'est le groupe* $G = \{i^n j^m \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$. *En posant* $\zeta_{12} = e^{\frac{2i\pi}{12}}$*, on a* $i = \zeta_{12}^3$ *et* $j = \zeta_{12}^4$. *Donc* $\zeta_{12} = ji^{-1} \in G$. *Donc* $\mathbb{U}_{12}$*, le sous-groupe engendré par* ζ_{12} *est inclus dans* G. *Inversement, comme* $i \in \mathbb{U}_{12}$ *et* $j \in \mathbb{U}_{12}$*, le sous-groupe engendré par* i *et* j *est inclus dans* ζ_{12}.

Exercice 19.35 ♡♡

Soit $(G, \times)$ *un groupe,* F_1 *et* F_2 *deux sous-groupes de* G.
On suppose que $F = F_1 \cup F_2$ *est aussi un sous-groupe de* G. *Démontrer que*

$$F_1 \subset F_2 \text{ ou } F_2 \subset F_1.$$

Solution : *Supposons* $F_1 \not\subset F_2$. *Cela se traduit par :* $\exists x \in F_1 : \ x \notin F_2$. *Maintenant, soit* $y \in F_2$. *On a* $z = x \times y \in F_1 \cup F_2$. *Supposons l'espace d'un instant que* $z \in F_2$. *On aurait alors* $z \times y^{-1} \in F_2$ *comme produit de deux éléments de* F_2. *Donc on a* $z \notin F_2$. *Donc* $z \in F_1$. *Donc* $x^{-1} \times z = y \in F_1$.
On a donc démontré que si $F_1 \not\subset F_2$, *alors* $F_2 \subset F_1$.

19.3.4 Morphisme de groupe

Exercice 19.36 ♡

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$. *Montrer que* f *est un endomorphisme du groupe* $(\mathbb{R}^*, \times)$. *Déterminer son image et son noyau.*

Solution : *Endo : Il s'agit de démontrer que* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \in \mathbb{R}^*$.
Morphisme : Il s'agit de démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ f(x)f(y) = f(xy)$ *soit* $x^n y^n = (xy)^n$.
Si n *est impair, l'image est* $\mathbb{R}^*$ *et le noyau est réduit à* $\{1\}$. *Si* n *est pair, l'image est* $\mathbb{R}_+^*$ *et le noyau est* $\{-1, 1\}$.

Exercice 19.37 ♡

Soit $(G, \times)$ *un groupe (noté multiplicativement). Pour* $a \in G$, *soit* $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array} \right.$.

1. *Montrer que* τ_a *est un endomorphisme du groupe* $(G, \times)$.
2. *Vérifier que* $\forall (a, b) \in G^2, \quad \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
3. *Montrer que* τ_a *est bijective et déterminer son application réciproque.*
4. *En déduire que* $\mathscr{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ *muni du produit de composition est un groupe.*

Solution :

1. *Soient* $a, x, y \in G$, *on a* $\tau_a(xy) = a(xy)a^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \tau_a(x)\tau_a(y)$ *ce qu'il fallait vérifier.*
2. *Soient* $a, x, y \in G$, *on a* $\tau_a \circ \tau_b(x) = abxb^{-1}a^{-1} = abx(ab)^{-1} = \tau_{ab}(x)$ *puisque* $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
3. *On en déduit que* $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = \tau_e = \mathrm{I}d_G$. *Donc* τ_a *est bijective et son application réciproque est* $\tau_{a^{-1}}$.
4. *On en déduit que* $\tau \ : a \longmapsto \tau_a$ *est un morphisme de* G *dans le groupe des automorphismes de* G. *Son image, à savoir* T *est un sous-groupe du groupe des automorphismes de* G.

Exercice 19.38 ♡

Montrer que la composition de deux morphismes de groupe est un morphisme de groupe.

Solution : *Soient* f *et* g *deux morphismes d'un groupe* $(G, .)$. *Soient* $x, y \in G$, *on a* $f \circ g(x.y) = f(g(x.y)) = f(g(x).g(y)) = f(g(x)).f(g(y)) = f \circ g(x).f \circ g(y)$ *ce qu'il fallait vérifier.*

Exercice 19.39 ♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ *l'application qui à tout* $x \in \mathbb{R}$ *associe* $e^{ix} \in \mathbb{C}^*$. *Montrer que* f *est un morphisme de groupes. Calculer son noyau et son image. L'application* f *est-elle injective ?*

Solution : *On a* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array} \right.$. *Vérifions que* f *est un morphisme de groupe. Soit* $x, y \in \mathbb{R}$, *alors*

$$f(x + y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = f(x) \times f(y),$$

et

$$f(x^{-1}) = e^{i(-x)} = \frac{1}{e^{ix}} = f(x)^{-1}.$$

Donc f *est un morphisme de groupe.*
Montrons que f *n'est pas injective en prouvant que le noyau n'est pas réduit à* 0 *:*

$$\operatorname{Ker} f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = 1\right\} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z}.$$

Enfin

$$\operatorname{Im} f = \left\{e^{ix} \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{U}$$

est l'ensemble des complexes de module 1, *c'est-à-dire le cercle de centre* 0 *et de rayon* 1.

Exercice 19.40 ♡ ***Quelques morphismes bien connus***

Traduire en termes de morphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
2. $|zz'| = |z||z'|$;
3. $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$;
4. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
5. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
6. $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$.

Solution :

1. *Le logarithme est un morphisme du groupe* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *sur* $(\mathbb{R}, +)$.
2. *Le module est un morphisme du groupe* $(\mathbb{C}^*, \times)$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
3. *La racine carrée est un morphisme du groupe* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
4. *L'exponentielle est un morphisme du groupe* $(\mathbb{C}, +)$ *sur* $(\mathbb{C}^*, \times)$.
5. *La conjugaison complexe est un morphisme du groupe* $(\mathbb{C}, +)$.
6. *La conjugaison complexe est un morphisme du groupe* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 19.41 ♡

On considère un groupe $(G, .)$. *Montrer que l'application* $f : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{cases}$ *est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe* G *est commutatif.*

Solution : *L'application* f *est bijective (vérification immédiate).*

1. *Montrons que si* G *est commutatif, alors* f *est un morphisme. Soient deux éléments* $(x, y) \in G^2$. *Alors*

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$

2. *Montrons que si l'application* f *est un morphisme de groupes, alors le groupe* G *est commutatif. Soient deux éléments* $(x, y) \in G^2$. *Puisque*

$$f(x^{-1}y^{-1}) = f(x^{-1})f(y^{-1}) \implies (x^{-1}y^{-1})^{-1} = xy \implies (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} = xy \implies yx = xy$$

et donc la loi est commutative.

Exercice 19.42 ♡♡

On considère deux groupes G *et* G′ *et une application* $\varphi : G \mapsto G'$. *On définit l'ensemble*

$$H = \big\{\big(x, \varphi(x)\big) \mid x \in G\big\}$$

Montrer l'équivalence

$$\underset{(i)}{\big(\varphi \text{ morphisme }\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(\text{H sous-groupe de } G \times G'\big)}$$

Solution :

$(i) \Rightarrow (ii)$ *Puisque* φ *est un morphisme, on sait que* $\varphi(e) = e'$. *Donc* $(e, e') = (e, \varphi(e)) \in H$. *Soient deux éléments* X, Y *de* H. *Il existe* $(x, y) \in G^2$ *tels que* $X = (x, \varphi(x))$ *et* $Y = (y, \varphi(y))$. *Comme l'inverse de* $(y, \varphi(y))$ *est* $(y^{-1}, \varphi(y))^{-1}$,

$$XY^{-1} = (x, \varphi(x))(y, \varphi(y))^{-1} = (xy^{-1}, \varphi(x)\varphi(y)^{-1}) = (xy^{-1}, \varphi(xy^{-1})) \in H$$

On a utilisé la propriété d'un morphisme, $\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)^{-1}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ *Soit* $(x, y) \in G^2$, *montrons que* $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. *Puisque* $(x, \varphi(x)) \in H$ *et que* $(y, \varphi(y)) \in H$, *comme* H *est un sous-groupe de* $G \times G'$, $(x, \varphi(x))(y, \varphi(y)) = (xy, \varphi(x)\varphi(y)) \in H$. *Mais alors, par définition de* H, *il existe* $z \in G$ *tel que* $xy = z$ *et* $\varphi(z) = \varphi(x)\varphi(y)$. *Cela donne* $\varphi(xy) = \varphi(z) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Exercice 19.43 ♡♡♡

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ *vers* $(\mathbb{Z}, +)$.

Solution : *Soit* f *un tel morphisme. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

or $p = f(1) \in \mathbb{Z}$ *et* $q_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{Z}$. *Donc*

$$p = nq_n \implies |p| = n|q_n|$$

Cette relation étant vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, en particulier pour $n > |p|$, on obtient que $p = f(1) = 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
Alors, si $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$, avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^\star$,

$$f(x) = f\left(a\frac{1}{b}\right) = af\left(\frac{1}{b}\right) = 0.$$

On en déduit que f est nulle sur $\mathbb{Q}_+$, et puisque f est un morphisme, $f(-x) = -f(x)$ ce qui montre que f est également nulle sur $\mathbb{Q}_-$.

19.3.5 Anneaux

Exercice 19.44 ♡

On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de composition internes notées $+$ et $\star$ et définies, pour tout $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$, par :

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \quad \text{et} \quad (a,b)\star(c,d) = (ac, ad+bc)$$

1. *Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif.*
2. *Montrer que $\mathrm{A} = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous anneau de $(\mathbb{Z}^2, +, \star)$*

Solution :

1.
   - *Les deux lois sont internes.*
   - *L'addition est commutative, associative, admet $(0,0)$ comme élément neutre et (a,b) admet $(-a,-b)$ comme opposé.*
   - *Associativité de la loi $\star$: $((a,b)\star(c,d))\star(f,g) = (ac, ad+bc)\star(f,g) = (acf, acg+(ad+bc)f) = (acf, acg+adf+bcf)$ et $(a,b)\star((c,d)\star(f,g)) = (a,b)\star(cf, cg+df) = (acf, a(cg+df)+bcf) = (acf, acg+adf+bcf)$, ce qu'il fallait vérifier.*
   - *La loi $\star$ est commutative, et admet $(1,0)$ comme élément neutre.*
   - *Distributivité : $(a,b)\star((c,d)+(f,g)) = (a,b)\star(c+f, d+g) = (a(c+f), a(d+g)+b(c+f)) = (ac+af, (ad+bc)+(ag+bf)) = (a,b)\star(c,d)+(a,b)\star(g,f)$, ce qu'il fallait vérifier.*

   Donc $(\mathbb{Z}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif.
2. *On vérifie facilement que A est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2, +)$, que A est stable pour $\star$ et que $(1,0) \in \mathrm{A}$.*

Exercice 19.45 ♡ **Anneau de Boole**

On considère une anneau de Boole $(\mathrm{A}, +, \times)$, c'est-à-dire un anneau non réduit à $\{0\}$ tel que tout élément est idempotent, c'est-à-dire vérifie : $\forall x \in \mathrm{A}, \quad x^2 = x$.

1. *Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathrm{A}^2, \quad xy + yx = 0_\mathrm{A}$ et en déduire que $\forall x \in \mathrm{A}, x + x = 0_\mathrm{A}$. En déduire que l'anneau A est commutatif.*
2. *Montrer que la relation binaire définie sur A par $x \preccurlyeq y \iff yx = x$ est une relation d'ordre.*
3. *Montrer que $\forall (x,y) \in \mathrm{A}^2, \quad xy(x+y) = 0_\mathrm{A}$. En déduire qu'un anneau de Boole intègre ne peut avoir que deux éléments.*

Solution :

1. *Pour tout $x, y \in \mathrm{A}$, on a $x + y = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$. En soustrayant $x + y$ aux deux membres, on a bien $xy + yx = 0$.*
   On prend $y = x$, on obtient $x^2 + x^2 = 0$ soit $x + x = 0$, ceci quel que soit $x \in \mathrm{A}$.
   On a $xy + yx = 0$, d'où en ajoutant xy à chaque membre, $xy + xy + yx = xy$ d'où $0 + yx = xy$ ce qu'il fallait vérifier.
2. *Réflexive : On a $x^2 = x$ donc $x \preccurlyeq x$.*
   Antisymétrique : On suppose $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$. On a donc $yx = x$ et $xy = y$. Comme la multiplication est commutative on en déduit $x = y$.
   Transitive : On suppose $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. On a donc $yx = x$ et $zy = y$. On en déduit $zx = z(yx) = (zy)x = yx = x$, soit $x \preccurlyeq z$.
   Donc $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
3. *Soit $x, y \in \mathrm{A}$. On a $xy(x+y) = x^2y + xy^2 = xy + xy = 0_\mathrm{A}$.*
   Supposons A intègre. Soit x et y deux éléments non nuls. On a, d'après la question précédente, $x + y = 0$, donc en additionnant x à chaque membre, $x + x + y = x$, et comme $x + x = 0_\mathrm{A}$, $y = x$. Il n'y a donc qu'un seul élément non nul au plus. Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 19.46 ♡

Soit $(\mathrm{A},+,\times)$ *un anneau et*

$$\mathrm{C} = \{a \in \mathrm{A} \mid \forall x \in \mathrm{A}, xa = ax\}$$

Montrer que C *est un sous-anneau de* A.

Solution : *Soient* $a,b \in \mathrm{C}$*, soit* $x \in \mathrm{A}$*, on a* $ax = xa$ *et* $bx = xb$*. On en déduit :* $(a+b)x = ax+bx = xa+xb = x(a+b)$ *et ce pour tout* $x \in \mathrm{A}$*. Donc* $a+b \in \mathrm{C}$*. De même,* $(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$ *et ce pour tout* $x \in \mathrm{A}$*. Donc* $ab \in \mathrm{C}$*. Comme de plus* $1 \in \mathrm{C}$*,* C *est bien un sous-anneau de* A.

Exercice 19.47 ♡♡

Soit un anneau $(\mathrm{A},+,\times)$*. Rappelons qu'un élément* $a \in \mathrm{A}$ *est* nilpotent *s'il existe un entier* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $a^n = 0$.

1. *Montrer que si* a *est nilpotent, alors* $1-a$ *est inversible et calculer son inverse.*
2. *Montrer que si* a *et* b *sont nilpotents et commutent, alors* ab *et* $a+b$ *sont nilpotents.*
3. *Soit un élément* $a \in \mathrm{A}$*. On définit l'application* $u : \begin{cases} \mathrm{A} & \to & \mathrm{A} \\ x & \to & u(x) = ax - xa \end{cases}$*. Calculer l'application* $u^p = \underbrace{uo\dots ou}_{p \text{ fois}}$.
4. *Montrer que si* a *est nilpotent , il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* u^p *soit l'application nulle.*

Indication 19.15 : Pour 3., commencer par déterminer u^2*,* u^3*, puis deviner la formule générale que l'on démontrera par récurrence.*

Solution :

1. *Si* $a^n = 0$*, alors* $(1-a)\left(1+a+\dots+a^{n-1}\right) = \left(1+a+\dots+a^{n-1}\right)(1-a) = 1-a^n = 1$*. Donc* $1+a+\dots+a^{n-1}$ *est l'inverse de* $1-a$.
2. *Puisque* a *et* b *commutent, on a* $(ab)^n = a^n b^n$*. Si* $a^n = 0$*, alors on a* $(ab)^n = 0$*, ce qu'il fallait vérifier.*

   Puisque a *et* b *commutent, on peut appliquer la formule du binôme :* $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$*. Si* $a^n = 0$ *et* $b^m = 0$*, alors en prenant* $p = n+m$*, pour tout entier* k *variant de* 0 *à* p*, on a* $k \geqslant n$ *- auquel cas* $a^k = 0$ *- ou* $p-k \geqslant m$ *- et dans ce cas* $b^{p-k} = 0$*. Tous les termes* $\binom{p}{k} a^k b^{p-k}$ *sont donc nuls et* $(a+b)^p = 0$*, ce qu'il fallait vérifier.*
3. *Montrer par récurrence que*

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad u^p(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k a^{p-k} x a^k.$$

4. *Si l'on choisit alors* $p \geqslant 2n-1$*, pour* $k \geqslant n$*,* $a^{p-k} x a^k = 0$*, et si* $k \leqslant n-1$*, alors* $p-k \geqslant p-n+1 \geqslant n$ *et alors on a également* $a^{p-k} x a^k = 0$*. Finalement, tous les termes de la somme sont nuls, et ceci quel que soit* $x \in \mathrm{A}$*. Donc* $u^p = 0$.

Exercice 19.48 ♡♡

Soit un anneau $(\mathrm{A},+,\times)$ *et deux éléments* a,b *de* A.

1. *Si* (ab) *est un élément nilpotent, montrer que* $1-ab$ *est inversible et déterminer* $(1-ab)^{-1}$.
2. *Si* (ab) *et* (ba) *sont nilpotents, exprimer* $(1-ba)^{-1}$ *en fonction de* $(1-ab)^{-1}$.
3. *On ne suppose plus* (ab) *ni* (ba) *nilpotents. Montrer que si* $1-ab$ *est inversible, alors* $1-ba$ *est également inversible.*

Solution :

1. *On a* $(1-ab)^{-1} = 1 + ab + abab + \cdots + \underbrace{abab\dots ab}_{n-1 \text{ facteurs } ab}$ *si* ab *est nilpotent d'indice* n *;*
2. *On a aussi* $(1-ba)^{-1} = 1 + ba + baba + \cdots + \underbrace{baba\dots ba}_{p-1 \text{ facteurs } ba}$ *si* ba *est nilpotent d'indice* p*. Donc, si* ab *est nilpotent d'indice* n *et si* ba *est nilpotent d'indice* p*, on peut écrire les formules précédentes pour* $q = \max(n,p)$ *:*

$$(1-ba)^{-1} = 1 + b(1 + ab + abab + \cdots + abab\dots ab)a = 1 + b(1-ab)^{-1}a$$

3. *Posons* $c = (1-ab)^{-1}$. *Montrons que* $(1-ba)$ *est inversible et que* $\boxed{(1-ba)^{-1} = 1+bca}$. *Pour cela, calculons*

$$(1-ba)(1+bca) = 1-ba+bca-babca = 1+b[-1+(1-ab)c]a = 1+b\times 0\times a = 1$$

$$(1+bca)(1-ba) = 1-ba+bca-bcaba = 1+b[-1+c(1-ab)]a = 1$$

Exercice 19.49 ♡♡ **Algorithme d'exponentiation rapide**

Soit un anneau A, *un élément de cet anneau* $a \in \mathrm{A}$ *et un entier* $n \in \mathbb{N}$. *On rappelle que*

$$a^1 = a, \qquad \text{et} \qquad a^n = aa^{n-1}.$$

1. *Combien de multiplications faut-il pour calculer* a^n *avec cette méthode ?*
2. *Si l'on écrit*
$$b = a^2,\ c = b^2,\ d = c^2$$
combien de multiplications sont-elles nécessaires pour calculer a^8 *?*
3. *Plus généralement, si l'on écrit :*
$$a^n = \begin{cases} (a^k)\times(a^k) & \text{si } n = 2k \\ a\times(a^k)\times(a^k) & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$
et si on note $\mathrm{T}(n)$ *le nombre de multiplications nécessaires pour calculer* a^n, *trouver une relation entre* $\mathrm{T}(n)$ *et* $\mathrm{T}\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)$.
4. *Lorsque l'exposant* n *est une puissance de* 2 *:* $n = 2^p$, *calculer* $\mathrm{T}(n)$.
5. *Si un ordinateur met* 10^{-6} *seconde pour effectuer une multiplication, comparer les temps de calcul de* a^{100000} *en utilisant a) et c).*

Solution :

1. *Il faut en calculer* $n-1$.
2. *Il faut en calculer* 3 *: une pour* b, *une pour* c *une pour* d.
3. *On a* $\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)+1$ *si* n *est pair et* $\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)+2$ *si* n *est impair.*
4. *On vérifie que* $\mathrm{T}(2^p) = p$.
5. *Un peu moins de* $0,1$ *seconde avec 1. Avec 3. on écrit en binaire* $100000 = (11000011010100000)_2$ *autrement dit* $10^5 = 2^5+2^7+2^9+2^{10}+2^{15}+2^{16}$. *On a donc* $16+6-1 = 21$ *opérations donc* $2,1\times 10^{-5}$ *seconde avec 3.*

Exercice 19.50 ♡♡ **Sous-anneaux et morphismes de** $(\mathbb{Z},+,\times)$

1. *Trouver tous les sous-anneaux de* $(\mathbb{Z},+,\times)$.
2. *Trouver tous les morphismes d'anneaux de* $\mathbb{Z}$ *vers* $\mathbb{Z}$.

Solution :

1. *Soit* A' *un sous-anneau de* $\mathbb{Z}$. *Si* $1 \in \mathrm{A}'$, *montrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in \mathrm{A}'$. *Ensuite que* $\mathrm{A}' = \mathbb{Z}$.
2. *De même, soit* f *un morphisme de* $\mathbb{Z}$. *Si* $f(1) = 1$, *montrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$ *puis que* $f = \mathrm{id}$.

Exercice 19.51 ♡♡ **Anneau** $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$

On désigne par $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *l'ensemble* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *muni des deux lois :*

$$(a,a')+(b,b') = (a+b,a'+b') \qquad (a,a')\times(b,b') = (ab+2a'b',ab'+a'b)$$

1. *Montrer que* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *est un anneau commutatif. Quel est l'élément neutre pour* $\times$ *?*
2. *Soit* $\mathbb{Z}'$ *l'ensemble des éléments de la forme* $(a,0)$. *Montrer que* $\mathbb{Z}'$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
3. *On note pour* $a \in \mathbb{Z}$, $(a,0) = a$. *Montrer que tout élément de* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *s'écrit de manière unique sous la forme* $a+a'\times(0,1)$ *avec* $(a,a') \in \mathbb{Z}^2$.
4. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{X} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *vérifiant* $\mathrm{X}^2 = 2$ *(2 admet une racine carrée).*

Voir aussi exercice 19.58 p. 743.

Solution : *La clé de la solution réside dans la notation* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. *Soit* $A = \{x \in \mathbb{R}, \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{2}\}$. *On a l'unicité de la notation* $x = a + b\sqrt{2}$ *pour* $x \in A$ *et* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *puisque* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. *Donc* $\Phi : x = a + b\sqrt{2} \in A \longmapsto (a,b) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *est une bijection qui vérifie* $\Phi(zz') = \Phi(z) \times \Phi(z')$. *Donnons une démonstration indépendante de cette remarque :*

1. *Vérifions que la loi* $\times$ *est associative. Elle est interne, c'est évident, et commutative. On a* $((a,a') \times (b,b')) \times (c,c') = (ab+2a'b', ab'+a'b) \times (c,c') = ((ab+2a'b')c+(ab'+a'b)c', (ab+2a'b')c'+(ab'+a'b)c) = (abc+2a'b'c+2a'bc'+2ab'c', abc'+ab'c+a'bc+2a'b'c')$. *Sous cette forme on voit bien que la loi* $\times$ *est associative.* $(1,0)$ *est élément neutre pour* $\times$. *Distributivité :* $((a,a')+(b,b')) \times (c,c') = (a+b, a'+b') \times (c,c') = ((a+b)c + 2(a'+b')c', (a+b)c' + (a'+b')c) = ((ac+2a'c')+(bc+2b'c'), (ac'+a'c)+(bc'+bc')) = (a,a') \times (c,c') + (b,b') \times (c,c')$.
2. $\mathbb{Z}'$ *est stable pour l'addition, la multiplication et contient l'élément neutre* $(1,0)$.
3. *On a* $(a,a') = (a,0) + (0,a') = a + (0,a') = a + a'(0,1)$.
4. *La remarque prélimininaire nous incite à considérer* $x_1 = (0,1)$ *et* $x_2 = (0,-1)$. *Ce sont deux racines de* $X^2 = 2$.

Exercice 19.52 ♡♡

Soit $(A,+,\times)$ *un anneau commutatif et* $f : A \to \mathbb{R}_+$ *une application vérifiant :* $\forall (x,y) \in A^2$,

$$f(x+y) \leqslant \sup(f(x), f(y))$$

$$f(x \times y) = f(x) f(y)$$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_A$$

Montrer que $B = f^{-1}([0,1])$ *est un sous-anneau de* A.

Solution :

1. B *est non-vide puisque* $0_A \in B$.
2. *Puisque* $f(1_A^2) = f(1_A)^2$ *et que* f *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *on en déduit que* $f(1_A) = 1$.
3. *Puisque* $1 = f((-1_A) \times (-1_A)) = f(-1_A)^2$, *on en déduit que* $f(-1_A) = 1$.
4. *Soient* $(x,y) \in B^2$. *Puisque* $f(x,y) \leqslant \sup(f(x), f(y)) \leqslant 1$, $(x+y) \in B$. *Donc* B *est stable pour* $+$.
5. *Soit* $x \in B$. *Puisque* $f(-x) = f(-1_A \times x) = f(x)$, *on en déduit que* $x \in B \implies -x \in B$. *On a donc montré que* $(B,+)$ *était un sous-groupe de* $(A,+)$.
6. *Soit* $(x,y) \in B^2$. *Alors* $f(x \times y) = f(x) f(y) \leqslant 1$ *et donc* $x \times y \in B$. *Donc* B *est stable pour* $\times$.

Donc B *est un sous-anneau de* A.

Exercice 19.53 ♡♡

Soit $(A,+,\times)$ *un anneau. Soient* $(a,b) \in A^2$ *tels que*

$$ab + ba = 1 \text{ et } a^2 b + ba^2 = a$$

1. *Montrer que* $a^2 b = ba^2$ *et que* $aba + aba = a$.
2. *Montrer que* a *est inversible et que son inverse est* $b + b$.

Solution :

1. *En multipliant* $ab+ba = 1$ *à gauche par* a *:* $aab+aba = a = aab+baa$ *d'où* $aba = baa$. *De même en multipliant à droite cette fois :* $aba+baa = a = aab+baa$ *d'où* $aba = aab$. *On en déduit* $baa = aba = aab$ *et donc l'égalité* $a^2 b + ba^2 = a$ *peut s'écrire* $aba + aba = a$.
2. *En multipliant* $a^2 b + ba^2 = a$ *à gauche par* b *:* $ab = aabb + baab = (baa)b + baab = b(aab) + b(aab) = b(aba) + b(aba) = b(aba + aba) = ba$. *On déduit de* $ab + ba = 1$ *que* $ab + ab = a(b+b) = 1$ *et que* $ba + ba = (b+b)a = 1$ *ce qu'il fallait vérifier.*

Exercice 19.54 ♡♡

Soit $(A,+,\times)$ *un anneau. On pose*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & a^2 \end{array} \right.$$

Montrer que si φ *est un morphisme d'anneaux surjectif, alors* A *est commutatif.*

Solution : *L'application* φ *est un morphisme d'anneaux donc* $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ *ou encore* $(a+b)^2=a^2+b^2$ *soit* $ab+ba=0$ *et ce pour tous* $a,b\in A$*. On a aussi* $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ *soit* $(xy)^2=x^2y^2$ *autrement dit* $x^2y^2=xyxy=x(-xy)y=-x^2y^2=y^2x^2$*. Soit* $a,b\in A$*. Comme* φ *est surjectif,* $\exists x,y\in A, a=\varphi(x)$ *et* $b=\varphi(y)$*. La dernière égalité s'écrit* $ab=ba$ *ce qu'il fallait vérifier.*

Exercice 19.55 ♡♡♡

Soit un anneau $(A,+,\times)$*. On dit qu'il est régulier lorsque*

$$\forall u\in A,\ \exists x\in A\ : u=uxu.$$

1. *Si l'anneau* A *est intègre, montrer que* A *est régulier si et seulement si* A *est un corps.*
2. *Si* A *est un anneau, on définit son centre* Z(A) *par ;*

$$Z(A)=\{x\in A\mid \forall a\in A,\ ax=xa\}$$

   (a) *Montrer que* Z(A) *est un sous-anneau de* A*.*
   (b) *On suppose désormais que* A *est un anneau régulier. Soit* $u\in Z(A)$ *et* $x\in A$ *tel que* $u=uxu$*. On pose* $y=xux$*.*
      i. *Calculer pour* $a\in A$*,* $uxa(1-ux)$ *et* $(1-ux)aux$ *et en déduire que* $ux\in Z(A)$*.*
      ii. *Montrer que* $y=xux\in Z(A)$*.*
      iii. *Montrer que si* A *est un anneau régulier, son centre* Z(A) *est également un anneau régulier.*

Solution :

1.
   - $\boxed{\Leftarrow}$: *soit* $u\in A$*. Si* $u=0$*, il suffit de prendre* $x=0$*. Si* $u\neq 0$*,* u *est inversible. Posons alors* $x=u^{-1}$*. On a bien* $u=uxu$*.*
   - $\boxed{\Rightarrow}$: *soit* $u\in A$*, tel que* $u\neq 0$*. Comme* A *est régulier, il existe* $x\in A$ *tel que* $u=uxu$*, c'est-à-dire* $u(1-xu)=0$*. L'anneau étant intègre, il vient que* $xu=1$*. De même, on a* $(1-ux)u=0$ *et donc* $ux=1$*. Par conséquent,* u *est inversible avec* $u^{-1}=x$*.*
2. *On vérifie facilement que* Z(A) *est stable pour* $+$*,* $\times$ *et qu'il contient* 0 *et* 1*.*
3. *On a* $uxa(1-ux)=xau(1-ux)=xau-xauxu=xau-xau=0$*. De même,* $(1-ux)aux=(1-ux)uax=uax-(uxu)x=uax-uax=0$*. Donc* $uxa(1-ux)=(1-ux)aux$ *et en développant,* $uxa-uxaux=aux-uxaux$ *ce qui donne* $(ux)a=a(ux)$*. On a donc montré que* $(ux)\in Z(A)$*.*
4. *Soit* $a\in A$*. Calculons* $(xux)a\underset{u\in Z(A)}{=}(ux)(xa)\underset{ux\in Z(A)}{=}(xa)(ux)\underset{u\in Z(A)}{=}(xu)(ax)\underset{u\in Z(A)}{=}(ux)(ax)\underset{ux\in Z(A)}{=}(ax)(ux)=a(xux)$*.*
5. *Soit* $u\in Z(A)$*. Posons* $y=xux$*. On a vu que* $y\in Z(A)$ *et alors* $uyu=u(xux)u=(uxu)xu=uxu=u$*.*

Exercice 19.56 ♡♡♡

Soit $(A,+,\times)$ *un anneau tel que*

$$\forall (x,y)\in A^2,\quad (xy)^2=x^2y^2$$

1. *Montrer que* $\forall (x,y)\in A^2$*,* $xyx=x^2y=yx^2$*.*
2. *En déduire que* A *est un anneau commutatif .*

Solution :

1. *Soit* $(x,y)\in A^2$*. En utilisant la propriété de l'énoncé avec* x *et* $(1+y)$*, on trouve que*

$$\begin{aligned} & \left[x(1+y)\right]^2=x^2(1+y)^2\\ \Longrightarrow\ & x^2+x^2y+xyx+(xy)^2=x^2+2x^2y+x^2y^2\\ \Longrightarrow\ & xyx=x^2y\end{aligned}$$

   (car $(xy)^2=x^2y^2$*). De même, en utilisant la propriété avec* x *et* $(1+y)$ *on démontre que* $xyx=x^2y$*.*

2. Soit $(x, y) \in A^2$. En utilisant la propriété du 1. avec $(1+x)$ et y, on trouve que

$$\begin{aligned} & (1+x)^2 y = y(1+x)^2 \\ \Longrightarrow\ & y + 2xy + x^2 y = y + 2yx + yx^2 \\ \Longrightarrow\ & 2xy = 2yx \end{aligned}$$

Ce qui ne suffit pas à conclure que $xy = yx$!
Mais avec la même idée, développons $(1+x)^3 y$. Comme $x^3 y = x(x^2 y) = x(yx^2) = (xyx)x = (yx^2)x = yx^3$,

$$\begin{aligned} & (1+x)^3 y = y(1+x)^3 \\ \Longrightarrow\ & y + 3xy + 3x^2 y + x^3 y = y + 3yx + 3yx^2 + yx^3 \\ \Longrightarrow\ & 3xy = 3yx \end{aligned}$$

Donc $3xy - 2xy = 3yx - 2yx$ et par conséquent, $xy = yx$.

Exercice 19.57 ♡♡♡

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ un morphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ vers lui-même.

1. Montrer que l'application f est croissante ;
2. Calculer $f(r)$ lorsque $r \in \mathbb{Q}$;
3. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de rationnels (r_n) croissante et une suite de rationnels (q_n) décroissante qui convergent vers x ;
4. En déduire tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{R}$ vers lui-même.

Solution :

1. Soit $z \geqslant 0$. Écrivons $f(z) = f(\sqrt{z}\sqrt{z}) = f(\sqrt{z})^2 \geqslant 0$. Soit alors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leqslant y$. Calculons $f(y-x) = f(y) - f(x) \geqslant 0$. Donc l'application f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant que f est un morphisme de groupe (classique) et que $f(1) = 1$, on montre que $\forall r \in \mathbb{R},\ f(r) = r$.
3. Utilisons la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (r, q) \in \mathbb{Q}^2\ :\ x - \varepsilon < r < x < q < x + \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $(r_1, q_1) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $x - 1 \leqslant r_1 < x < q_1 \leqslant x + 1$. Supposons construits les rationnels $r_1, \dots, r_n$ et $q_1, \dots, q_n$. Posons $\varepsilon = \min\left(\dfrac{1}{n+1}, q_n - r_n\right) > 0$. Il existe alors $(r_{n+1}, q_{n+1}) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $r_n < r_{n+1} < x < q_{n+1} < q_n$ avec en plus $x - \frac{1}{n+1} \leqslant r_{n+1} < q_{n+1} \leqslant x + \frac{1}{n}$. On construit ainsi par récurrence deux suites de rationnels, avec la suite (r_n) qui est croissante et la suite (q_n) décroissante. D'après le théorème des gendarmes, puisque $\forall n \geqslant 1$,

$$x - \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant x \leqslant q_n \leqslant x + \frac{1}{n}$$

ces deux suites convergent vers x.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Puisque la fonction f est croissante, on a

$$f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(q_n)$$

or comme $\forall n \geqslant 1,\ f(r_n) = r_n$ et $f(q_n) = q_n$, et que les deux suites convergent vers x, il vient que $f(r_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et $f(q_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$, et par passage à la limite dans les inégalités, on trouve que $f(x) = x$. Par conséquent, $f = \mathrm{id}$ et réciproquement, id est bien un morphisme d'anneau.

Exercice 19.58 ♡♡♡ **Anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{7}\right]$**

1. On rappelle (exercice **??** p. **??**) que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit dense dans $\mathbb{R}$.
   Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
   Démontrer que
   - soit : $\exists a \geqslant 1 : H = \left\{a^n, n \in \mathbb{Z}\right\}$,
   - soit : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, $(\alpha < \beta) \Longrightarrow (]\alpha, \beta[\cap H \neq \varnothing)$.

   (On pourra utiliser le logarithme.)

2. *Dans toute cette partie,* $\mathscr{A} = \left\{a + b\sqrt{7} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$*. On admet que* $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$*. (voir l'exercice* **??** *p.* **??***.)*
   (a) *Démontrer que pour tout* $x \in \mathscr{A}$*, il existe un unique couple* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $x = a + b\sqrt{7}$*.*
   (b) *Démontrer que* $\mathscr{A}$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R}, +, \times)$*.*
   (c) *Démontrer que l'ensemble* $\mathrm{U}(\mathscr{A})$ *des éléments inversibles de* $\mathscr{A}$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}^*, \times)$*.*
3. *Pour* $x = a + b\sqrt{7} \in \mathscr{A}$*, on note* $\overline{x}$ *le réel* $a - b\sqrt{7}$ *et on note* $\mathrm{N}(x) = x\overline{x} = a^2 - 7b^2$*.*
   (a) *Expliquer rapidement pourquoi* $\overline{x}$ *et* $\mathrm{N}(x)$ *sont bien définis.*
   (b) *Démontrer que* $\forall (x,y) \in \mathscr{A}^2$*,* $\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$*.*

   On admet que l'équation $\mathrm{N}(x) = -1$ *n'admet pas de solution dans* $\mathscr{A}$*. Voir à ce sujet l'exercice* **??** *p.* **??***.*
   (c) *Démontrer que* $\forall x \in \mathscr{A}$*,* $(x \in \mathrm{U}(\mathscr{A}) \Longleftrightarrow (\mathrm{N}(x) = 1))$*. Le cas échéant, que vaut l'inverse de* x *?*
4. (a) *Soit* $a + b\sqrt{7} \in \mathrm{U}(\mathscr{A})$*. Démontrer que (*$a \geqslant 0$ *et* $b \geqslant 0$*)*$\Longleftrightarrow (a + b\sqrt{7} \geqslant 1)$*.*
   (b) *Démontrer que* $\mathrm{U}(\mathscr{A})$ *n'est pas réduit à* $\{-1, 1\}$*.*
   (c) *Démontrer que l'intervalle* $]1, 3\sqrt{7}[$ *ne contient pas d'éléments de* $\mathrm{U}(\mathscr{A})$*.*
   (d) *Démontrer qu'il existe un élément de* u *de* $\mathrm{U}(\mathscr{A}) \cap]1, +\infty[$ *tel que*
$$\mathrm{U}(\mathscr{A}) = \left\{\varepsilon u^n ; \varepsilon = \pm 1 \text{ et } n \in \mathbb{Z}\right\}.$$
   Le nombre u *évidemment (?) unique est appelé unité principale de* $\mathscr{A}$*.*
5. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u^n = a_n + b_n\sqrt{7}$*.*
   (a) *Démontrer que les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont positives et strictement croissantes.*
   (b) *En déduire la valeur de* u*.*
   (c) *Donner dans l'ordre croissant des valeurs de* x*, les quatre plus petites solutions dans* $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *de l'équation dite de Pell-Fermat :*
$$x^2 - 7y^2 = 1.$$
6. *On pose* $\alpha_n = a_{2^n}$ *et* $\beta_n = b_{2^n}$*.*
   (a) *Établir des relations de récurrence entre les* α_{n+1} *et* β_{n+1} *d'une part et les* α_n *et* β_n *d'autre part.*
   (b) *Démontrer que* $\dfrac{a_n}{b_n}$ *converge vers une limite finie* λ *que l'on déterminera.*
   (c) *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,*
$$\varepsilon_n = \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \lambda\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7}\beta_n^2}.$$
   (d) *Donner une majoration explicite de l'erreur* ε_n *en fonction de* n*.*
   (On pourra, faute de mieux, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$*,* $\alpha_n \geqslant 3^{2^n}$ *et* $\beta_n \geqslant 3^{2^n}$*.)*
   (e) *En déduire une approximation rationnelle de* $\sqrt{7}$ *à* 10^{-20} *près.*
   Voir aussi exercice 19.51 p. 740.

Solution :

1. *On considère l'image* G *de* H *par le logarithme. On vérifie que* G *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$*.*
   - *Supposons que* G *soit de la forme* $m\mathbb{Z}, m \in \mathbb{R}_+$*. En posant* $a = e^m$*, on a bien* $\mathrm{H} = \left\{a^n, n \in \mathbb{Z}\right\}$*.*
   - *Sinon* G *est dense dans* $\mathbb{R}$*. Soit* $0 < \alpha < \beta$*, on peut donc trouver un élément* x *de* G *dans* $]\ln a, \ln b[$ *et* e^x *appartient à la fois à* H *et à* $]\alpha, \beta[$*.*
2. 1) *Supposons* $a + b\sqrt{7} = a' + b'\sqrt{7}$ *soit* $a - a' = (b' - b)\sqrt{7}$*. On a* $b' - b = 0$ *sinon on aurait* $\sqrt{7} = \dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{Q}$ *ce qui est impossible. On en déduit* $a - a' = 0$ *ce qu'il fallait démontrer.*
   2) ► $\mathscr{A}$ *est stable pour la soustraction :* $a + b\sqrt{7} - (a' + b'\sqrt{7}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{7} \in \mathscr{A}$*.*
   ► $\mathscr{A}$ *est stable pour la multiplication :* $(a + b\sqrt{7}) \times (a' + b'\sqrt{7}) = (aa' + 7bb') + (ab' + ba')\sqrt{7}$*.*
   ► *l'élément unité* 1 *de* $(\mathbb{R}, +, \times)$ *appartient bien à* $\mathscr{A}$ *:* $1 = 1 + 0\sqrt{7}$*.*
   Donc $\mathscr{A}$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R}, +, \times)$*.*
   3) *On a* $1 \in \mathrm{U}(\mathscr{A})$*. Si* $x, y \in \mathrm{U}(\mathscr{A})$*, on a* $y^{-1} \in \mathrm{U}(\mathscr{A})$ *et par suite* $xy^{-1} \in \mathrm{U}(\mathscr{A})$*.*
3. 1) *Lorsqu'on écrit* $x = a + b\sqrt{7}$*, les entiers* a *et* b *sont uniques. Par suite* $\overline{x}$ *et* $\mathrm{N}(x)$ *sont définis.*
   2) *Soit* $(x,y) \in \mathscr{A}^2$*. On pose* $x = a + b\sqrt{7}$*,* $y = a' - b'\sqrt{7}$*, on a* $xy = (aa' + 7bb') + (ab' + ba')\sqrt{7}$*,* $\overline{xy} = (aa' + 7bb') - (ab' + ba')\sqrt{7}$*. Ensuite* $\overline{x}\overline{y} = (aa' + 7(-b)(-b')) + (a(-b') - ba')\sqrt{7} = \overline{xy}$*. Puis* $\mathrm{N}(xy) = xy\overline{xy} = xy\overline{x}\overline{y} = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y)$*.*

3) *Si* $\mathrm{N}(x) = 1$, *alors* $x\overline{x} = 1$ *et donc* $\overline{x} \in \mathrm{U}(\mathscr{A}$ *est bien l'inverse de* x *dans* $\mathscr{A}$.
Réciproquement, si x *est inversible dans* $\mathscr{A}$, *il existe* y *dans* $\mathscr{A}$ *tel que* $xy = 1$. *Donc* $\mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y) = \mathrm{N}(1) = 1$. *Donc* $\mathrm{N}(x)$ *et* $\mathrm{N}(y)$ *sont des entiers dont le produit vaut* 1, *ils sont donc égaux à* 1 *ou* -1. *Comme l'équation* $\mathrm{N}(x) = -1$ *n'admet pas de solution, c'est que* $\mathrm{N}(x) = 1$. *Ce qu'il fallait démontrer.*

4. (a) *En effet, en posant* $x = a + b\sqrt{7}$, *on a* $\dfrac{1}{x} = a - b\sqrt{7}$, $-x = -a - b\sqrt{7}$ *et* $-\dfrac{1}{x} = -a + b\sqrt{7}$. *Parmi ces quatre nombre, le plus grand appartient à* $[1, +\infty[$, *son inverse à* $]0, 1]$, *son opposé, à* $]-\infty, -1]$ *et l'inverse de son opposé à* $[-1, 0[$. *Comme le plus grand des quatre a ses deux coefficients positifs, la proposition en résulte.*
   (b) *On a* $8^2 - 7 \times 3^2 = 1$, *donc* $8 + 3\sqrt{7} \in \mathrm{U}(\mathscr{A})$.
   (c) *Tous les éléments de* $\mathrm{U}(\mathscr{A})$ *plus grands que* 1 *ont des coefficients* a *et* b *positifs. On regarde donc les valeurs de* $b \in \mathbb{N}^*$ *pour lesquelles* $a^2 - 7b^2 = 1$. *Les solutions* $b = 1$ *ou* $b = 2$ *ne conviennent pas, donc on a* $b \geqslant 3$. *Comme* $a \geqslant 0$, *on en déduit que* $a + b\sqrt{7} \geqslant 3\sqrt{7}$. *C'est bien dire qu'il n'y a pas d'élément de* $\mathrm{U}(\mathscr{A})$ *dans* $\left]1, 3\sqrt{7}\right[$.
   (d) *La question précédente montre que* $\mathrm{U}(\mathscr{A}) \cap \mathbb{R}_+^*$ *n'est pas dense, puisqu'il évite* $\left]1, 3\sqrt{7}\right[$. *Donc il est de la forme* $\{u^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. *En rajoutant les opposés, on obtient le résultat.*

5. 1) *Comme* $u > 1$, *on a* $a_1 \geqslant 1$ *et* $b_1 \geqslant 1$. *Comme* $u^{n+1} = (a_1 + b_1\sqrt{7})(a_n + b_n\sqrt{7})$ *on en déduit*
$$a_{n+1} = a_n a_1 + 7 b_n b_1 > a_n, \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = a_n b_1 + b_n a_1 > b_n.$$
D'où le résultat.
   2) *L'image de la suite* u^n *est* $\mathrm{U}(\mathscr{A}) \cap [1, +\infty[$ *tout entier, donc* $u_1 = u$ *est la plus petite valeur de* $\mathrm{U}(\mathscr{A}) \cap]1, +\infty[$, *à savoir* $8 + 3\sqrt{7}$.
   3) *D'après ce qui précède ce sont les* (a_k, b_k) *fournis par les* u^k *pour* $k = 1, 2$ *et* 3. *Soit* $(8, 3)$, $(127, 48)$, $(2034, 765)$, $(32257, 12192)$.

6. (a) *On a* $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\sqrt{7} = \left(\alpha_n + \beta_n\sqrt{7}\right)^2$. *On en déduit* $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 7\beta_n^2$ *et* $\beta_{n+1} = 2\alpha_n\beta_n$.
   (b) *Comme on a* $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^2 - 7\beta_n^2 = 1$, *en divisant par* β_n^2 *on a*
$$\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - 7 = \frac{1}{\beta_n^2}.$$
La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'entiers strictement croissante, qui tend donc vers* $+\infty$. *Donc* $\dfrac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}$ *tend vers* 7 *et par suite* $\lambda = \sqrt{7}$.
   (c) *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\varepsilon_n = \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \lambda\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7}\beta_n^2}.$$
   (d) *On a* $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^2 = 7\beta_n^2 + 1 > 7\beta_n^2$. *Donc* $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} + \sqrt{7} > 2\sqrt{7}$.
On en déduit $\left|\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} - \sqrt{7}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{7}}\,\dfrac{1}{\beta_n^2}$.
Pour $n = 1$, *on a* $\beta_1 = b_2 = \sqrt{48}^{2^1}$ *et* $\alpha_1 = a_2 = 127 \geqslant \sqrt{48}^{2^1}$. *On montre par récurrence que pour* $n \geqslant 1, \alpha_n \geqslant \sqrt{48}^{2^n}$ *et* $\beta_n \geqslant \sqrt{48}^{2^n}$. *On a alors* $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 7\beta_n^2 \geqslant \sqrt{48}^{2^{n+1}} + 7\sqrt{48}^{2^{n+1}} \geqslant \sqrt{48}^{2^{n+1}}$ *et* $\beta_{n+1} = 2\alpha_n\beta_n \geqslant 2\sqrt{48}^{2^n}\sqrt{48}^{2^n} \geqslant \sqrt{48}^{2^{n+1}}$, *ce qu'il fallait vérifier.*
Finalement, pour $n \geqslant 1$,
$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \sqrt{7}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7}}\,\frac{1}{48^{2^{n+1}}}$$
   (e) *On cherche à avoir* $2\sqrt{7}48^{2^n} \geqslant 10^{20}$. *En prenant les logarithmes décimaux, cela revient à* $\log_{10}(2\sqrt{7}) + 2^n\log_{10}(48) \geqslant 20$. *On calcule* $\dfrac{20 - \log_{10}(2\sqrt{7})}{\log_{10}(48)} < 11{,}5$, *donc il suffit d'avoir* $2^n > 11{,}5$, *par exemple* $n = 4$.

n	α_n	β_n
0	8	3
1	127	48
2	32257	12192
3	2081028097	786554688
4	8661355881006882817	3273684811110137472

Donc $\sqrt{7} = \dfrac{8661355881006882817}{327368481111013747}$ *à* 10^{-20} *près.*

19.3.6 Corps

Exercice 19.59 ♡

On définit sur $\mathbb{R}$ les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ par $x \oplus y = x+y-1$ et $x \otimes y = x+y-xy$. Montrer que $(\mathbb{R},\oplus,\otimes)$ est un corps.

Solution : *On pose $f(u) = 1-u$. On a $f(x\oplus y) = f(x)+f(y)$ et $f(x\otimes y) = f(x)+f(y)$. De ce fait $(\mathbb{R},\oplus,\otimes)$ est un corps et f réalise un isomorphisme de corps entre $(\mathbb{R},\oplus,\otimes)$ et $(\mathbb{R},+,\times)$.*

Exercice 19.60 ♡

Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose :

$$a\top b = a+b-1 \quad \text{et} \quad a\star b = ab-a-b+2$$

Montrer que $(\mathbb{R},\top,\star)$ est un corps.

Solution : *On pose $g(x) = x-1$ donc $g^{-1}(y) = y+1$. On a $a\top b = a+b-1 = (a-1)+(b-1)+1 = g^{-1}(g(a)+g(b))$ et $a\star b = (a-1)(b-1)+1 = g^{-1}(g(a).g(b))$.*

Exercice 19.61

Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps et $f:\mathbb{K}\mapsto\mathbb{L}$ un morphisme de corps. Démontrer que f est injectif.

Solution : *Soit $x\neq 0_{\mathbb{K}}$. On a $f(x).f(x^{-1}) = f(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{L}}$. L'élément $f(x)$ est inversible dans $\mathbb{L}$, donc il est différent de $0_{\mathbb{L}}$. Par contraposée, si $f(x) = 0_{\mathbb{L}}$ alors $x = 0_{\mathbb{K}}$. Le noyau de f est réduit à $0_{\mathbb{K}}$. Donc f est injectif.*

Exercice 19.62 ♡♡♡ ***Corps à 4 éléments***

On se propose de construire un corps $(\mathbb{F}_4,+,\times)$ sur un ensemble à quatre éléments :$\{0,1,x,y\}$.

1. *En calculant $1\times x\times y$ de deux façons différentes, démontrer que $x^3 = 1$.*
2. *Démontrer que nécessairement $x^2 = y$ et que $y^2 = x$.*
3. *En déduire la table du groupe $(\mathbb{F}_4^\star,\times)$.*
4. *Démontrer que nécessairement $1+1+1+1 = 0$.*
5. *En déduire que $1+1 = x+x = y+y = 0$.*
6. *En déduire la table du groupe $(\mathbb{F}_4,+)$.*
7. *Démontrer que l'on a bien construit un corps à quatre éléments.*

Solution :

1. *Comme l'application τ_x de $\mathbb{F}_4^\star$ dans lui-même, définie par $\tau_x(t) = x\times t$ est une bijection, de bijection réciproque $\tau_{x^{-1}}$ on a*
$$1\times x\times y = \tau_x(1)\times\tau_x(x)\times\tau_x(y) = (x\times 1)\times(x\times x)\times(x\times y) = x^3\times(1\times x\times y),$$
on en déduit, en simplifiant par $1\times x\times y$, que $x^3 = 1$.
2. *Comme $x\neq 0$, on a $x^2\neq 0$ puisqu'un corps est intègre. On a aussi $x^2\neq x$. En effet, sinon on aurait $(x-1)\times x = 0$ d'où $x = 1$ ou $x = 0$, absurde. Supposons $x^2 = 1$. On aurait alors $x^3 = x$ en contradiction avec la question précédente. Donc $x^2 = y$. Pour les mêmes raisons, $y^2 = x$.*
3.

$\times$	1	x	y
1	1	x	y
x	x	y	1
y	y	1	x

Remarque : Un argument plus savant aurait été : il n'existe qu'une seule loi de groupe possible sur un ensemble à trois éléments.

4. *Cette fois on calcule*
$$S = 0+1+x+y = (0+1)+(1+1)+(1+x)+(1+y) = 1+1+1+1+S,$$
d'où $1+1+1+1 = 0$.
5. *On a $1+1\neq 1$. Supposons $1+1 = x$, en élevant au carré, on aurait $1+1+1+1 = x^2 = y$ soit $y = 0$, absurde. De même $1+1 = y$ n'est pas possible. Il ne reste qu'une seule possibilité : $1+1 = 0$. En multipliant cette égalité par x puis par y, on obtient $x+x = 0$ et $y+y = 0$.*

6. *On a* $1+0=1$ *donc* $1+x\neq 1$*, on a* $1+1=0$ *donc* $1+x\neq 0$ *on a* $1\neq 0$ *donc* $1+x\neq x$*. Il reste une seule possibilité pour* $1+x$*, donc on a nécessairement* $1+x=y$ *et en ajoutant* 1 *aux deux membres,* $x=1+y$*. On a donc la table du groupe* $(\mathbb{F}_4,+)$*.*

$+$	0	1	x	y
0	0	1	x	y
1	1	0	y	x
x	x	y	0	1
y	y	x	1	0

7. *Il reste à vérifier la distributivité,* $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$*, ce qui donne a priori* $4^3=64$ *vérifications. Les cas où* $c=0$ *ou* $c=1$ *sont évidents, même chose si* $a=0$ *ou* $b=0$ *ou* $a=b$*. Il reste donc trois possibilités pour* a*, deux pour* b *donc six pour* (a,b)*. La commutativité de* $+$ *divise le nombre de cas par deux. Comme il* y *a deux choix pour* c*, il* y *a au total six vérifications à effectuer.*
   - $(1+x)\times x=y\times x=1$ *et* $1\times x+x\times x=x+y=1$*.*
   - $(1+x)\times y=y\times y=x$ *et* $1\times y+x\times y=y+1=x$*.*
   - $(1+y)\times x=x\times x=y$ *et* $1\times x+y\times x=x+1=y$*.*
   - $(1+y)\times y=x\times y=1$ *et* $1\times y+y\times y=y+x=1$*.*
   - $(x+y)\times x=1\times x=x$ *et* $x\times x+y\times x=y+1=x$*.*
   - $(x+y)\times y=1\times y=y$ *et* $x\times y+y\times y=1+x=y$*.*

Chapitre 20

Arithmétique

Le père Rouault vint apporter à Charles le paiement de sa jambe remise,
soixante-quinze francs en pièces de quarante sous.
Gustave FLAUBERT, Madame Bovary, 1857.

Pour bien aborder ce chapitre

Un très beau chapitre. Tellement beau que nous allons le traiter deux fois ! En effet, il a beaucoup de points communs avec le suivant. On peut expliquer ces points communs à l'aide de la théorie des idéaux d'un anneau, mais ce n'est pas l'objet ici.

Par ailleurs l'arithmétique a toujours fasciné les hommes, les mathématiciens comme les profanes. Avec un peu de curiosité et d'observation, n'importe qui peut conjecturer des propriétés qui peuvent s'avérer ardues à démontrer. On peut par exemple contempler le tableau des derniers chiffres de i^j pour $0 \leqslant i \leqslant 9$ et $1 \leqslant j \leqslant 5$. Une explication viendra plus tard...

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Par ailleurs, on peut s'émerveiller devant les nombres premiers, le mystère de leur répartition et la beauté gratuite de leur étude. Gratuite ? Rien n'est moins sûr ! La découverte d'un algorithme rapide de décomposition en facteurs premiers mettrait à mal bien des codes secrets et l'arithmétique est devenu un secteur d'étude stratégique.

Parmi les nombreux mathématiciens qui se sont intéressés à l'arithmétique, le nom de Gauss se détache. Toute sa vie durant il est revenu sur des problèmes d'arithmétique. Mais on peut citer Euclide, Diophante, Fermat, Legendre, Euler et Ramanujan.

L'arithmétique est une école de rigueur. Mais une fois les mécanismes acquis, ce chapitre devient une récréation.

20.1 Relation de divisibilité, division euclidienne

20.1.1 Relation de divisibilité

DÉFINITION 20.1 ♡ **Divisibilité**
Soient deux entiers relatifs $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que l'entier a *divise* l'entier b si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $b = ka$.

Notation 20.1 On notera $a \mid b$ (se lit « a divise b ») le fait que l'entier a divise l'entier b.

Remarque 20.1
- $\forall n \in \mathbb{N},\ n \mid 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \mid n \implies n = 0$;
- $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4,\ [a \mid b \quad \text{et} \quad c \mid d] \implies ac \mid bd$.

PROPOSITION 20.1 **Propriétés de la divisibilité**

– La relation « divise » est réflexive : $\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a \mid a$.
– La relation « divise » est transitive : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, \quad [a \mid b \quad \text{et} \quad b \mid c] \implies a \mid c$.
– La relation « divise » n'est ni symétrique, ni antisymétrique. Donc ce n'est ni une relation d''équivalence, ni une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$). Par contre : $[a \mid b \quad \text{et} \quad b \mid a] \iff a = \pm b$.

Démonstration

1. *Soit $a \in \mathbb{Z}$. Comme $a = 1 \times a$ il est clair que $a|a$.*
2. $$\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \implies \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad b = ka \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad c = kb \end{cases} \implies c = kk'a \implies a|c$$
3. *On a : $[a|b \quad \text{et} \quad b|a] \implies \left[\exists \left(k,k'\right) \in \mathbb{Z}^2 : \quad b = ka \quad \text{et} \quad a = k'b\right] \implies a = kk'a$. Il vient alors :*
   – *si $a = 0$ alors $b = ka = 0$ et donc $a = b$.*
   – *si $a \neq 0$, $kk' = 1$, comme k et k' sont des entiers, cette égalité n'est possible que si $k = k' = 1$ ou alors si $k = k' = -1$. On a finalement bien $a = \pm b$.*

   Réciproquement si $a = \pm b$, on a nécessairement $[a|b \quad \text{et} \quad b|a]$.

PROPOSITION 20.2

Soit $a,b,c \in \mathbb{Z}$ et $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$[a|b \quad \text{et} \quad a|c] \implies a|\left(k_1 b + k_2 c\right)$$

Démonstration *En effet :*

$$[a|b \quad \text{et} \quad a|c] \implies \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \quad b = ka \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad c = ka \end{cases} \implies k_1 b + k_2 c = k_1 ka + k_2 k' a = \left(k_1 k + k_2 k'\right) a \implies a|\left(k_1 b + k_2 c\right)$$

20.1.2 Congruences

DÉFINITION 20.2 **Congruence**

Considérons un entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$ et deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que l'entier a est *congru* à l'entier b modulo n, et l'on note $a \equiv b\ [n]$ lorsque l'entier n divise l'entier $(b-a)$:

$$a \equiv b\ [n] \iff n/(b-a).$$

PROPOSITION 20.3 **Compatibilité des lois avec les congruences**

Soient quatre entiers $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

1. $a \equiv b\ [n]$;
2. $c \equiv d\ [n]$.

Alors

1. $a + c \equiv b + d\ [n]$;
2. $a \times c \equiv b \times d\ [n]$;
3. $\forall k \in \mathbb{N},\ a^k \equiv b^k\ [n]$.

Pour démontrer que $a \mid b$ il peut être intéressant de démontrer que $b \equiv 0\ [a]$.

Exemple 20.2

On veut démontrer que 641 divise $2^{32} + 1$.
On remarque que $n = 641 = 1 + 640 = 1 + 5 \times 2^7 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4$.
On en déduit $5 \times 2^7 \equiv -1\ [n]$. En élevant à la puissance 4, on a $5^4 \times 2^{28} \equiv 1\ [n]$. Comme $5^4 \equiv -2^4\ [n]$, on obtient $-2^4 \times 2^{28} \equiv 1\ [n]$ soit en ajoutant 2^{32} aux deux membres, $0 \equiv 2^{32} + 1\ [n]$, ce qu'il fallait vérifier.
Cet exemple historique est dû à Euler et fournit un contre-exemple à une conjecture de Fermat :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1 \text{ est premier.}$$

Exemple 20.3 Pour un nombre entier n (écrit en base 10) on a $n \equiv a\ [10]$ où a désigne le chiffre des unités de n. Ainsi la dernière ligne du tableau des i^j p. 748 peut se lire $i^5 \equiv i\ [10]$ pour tous entiers i.

Exemple 20.4 On a $10 \equiv 1\ [9]$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}, 10^k \equiv 1\ [9]$. En particulier $\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k\ [9]$. Autrement dit, un nombre entier $n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$ (écrit en base 10) est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres, et donc aussi à la somme des chiffres de la somme de ses chiffres, etc. C'est le principe de la *preuve par neuf* enseignée autrefois à l'école élémentaire. Elle peut s'énoncer de la façon suivante : « Le produit des restes des deux facteurs modulo 9 est congru au reste du produit modulo 9 ».
L'exemple suivant est dû à Eugène Ionesco (La Leçon 1951).
LE PROFESSEUR
...combien font, par exemple, trois milliards sept cent cinquante-cinq millions neuf cent quatre-vingt-dix-huit mille deux cent cinquante et un, multiplié par cinq milliards cent soixante-deux millions trois cent trois mille cinq cent huit ?
L'ÉLÈVE, *très vite*.
Ça fait dix-neuf quintillions trois cent quatre-vingt dix quadrillions deux trillions huit cent quarante quatre milliards deux cent dix-neuf millions cent soixante-quatre mille cinq cent huit...
On prend $a = 3755998251$, $b = 5162303508$. La somme des chiffres de a vaut 54 donc $a \equiv 0\ [9]$. De même la somme des chiffres de b vaut 33 donc $b \equiv 6\ [9]$. Donc le produit ab est congru à 0 modulo 9.
La somme des chiffres du produit $c = 19390002844219164508$ annoncé par l'élève vaut 76 donc $c \equiv 4\ [9]$.
Moralité, le résultat donné par l'élève est faux.

Exemple 20.5 On peut de demander quelle est valeur exacte du produit. Faute d'un logiciel de calcul formel qui donnerait la solution, on travaille avec une calculatrice qui donne quatorze chiffres significatif (en l'occurence il s'agit d'un tableur).
Il donne $3755998251 \times 5162303508 = 19389602947179200000$. Il est clair que les derniers chiffres sont faux. Pour les trouver, on travaille modulo 10^7, ce qui va donner les sept derniers chiffres : Soit $a' = 5998251$ et $b' = 2303508$. On a $a \equiv a'\ [10^7]$ et $b \equiv b'\ [10^7]$. On a donc $ab \equiv a'b'\ [10^7]$. Le tableur donne $a'b' = 13817019164508 \equiv 19164508 \pmod{10^7}$. On peut donc reconstituer $ab = 19389602947179164508$.
Bien entendu, on vérifie avec la preuve par neuf que $ab \equiv 0\ [9]$.

DÉFINITION 20.3 **Système complet de restes modulo m**
Soit m un entier $\geqslant 2$. On appelle système complet de restes modulo m un système d'entiers contenant un et un seul représentant de chaque classe.

Exemples : $[\![0, m-1]\!]$, système de m entiers consécutifs, m entiers non congrus modulo m deux à deux.

PROPOSITION 20.4
Soit $x \longmapsto f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ une fonction polynôme où les $a_i \in \mathbb{Z}$.
On suppose que l'on a $f(r)$ non congru à 0 modulo m pour r décrivant un système complet de restes modulo m. On a alors $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x)$ non congru à 0 modulo m.

Démonstration *En effet, soit $x \in \mathbb{Z}$, il existe un r appartenant au système complet de restes modulo m, tel que $x \equiv r\ [m]$. Comme par ailleurs, $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i r^i\ [m]$, le résultat en découle.*

20.1.3 Division euclidienne

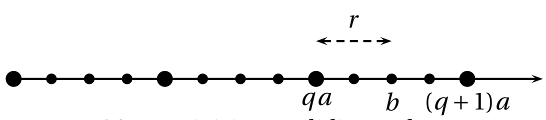


FIGURE 20.1 – Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

THÉORÈME 20.5 ♡♡♡ **Division Euclidienne**
Soient deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

1. $a = bq + r$
2. $0 \leqslant r < b$

On dit que l'entier q est le *quotient* et l'entier r le *reste* de la *division euclidienne* de a par b.

Démonstration
Unicité : *Soient $(q,r)\in\mathbb{Z}^2$ et $(q',r')\in\mathbb{Z}^2$ tels que $a=qb+r$, $0\leqslant r<b$ et $a=q'b+r'$, $0\leqslant r'<b$. Comme $0\leqslant r<b$ et $0\leqslant r'<b$, on a : $b\left|q'-q\right|=\left|r'-r\right|<b$ ce qui n'est possible que si $\left|q'-q\right|=0$, c'est a dire que si $q=q'$. Ceci entraîne $r=r'$ et donc $(q,r)=(q',r')$.*

Existence : – *Supposons que $a\in\mathbb{N}$ et considérons l'ensemble $\mathscr{M}=\{n\in\mathbb{N}\mid nb\leqslant a\}$ des multiples de b inférieurs à a. $\mathscr{M}$ est une partie de $\mathbb{N}$. De plus, $\mathscr{M}$ est :*
- *non vide car $0\in\mathscr{M}$.*
- *majorée par a. En effet, si $n\in\mathscr{M}$ alors, comme $b\geqslant 1$, $n\leqslant nb\leqslant a$ donc $n\leqslant a$.*

On en déduit que $\mathscr{M}$ admet un plus grand élément (voir page 304), noté q qui vérifie :

1. *$qb\leqslant a$ car $q\in\mathscr{M}$.*
2. *$(q+1)\,b>a$ car $q+1>q$ et q est le plus grand élément de $\mathscr{M}$, donc $q+1\notin\mathscr{M}$.*

Posons $r=a-bq$. On a bien $a=bq+r$. Par ailleurs $0\leqslant r$ car $a\geqslant bq$ et $r<b$ car $b=(q+1)\,b-qb>a-qb=r$.

– *Supposons maintenant que $a\in\mathbb{Z}$. Si a est positif, on se ramène au cas précédent. Sinon $-a$ est positif et il existe $(q',r')\in\mathbb{Z}^2$ tel que :$-a=q'b+r'$ et $0\leqslant r'<b$. On a donc $a=b(-q')-r'$. Si $r'=0$ alors on pose $q=-q'$ et $r=0$. On obtient ainsi le couple recherché. Sinon, si $r'\neq 0$, alors $r'\in[\![1,b-1]\!]$ et $a=b(-q'-1)+(b-r')$. On pose alors $q=-q'-1$ et $r=b-r'$ et on obtient, ici encore, le couple recherché.*

20.2 PGCD, théorèmes d'Euclide et de Bézout

DÉFINITION 20.4 ♡ **PGCD, PPCM**
Soient deux entiers non tous deux nuls $(a,b)\in\mathbb{Z}^{*2}$.

1. L'ensemble des diviseurs de $\mathbb{N}^*$ communs à a et b admet un plus grand élément noté $a\wedge b$. C'est le *plus grand commun diviseur* (PGCD) des entiers a et b.
2. L'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^*$ multiples communs de a et b admet un plus petit élément noté : $a\vee b$. C'est le *plus petit commun multiple* (PPCM) des entiers a et b.

Si $a=b=0$, on pose $a\wedge b=a\vee b=0$.

THÉORÈME 20.6 ♡ **Théorème d'Euclide**
Soient deux entiers $(a,b)\in\mathbb{Z}^{*2}$. Effectuons la division euclidienne de l'entier a par l'entier b :

$$\exists!(q,r)\in\mathbb{N}^2\ :\quad a=bq+r\quad\text{et}\quad 0\leqslant r<b$$

Alors :

$$a\wedge b=b\wedge r$$

Démonstration *Comme $r=a-bq$, tout entier divisant à la fois a et b divise aussi r. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à b et r. En particulier, ces deux ensembles ont le même plus grand élément, ce qui s'écrit aussi : $a\wedge b=b\wedge r$.*

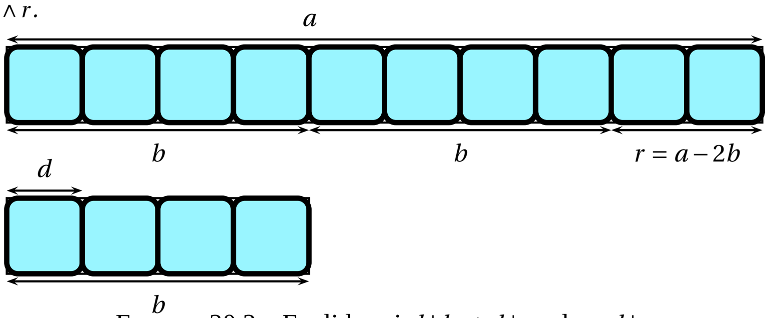


FIGURE 20.2 – Euclide : si $d\mid b$ et $d\mid a$, alors $d\mid r$

Le théorème précédent justifie l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd de deux entiers non nuls $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$. On pose $r_0=a$, $r_1=b$ et on définit ensuite $\forall k\geqslant 1$, les couples (q_k,r_k) en utilisant une division euclidienne :

$$\text{si } r_k\neq 0,\ \exists!(q_k,r_{k+1})\in\mathbb{Z}^2 \text{ tq } r_{k-1}=q_kr_k+r_{k+1} \text{ et } 0\leqslant r_{k+1}<r_k$$

Comme la suite d'entiers (r_k) est strictement décroissante, il existe un rang $n\geqslant 1$ tel que $r_n\neq 0$ et $r_{n+1}=0$. D'après le théorème d'Euclide, on a $\forall k\in[0,n-1]$, $a\wedge b=r_k\wedge r_{k+1}$. Comme r_n divise r_{n-1}, on a $r_n\wedge r_{n-1}=r_n$. Par conséquent, le dernier reste non-nul r_n est le pgcd des entiers (a,b).

Exemple 20.6 Déterminons le pgcd des entiers 366 et 43 en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
366 &= \boxed{43} \times 8 + \boxed{22} \\
\boxed{43} &= \boxed{\boxed{22}} \times 1 + \boxed{21} \\
\boxed{22} &= \boxed{\boxed{21}} \times 1 + \boxed{1} \\
\boxed{21} &= \boxed{1} \times 21 + 0
\end{aligned}$$

donc $366 \wedge 43 = 1$.

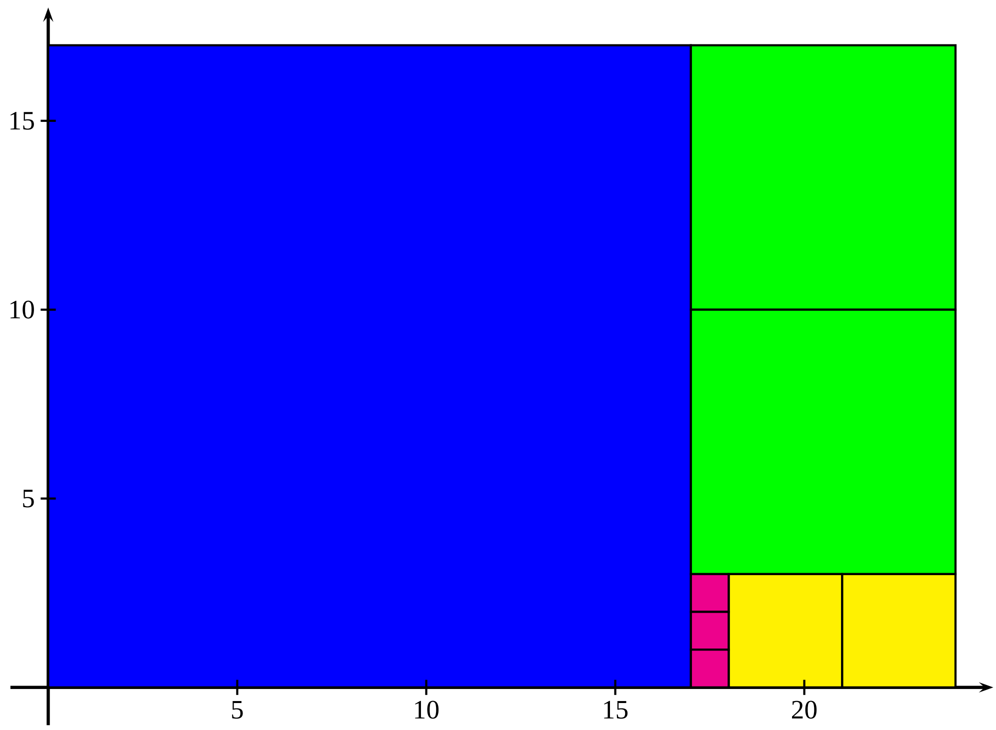
- **Paramètres :** a, b (entiers).
- **Variables locales :** $\mathrm{A}, \mathrm{B}, r$.
- **Initialisation :**
  - $\mathrm{A} \leftarrow a$,
  - $\mathrm{B} \leftarrow b$,
- **Corps :** Tant que $b \neq 0$ faire :
  - $r \leftarrow \mathrm{A} \bmod \mathrm{B}$,
  - $\mathrm{A} \leftarrow \mathrm{B}$,
  - $\mathrm{B} \leftarrow r$,

  Fin tant que
- Renvoyer A ($\mathrm{A} = \mathrm{pgcd}(a, b)$).

MAPLE
```
pgcd := proc(a, b)
  local A, B, r;
  A := a;
  B := b;
  while (b > 0) do
     r := irem(A, B);
     A := B;
     B := r;
  od;
  A;
end;
```

ou sous une forme récursive :

MAPLE
```
pgcd := proc(a, b)
  if b = 0 then a
  else
    pgcd(b,irem(a,b))
  fi;
end;
```



Le pgcd de 17 et 24 égale 1.

DÉFINITION 20.5 **Nombres premiers entre eux**
On dit que deux nombres a et b sont premiers entre eux si et seulement si leur plus grand diviseur commun est 1, autrement dit si et seulement si $a \wedge b = 1$.

BIO 17 Étienne Bézout, , né le 31 mars 1730 à Nemours, mort le 27 septembre 1783 à Basses-Loges)



Mathématicien français. Auteur de différents livres d'enseignement qu'il rédigea à l'attention des gardes de la marine ou des élèves du corps de l'artillerie. Il est surtout connu pour le théorème ci dessous mais il a travaillé également sur les déterminants et les équations algébriques. Son nom est attaché à d'autres théorèmes en géométrie algébrique et intersections de courbes.

THÉORÈME 20.7 ♡♡♡ **Coefficients de Bézout**
Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. Il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = a \wedge b.$$

Un tel couple (u,v) est appelé *couple de coefficients de Bézout de a et b.*

Démonstration *Quitte à considérer $|a|$ et $|b|$ à la place de a et b, on peut supposer a et b positifs. La preuve se fait par récurrence sur b. Si $b = 0$, alors $a \wedge b = a$ et $1.a + 0.b = a$ donc un couple de coefficient de Bézout est $(1,0)$. On fixe $b \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que la propriété est vraie pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout nombre n de l'intervalle d'entiers $[\![0, b-1]\!]$. Par division euclidienne, il existe $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant b-1$. D'après le théorème d'Euclide, on sait que $a \wedge b = b \wedge r$. On applique l'hypothèse de récurrence à b et r, il existe $(\mathrm{U},\mathrm{V}) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\mathrm{U}b + \mathrm{V}r = b \wedge r$. Donc $\mathrm{U}b + \mathrm{V}\left(a - bq\right) = a \wedge b$ et $\mathrm{V}a + \left(\mathrm{U} - \mathrm{V}q\right) b = a \wedge b$. La propriété est alors prouvée par récurrence.*

Remarque 20.2 Il n'y a pas unicité du couple de coefficients de Bézout de deux entiers. Voir exercice **??** p. **??**.

THÉORÈME 20.8 ♡♡♡ **Théorème de Bézout**
Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$. On a

$$a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow \left[\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \ : \quad 1 = au + bv\right]$$

Démonstration
$\boxed{\Rightarrow}$ *C'est une conséquence directe du théorème précédent.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. Si d est un diviseur commun à a et b alors d est un diviseur de 1. Il est alors clair que $a \wedge b = 1$.*

Remarque 20.3 Soient deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. L'algorithme d'Euclide permet de trouver un couple de Bézout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On définit les suites (r_k) et (q_k) des restes dans l'algorithme d'Euclide. Notons $r_n = a \wedge b = 1$ le dernier reste non-nul. On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et par récurrence, on définit

$$\forall k \geqslant 1,\ r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \text{ avec } 0 < r_{k+1} \leqslant r_k$$

On définit simultanément deux suites (u_k) et (v_k) telles que

$$\forall k \in [0,n],\ r_k = u_k a + v_k b$$

Pour que cette propriété soit vraie pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on doit poser :

$$(u_0, v_0) = (1,0),\ (u_1, v_1) = (0,1) \ \text{ et } \forall k \in [2,n],\ \begin{cases} u_{k+1} = u_{k-1} - q_k u_k \\ v_{k+1} = v_{k-1} - q_k v_k \end{cases}$$

On a alors $1 = au_n + bv_n$.

$r_0 = a$	$r_1 = b$	r_2	$\dots$	r_k	$\dots$	1
	q_1	q_2	$\dots$	q_k	$\dots$	q_n
1	0	u_2	$\dots$	u_k	$\dots$	$u_n = u$
0	1	v_2	$\dots$	v_k	$\dots$	$v_n = v$

Voici une procédure Maple qui prend comme paramètres a et b et qui retourne $a \wedge b$, ainsi qu'un couple de Bézout (U,V)

MAPLE
```
bezout := proc(a, b)
  local R, RR, Q, U, UU, V, VV, temp;
  R := a;
  RR := b;
  U := 1;
  UU := 0;
  V := 0;
  VV := 1;
  #Cond entrée :  R = r0, RR = r1, U = u0, V = v0, UU = u1, VV = v1
  while (RR > 0) do
    Q := iquo(R, RR);
    temp := UU;
    UU := U - Q * UU;
    U:=temp;
    temp := VV;
    VV := V - Q * VV;
    V := temp;
    temp := RR;
    RR := irem(R, RR);
    R := temp;
    #INV : R = rk, RR = r_{k+1}, U = uk, UU = u_{k+1}, V = vk, VV = v_{k+1},
    #    Q = qk,  k : nombre de passages dans la boucle while
  od;
    #Cond sortie : RR = u_{n+1}=0, R = r_n = pgcd(a, b), U = u_n, V = v_n
  R, U, V;
end;
```

Exemple 20.7 Déterminons grâce à l'algorithme d'Euclide un couple de Bézout pour $a = 22$ et $b = 17$.

$r_0 = 22$	$r_1 = 17$	$r_2 = 5$	$r_3 = 2$	$r_4 = 1$
	$q_1 = 1$	$q_2 = 3$	$q_3 = 2$	$q_4 = 2$
$u_0 = 1$	$u_1 = 0$	$u_2 = 1$	$u_3 = -3$	$u_4 = 7$
$v_0 = 0$	$v_1 = 1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 4$	$v_4 = -9$

et $\boxed{1 = 7 \times 22 - 9 \times 17}$.

BIO 18 Carl Friedrich Gauss, né le 30 avril 1777 à Brunswick (Saint-Empire romain germanique), mort le 23 février 1855 à Göttingen (Royaume de Hanovre)



Mathématicien allemand. C'est un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Certains l'ont même surnommé le « prince des mathématiques ». Alors âgé de trois ans, on raconte qu'il sut corriger son père dans un calcul de salaire. Il est remarqué par ses instituteurs qui le poussent à poursuivre ses études. Á dix-neuf ans, il résout un problème qui date d'Euclide, celui de la construction à la règle et au compas du polygône régulier à dix-sept côtés. Cette découverte fut à l'origine de sa décision de consacrer sa vie aux mathématiques. Il effectue sa thèse sous la direction de Johann Pfaff à l'université de Brunswick. Celle-ci porte sur une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre 21.24 page 778. Gauss s'intéressa à de nombreuses branches des mathématiques : l'arithmétique, la géométrie, les probabilités, etc. Il a permis des avancées énormes en théorie des nombres, en géométrie non-euclidienne, ...Mais il s'est aussi intéressé, entre autres, à l'astronomie ou à la cartographie à chaque fois avec génie. Même si la portée de ses travaux ne fut pas complètement comprise par ses contemporains - Gauss ne publiant que très peu - ce fut la postérité qui comprit la profondeur et l'étendue de son travail à la lecture de son journal intime qui fut publié après sa mort. Il eut comme élèves Richard Dedekind et Bernhard Riemann.

THÉORÈME 20.9 ♡♡♡ **Théorème de Gauss**
Soient trois entiers non nuls $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^{*3}$.

$$[a \mid bc \quad \text{et} \quad a \wedge b = 1] \implies a \mid c$$

Démonstration *Si $a \wedge b = 1$ alors, d'après le théorème de Bézout 20.8, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On a donc aussi $auc + bvc = c$. Mais comme a divise bc et que a divise auc, a divise $auc + bvc = c$.*

PROPOSITION 20.10 **Caractérisation des diviseurs et des multiples**
Soient deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Soit un entier $d \in \mathbb{Z}$. $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \iff d \mid (a \wedge b)$
2. soit un entier $m \in \mathbb{Z}$. $\begin{cases} a \mid m \\ b \mid m \end{cases} \iff (a \vee b) \mid m$.

Démonstration

1. *Supposons que que d divise a et b et notons $\delta = a \wedge b$. D'après le théorème 20.7, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = \delta$. Comme $d \mid a$ et que $d \mid b$, on sait que $d \mid \delta$. La réciproque est facile.*
2. *Supposons que a et b divisent m et notons $\mu = a \vee b$. Il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $\mu = ka$ et $\mu = k'b$. Il existe aussi $l, l' \in \mathbb{N}$ tels que $m = la$ et $m = l'b$. De plus, par application du théorème 20.5, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m = p\mu + r$ et $0 \leqslant r < \mu$. On peut alors écrire $la = pka + r$ et $l'b = pk'b + r$ et donc $a \mid r$ et $b \mid r$. Si $r \neq 0$ alors r est un multiple commun à a et b. Par définition de μ, il vient $r \geqslant \mu$ ce qui est impossible. Donc $r = 0$ et μ divise m. La réciproque est évidente.*

PROPOSITION 20.11
Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} (ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b) \\ (ka) \vee (kb) = k(a \vee b) \end{cases}$.

Démonstration

- *Posons $\delta = a \wedge b$ et $\Delta = ka \wedge kb$. Il est clair que $k\delta \mid \Delta$. Montrons que $\Delta \mid k\delta$, ce qui prouvera la première égalité. Comme $k \mid \Delta$ il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\Delta = km$. Mais alors $km \mid ka$ et $m \mid a$. De même, $km \mid kb$ et donc $m \mid b$. L'entier m est donc un diviseur de δ et $\Delta = km \mid k\delta$.*
- *Posons maintenant $d = a \vee b$ et $D = ka \vee kb$. L'entier kd est un multiple de ka et kb donc $D \mid kd$. Si on montre de plus que $kd \mid D$ alors la seconde égalité sera prouvée. Comme $ka \mid D$ et que $kb \mid D$, il existe des entiers m_1 et m_2 tels que $D = kam_1 = kbm_2$. L'entier k est donc un diviseur de D et il existe un entier D' tel que $D = kD'$. Par suite, on a $D' = am_1 = bm_2$ et D' est donc un multiple commun à a et b ce qui amène $d \mid D'$ ainsi que $kd \mid D$.*

PROPOSITION 20.12 ♡ **Autres propriétés du PGCD**
Soient trois entiers non nuls $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^{*3}$.

1. Soient trois entiers $(\delta, a', b') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^2$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$, alors
$$(\delta = a \wedge b) \iff (a' \wedge b' = 1)$$
2. $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \iff a \wedge (bc) = 1$;
3. $\begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies ab \mid c$;
4. pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, si $a \wedge b = 1$, alors $a^p \wedge b^q = 1$;
5. pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $a^k \wedge b^k = (a \wedge b)^k$.

Démonstration

1. *C'est une conséquence directe de la proposition 20.10.*
2. ⇒ *Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors par application du théorème de Bézout 20.8, il existe des entiers s, t, u, v tels que $sa + tb = 1$ et $ua + vc = 1$. Si on multiplie membre à membre ces deux égalités, on obtient l'égalité de Bézout : $(sua + vsc + tub)\, a + (tvc)\, b = 1$ et en conclusion $a \wedge (bc) = 1$.*

   ⇐ *Réciproquement, si $a \wedge (bc) = 1$ alors il : est clair que a est premier à la fois avec b et c.*
3. *Comme $a \mid c$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = ka$. Mais comme $b \mid c = ka$ et que $a \wedge b = 1$ alors par le théorème de Gauss 20.9, il vient que $b \mid k$. En conclusion $ab \mid c$.*
4. *Considérons $A, B \in \mathbb{N}^*$ tels que $A \wedge B = 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Si on applique la deuxième règle avec $a = A$, $b = B$ et $c = B$, on obtient : $A \wedge B^2 = 1$. En l'appliquant une nouvelle fois avec $a = A$, $b = B$ et $c = B^2$, il vient que $A \wedge B^3 = 1$. Si on l'applique encore $m - 3$ fois, il vient que : $A \wedge B^m = 1$. En résumé, on a prouvé que si $A \wedge B = 1$ alors $A \wedge B^m = 1$. Considérons $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$. On applique ce résultat à $A = a$, $B = b$ et $m = q$. Il vient $a \wedge b^q = 1$. On l'applique alors une nouvelle fois mais à $A = b^q$, $B = a$ et $m = p$ et on trouve : $a^p \wedge b^q = 1$.*

5. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $\delta = a \wedge b$. Grâce à la première règle, on a : $\frac{a}{\delta} \wedge \frac{b}{\delta} = 1$ et grâce à la quatrième : $\left(\frac{a}{\delta}\right)^k \wedge \left(\frac{b}{\delta}\right)^k = 1$. En appliquant à nouveau la première règle, il vient que : $a^k \wedge b^k = \delta^k = (a \wedge b)^k$.*

THÉORÈME 20.13 ♡ **Relation entre PGCD et PPCM**
Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{*2}$.

1. Si $a \wedge b = 1$ alors $a \vee b = |ab|$;
2. $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

Démonstration

1. *Supposons que a et b sont positifs et premiers entre eux. Soit d un multiple commun à a et b. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tels que $d = ka$. Comme $b \mid d$ et que $a \wedge b = 1$, on en déduit, grâce au théorème de Gauss 20.9, que $b \mid k$ et qu'il existe donc $k' \in \mathbb{N}$ tel que $d = k'ab$. Comme d est le plus petit commun multiple de a et b, il vient forcément que $k' = 1$ et que $d = ab$. Si a et b ne sont pas tous deux positifs, on applique ce résultat à $|a|$ et $|b|$.*
2. *Notons $\delta = a \wedge b$ et $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ avec $a', b' \in \mathbb{Z}$. Montrons que l'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de $\delta a'b'$. Il est clair que tout multiple de $\delta a'b'$ est un multiple commun à a et b. Réciproquement, si m est un multiple commun à a et b alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $m = ka = k'b$. On a aussi : $m = k\delta a' = k'\delta b'$. Comme a' et b' sont premiers entre eux, cette égalité implique, par application du théorème de Ga uss 20.9 que $b' \mid k$. Donc m est un multiple de $\delta a'b'$. Il s'ensuit que le ppcm de a et b est le plus petit multiple de $\delta a'b'$, c'est à dire que $a \vee b = |\delta a'b'|$. Il vient alors $\delta(a \vee b) = \delta|\delta a'b'| = |ab|$ d'où l'égalité.*

20.3 Nombres premiers

20.3.1 Nombres premiers

DÉFINITION 20.6 ♡ **Nombre premier, nombre composé**
Un entier $n \in \mathbb{N}$ est dit *premier* si $n \geqslant 2$ et si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$, sont 1 ou lui-même :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k/n \implies k \in \{1, n\}$$

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Si un entier $n \in \mathbb{N}$ n'est pas premier, on dit qu'il est *composé*.

Remarque 20.4 Un entier positif est premier si et seulement si le cardinal de l'ensemble de ses diviseurs est égal à 2.

PROPOSITION 20.14 ♡ **Propriétés des nombres premiers**

1. Soit un entier $p \in \mathbb{N}$ premier, et $a \in \mathbb{Z}$ un entier. Alors, $p \mid a$ ou bien $p \wedge a = 1$.
2. Si n et m sont deux nombres premiers distincts, ils sont premiers entre eux : $n \neq m \implies n \wedge m = 1$.
3. Si n est un nombre premier et si $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$,

$$n \mid a_1 \dots a_k \implies [\exists i \in [\![1, n]\!] : \quad n \mid a_i]$$

Démonstration

1. *Si n et a ne sont pas premiers entre eux alors $\delta = n \wedge a > 1$. Mais comme $\delta \mid n$ et que n est premier, $\delta = 1$ ce qui n'est pas possible ou $\delta = n$. En conclusion, $n \mid a$.*
2. *n est premier et peut diviser m donc d'après le point précédent $n \wedge m = 1$.*
3. *D'après le théorème de Gauss et une petite récurrence.*

PROPOSITION 20.15 ♡
Tout entier supérieur à 2 admet un diviseur premier.

Démonstration *Effectuons une récurrence forte. Si $p = 2$ alors p possède un diviseur premier : lui même. Supposons la propriété vérifiée pour tout entier $p \in [\![2, n]\!]$ et montrons là pour $p = n+1$. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des diviseurs de $n+1$. On a $|\mathscr{A}| \geqslant 2$. Si $|\mathscr{A}| = 2$ alors $n+1$ est premier et cela démontre la propriété sinon $\mathscr{A}$ contient un entier $q \in [\![2, n]\!]$ qui divise $n+1$. On applique l'hypothèse de récurrence à q : q possède un diviseur premier. Ce diviseur premier divise nécessairement aussi $n+1$ et donc $n+1$ possède un diviseur premier. La propriété est donc démontrée par récurrence.*

PROPOSITION 20.16 ♡
L'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini.

Démonstration *Supposons que ce ne soit pas le cas. $\mathbb{P}$ forme alors une partie finie de $\mathbb{N}$. $\mathbb{P}$ possède donc un plus grand élément n. Considérons le nombre entier $N = n! + 1$. On a : $N > n$. D'après la proposition précédente, N possède un diviseur premier p différent de 1. Ce dernier est nécessairement élément de l'ensemble $[\![2, n]\!]$. p divise donc aussi $n!$. Mais alors p divise 1 ce qui est impossible. L'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est donc infini.*

20.3.2 Décomposition en facteurs premiers

LEMME 20.17
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère m nombre premiers $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{P}$ distincts deux à deux et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. On forme le nombre entier $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$. Alors tout diviseur premier de n est l'un des p_i où $i \in [\![1, m]\!]$.

Démonstration *Considérons l'ensemble $\mathscr{A}$ des entiers de la forme $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{P}$ distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*$ qui admettent un diviseur premier différent de chacun des p_i. La propriété sera prouvée si on montre que $\mathscr{A}$ est vide. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors comme $\mathscr{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$, $\mathscr{A}$ admet un plus petit élément $n_0 = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ et d'après la proposition 20.15, n_0 admet un diviseur premier p qui n'est, par définition de $\mathscr{A}$, aucun des p_i. L'entier p divise donc le produit $p_1.p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_m^{\alpha_m}$. Les entiers p et p_1 sont premiers entre eux car premiers. On en déduit, par application du lemme de Gauss, que $p \mid p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_m^{\alpha_m}$. Mais comme n_0 est le plus petit élément de $\mathscr{A}$, l'entier $p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_m^{\alpha_m}$ n'est pas élément de $\mathscr{A}$ et p est l'un des p_i pour $i \in [\![1, m]\!]$ ce qui rentre en contradiction avec l'hypothèse faite sur p. Le lemme est alors prouvé par l'absurde.*

THÉORÈME 20.18 ♡♡♡ **Décomposition en facteurs premiers**
Soit un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Cet entier n s'écrit de façon unique de la manière suivante :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, $p_1 < \dots < p_m$ sont m nombres premiers et où $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*$. Ce résultat se formule aussi sous la forme suivante : n s'écrit de manière unique, à l'ordre des facteurs près, comme

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(n)}$$

où $\nu_p(n) \in \mathbb{N}$ est appelé la *p-valuation* de l'entier n.

Démonstration

Existence *La preuve se fait par récurrence sur n. Si $n = 2$ alors comme $2 \in \mathbb{P}$, la proposition est vraie. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Supposons que tout entier $< n$ se décompose comme indiqué dans le théorème. Si n est premier alors le théorème est vrai pour n. Sinon n admet un diviseur premier $p \in \mathbb{P}$ et il existe $0 < m < n$ tel que $n = pm$. Mais par application de l'hypothèse de récurrence, m se décompose comme indiqué dans le théorème et il en est alors de même de n. L'existence de la décomposition est alors prouvée par récurrence.*

Unicité *La preuve se fait à nouveau par récurrence. Supposons que $2 = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ avec pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et $p_1 < \dots < p_m$. Comme 2 est le plus petit des nombres premiers, il vient : $2 = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \geqslant 2^{\alpha_1} \times \dots \times 2^{\alpha_m}$ ce qui n'est possible que si $m = 1$, $p_1 = 2$, $\alpha_1 = 1$. L'unicité de la décomposition de 2 en facteurs premiers est alors prouvée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que tout entier $< n$ admet une unique décomposition en facteurs premiers et supposons que que ce ne soit pas le cas pour n, c'est à dire que n admet au moins deux décompositions en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} = p_1'^{\alpha_1'} \dots p_{m'}'^{\alpha_{m'}'}$. Par application du lemme précédent, il vient $p_1 = p_i'$ pour un certain $i \in [\![1, m']\!]$ et $p_1' = p_j$ pour un certain $j \in [\![1, m]\!]$. Mais $p_1 \leqslant p_j = p_1' \leqslant p_i' = p_1$ et forcément $p_1 = p_1'$. On peut alors écrire :*

$$\frac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_m^{\alpha_m} = p_1'^{\alpha_1' - 1} \dots p_{m'}'^{\alpha_{m'}'}$$

L'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que la décomposition de n/p_1 en facteurs premiers est unique donc : $m = m'$, $p_1 = p_1'$, $p_2 = p_2'$, …, $p_m = p_m'$, $\alpha_1 = \alpha_1'$, …, $\alpha_m = \alpha_m'$. Les deux décompositions de n en facteurs premiers sont donc égales. L'unicité est ainsi prouvée par récurrence.

Remarque 20.5 Tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ non nul s'écrit de façon unique sous la forme :

$$n = \pm \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(|n|)}.$$

Pour des entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathbb{P}$,

$$\nu_p(a \times b) = \nu_p(a) + \nu_p(b) \qquad a \mid b \implies \nu_p(a) \leqslant \nu_p(b)$$

THÉORÈME 20.19 ♡ **Expression du PGCD et du PPCM à l'aide des facteurs premiers**
Soient deux entiers non-nuls $(a,b) \in {\mathbb{N}^*}^2$. Leur décomposition en facteurs premiers s'écrit :

$$a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(a)} \qquad b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(b)}$$

Alors la décomposition de $a \wedge b$ et de $a \vee b$ en facteurs premiers s'écrit :

$$a \wedge b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\min\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}} \qquad a \vee b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}}$$

Démonstration *Posons $\delta = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\min\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}}$ et montrons que $\delta = a \wedge b$. Considérons $a', b' \in \mathbb{N}$ tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$. D'après la proposition 20.12, on aura montré que $\delta = a \wedge b$ si et seulement si $a' \wedge b' = 1$. Supposons que ce ne soit pas le cas alors il existe un diviseur $d \neq 1$ commun à a et b qu'on peut supposer premier. On a donc :*

$$d \mid \frac{a}{d} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(a)-\min\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}} \quad \text{et} \quad d \mid \frac{b}{d} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(b)-\min\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}}.$$

Il vient alors que d est un facteur de chacun des deux produits ci dessus et que $\nu_d(a) - \min\{\nu_d(a),\nu_d(b)\} \geqslant 1$ ainsi que $\nu_d(b) - \min\{\nu_d(a),\nu_d(b)\} \geqslant 1$ ce qui constitue une contradiction et prouve par l'absurde que $a' \wedge b' = 1$. La formule pour le pgcd est ainsi démontrée. On procède de même pour le ppcm.

Exemple 20.8

Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul, $n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(|n|)}$. Les diviseurs positifs d de n s'écrivent $d = \prod_{p\in\mathbb{P}, p|n} p^{\nu_p(|d|)}$, avec $\forall p \in \mathbb{P}, \nu_p(|d|) \leqslant \nu_p(|n|)$. Pour chaque $p \in \mathbb{P}$ qui divise n, on a $\nu_p(|n|)+1$ choix pour $\nu_p(|d|)$, à savoir $0, 1, \dots, \nu_p(|n|)$. On obtient ainsi

$$\prod_{p\in\mathbb{P}, p|n} (\nu_p(|n|)+1)$$

diviseurs positifs de n. Ces diviseurs de n sont distincts deux à deux à cause du théorème de décomposition en facteurs premiers.

20.4 Exercices

20.4.1 Divisibilité

Exercice 20.1 ♡

Déterminer le nombre de diviseurs de $10!$

Solution : *On sait que* $10! = 1\times2\times3\times\ldots\times10$ *donc* $10! = 2^8.3^4.5^2.7$ *et un diviseur de* $10!$ *est donc de la forme* $2^a.3^b.5^c.7^d$ *avec* $a\in[\![0,8]\!]$, $b\in[\![0,4]\!]$, $c\in[\![0,2]\!]$ *et* $d\in[\![0,1]\!]$. *Réciproquement, tout nombre de cette forme divise* $10!$. *On compte alors* $9\times5\times3\times2 = \boxed{270}$ *diviseurs de* $10!$.

Exercice 20.2 ♡

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ *l'équation* $x-1 \mid x+3$.

Solution : *On remarque que* 1 *n'est pas une solution de l'équation. On suppose donc que* $x\neq1$ *et on écrit :*

$$x-1\mid x+3 \iff \frac{x+3}{x-1} = 1+\frac{4}{x-1}\in\mathbb{Z}.$$

Mais les diviseurs de 4 *sont* $\pm1,\pm2,\pm4$. *Donc* x *est solution de l'équation si et seulement si* $x-1$ *est égal à un de ces* 6 *nombres. On trouve alors pour l'ensemble solution* $\boxed{\{-3,-1,0,2,3,5\}}$.

Exercice 20.3 ♡

Sachant que $3285 = 25\times123+210$ *trouver, sans effectuer cette division, le reste et le quotient de la division euclidienne de* 3285 *par* 123.

Solution : *On sait que le reste doit être plus petit que le quotient. Alors* $3285 = 25\times123+123+87 = 26\times123+87$ *et par unicité du couple quotient-reste on trouve que le quotient est* 26 *et le reste* 87.

Exercice 20.4 ♡

Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ *est divisible par* 24.

Solution : *On remarque que dans* 4 *nombres successifs, il y a toujours un diviseur de* 2*, un de* 3 *et un de* 4. *Donc il est clair que le produit de ces* 4 *nombres est divisible par* 24.

Exercice 20.5 ♡

Montrer que $\forall n\geqslant0, 6\mid 5n^3+n$.

Solution : *Par récurrence. La propriété est vraie au rang* 0. *Soit* $n\in\mathbb{N}$. *Supposons que* $6\mid 5n^3+n$ *et montrons que* $6\mid 5(n+1)^3+n+1$. *On calcule :* $5(n+1)^3+n+1 = 5n^3+n+15n^2+15n+6$. *Mais* $6\mid 5n^3+n$ *d'après l'hypothèse de récurrence. Comme* $3\mid15$ *que et* $2\mid n^2+n = n(n+1)$ *(* n *ou* $n+1$ *est pair),* $6\mid 15n^2+15n$ *et la propriété reste vraie au rang* $n+1$. *On termine en appliquant le théorème de récurrence.*

20.4.2 Bezout, PGCD, PPCM

Exercice 20.6 ♡

Calculer le pgcd des couples

1. $(120,230)$
2. $(210,135)$
3. $(211,112)$

Solution : *On applique l'algorithme d'Euclide et on trouve :*

1. $120\wedge230 = 10$
2. $210\wedge135 = 15$
3. $211\wedge112 = 1$

Exercice 20.7 ♡

Soient a,b *des nombres premiers entre eux. Montrer que :*

1. $a\wedge(a+b) = b\wedge(a+b) = 1$.
2. $(a+b)\wedge ab = 1$.

Solution :

1. *On suppose que a et $a+b$ ne sont pas premiers entre eux. Alors soit k un diviseur commun à a et $a+b$ différent de* 1*. Comme $k \mid a$ et que $k \mid a+b$, $k \mid b$ et donc $k \mid a \wedge b = 1$ ce qui n'est pas possible. Donc $a \wedge (a+b) = 1$. La seconde relation se prouve en échangeant les lettres a et b dans la première.*
2. *Comme avant, on suppose que ab et $a+b$ ne sont pas premiers entre eux. Alors soit k un diviseur premier commun à ab et $a+b$ différent de* 1*. Comme $k \mid ab$, $k \mid a$ ou $k \mid b$. On suppose que $k \mid a$, alors comme avant, comme $k \mid a+b$, $k \mid b$ et donc $k \mid a \wedge b = 1$ ce qui n'est pas possible.*

Exercice 20.8 ♡

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ ($a \leqslant b$) tels que $a \wedge b = 18$ et $a+b = 360$.

Solution : *Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ un couple solution du problème. Alors il existe $\left(a',b'\right) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = 18a'$, $b = 18b'$ et $a' \wedge b' = 1$. De plus comme $a+b = 360$, on sait que $a'+b' = 360/18 = 20$. En résumé, $\left(a',b'\right)$ est un couple de deux entiers premiers entre eux et de somme* 20*. Les seuls couples à vérifier cette propriété sont*

$$(1,19),(3,17)\,(7,13),(9,11).$$

On multiplie ces couples par 18 *pour retrouver le couple (a,b) :*

$$(18,342),(54,306),(126,234),(162,198).$$

Réciproquement, chacun de ces couples vérifie les deux conditions.

Exercice 20.9 ♡

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ ($a \leqslant b$) tels que $a \wedge b = 18$ et $ab = 126$.

Solution : *Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ un couple solution du problème. Alors il existe $\left(a',b'\right) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = 18a'$, $b = 18b'$ et $a' \wedge b' = 1$. Comme $ab = 126$, on sait que $a'b' = 7$. Les seuls couples à vérifier cette propriété sont $(1,6),(2,5),(3,4)$. On multiplie par* 18 *pour retrouver les couples (a,b) : $(18,108),(36,90),(54,72)$. Réciproquement, chacun de ces couples vérifie les deux conditions.*

Exercice 20.10 ♡♡

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $1665x + 1035y = 45$.

Solution : *Comme $1665 \wedge 1035 = 45$ cette équation est équivalente à $37x+23y = 1$. Comme* 37 *et* 23 *sont premiers entre eux cette équation admet des solutions par le théorème de Bezout. Une d'entre elles est par exemple donnée par $x = 5$ et $y = -8$. Les autres s'en déduisent, elles sont de la forme $(5-23k, -8+37k)$. En effet, elles sont de la forme $(5+a, -8+b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On injecte dans $37x+23y = 1$ et il vient que $37a+23b = 0$. Comme* 23 *et* 37 *sont premiers, on en déduit que $23 \mid a$ et $37 \mid b$. Donc il existe $k,k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 23k$ et $b = 37k'$. On injecte dans l'égalité $37a+23b = 0$ et on trouve que $k = -k'$ d'où la forme des solutions. Réciproquement, toute couple de cette forme est solution de l'équation.*

Exercice 20.11 ♡♡

On se donne trois entiers non nuls $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \in \mathbb{Z}^{*3}$, et on considère l'équation diophantienne :

$$(\mathrm{E}) \ : \ \mathrm{A}x + \mathrm{B}y = \mathrm{C} \quad (x,y) \in \mathbb{Z}^2$$

Résoudre cette équation consiste à déterminer l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathrm{A}x+\mathrm{B}y = \mathrm{C}\}$.

1. *Notons $\delta = \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$. Montrez que si δ ne divise pas C, alors $\mathcal{S} = \varnothing$;*
2. *On suppose désormais que δ/C. Il existe trois entiers non nuls $(\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}') \in \mathbb{Z}^{*3}$ tels que $\mathrm{A} = \delta\mathrm{A}'$, $\mathrm{B} = \delta\mathrm{B}'$ avec $\mathrm{A}' \wedge \mathrm{B}' = 1$, et $\mathrm{C} = \delta\mathrm{C}'$. Montrez que l'équation (E) a même ensemble de solutions que l'équation*

$$(\mathrm{E}') \ : \ \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y = \mathrm{C}'$$

3. *Comment trouver une solution particulière de l'équation (E') ?*
4. *En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les solutions ;*
5. *Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation*

$$(\mathrm{E}) \ : \ 24x + 20y = 36$$

Solution :

1. Par contraposée, si $\mathscr{S} \neq \varnothing$ alors il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $Ax + By = C$. Comme $\delta \mid A$ et $\delta \mid B$, $\delta \mid C$.
2. Soit (x, y) une solution de (E). Alors $Ax+By = C$. Comme A, B, C sont divisibles par δ, on peut écrire $A'x+B'y = C'$ et (x, y) est solution de (E'). Réciproquement, si (x, y) est solution de (E') alors $A'x + B'y = C'$ et en multipliant par δ, on obtient $Ax + By = C$ et (x, y) est solution de (E).
3. Comme A' et B' sont premiers entre eux, on peut déterminer un couple (u, v) de coefficients de Bezout tels que $A'u + B'v = 1$. Alors $(C'u, C'v)$ est une solution de (E').
4. On considère une solution particulière (u, v) de (E'). On cherche une autre solution de (E'). On peut l'écrire $(u + a, v + b)$ où $a, b \in \mathbb{Z}$. On doit alors avoir $A'(u + a) + B'(u + v) = C'$ soit $A'a + B'b = 0$. Comme $A' \wedge B' = 1$, on en déduit que grâce au théorème de Gauss que a est un multiple de B' et que b est un multiple de A' : $a = kB'$ et $b = lA'$. On injecte dans $A'a + B'b = 0$ et on trouve que $l = -k$. Donc une solution de (E') est de la forme $(u + kB', v - kA')$ où $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie facilement que tout couple de cette forme est solution de (E'). On en déduit que $\boxed{\mathscr{S} = \{(u + kB', v - kA') \mid k \in \mathbb{Z}\}}$.
5. On applique les questions précédentes. Les solutions de (E) sont celles de (E') : $6x + 5y = 9$. Un couple de coefficients de Bezout pour 6 et 5 est $(1, -1)$. Donc une solution particulière de (E') est $(9, -9)$ Les solutions de (E) sont les couples $\boxed{(9 + 5k, -9 - 6k)}$ où $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 20.12 ♡♡

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On définit l'ensemble

$$H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \ ; \ (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2\}$$

1. Montrer que $H_1 + H_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ qui contient la partie $H_1 \cup H_2$;
2. Déterminer le sous-groupe $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$;
3. Comment interpréter l'inclusion $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} \subset c\mathbb{Z}$ en termes de divisibilité ?

Solution :

1. On vérifie facilement que $H_1 + H_2$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Il contient de plus clairement H_1 et H_2 et donc $H_1 \cup H_2$. Montrons que c'est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ à vérifier cette propriété. Soit H' un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ qui contient $H_1 \cup H_2$. Alors H' doit contenir toutes les sommes $h_1 + h_2$ avec $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$. Donc $H \subset H'$.
2. Déterminons le sous-groupe $H = 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$. Ces élements sont de la forme $4a + 6b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Comme $4 \wedge 6 = 2$, d'après le théorème de Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $4u + 6v = 2$ donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $4uk + 6vk = 2k$ et H contient tous les entiers pairs. Réciproquement, tout élément de H est pair donc $\boxed{4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}}$.
3. En suivant le même raisonnement que précédemment, on pourrait montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} \subset c\mathbb{Z}$ si et seulement si $c \mid a \wedge b$.

Exercice 20.13 ♡♡

Soient deux entiers non nuls $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$. On suppose que $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$. Montrez qu'alors $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}^*$.

Solution : Comme $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $\sqrt[n]{m} = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. Alors, $p^n = mq^n$. Mais puisque p et q sont premiers entre eux, on sait que p^n et q^n sont également premiers entre eux. Puisque p^n / mq^n avec $p^n \wedge q^n = 1$, d'après le théorème de Gauss, il vient que p^n divise m. Donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = kp^n$. Mais alors on a $k = \dfrac{1}{q^n}$ et donc $q^n = 1$. Par conséquent, $m = p^n$ et donc $\sqrt[n]{m} = p$.

Exercice 20.14 ♡♡

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{2^2}$. On note $\delta = a \wedge b$ leur pbcd et $\mu = a \vee b$ leur ppcm. Montrez que

$$(a + b) \wedge \mu = \delta$$

Solution : On sait qu'il existe $(a', b') \in \mathbb{Z}\star^2$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $a' \wedge b' = 1$. On a de plus $\delta\mu = ab$ donc $\mu = \delta a'b'$. Par conséquent,

$$(a + b) \wedge \mu = \big(\delta(a' + b')\big) \wedge (\delta a'b') = \delta \times \big((a' + b') \wedge a'b'$$

Mais puisque a' et b' sont premiers entre eux, on a également $a' \wedge (a' + b') = 1$ et $b' \wedge (a' + b') = 1$ (il suffit d'écrire une relation de Bezout. Donc puisque $a' \wedge b' = 1$, $a'b' \wedge (a' + b') = 1$. Finalement, $(a + b) \wedge \mu = \delta$.

Exercice 20.15 ♡

Trouver les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ *vérifiant*

$$11x - 5y = 10 \text{ et } x \wedge y = 10$$

Solution : *Supposons que* (x, y) *soit un couple d'entier satisfaisant les hypothèses. Comme* $x \wedge y = 10$, *on peut écrire* $x = 10x'$ *et* $y = 10y'$ *avec* $x' \wedge y' = 1$. *Alors le couple d'entiers* (x', y') *vérifie*

$$11x' - 5y' = 1$$

Un couple de Bezout évident est $(x', y') = (1, 2)$. *On trouve alors (voir l'exercice 20.11) qu'il existe un entier* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$x' = 1 + 5k \text{ et } y' = 2 + 11k$$

d'où nécessairement

$$x = 10 + 50k \text{ et } y = 20 + 100k$$

On vérifie réciproquement que tout couple de cette forme convient.

Exercice 20.16 ♡

Considérons deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ *premiers entre eux :* $a \wedge b = 1$ *et un couple de Bezout* $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $au_0 + bv_0 = 1$. *Déterminer l'ensemble de tous les couples de Bezout* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ *vérifiant* $au + bv = 1$.

Solution : *Par soustraction on a* $a(u - u_0) = b(v_0 - v)$. *Donc* b *divise* $a(u - u_0)$. *Puisque* $(a, b$ *sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss,* b *divise nécessairement* $u - u_0$, *donc* $\exists k \in \mathbb{Z}, u - u_0 = kb$ *ou* $u = u_0 + kb$. *En remplaçant* $u - u_0$ *par* kb, *on obtient alors* $akb = b(v_0 - v)$, *d'où* $v = v_0 - ka$.
Réciproquement, les couples $(u_0 + kb, v_0 - ka), k \in \mathbb{Z}$ *sont bien solutions.*

Exercice 20.17 ♡

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ *premiers entre eux. Montrez qu'il existe deux entiers* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que*

$$au + bv = 1 \text{ et } |u| < |b|,\ |v| \leqslant |a|$$

Solution : *Le résultat est faux dans le cas (sans intérêt) où* a *et* b *sont égaux à* ± 1. *Dans les autres cas :*
Quitte à changer a *et/ou* b *en leurs opposés, on peut toujours supposer* a *et* b *positifs. Il suffit pour cela de changer le/les signe/s de* u *ou* v *selon les cas.*
On écrit une relation de Bezout $au_0 + bv_0 = 1$. *Reste à avoir* $-b < u < b$ *et* $-a < v < a$ *en posant* $u = u_0 + kb$ *et* $v = v_0 - ka$ *(voir exercice précédent). On a bien* $au + bv = 1$. *Pour avoir* $|u| < b$, *il suffit de prendre* $-b < v < b$ *soit* $-1 - \dfrac{u_0}{b} < k < 1 - \dfrac{u_0}{b}$. *On choisit* k *entier dans un intervalle ouvert de longueur* 2. *On a deux possibilités, sauf lorsque* $\dfrac{u_0}{b}$ *est entier (pour* $b = \pm 1$*), auquel cas on peut (et on doit) choisir* $k = -\dfrac{u_0}{b}$ *et donc* $u = 0$ *et par suite* $bv = 1$ *entraîne bien* $v = \pm 1$ *et donc* $|v| \leqslant |a|$ *puisque dans ce cas on n'a pas* $|a| = 1$.
Lorsque $\dfrac{u_0}{b}$ *n'est pas entier, on a donc deux possibilités pour* (u_1, v_1) *et* $(u_1 + b, v_1 - b)$ *qui vérifient* $|u| < b$.
Comme $au + bv = 1$, *on a* $0 \leqslant au + bv = 1 < ab$. *Donc* $ab < -au \leqslant bv < ab - au < ab + ab$.
Donc $-a < v < 2a$. *Deux cas se présentent : Si* $-a < u < a$, *alors c'est gagné. Sinon c'est qu'on s'est trompé dans le choix de* a_1 *et on considère cette fois* $v - a$ *qui vérifie* $0 \leqslant v - a < a$ *et c'est encore gagné.*

Exercice 20.18 ♡♡

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^\star$. *Montrer qu'il existe* $(a_n,\ b_n) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que* $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2} b_n$. *Montrer ensuite que les entiers* a_n *et* b_n *sont premiers entre eux.*

Solution : *Par le binôme :*

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} 2^p + \sqrt{2} \sum_{p=0}^{\mathrm{E}((n-1)/2)} \binom{n}{2p+1} 2^p$$

Il suffit de poser

$$a_n = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} 2^p \quad b_n = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}((n-1)/2)} \binom{2}{2p+1} 2^p$$

De la même façon, on montre l'existence de $(c_n, d_n) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que* $(\sqrt{2} - 1)^n = c_n + \sqrt{d_n}$. *En effectuant le produit,*

$$1 = (\sqrt{2} - 1)^n (\sqrt{2} + 1)^n = a_n c_n + 2 b_n d_n + \sqrt{2}(b_n c_n + d_n a_n)$$

Mais puisque dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, le système $(1,\sqrt{2})$ est libre, il vient que $b_nc_n + a_nd_n = 0$ et donc on obtient une relation de Bezout entre les entiers a_n et b_n :

$$c_na_n + 2d_nb_n = 1$$

ce qui montre que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 20.19 ♡♡

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E *des triplets* $(x,y,z) \in \mathbb{N}^{\star 3}$ *vérifiant l'équation de Pythagore :*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

1. *Montrer que pour tout couple* $(a,b) \in \mathbb{N}^{\star 2}$*, le triplet* $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ *appartient à l'ensemble* E. *Donner* 3 *éléments distincts de l'ensemble* E.
2. *On considère un triplet* $(x,y,z) \in \mathrm{E}$ *vérifiant* $x \wedge y = 1$.
   a. *Montrer qu'alors* $x \wedge z = 1$ *et* $y \wedge z = 1$.
   b. *Montrer que les entiers* x *et* y *ne sont pas de même parité.*
   c. *On suppose par exemple que* x *est impair et que* y *est pair. Montrer qu'il existe deux entiers non nuls* $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ *premiers entre eux tels que*

   $$x = p - q,\ \ y = p + q,\ \ y^2 = 4pq$$

   Montrer que p *et* q *sont des carrés parfaits.*
3. *En déduire l'ensemble* E.

Solution :

a. *Par un calcul simple.*

b. *Si* x *et* y *étaient pairs,* $2/x \wedge y$*, impossible. Si on suppose* x *impair, et* y *impair, alors* $x^2 + y^2 \equiv 2 \mod (4)$*, ce qui est impossible car* $z^2 \equiv 0 \mod (4)$ *(regarder la décomposition de* z *en facteurs premiers, et la puissance de* 2*).*

c. *Posons* $p = (z+x)/2$ *et* $q = (z-x)/2$. *Ce sont des entiers car* z *et* x *sont impairs. Ils sont positifs car* $z > x$. *Comme* $x \wedge z = 1$*, d'après Bezout, il existe* $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que* $ux + vz = 1$*, mais alors* $(u+v)p + (v-u)q = 1$ *ce qui montre que* $p \wedge q = 1$. *Alors* $4pq = z^2 - x^2 = y^2$.

d. *Comme* $p \wedge q = 1$*, ils n'ont pas de facteurs premiers en commun dans leur décomposition. Comme* $pq = y^2$ *est un carré, tous les exposants dans la décomposition de* p *et* q *sont pairs, ce qui montre que* p *et* q *sont des carrés.*

3. *Soit* $(x,y,z) \in \mathrm{E}$. *si* $x \wedge y \neq 1$*, en posant* $\delta = x \wedge y$*, on a* $\delta^2(x'^2 + y'^2) = z^2$ *et donc* δ^2/z^2*, par conséquent, il existe* $z' \in \mathbb{N}$ *tel que* $z^2 = \delta^2 z'^2$ *(comme* z^2 *est un carré,* z^2/δ^2 *en est encore un comme on le voit en examinant la décomposition en facteurs premiers). Alors* $x'^2 + y'^2 = z'^2$ *avec* $x' \wedge y' = 1$. *D'après la question précédente, il existe* $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ *tels que* $(x,y,z) = \delta^2(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$. *On a donc montré (avec la première question) que*

$$\mathrm{E} = \{\delta^2(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)\ ;\ (a,b) \in \mathbb{N}^{*2},\ \delta \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 20.20 ♡♡

On appelle nombres de Fermat, les entiers de la forme

$$\mathrm{F}_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

a. *Montrer que pour tout entier* $x \in \mathbb{N}$*, l'entier* $x^{2^p} - 1$ *est divisible par* $x + 1$.
b. *Montrer que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.*

Solution : *Soient deux entiers* $n < m$. *Posons* $p = m - n$ *et écrivons*

$$\mathrm{F}_m - 2 = 2^{2^m} - 1 = 2^{2^{n+p}} - 1 = 2^{2^n 2^p} - 1 = \left(2^{2^n}\right)^{2^p} - 1$$

Mais pour tout entier x*, l'entier* $x^{2^p} - 1$ *est divisible par* $x + 1$. *Il existe donc un entier* $q \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\mathrm{F}_m - 2 = (2^{2^q} + 1)q$$

c'est à dire

$$\mathrm{F}_m - \mathrm{F}_n q = 2$$

Il en résulte que $\mathrm{F}_m \wedge \mathrm{F}_n$ *est un diviseur de* 2. *Mais puisque les nombres de Fermat sont impairs, le seul diviseur possible est* 1.

Exercice 20.21 ♡♡

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

a. *Montrer que* $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.

b. *Montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.*

c. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$$
et en déduire que
$$u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$$

d. *Montrer que* $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$,
$$u_n \wedge u_m = u_{n\wedge m}$$

e. *Montrer que pour tout entier* $n \geqslant 5$*, si* u_n *est un nombre premier, alors* n *est un nombre premier. La réciproque est-elle vraie ?*

Solution :

a. *Par récurrence, en écrivant*
$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_{n+1}+u_n)u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}(u_n - u_{n+1}) + u_n^2 = (-1)^{n+1}$$

b. *L'identité précédente fournit une identité de Bezout entre* u_n *et* u_{n+1}.

c. *Par récurrence sur* p*, en écrivant* $u_{n+p+1} = u_{n+1+p}$ *et en remarquant que*
$$\begin{aligned} u_{n+p+1} &= u_{n+1}u_{p-1} + u_{n+2}u_p \\ &= u_{n+1}u_{p-1} + (u_{n+1}+u_n)u_p \\ &= u_{n+1}(u_{p-1}+u_p) + u_n u_p \\ &= u_{n+1}u_{p+1} + u_n u_p \end{aligned}$$

d. *De la relation précédente, tout entier qui divise* u_n *et* u_p *divise* u_{n+p} *et tout entier qui divise* u_n *et* u_{n+p} *divise le produit* $u_{n+1}u_p$*, mais comme il est premier avec* u_{n+1}*, il divise* u_p*. Donc*
$$u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$$

e. *Appliquer le résultat précédent en faisant tourner l'algorithme d'Euclide.*

f. *Soit* n *un entier supérieur à* 5*, tel que* u_n *soit premier. Si* n *n'était pas premier, on aurait un diviseur propre* $d \geqslant 3$*. Mais alors* u_n *serait divisible par* u_d *avec* $2 \leqslant u_d < u_n$*, ce qui est impossible. La réciproque est fausse avec* $n = 19$*, et* $F_{19} = 5181 = 37 \times 113$.

20.4.3 Nombres premiers

Exercice 20.22 ♡

Soit p *un nombre premier.*

1. *Montrer que* $\forall k \in [\![1, p-1]\!],\quad p \mid \binom{p}{k}$.
2. *En déduire le petit théorème de Fermat :*
$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad p \mid n^p - n.$$

Solution :

1. *Soit* $k \in [\![1, p-1]\!]$*. On sait que* $A_p^k = k!\binom{p}{k}$*. Mais* $p \mid A_p^k = p(p-1)\dots(p-n+1)$ *donc comme* p *est premier* $p \mid k!$ *ou* $p \mid \binom{p}{k}$*. Si* $p \mid k!$ *alors* p *divise un des entiers* $1, 2, \dots, k < p$ *ce qui n'est pas possible et prouve la propriété.*

2. On effectue un raisonnement par récurrence. Si $n=0$ alors la propriété est vérifiée. Soit $n\in\mathbb{N}$. On la suppose vraie au rang n : $p \mid n^p-n$ et on montre que $p \mid (n+1)^p-(n+1)$. On utilise la formule du binôme :

$$(n+1)^p-(n+1)=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}n^k-(n+1)=n^p-n+\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}n^k$$

Comme $p \mid n^p-n$ et que $p \mid \binom{p}{k}$ pour $k\in[\![1,p-1]\!]$, on sait que $p\mid (n+1)^p-(n+1)$ et le petit théorème de Fermat est prouvée par récurrence pour $n\geqslant 0$. Si $n<0$ et si $p=2$ alors $n^2-n=n(n-1)$ est clairement divisible par 2. Si $p>2$, comme p est premier il est impair et en notant $m=-n$, on a $n^p-n=-m^p+m=-(m^p-m)$ qui est divisible par p.

Exercice 20.23 ♡

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$2^n-1 \text{ premier } \implies n \text{ premier}$$

Solution : Soit p et q deux entiers naturels. On a $2^{pq}-1=(2^p)^q-1^q=(2^p-1)\left(2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\ldots+2^p+1\right)$. Si on prend p et q plus grands que 1, alors $2^p-1\geqslant 3$ et la somme $2^{p(q-1)}+2^{p(q-2)}+\ldots+2^p+1$ comporte q termes tous plus grands que 1. Donc $2^{pq}-1$ est composé. En résumé, si pq est composé, alors $2^{pq}-1$ est composé. Par contraposée, si 2^n-1 est premier, alors n est premier.

Exercice 20.24 ♡

Montrer que le nombre n^4-n^2+16 avec $n\in\mathbb{Z}$ est composé.

Solution : On factorise : $n^4-n^2+16=\left(n^2+4\right)^2-9n^2=\left(n^2-3n+4\right)\left(n^2+3n+4\right)$. Les deux trinômes x^2-3x+4 et x^2+3x+4 ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ et donc pas sur $\mathbb{Z}$. On vérifie qu'il en est de même des trinômes $x^2-3x+4\pm 1$ et $x^2+3x+4\pm 1$. Le nombre n^4-n^2+16 est donc bien composé.

Exercice 20.25 ♡♡

1. Prouver que pour tout $x\in\mathbb{C}$ et $p\in\mathbb{N}$,

$$x^p+1=(x+1)\left(1-x+x^2+\ldots+x^{p-1}\right)$$

2. Soit $a\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ tels que a^n+1 est premier.
   (a) Montrer qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2^k$.
   (b) Que penser de l'affirmation : $\forall n\in\mathbb{N},\quad 2^{2^n}+1$ est premier ?

Solution :

1. On développe la seconde partie de l'égalité et on simplifie par télescopage.
2. (a) On va effectuer un raisonnement par contraposée. On suppose que n n'est de la forme $n=2^k$ pour aucun $k\in\mathbb{N}$. Alors n est de la forme pq avec $p>2$ premier et $q\in\mathbb{N}$. On écrit alors

$$a^n+1=a^{pq}+1=\left(a^q\right)^p+1=\left(a^q+1\right)\left(1-a^q+\left(a^q\right)^2-\ldots+\left(a^q\right)^{p-1}\right)$$

   et on remarque que les deux facteurs de ce produit sont strictement plus grand que 1. Donc a^n+1 n'est pas premier.

   (b) Avec un logiciel de calcul formel, on montre que $2^{2^5}+1=641\times 6700417$.

Exercice 20.26 ♡♡

À la suite d'un hold-up, on interroge quatre témoins qui ont vu les malfaiteurs s'enfuir en voiture : Antonin dit que le numéro d'immatriculation comporte quatre chiffres. Bébert, que les deux premiers chiffres sont identiques. Corentin que les deux derniers chiffres sont identiques. Dudule le matheux a remarqué que le nombre en question est un carré parfait. Quel est ce numéro d'immatriculation ?

Solution : *Le numéro d'immatriculation s'écrit* $\mathrm{N} = \overline{aabb} = 11 \times 100a + 11b = 11(100a + b)$. *Donc* $11 \mid \mathrm{N}$. *Comme* N *est un carré parfait, l'exposant de* 11 *dans la décomposition de* N *en facteurs premiers est pair. Donc* $11^2 = 121$ *divise* N *: soit* $\mathrm{N} = 121k$. *Comme* N *est un carré parfait,* k *l'est aussi (regarder sa décomposition en facteurs premiers). Donc* $\mathrm{N} = 121\mathrm{M}^2$ *avec* $\mathrm{M} \in \mathbb{N}$. *Les essais pour* M *variant de* 1 *à* 9 *montrent que seul* $\mathrm{M} = 8$ *convient, et alors* $\mathrm{N} = 7744 = 88^2$.
Remarque : On pourrait aller plus vite en remarquant qu'un nombre dont les deux derniers chiffres sont impairs n'est jamais un carré parfait. Mais c'est un autre exercice...

Exercice 20.27 ♡♡♡

Au cours d'un congrès de mathématiques, des mathématiciens (en nombre n*) sont logés dans les* n *chambres d'un hôtel. Ils décident (dans des circonstances qui restent a déterminer), de s'attribuer le numéro de leur chambre. Avant que la horde ne se mette á envahir l'hôtel toutes leurs chambres sont fermées. Le mathématicien numéro* k *doit changer l'état (ouvert/fermé) des chambres qui portent un numéro multiple du sien.*

1. *Quel est le nombre de portes qui seront ouvertes après le passage des mathématiciens ?*
2. *Démontrer que* $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ *est un entier pair.* $\lfloor x \rfloor$ *désigne la partie entière de* x.

Solution : ♡ . *Plaçons nous du point de vue d'une porte. Elle sera ouverte après le passage des mathématiciens si son état (ouvert/fermé) a été modifié par un nombre impair de mathématiciens (et fermée sinon). Autrement dit elle sera ouverte in fine si son numéro* m *admet un nombre impair de diviseurs (positifs). On décompose* m *en facteurs premiers :* $m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(m)}$. *Les diviseurs* d *de* m *s'écrivent donc* $d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(d)}$ *avec* $\forall p \in \mathbb{P},\ \nu_p(d) \leqslant \nu_p(m)$. *Pour chaque choix de nombre premier* p *divisant* m *on a* $\nu_p(m) + 1$ *puissances de* p *qui divisent* m*, à savoir* $1, p, p^2, \dots, p^{\nu_p(m)}$ *il y a donc un total de* $\prod_{p \in \mathbb{P}} (\nu_p(m) + 1)$ *diviseurs de* m. *Maintenant un produit de facteurs est impair si et seulement si chacun des facteurs est impairs, donc dans notre cas on doit avoir tous les* $\nu_p(m) + 1$ *impairs c'est-à-dire tous les* $\nu_p(m)$ *pairs ce qui signifie que* m *est un carré parfait.*
Une autre façon de voir : Si d *est un diviseur de* m *alors* $\frac{m}{d}$ *est aussi un diviseur de* m. *On peut ainsi regrouper les diviseurs de* m *deux par deux, sauf si, par extraordinaire,* m *et* $\frac{m}{d}$ *sont égaux, c'est à dire lorsque* $m = d^2$ *donc lorsque* m *est un carré parfait.*
Notre problème devient donc : Combien y a-t-il de carrés parfaits entre 1 *et* n *? Il y en a* $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

2. Plaçons nous du point de vue du mathématicien numéro k. *Il change l'état (ouvert/fermé) des portes* $k, 2k, \dots$. *De combien de portes change-t-il l'état ? En* n *combien de fois* k *? Il va* $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. *Il y a donc eu au total* $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ *changement d'état. Si on enlève les* $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ *portes exceptionnelles, toutes les portes ont changé un nombre pair de fois. C'est bien dire que* $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ *est un entier pair.*

20.4.4 Divers

Exercice 20.28 ♡♡

On considère un polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. *Montrer que s'il admet une racine rationnelle, alors au moins un des coefficients est pair.*

Solution : *Soit* $\frac{p}{q}$ *une racine rationnelle où on a pris* p *et* q *premiers entre eux En particulier* p *et* q *ne peuvent pas être tous les deux pairs. On a alors* $ap^2 + bqr + cq^2 = 0$ *en chassant les dénominateurs.*

- *Si* p *est pair, alors* $ap^2 + bqr$ *est pair,* q *et* q^2 *sont impairs. Comme* cq^2 *est pair, nécéssairement,* c *est pair.*
- *Si* q *est pair, alors, de façon symétrique,* a *est pair.*
- *Si* p *et* q *sont impairs, alors si on suppose de plus que les trois coefficients* a, b *et* c *sont impairs, alors* $ap^2 + bqr + cq^2$ *serait la somme de trois nombres impairs et donc serait impair. Contradiction (zéro serait impair).*

Chapitre 21

Polynômes

. . . polynomials are notoriously untrustworthy when extrapolated.
WG Cochran, GM Cox Experimental designs.

Dans tout ce chapitre :
- $\mathbb{K}$ désigne un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathscr{S}(\mathbb{K})$ représente l'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $m, n, p, q, r \in \mathbb{N}$ sont des entiers.

Pour bien aborder ce chapitre

Les polynômes remontent à la plus haute antiquité. Le premier usage du mot semble remonter à François Viète (1540-1603). Cependant les babyloniens savaient résoudre les équations du second degré. Plus généralement, la résolution des équations polynomiales a été un moteur de l'étude des polynômes. Nous avons déjà évoqué Tartaglia et Cardano éprouvant le besoin d'introduire les nombres complexes pour résoudre les équations du troisième et quatrième degré, ainsi que Galois aux prises avec les équations du cinquième degré. Par ailleurs, le mot polynôme lui-même semble d'une origine discutable.

Pour autant, qu'est-ce qu'un polynôme ? Prenons un exemple. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 1 \end{array}.$$

On peut résumer toute l'information contenue dans $f(x)$ à l'aide de la liste de ses coefficients :
1 ; 1 ; -2 ; 0 et 3. Un autre polynôme $g(x) = x^2 - x - 2$ se verra attribuer -2 ; -1 et 2 comme liste des coefficients. On voit par là que la liste est à longueur variable ce qui n'est pas confortable.
Pour que tous les polynômes soient logés à la même enseigne, on considère une suite (donc infinie) de coefficients pour chaque polynôme en rajoutant des zéros. Autrement dit, un polynôme est assimilé à une suite de coefficients tous nuls sauf (peut-être) un nombre fini d'entre eux.

C'est cette définition purement algébrique qui va être suivie dans ce chapitre. Faudra-t-il pour autant oublier nos bonnes vieilles fonctions polynomiales ? Certes non ! D'abord elles sont à la base de cette nouvelle définition et elles permettent d'établir, via le TVI, que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine.

Ce chapitre a beaucoup de points communs avec le précédent. Cependant il faudra une fois de plus attendre les espaces vectoriels pour bien comprendre les tenants et les aboutissants de celui-ci.

21.1 Polynômes à une indéterminée

21.1.1 Définitions

DÉFINITION 21.1 ♡ **Polynômes**

On appelle **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ une suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang :

$$(a_n) = (a_0, a_1, \dots, a_k, 0, \dots)$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 21.2 ♡ **Opérations sur** $\mathbb{K}[X]$

On définit les opérations suivantes sur les polynômes : Soient les polynômes $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) \in \mathbb{K}[X]$, $Q = (b_0, b_1, \dots, b_n, 0, \dots) \in \mathbb{K}[X]$ et le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, 0, \dots)$$

$$\lambda \cdot P = (\lambda \cdot a_0, \lambda \cdot a_1, \dots, \lambda \cdot a_n, 0, \dots)$$

$$P \times Q = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots) \text{ où : } \forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k}$$

Remarque 21.1

– A partir d'un certain rang (exercice !), la suite (c_k) est nulle. La multiplication est donc bien définie dans $\mathbb{K}[X]$.
– L'addition et la multiplication par un scalaire précedemment définies coincident avec l'addition et la multiplication définie sur l'espace des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Ce n'est par contre pas le cas de la multiplication entre polynômes, qui ne coincide pas avec celle définie entre les suites.
– Pour une suite de nombres (a_k) qui sont tous nuls sauf un nombre fini, le nombre

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

est la somme de tous les nombres non nuls de cette suite.

PROPOSITION 21.1
Structure de $\mathbb{K}[X]$
– $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Le vecteur nul est le polynôme $(0, \dots)$
– $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. L'élément neutre de la loi $\times$ est le polynôme $(1, 0, \dots)$.

Remarque 21.2

– Attention, en raison de la remarque précédente, $(\mathbb{K}, +, \times)$ n'est pas un sous-anneau de $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$.
– Comme $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif, la formule du binôme est vraie dans $\mathbb{K}[X]$.

Notations définitives :

On note :

- 1 le polynôme $(1, 0, \dots)$.
- X le polynôme $(0, 1, 0, \dots)$.

En multipliant le polynôme X par lui-même, on obtient pour X^n, le polynôme :

$$(0, \dots, 0, \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{place d'indice } n}}{, 1,} 0, \dots)$$

Avec ces notations, si $P \in \mathbb{K}[X]$ est donné par $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$, on a :

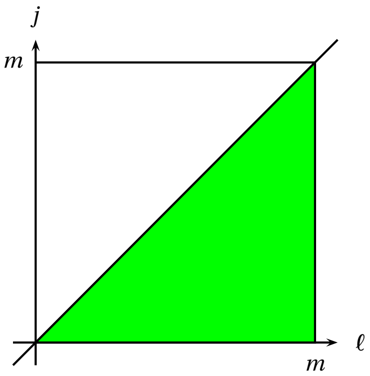
$$\begin{aligned} P &= a_0 (1, 0, \dots) + a_1 (0, 1, \dots) + \dots + a_n (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ &= a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + \dots + a_n \cdot X^n \\ &= a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \end{aligned}$$

Démonstration *Du fait que la multiplication des polynômes est abstraite, il est nécessaire d'effectuer un certain nombre de vérifications qui n'auraient pas lieu d'être avec des fonctions polynomiales. La plupart de ces vérifications sont immédiates.*
La multiplication est commutative : Soit $P = a_0 + \dots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$ *et* $Q = b_0 + \dots + b_p X^q \in \mathbb{K}[X]$, *on a :* $PQ = c_0 + \dots + c_{p+q} X^{p+q}$ *avec, pour* $k = 0, \dots, p+q$, $c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{n-\ell} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$. *En effectuant la somme de droite à gauche, c'est-à-dire en effectuant le changement d'indice* $p = k - \ell$, $c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k$ *ce qui est le coefficient d'indice* k *du polynôme* QP. *Donc* PQ = QP.

Associativité : Soit $P=\sum_i a_i X^i$, $Q=\sum_j b_j X^j$, $R=\sum_k b_k X^k$. *On a* $PQ=\sum_\ell d_\ell X^\ell$ *avec* $c_\ell=\sum_{i=0}^{\ell} a_i b_{\ell-i}$. *On a alors* $(PQ)R=\sum_m f_m X^m$

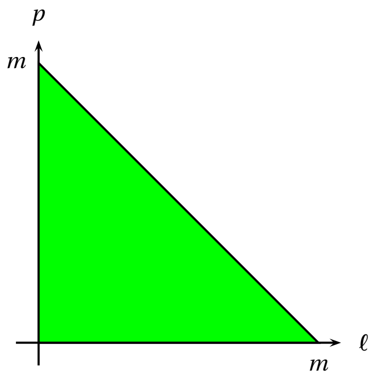
avec

$$\begin{aligned} f_m &= \sum_{\ell=0}^{m} d_\ell c_{m-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{\ell} a_{\ell-j} b_j\right) c_{m-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{m}\sum_{j=0}^{\ell} a_{\ell-j} b_j c_{m-\ell} \\ &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{\ell=j}^{m} a_{\ell-j} b_j c_{m-\ell} \end{aligned}$$



On effectue un changement d'indice $p=\ell-j$ *c'est-à-dire* $\ell=p+j$.

$$\begin{aligned} f_m &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{p=0}^{m-j} a_p b_j c_{m-p-j} \\ &= \sum_{p=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-p} a_p b_j c_{m-p-j} \\ &= \sum_{p=0}^{m} a_p \sum_{j=0}^{m-p} b_j c_{m-p-j} \\ &= \sum_{p=0}^{m} a_p g_{m-p} \end{aligned}$$



où $g_n=\sum_{q=0}^{n} b_q c_{n-q}$ *désigne le* n*-ième coefficient de* QR. *Autrement dit* f_m *est aussi le* m*-ième coefficient de* P(QR).

Le principal intérêt de l'algèbre linéaire (qui ne va plus tarder maintenant) est d'éviter ce genre de démonstration particulièrement indigeste. Voici comment nous pourrons rédiger une démonstration très bientôt.

Soit Q *et* R *deux polynômes. On cherche à démontrer que* $\Phi_{Q,R}:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X]\\ P & \longmapsto & (PQ)R-P(QR)\end{array}$ *est l'application nulle. Or* $\Phi_{Q,R}$ *est une application linéaire. Pour démontrer que son image est réduite au vecteur nul, il suffit de démontrer que toutes les images d'une famille génératrice sont nulles. Par exemple que* $\forall n\in\mathbb{N}, \Phi_{Q,R}(X^n)=(X^nQ)R-X^n(QR)=O$.

Pour cela, soit $n\in\mathbb{N}$ *et* $R\in\mathbb{K}[X]$ *On cherche donc à démontrer que* $\Psi_{n,R}:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X]\\ Q & \longmapsto & (X^nQ)R-X^n(QR)\end{array}$ *est l'application nulle. Or* $\Psi_{n,R}$ *est une application linéaire. Pour démontrer que son image est réduite au vecteur nul, il suffit de démontrer que toutes les images d'une famille génératrice sont nulles. Par exemple que* $\forall m\in\mathbb{N}, \Psi_{n,R}(X^m)=(X^nX^m)R-X^n(X^mR)=O$.

Pour cela, soit $n\in\mathbb{N}$ *et* $m\in\mathbb{N}$ *On cherche donc à démontrer que* $\Theta_{n,m}:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X]\\ Q & \longmapsto & (X^nX^m)R-X^n(X^mR)\end{array}$ *est l'application nulle. Or* $\Theta_{n,m}$ *est une application linéaire. Pour démontrer que son image est réduite au vecteur nul, il suffit de démontrer que toutes les images d'une famille génératrice sont nulles. Par exemple que* $\forall p\in\mathbb{N}, \Psi_{n,R}(X^p)=(X^nX^m)X^p-X^n(X^mX^p)=O$. *Or cette dernière égalité est vérifiée immédiatement. Ce qui établit le résultat.*

21.1.2 Degré d'un polynôme

DÉFINITION 21.3 ♡ **Degré d'un polynôme, terme dominant**

Soit un polynôme $P=a_0+\ldots+a_pX^p\in\mathbb{K}[X]$ avec $a_p\neq 0$.

- On appelle **degré de** P et on note $\deg(P)$ l'entier p.
- Par convention, le **degré du polynôme nul** est $-\infty$.
- On appelle **terme dominant** de P le monôme a_pX^p.

DÉFINITION 21.4 ♡ **Polynôme normalisé**

On appelle polynôme **normalisé** un polynôme dont le terme dominant est égal à 1.

THÉORÈME 21.2 ♡ **Degré d'un produit, degré d'une somme**

Soient P, Q ∈ $\mathbb{K}[X]$, on a :

1. $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
2. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Démonstration

1.
- *Si* $P = Q = 0$ *alors* $\deg P = \deg Q = -\infty$ *et* $\deg(P+Q) = -\infty$ *et la formule est prouvée dans ce cas.*
- *Si* P *ou* Q *est non nul alors, supposant, quitte à interchanger* P *et* Q*, que* $P \neq 0$*, on a :* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ *où* $n = \max\big(\deg P, \deg Q\big)$ *et où les* a_k *pour* $k \in [\![1, n]\!]$ *ne sont pas tous nuls (en l'occurence, les* b_k *peuvent être tous nuls). On a donc :* $P + Q = \sum_{k=0}^{n} \big(a_k + b_k\big) X^k$*. Si* $a_n + b_n \neq 0$ *alors* $\deg(P+Q) = \max\big(\deg P, \deg Q\big)$ *et sinon* $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$

2.
- *Si* $P = 0$ *ou* $Q = 0$ *alors* $PQ = 0$ *et* $\deg(PQ) = -\infty = \deg P + \deg Q$ *d'après les lois d'addition dans* $\overline{\mathbb{R}}$.
- *Sinon, on suppose que :* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ *où* $a_n \neq 0$ *et où* $b_m \neq 0$*. Par conséquent,* $n = \deg P$ *et* $m = \deg Q$*. Quitte à échanger le rôle de* P *et de* Q*, on peut supposer que* $n \geqslant m$*. Soit* $l \in \mathbb{N}$*. Notons* c_l *le coefficient d'indice* l *dans* PQ*. D'après la définition du produit de deux polynômes 21.2 et utilisant la remarque suivant cette définition, on a :*

$$c_l = \begin{cases} \sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} & \text{si } l < m+n \\ 0 & \text{si } l \geqslant m+n \end{cases}$$

Nécessairement, $\deg(PQ) \leqslant m+n$*. Mais le coefficient d'indice* $m+n$ *dans* PQ *est* $a_n b_m \neq 0$ *donc* $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque 21.3 Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.

PROPOSITION 21.3
Intégrité de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$
Soient P, Q ∈ $\mathbb{K}[X]$.

$$P \times Q = 0 \implies P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

Démonstration *Si* $P \times Q = 0$ *alors* $\deg(P \times Q) = -\infty = \deg P + \deg Q$ *ce qui n'est possible que si* $\deg P = -\infty$ *ou* $\deg Q = -\infty$ *et donc que si* $P = 0$ *ou* $Q = 0$.

PROPOSITION 21.4
Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$
Les seuls éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0, c'est à dire les polynômes constants non nuls.
Autrement dit, si P, Q ∈ $\mathbb{K}[X]$ et si $P \times Q = 1$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \alpha$ et $Q = \alpha^{-1}$.

Démonstration *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *un polynôme inversible. Il existe alors un polynôme* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que :* $P \times Q = 1$*. On a donc :* $\deg P + \deg Q = 0$*. Cette égalité n'est possible que si* $\deg P = \deg Q = 0$ *et donc que si* P *est un polynôme constant non nul. Réciproquement, si* P *est un polynôme constant non nul alors il est clair que* P *est inversible.*

21.1.3 Valuation d'un polynôme

DÉFINITION 21.5 ♡ **Valuation d'un polynôme**

Soit un polynôme $P = a_0 + \ldots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$ non nul. On appelle **valuation de** P le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$. On le note $\mathrm{v}al(P)$.
Par définition, la valuation du polynôme nul est $\mathrm{v}al(0) = +\infty$

THÉORÈME 21.5 ♡ **Valuation d'un produit, valuation d'une somme**

Soient P, Q ∈ $\mathbb{K}[X]$, on a :

1. $\mathrm{v}al(P+Q) \geqslant \min(\mathrm{v}al(P), \mathrm{v}al(Q))$
2. $\mathrm{v}al(P \times Q) = \mathrm{v}al(P) + \mathrm{v}al(Q)$

21.1.4 Composition de polynômes

DÉFINITION 21.6 ♡ **Composition de deux polynômes**

Soient deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$. On définit le **polynôme composé** de Q par P, noté $P \circ Q$, par :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

PROPOSITION 21.6
Soient deux polynômes non nuls $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)}.$$

Démonstration *Supposons que* $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$*. Comme* $P \neq 0$*, on a* $a_n \neq 0$*. Alors* $P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$ *et* $\deg(P \circ Q) = \deg Q^n = n \deg Q = \deg P \times \deg Q$ *car* $Q \neq 0$*.*

21.1.5 Division euclidienne

DÉFINITION 21.7 ♡ **Divisibilité**

Soient deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A **divise** B si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = QA$. On le note $A|B$.

Exemple 21.1
- $(X-1)$ divise $X^2 - 2X + 1$. En effet : $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$
- $(X-1)$ divise $X^2 - -1$. En effet : $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.
- $(1-X)$ divise $1 - X^{n+1}$. En effet : $1 - X^{n+1} = \left(1 + X + X^2 + \ldots + X^n\right)(1-X)$.

PROPOSITION 21.7
Polynômes associés Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non nuls. On a équivalence entre :

1. $A|B$ et $B|A$.
2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \quad B = \lambda A$

Deux tels polynômes sont dits **associés**.

Démonstration
$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $A|B$ *et* $B|A$*. Alors il existe des polynômes* $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ *tels que :* $A = Q_1B$ *et* $B = Q_2A$*. On a alors :* $A = (Q_1Q_2)A$ *ou encore :* $A(1 - Q_1Q_2) = 0$*. Par intégrité de* $\mathbb{K}[X]$ *21.3, comme* $A \neq 0$*, ceci n'est possible que si* $1 - Q_1Q_2 = 0$ *c'est à dire si :* $Q_1Q_2 = 1$*. Par conséquent,* Q_1 *et* Q_2 *sont des polynômes inversibles inverses l'un de l'autre. Appliquant la proposition 21.4, il existe* $\alpha \in \mathbb{K}^*$ *tel que* $Q_1 = \alpha$ *et* $Q_2 = \alpha^{-1}$*. On a alors* $B = \alpha A$*.* A *et* B *snt donc bien associés.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *La réciproque est triviale.*

THÉORÈME 21.8 ♡ **Division euclidienne**

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes. On suppose que $B \neq 0$. Alors il **existe** un **unique** couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$\boxed{\begin{cases} (1)\ A = BQ + R \\ (2)\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}}$$

Démonstration
Unicité *Soient* $(Q_1, R_1) \in (\mathbb{K}[X])^2$ *et* $(Q_2, R_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$ *tels que :*

$$\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(B) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A = BQ_2 + R_2 \\ \deg(R_2) < \deg(B) \end{cases}$$

alors : $B(Q_1 - Q_2) = R_1 - R_2$ *et donc, si* $Q_1 - Q_2 \neq 0$ *:* $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(R_1 - R_2) < \deg B$ *et par ailleurs :* $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg B + \deg(Q_1 - Q_2) \geqslant \deg B$ *ce qui constitue une contradiction. Si* $Q_1 = Q_2$ *alors* $R_1 - R_2 = 0$ *et* $R_1 = R_2$*.*

Existence *La démonstrations se fait par récurrence sur* $n = \deg A$. *Fixons pour toute la suite* $B = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m$ *avec* $b_m \neq 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *notons* P_n *la propriété :*

$$P_n : \text{ pour tout } A \in \mathbb{K}[X] \text{ de degré } n, \text{ il existe } (Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2 \text{ tels que } \begin{cases} ① & A = BQ + R \\ ② & \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

- **1ère étape** $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ *sont vraies. Si* A *est un polynôme de degré* $n \in [\![1, m-1]\!]$, *il suffit de prendre* $Q = 0$ *et* $R = A$. *On a bien :* $A = BQ + R$ *et* $\deg R = \deg A = n < m$.
- **2ème étape** *Soit* $n \geqslant m$.
- **3ème étape** *Supposons que la propriété* P_n *est vraie. C'est notre hypothèse de récurrence et montrons que* P_{n+1} *est vraie. Soit* $A = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n+1} X^{n+1}$ *un polynôme de degré* $n+1$. *Posons* $A_1 = A - \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n-m} B$. A_1 *est un polynôme de degré* n. *On lui applique alors l'hypothèse de récurrence : il existe* $(Q_1, R_1) \in (\mathbb{K}[X])^2$ *tels que* $\begin{cases} ① & A_1 = BQ_1 + R_1 \\ ② & \deg(R_1) < \deg(B) \end{cases}$. *Posons* $Q = Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n-m}$ *et* $R = R_1$. *On a :*

$$QB + R = \left(Q_1 + \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n-m}\right) B + R_1 = BQ_1 + R + \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n-m} B = A_1 + \frac{a_{n+1}}{b_m} X^{n-m} B = A$$

- **4ème étape** *Le théorème est alors prouvé par application du théorème de récurrence.*

Exemple 21.2

$$\begin{array}{rrrrr|l} X^3 & + & & X & + 1 & X+1 \\ \cline{6-6} -(X^3 & + & X^2) & & & X^2 - X + 2 \\ \cline{1-3} & & -X^2 & + X & & \\ & -(-X^2 & - & X) & & \\ \cline{2-4} & & & 2X & + 1 & \\ & & & -(2X & + 2) & \\ \cline{4-5} & & & & -1 & \end{array}$$

On a donc : $X^3 + X + 1 = (X+1)\left(X^2 - X + 2\right) - 1$ et $\deg(-1) = 0 < \deg(X+1) = 1$.

21.1.6 Division selon les puissances croissantes

La division des polynômes suivant les puissances croissantes est hors programme.

THÉORÈME 21.9 **Division selon les puissances croissantes**
Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On suppose que le terme constant de B n'est pas nul et on note p un entier supérieur ou égal au degré de B. Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $A = BQ + X^{p+1} R$ et $\deg Q \leqslant p$.

Exemple 21.3 $A = 1 + 3X + 2X^2 - 7X^3$, $B = 1 + X - 2X^2$ $p = 3$. La présentation est celle de la division des nombres décimaux lorsqu'on veut un quotient à 10^{-p}. Le rôle de X étant joué par 10^{-1}.

$$\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & +3X & +2X^2 & -7X^3 & & & 1 & +X & -2X^2 & \\ \cline{7-10} & +2X & +4X^2 & -7X^3 & & & 1 & +2X & +2X^2 & -5X^3 \\ & & +2X^2 & -3X^3 & & & & & & \\ & & & -5X^3 & +4X^4 & & & & & \\ & & & & +9X^4 & -10X^5 & & & & \end{array}$$

Ce qui s'écrit :

$$\underbrace{1 + 3X + 2X^2 - 7X^3}_{A} = \underbrace{(1 + X - 2X^2)}_{B} \underbrace{(1 + 2X + 2X^2 - 5X^3)}_{Q} + X^4 \underbrace{(9 - 10X)}_{R}.$$

Interprétation en termes de développements limités en zéro :
$\dfrac{1 + 3x + 2x^2 - 7x^3}{1 + x - 2x^2} = 1 + 2x + 2x^2 - 5x^3 + o(x^3)$.

Démonstration

- *Unicité. On suppose l'existence de deux couples* $(Q_1, R_1), (Q_2, R_2)$ *résultat de la division selon les puissances croissantes de* A *par* B *à l'ordre* p, *on va montrer qu'ils sont égaux. On dispose des égalités :*

$$A = BQ_1 + X^{p+1} R_1, \quad A = BQ_2 + X^{p+1} R_2 \quad \text{donc} \quad (1) \quad B(Q_1 - Q_2) = X^{p+1}(R_2 - R_1).$$

On regarde les valuations des deux membres. Par hypothèse $\text{val } B = 0$*. Donc* $\text{val } B(Q_1 - Q_2) = \text{val } B + \text{val } (Q_1 - Q_2) = \text{val } (Q_1 - Q_2)$*. D'autre part* $\text{val } X^{p+1}(R_2 - R_1) \geqslant p+1$*. Conclusion :* $Q_1 - Q_2$ *est un polynôme dont la valuation est supérieure au degré, c'est donc le polynôme nul. Donc* $Q_1 = Q_2$ *et par suite* $R_1 = R_2$*.*

- *Existence. Comme dans l'exemple, on va poser notre division, supposer qu'on a réussi à l'ordre* p *et passer à l'ordre* $p+1$*.*

$$A = a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n X^n \quad \text{et} \quad B = b_0 + \cdots + b_{n-1}X^{n-1} + b_n X^n \quad \text{avec} \quad b_0 \neq 0$$

On raisonne donc par récurrence sur p*. Si* $p = 0$ *:*

$$A = \frac{a_0}{b_0} B + X.R_0 \quad \text{avec} \quad R_0 = \left(a_1 - \frac{a_0 b_1}{b_0}\right) + \left(a_2 - \frac{a_0 b_2}{b_0}\right) X + \cdots + \left(a_n - \frac{a_0 b_n}{b_0}\right) X^{n-1}$$

$Q_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$ *et on a bien* $\deg Q_0 \leqslant p$*.*

On suppose maintenant le résultat vrai pour l'ordre p *et montrons le à l'ordre* $p+1$*. L'hypothèse de récurrence montre l'existence d'un couple* (Q_p, R_p) *tel que :*

$$A = Q_p B + X^{p+1} R_p \quad \text{avec} \quad \deg Q_p \leqslant p.$$

On applique la division selon les puissances croissantes à l'ordre 0 *pour* R_p *et* B *:*

$$\exists \lambda_p \in \mathbb{K},\ \exists R_{p+1} \in \mathbb{K}[X] \qquad R_p = \lambda_p B + X R_{p+1}$$

En remplaçant la valeur de R_p *dans l'égalité au-dessus on obtient :*

$$A = Q_p B + X^{p+1}(\lambda_p B + X R_{p+1}) \quad \text{et si} \quad Q_{p+1} = Q_p + \lambda_p X^{p+1} \quad \text{alors} \quad A = Q_{p+1} B + X^{p+2} R_{p+1} \quad \text{avec} \quad \deg Q_{p+1} \leqslant p+1$$

Ce qu'il fallait vérifier.

21.2 Fonctions polynomiales

On cherche à démontrer que tout polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul. On peut le démontrer par récurrence grâce au théorème de Rolle dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. Dans le cas de $\mathbb{C}$, il n'y a plus de théorème de Rolle...

21.2.1 Fonctions polynomiales

DÉFINITION 21.8 ♡ **Fonctions polynomiales**

Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On appelle **fonction polynomiale associée à** P la fonction donnée par :

$$\widetilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow \mathbb{K} \\ x & \longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \end{cases}$$

Nous noterons $\mathscr{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ des fonctions polynomiales.

Remarque 21.4 $\mathscr{P}$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$

PROPOSITION 21.10
L'application

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ P & \longmapsto \widetilde{P} \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et d'anneau. En particulier, si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \mu \widetilde{Q}$$

$$\widetilde{P \times Q} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$$

$$\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$$

De plus $\text{Im}\,\theta = \theta(\mathbb{K}[X]) = \mathscr{P}$.

Démonstration *Laissée en exercice.*

21.2.2 Racines d'un polynôme

DÉFINITION 21.9 ♡ **Racine d'un polynôme**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** de P si et seulement si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.

THÉORÈME 21.11 ♡

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme et $\alpha \in K$ un scalaire. On a équivalence entre :

1. α est une racine de P.
2. On peut factoriser P par $X - \alpha$, c'est à dire : $(X-\alpha) | P$.

Démonstration

$\Rightarrow$ *Soit* α *une racine de* P. *Alors* $\widetilde{P}(\alpha) = 0$. *Par division euclidienne, il existe* $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ *tels que :* $\begin{cases} P = (X-\alpha)Q + R \\ \deg(R) < \deg(X-\alpha) = 1 \end{cases}$.
On a alors deux possibilités, soit $\deg R = 0$, *soit* $\deg R = -\infty$, *c'est à dire* $R = 0$. *Montrons que la première n'est pas possible : si on avait* $\deg R = 0$ *alors il existerait* $\gamma \in \mathbb{K}^*$ *tel que* $R = \gamma$ *et on aurait :* $A = (X-\alpha)Q + \gamma$, *mais alors :* $P = (X-\alpha)Q + \gamma$ *et* $0 = \widetilde{P}(\alpha) = \widetilde{R}(\alpha) = \gamma \neq 0$ *ce qui est une contradiction. On a donc bien* $R = 0$ *et* $P = (X-\alpha)Q$.

$\Leftarrow$ *Supposons que* $(X-\alpha)|P$. *Alors il existe* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P = (X-\alpha)Q$. *Par conséquent :* $P = (X-\alpha)Q$ *et* $\widetilde{P}(\alpha) = 0$ *ce qui prouve que* α *est une racine de* P.

COROLLAIRE 21.12
Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont p racines distinctes d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ alors le polynôme

$$(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_p) = \prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)$$

divise P.

Démonstration *La démonstration se fait par récurrence sur le nombre* p *de racines distinctes de* P *considérées.*

1. *La propriété vient d'être prouvée au rang* 1 *dans le théorème précédent.*
2. *Soit* $p > 1$.
3. *On suppose que la propriété est vraie au rang* $p-1$ *et prouvons-la au rang* p. *Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ p *racines de* P. *Par application de l'hypothèse de récurrence, il existe* $B \in \mathbb{K}[X]$ *tel que :* $P = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_{p-1})B$. *Comme* α_p *est une racine de* P, *on a :*
$$0 = \widetilde{P}(\alpha) = (\alpha_p - \alpha_1)\dots(\alpha_p - \alpha_{p-1})\widetilde{B}(\alpha).$$
Comme : $\forall i \in [\![1, p-1]\!], \quad \alpha_i \neq \alpha_p$, *le nombre* $(\alpha_p - \alpha_1)\dots(\alpha_p - \alpha_{p-1})$ *est non nul et donc nécessairement* $\widetilde{B}(\alpha) = 0$, *c'est-à-dire* α_p *est une racine de* B. *Appliquant le théorème précédent, il existe* $C \in \mathbb{K}[X]$ *tel que :* $B = (X-\alpha_p)C$ *et donc* $P = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_p)C$. *On a alors prouvé que* $(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_p)$ *divise* P.
4. *Le théorème est alors prouvé par application du principe de récurrence.*

THÉORÈME 21.13 ♡ **Un polynôme <u>non nul</u> de degré $\leqslant n$ admet au plus n racines**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $\leqslant n$. Si P admet au moins $n+1$ racines distinctes alors P est nul.

Démonstration *Supposons qu'il existe* $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ $n+1$ *racines distinctes du polynôme* P *non nul de degré* $\geqslant n$. *Appliquant le théorème précédent, le polynôme de degré* $n+1$ *:* $(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_{n+1})$ *divise* P. *Il existe donc* $B \in \mathbb{K}[X]$ *tel que :* $P = B(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_{n+1})$. *On a alors* $n = \deg P = \deg B + n + 1$. *Comme* $\deg P \geqslant 0$, *cette égalité n'est pas possible et donc notre hypothèse de départ est absurde.*

On en déduit :

THÉORÈME 21.14 ♡
Tout polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.

THÉORÈME 21.15 ♡ **Identification polynômes et fonctions polynomiales**

L'application

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{K},\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{cases}$$

qui envoie un polynôme sur sa fonction polynomiale associée est injective.

Démonstration *Soit* P *et* Q *deux polynômes vérifiant* $\theta(P) = \theta(Q)$ *soit* $\widetilde{P-Q} = 0$. $P-Q$ *possède donc une infinité de racines (tous les éléments de* $\mathbb{K}$*), ce qui n'est possible, d'après la proposition précédente, que si* $P-Q=0$.

Ce théorème permet de confondre polynômes et applications polynomiales. Attention, ceci est vrai à condition que $\mathbb{K}$ contienne une infinité d'éléments, ce qui est bien notre cas car $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On convient désormais de confondre les notations P et $\widetilde{P}$.

21.2.3 Schéma de Horner

C'est une façon de calculer les valeurs d'un polynôme en minimisant le nombre d'opérations, en particulier les multiplications. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_{n-2}X^{n-2} + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$. On a $P = a_0 + X(a_1 + X(a_2 + X(a_3 + \ldots + X(a_{n-2} + X(a_{n-1} + a_nX))\ldots)))$ Donc pour calculer $P(\alpha)$ on initialise avec a_n ensuite on effectue une boucle : multiplier par α puis ajouter le coefficient a_k. Cet algorithme utilise n additions et n multiplications pour un polynôme de degré n.

On peut aussi obtenir le quotient de la division euclidienne de P par $X-\alpha$: $P = (X-\alpha)Q + P(\alpha)$ avec $Q = b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} P(X) - P(\alpha) &= (X-\alpha)(b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0) \\ a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 - P(\alpha) &= (X-\alpha)(b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0) \\ a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 - P(\alpha) &= b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})X^{n-1} + \ldots + (b_0 - \alpha b_1)X - \alpha b_0 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système (d'inconnues $b_0, b_1, ..., b_{n-1}, P(\alpha)$) :

$$\begin{cases} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} - \alpha b_{n-1} &= a_{n-1} \\ \ldots & \\ b_0 - \alpha b_1 &= a_1 \\ -\alpha b_0 &= a_0 - P(\alpha) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ \ldots & \\ b_0 &= a_1 + \alpha b_1 \\ P(\alpha) &= a_0 + \alpha b_0 \end{cases}$$

Autrement dit, les différents coefficients du polynôme quotient Q sont les nombres obtenus à chaque étape de la boucle.

21.2.4 Racines multiples

DÉFINITION 21.10 ♡ **Racine d'ordre p, racine multiple**

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, $\alpha \in \mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que α est une **racine d'ordre** p (ou de **multiplicité** p) de P si et seulement si $(X-\alpha)^p$ divise P et $(X-\alpha)^{p+1}$ ne divise pas P.
- Si α est une racine d'ordre 1 de P, on dit que α est une **racine simple** de P.
- Si α est une racine d'ordre $\geqslant 2$ de P, on dit que α est une **racine multiple** de P.

PROPOSITION 21.16
Caractérisation de l'ordre d'une racine
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On a équivalence entre :

1. α est une racine multiple de P d'ordre p.
2. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^p Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Démonstration

$\Rightarrow$ *Supposons que* α *est une racine multiple de* P *d'ordre* p*. Comme* $(X-\alpha)^p$ *divise* P*, il existe* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P = (X-\alpha)^p Q$*. Montrons que* $Q(\alpha) \neq 0$*. Si c'était le cas, alors* α *serait une racine de* Q *et il existerait* $Q' \in \mathbb{K}[X]$ *tel que :* $Q = (X-\alpha)Q'$*. Par suite, on aurait :* $P = (X-\alpha)^{p+1}Q'$ *et* $(X-\alpha)^{p+1}$ *diviserait* P*, ce qui n'est, par hypothèse, pas possible. Donc* $Q(\alpha) \neq 0$.

$\Leftarrow$ *Supposons qu'il existe* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P = (X-\alpha)^p Q$ *et* $Q(\alpha) \neq 0$*. Pour montrer que* α *est une racine multiple de* P *d'ordre* p*, il faut montrer que* $(X-\alpha)^{p+1}$ *ne divise pas* P*. Par division Euclidienne de* Q *par* $X-\alpha$*, il existe* $A, B \in \mathbb{K}[X]$ *tels que :* $Q = (X-\alpha)A + B$ *et* $\deg B < \deg(X-\alpha) = 1$*. Par conséquent* $\deg B \geqslant 0$ *et comme* α *n'est pas une racine de* Q*,* B *est un polynôme constant non nul. On a alors :*

$$P = (X-\alpha)^p((X-\alpha)A + B) = (X-\alpha)^{p+1}A + (X-\alpha)^p B$$

Par unicité du couple quotient-reste dans la division Euclidienne de P *par* $(X-\alpha)^p$*,* $(X-\alpha)^p B$ *est le reste de cette division et comme* $B \neq 0$*, ce reste est non nul. Par conséquent,* $(X-\alpha)^{p+1}$ *ne divise pas* P.

21.3 Polynômes dérivés

21.3.1 Définitions et propriétés de base

DÉFINITION 21.11 ♡ **Polynôme dérivé**

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On définit le **polynôme dérivé** de P par :

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

Remarque 21.5

- Cette définition est purement algébrique.
- Elle coïncide avec la dérivée des fonctions polynomiales sur le corps $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 21.17
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On a :

1. Si $\deg(P) > 0$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
2. P est constant si et seulement si $P' = 0$.

Démonstration

1. *Si* $\deg(P) = p > 0$ *alors* $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ *avec* $a_p \neq 0$ *et* $P' = \sum_{k=0}^{p-1} k a_k X^k$. *Le coefficient de terme dominant de* P' *est* $p a_p$ *qui est non nul. Par conséquent* $\deg P' = p - 1$.
2. *Si* P *est constant, il est clair que* $P' = 0$. *Réciproquement, si* P *n'est pas constant, alors* $\deg P > 0$ *et* $\deg P' \geqslant 0$ *ce qui prouve que* P' *est non nul.*

PROPOSITION 21.18
Linéarité de la dérivation
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires. On a :

$$\boxed{(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'}$$

Démonstration *Laissée en exercice.*

PROPOSITION 21.19
Dérivée d'un produit
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes. On a :

$$\boxed{(PQ)' = P'Q + PQ'}$$

Démonstration *Supposons que* $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ *et* $Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$. *On a donc :* $PQ = \sum_{i+j=0}^{+\infty} a_i b_j X^{i+j}$ *et :*

$$\begin{aligned}(PQ)' &= \sum_{i+j=0}^{+\infty} (i+j)\, a_i b_j X^{i+j-1} \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \sum_{i+j=0}^{+\infty} i a_i b_j X^{i-1} X^j + \sum_{i+j=0}^{+\infty} j a_i b_j X^i X^{j-1} \\ &= P'Q + PQ'\end{aligned}$$

21.3.2 Dérivées successives

DÉFINITION 21.12 ♡ **Polynôme dérivé d'ordre n**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On définit par récurrence la **dérivée n-ième** (ou **d'ordre n**) de P par :

- $P^{(0)} = P$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+1)} = \left[P^{(n)}\right]'$

Remarque 21.6 L'application

$$D_n : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P^{(n)} \end{cases}$$

est linéaire comme composée de n applications linéaires.

THÉORÈME 21.20 ♡ **Formule de Leibniz pour les polynômes**

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes. On a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$$

Démonstration *C'est la même démonstration que celle écrite pour les fonctions n fois dérivables.*

Remarque 21.7

$$\left(X^p\right)^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ \frac{p!}{(p-n)!} X^{p-n} = A_n^p X^{p-n} & \text{sinon} \end{cases}$$

THÉORÈME 21.21 ♡ **Formule de Taylor pour les polynômes**

Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Démonstration *Soit* $P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p = \sum_{p=0}^{n} a_p Q_p$.

- *Soit $p \leqslant n$. La formule est vraie pour le polynôme $Q_p = X^p$: en effet,* $Q_p' = pX^{p-1}, \dots, Q_p^{(k)} = p(p-1)\dots(p-k+1)X^{p-k}$.
- *Maintenant, utilisant la formule du binôme de Newton :*

$$Q_p = X^p = ((X-a)+a)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k} (X-a)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{(X-a)^k}{k!} \frac{p!}{(p-k)!} a^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(X-a)^k}{k!} Q_p^{(k)}(a)$$

- *En rajoutant des termes nuls,* $Q_p = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} Q_p^{(k)}(a)$.
- *Par linéarité,*

$$\begin{aligned} P &= \sum_{p=0}^{n} a_p Q_p \\ &= \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} Q_p^{(k)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} \sum_{p=0}^{n} a_p Q_p^{(k)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a) \end{aligned}$$

LEMME 21.22
Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Si a est une racine d'ordre r de P alors a est une racine d'ordre $r-1$ de P'.

Démonstration *Comme a est une racine d'ordre r de P, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :* $P = (X-a)^r Q$ *et* $Q(a) \neq 0$. *Par conséquent :*

$$P'(a) = r(X-a)^{r-1} Q + (X-a)^r Q' = (X-a)^{r-1} \underbrace{\left(rQ + (X-a)Q'\right)}_{=B}$$

et on a clairement $B(a) \neq 0$ *ce qui prouve le lemme.*

THÉORÈME 21.23 ♡ **Caractérisation des racines multiples**

Soient un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, un scalaire $a \in \mathbb{K}$ et un entier $r > 0$. On a équivalence entre :

1. a est une racine d'ordre r de P.
2. $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

Démonstration

$\Rightarrow$ *Par application du lemme, si a est une racine d'ordre r de P alors a est une racine d'ordre 1 de $P^{(r-1)}$ et d'ordre 0 de $P^{(r)}$ donc $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.*

$\Leftarrow$ *Réciproquement, si $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(r-1)}(a) = 0$ alors, par application de la formule de Talor :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = (X-a)^r B$$

avc $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B(a) \neq 0$.

21.4 Polynômes scindés

21.4.1 Définition

DÉFINITION 21.13 ♡ **Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré p. On dit que P est **scindé** sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il s'écrit :

$$P = a_p (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_p) = \prod_{k=0}^{p} (X - \alpha_k)$$

où les scalaires $\alpha_k \in \mathbb{K}$ sont les racines de P comptées avec leur multiplicité et a_p est le coefficient du terme dominant de P.

21.4.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

BIO 19 Jean le Rond D'Alembert, né à Paris le 16 novembre 1717 et mort à Paris le 29 octobre 1783

Mathématicien Français. Il fut avec Diderot à l'origine de l'Encyclopédie qui se voulait une synthèse et une vulgarisation des connaissances de l'époque. Tous deux durent jouer à cache-cache avec la censure pour faire paraître cette œuvre monumentale. D'Alembert abandonna le projet, fatigué des controverses et se consacra à la partie mathématique. Son œuvre fut considérable en mécanique, astronomie et mathématiques. Il énonce le théorème fondamental de l'algèbre dans son Traité de dynamique en 1743. Musicien, il établit l'équation des cordes vibrantes. Enfant trouvé sur les marches d'une église, il n'eut pas droit aux obsèques religieuses, car considéré comme athée.



THÉORÈME 21.24 ♡ **théorème fondamental de l'algèbre**
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ (c'est à dire non constant) alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration *Admise. Il existe de nombreuses démonstrations. Aucune n'est assez élémentaire pour être exposée ici. La première démonstration rigoureuse est due à Gauss (1799). Ce théorème est aussi appelé théorème de d'Alembert-Gauss.*

Remarque 21.8 Attention ce théorème est faux dans $\mathbb{R}$. Par exemple $P = X^2 + 1$ est non constant mais ne possède aucune racine dans $\mathbb{R}$.

COROLLAIRE 21.25
Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est **scindé sur** $\mathbb{C}$, c'est à dire tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit sous la forme :

$$P = a_p.(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_p)$$

où les scalaires α_k sont les racines de P comptées avec leur multiplicité et a_p est le coefficient du terme dominant de P.

Démonstration *Supposons que* P *est non constant, sinon la propriété est évidente. Soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{C}$ *la liste des racines de* P*. Par application du théorème fondamental de l'algèbre cette liste est non vide. Il existe* $Q \in \mathbb{C}[X]$ *tel que :* $P = \prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)Q$*. Si* Q *est non constant alors il possède une racine* α *et* α *est nécessairement aussi une racine de* P*. Donc la liste* $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ *n'était pas celle de toutes les racines de* P*, ce qui constitue une contradiction. Par conséquent,* Q *est un polynôme constant et la proposition est démontrée.*

Une formulation équivalente du théorème fondamental de l'algèbre est la suivante :

THÉORÈME 21.26 ♡

Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré p possède p racines (comptées avec leur multiplicité) dans $\mathbb{C}$.

Démonstration *C'est un corollaire immédiat de la proposition précédente.*

Exemple 21.4 Soit $P = X^n - 1$. $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\zeta_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ est une racine de P. Donc P est divisible par chacun des $X-\zeta_k$. Comme les ζ_k sont distincts deux à deux, P est aussi divisible par leur produit : $X^n - 1 = K\prod_{k=0}^{n-1}(X-\zeta_k)$. En regardant les degrés des deux memebres, on a $\deg K = 0$ c'est-à-dire que K est constant. En regardant les coefficients dominants on en déduit que $K = 1$ et donc $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\zeta_k)}$.

21.4.3 Interlude : polynômes conjugués

DÉFINITION 21.14 ♡ **Polynômes conjugués**

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. On appelle **conjugué** de P le polynôme, noté $\bar{P}$ et donné par :

$$\overline{P} = \overline{a_0} + \overline{a_1}X + \dots + \overline{a_p}X^p$$

PROPOSITION 21.27
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $r \in \mathbb{N}$. On a :

1. $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$
2. $\overline{P\times Q} = \overline{P}\times\overline{Q}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \overline{P(\alpha)} = \overline{P}\left(\overline{\alpha}\right)$
4. $\overline{P^{(r)}} = \overline{P}^{(r)}$
5. $P \in \mathbb{R}[X] \iff P = \overline{P}$.

Démonstration *Démontrons par exemple le troisième point : Soient* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et* $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p \in \mathbb{C}[X]$*. On a :*

$$\overline{P(\alpha)} = \overline{a_0} + \overline{a_1\alpha} + \dots + \overline{a_p\alpha^p} \quad \text{et} \quad \overline{P}\left(\overline{\alpha}\right) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \dots + \overline{a_p}\,\overline{\alpha}^p$$

d'où l'égalité.

LEMME 21.28
Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a équivalence entre :

1. α est une racine de P d'ordre r.
2. $\overline{\alpha}$ est une racine de $\overline{P}$ d'ordre r.

Démonstration *On a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned}
& \alpha \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de P} \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{P}(\alpha) = \mathrm{P}'(\alpha) = \ldots = \mathrm{P}^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{(r)}(\alpha) \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overline{\mathrm{P}}\left(\overline{\alpha}\right) = \overline{\mathrm{P}'}\left(\overline{\alpha}\right) = \ldots = \overline{\mathrm{P}^{(r-1)}}\left(\overline{\alpha}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{P}^{(r)}}\left(\overline{\alpha}\right) \neq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \overline{\alpha} \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } \overline{\mathrm{P}}
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 21.29
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme à **coefficients réels**. Si α est une racine d'ordre r de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine d'ordre r de P.

Démonstration *Exercice laissé au lecteur.*

Remarque 21.9 On en déduit que les racines de $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sont ou réelles ou complexes conjuguées.

21.4.4 Factorisation dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

PROPOSITION 21.30
Factorisation dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme non nul. Alors, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ non nécessairement deux à deux distincts, $(b_1, c_1), \ldots, (b_s, c_s) \in \mathbb{R}^2$ non nécessairement deux à deux distincts tels que $\Delta_l = b_l^2 - 4c_l < 0$ pour tout $\ell \in [\![1, s]\!]$, et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$$\boxed{\mathrm{P} = a \prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_k) \prod_{\ell=1}^{s} \left(\mathrm{X}^2 + b_\ell \mathrm{X} + c_\ell\right)}$$

Démonstration *Appliquant la proposition 21.25,* P *est scindé sur* $\mathbb{C}$ *et ses racines sont, d'après la dernière remarque, ou réelles ou complexes conjuguées :*

$$\mathrm{P} = a(\mathrm{X} - \alpha_1) \ldots \left(\mathrm{X} - \alpha_p\right)(\mathrm{X} - \omega_1)\left(\mathrm{X} - \overline{\omega_1}\right) \ldots (\mathrm{X} - \omega_r)\left(\mathrm{X} - \overline{\omega_r}\right)$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ *sont les racines réelles de* P *et où* $\omega_1, \overline{\omega_1}, \ldots, \omega_r, \overline{\omega_r}$ *sont les racines complexes conjuguées de* P. *On a, pour tout* $k \in [\![1, r]\!]$ *:*

$$\left(\mathrm{X} - \omega_k\right)\left(\mathrm{X} - \overline{\omega_k}\right) = \mathrm{X}^2 - \left(\omega_k + \overline{\omega_k}\right) + \omega_k \overline{\omega_k} = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{Re}\left(\omega_k\right)\mathrm{X} + \omega_k^2 = \mathrm{X}^2 - p_k \mathrm{X} + q_k$$

avec $p_k, q_k \in \mathbb{R}$. *Le résultat annoncé s'en suit.*

21.4.5 Polynômes irréductibles

DÉFINITION 21.15 ♡ **Polynôme irréductible**

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme non constant. On dit que P est **irréductible** si et seulement si :

$$\mathrm{P} = \mathrm{QH} \implies \mathrm{Q} \in \mathbb{K} \quad \text{ou} \quad \mathrm{H} \in \mathbb{K}$$

Autrement dit : un polynôme P non constant est irréductible si et seulement si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes proportionnels à P.

PROPOSITION 21.31
Les polynômes de degré 1 sont irréductibles
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire et $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \alpha)$ un polynôme de degré 1. Alors P est irréductible.

Démonstration *Soit* P *un polynôme de degré* 1. P *est clairement non constant et si* $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *est un diviseur de* P *alors il existe* $\mathrm{H} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *tel que :* $\mathrm{P} = \mathrm{QH}$. *Par conséquent :* $1 = \deg \mathrm{P} = \deg \mathrm{Q} + \deg \mathrm{H}$. *Une des deux possibilités suivantes est alors vraie :*
- $\deg \mathrm{Q} = 1$ *et* $\deg \mathrm{H} = 0$ *donc* Q *est un polynôme proportionnel à* P
- $\deg \mathrm{Q} = 0$ *(et* $\deg \mathrm{H} = 1$*) et* Q *est un polynôme constant.*

Par conséquent P *est irréductible.*

THÉORÈME 21.32 ♡ **Polynômes irréductibles de** $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ sont les polynômes de degré 1.

Démonstration *On vient de prouver que les polynômes de degré* 1 *sont irréductibles dans* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. *Réciproquement, si* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *est un polynôme irréducible de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, *montrons qu'il est de degré* 1. *Si ce n'était pas le cas, alors comme* P *est non nul :*

– *soit* $\deg P > 1$ *et par application du théorème fondamental de l'algèbre* P *possède au moins une racine* α *dans* $\mathbb{C}$. *Par conséquent le polynôme* $X - \alpha$ *divise* P *et donc* P *n'est pas irréductible.*
– *soit* $\deg P = 0$ *et dans ce cas* P *est un polynôme constant non nul et ne peut être irréductible.*
Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction et la proposition est alors prouvée par l'absurde.

THÉORÈME 21.33 ♡ **Polynômes irréductibles de** $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
- les polynômes de degré 1.
- les polynômes de degré 2 dont le disciminant est négatif.

Démonstration
– *Les polynômes de degré* 1 *sont irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$.
– *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme de degré* 2. *Il est irréducible si et seulement si il n'est pas divisible par un polynôme de degré* 1, *c'est à dire si et seulement si il n'a pas de racine réelle, ce qui est équivalent à dire que son discriminant est strictement négatif.*
– *Tout polynôme de degré* $\geqslant 3$ *se décompose, d'après le théorème de factorisation dans* $\mathbb{R}[X]$ *21.30, comme le produit de polynômes de degré* 1 *et de degré* 2. *Un tel polynôme ne peut être irréductible.*

21.4.6 Relations coefficients-racines

DÉFINITION 21.16 ♡ **Polynômes symétriques élémentaires**

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$. On définit les **polynômes symétriques élémentaires** en les variables $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ par :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 + \dots + \alpha_p \\ \sigma_2 &= \sum_{i_1 < i_2} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \\ &\vdots \\ \sigma_p &= \alpha_1 \cdots \alpha_p \end{aligned}$$

Plus précisément, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}$$

THÉORÈME 21.34 ♡ **Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme**

Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé de degré p. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ les p racines de p. On a :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \boxed{\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{p-k}}{a_p}}$$

Démonstration *On démontre ces égalités en identifiant les coefficients des monômes de même degré dans l'égalité :*

$$P = a_p (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p) = a_p \left(X^p - \sigma_1 X^{p-1} + \sigma_2 X^{p-2} + \dots + (-1)^p \sigma_p \right)$$

Remarque 21.10
– En particulier, si $p = 2$, on a :

$$P = a_2 (X - \alpha_2)(X - \alpha_1) = a_2 \left(X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) X + \alpha_1 \alpha_2 \right)$$

et donc :

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

– Si $p = 3$,

$$P = a_3 (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) = a_3 \left(X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) X^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3) X - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \right)$$

et :

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad \sigma_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 = \frac{a_1}{a_3} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

21.5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Nous allons définir le PGCD, comme pour les entiers relatifs. Ici il y a une difficulté : que veut dire "plus grand" ? Cela veut dire avec le plus grand degré. Mais que se passe-t-il lorsqu'il y a deux polynômes de même degré en concurrence ? Cela ne se produit pas (ou alors ils sont associés) et c'est ce qu'il faut établir.

21.5.1 Diviseurs communs

PROPOSITION 21.35 **Propriétés de la divisibilité**

– La relation « divise » est transitive : $\forall (P,Q,R) \in \mathbb{K}[X]^3, \quad [P \mid Q \quad \text{et} \quad Q \mid R] \implies P \mid R$.
– Soit $P,Q,R \in \mathbb{K}[X]$ et $U,V \in \mathbb{K}[X]$. Alors : $[P \mid Q \quad \text{et} \quad P \mid R] \implies P \mid (UQ+VR)$

On note pour la suite $d(P,Q) = d(P) \cap d(Q)$ l'ensemble des diviseurs communs à P et à Q.
Remarque : Si $D \in d(P,Q)$, alors tout polynôme associé à D est aussi dans $d(P,Q)$.

PROPOSITION 21.36
Soit P un polynôme non nul. $d(P,0) = d(P)$.

PROPOSITION 21.37
Si $P = BQ + R$ alors $d(P,Q) = d(Q,R)$.

Démonstration *En effet, si $D \in d(P,Q)$, alors $D \mid Q$ et $D \mid P - BQ$ donc $D \mid Q$ et $D \mid R$ donc $D \in d(Q,R)$: $d(P,Q) \subset d(Q,R)$. Inversement, si $D \in d(Q,R)$, alors $D \mid Q$ et $D \mid BQ + R$ donc $D \mid Q$ et $D \mid P$ donc $D \in d(P,Q)$: $d(Q,R) \subset d(P,Q)$.*

THÉORÈME 21.38
Soient $P,Q \in \mathbb{K}[X]$,non tous les deux nuls, il existe un unique polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, tel que $d(P,Q) = d(D)$.

Démonstration *Unicité : Si D_1 et D_2 sont solutions alors $d(D_1) = d(D_2)$ donc $D_1 \mid D_2$ et $D_2 \mid D_1$ donc ils sont associés. Ils sont unitaires et associés donc égaux.*

Existence : Quitte à échanger P et Q on peut supposer $Q \neq 0$. Posons $P_0 = P$ et $P_1 = Q$. On réalise ensuite les divisions euclidiennes suivantes tant que les restes obtenus sont non nuls (c'est l'algorithme d'Euclide) :

$$\begin{array}{lcll} P_0 & = & P_1B_1 + P_2 & \text{avec } \deg P_2 < \deg P_1, \\ \dots & & & \\ P_{m-2} & = & P_{m-1}B_{m-1} + P_m & \text{avec } \deg P_m < \deg P_{m-1}, \\ P_{m-1} & = & P_mB_m + 0. & \end{array}$$

Ce processus s'arrête puisqu'on a une suite strictement décroissante d'entiers naturels $\deg P_1 > \deg P_2 > \dots$. On a alors $d(P,Q) = d(P_0,P_1) = \dots = d(P_m,0) = d(P_m)$ Le polynôme D unitaire associé à P_m convient.

21.5.2 PGCD, théorèmes d'Euclide et de Bezout

DÉFINITION 21.17 ♡ **PGCD**
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls.
L'ensemble des diviseurs communs à admet un polynôme unitaire de plus grand degré Δ noté $\delta = P \wedge Q$. C'est le *plus grand commun diviseur* des polynômes P et Q.

Démonstration *On choisit Δ unitaire pour que $d(P,Q) = d(\Delta)$ avec les notations du paragraphe précédent. C'est dire que tout diviseur commun à P et à Q divise Δ. Donc son degré est inférieur ou égal à celui de D.*
Par ailleurs l'algorithme d'euclide fournit un moyen de calculer le PGCD : on normalise le dernier reste non nul.

PROPOSITION 21.39
$P \wedge Q = Q \wedge P$. Si un polynôme divise deux polynômes, alors il divise leur PGCD.

THÉORÈME 21.40 **Bezout**
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls, soit $\Delta = P \wedge Q$.
Il existe deux polynômes U et V tels que

$$PU + QV = \Delta.$$

Exemple 21.5 $P = X^5 - 2X^3 - 2X^2 - 3X - 2$, $Q = X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X$. On descend avec l'algorithme d'Euclide :

dividende		quotient		diviseur		reste
$X^5 - 2X^3 - 2X^2 - 3X - 2$	=	1	×	$(X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X)$	+	$(3X^4 - 4X^3 + X^2 - 4X - 2)$
$X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X$	=	$(\frac{1}{3}X - \frac{5}{9})$	×	$(3X^4 - 4X^3 + X^2 - 4X - 2)$	+	$(-\frac{5}{9}X^3 - \frac{10}{9}X^2 - \frac{5}{9}X - \frac{10}{9})$
$3X^4 - 4X^3 + X^2 - 4X - 2$	=	$(-\frac{27}{5}X + 18)$	×	$(-\frac{5}{9}X^3 - \frac{10}{9}X^2 - \frac{5}{9}X - \frac{10}{9})$	+	$(18X^2 + 18)$
$-\frac{5}{9}X^3 - \frac{10}{9}X^2 - \frac{5}{9}X - \frac{10}{9}$	=	$(-\frac{5}{162}X - \frac{5}{81})$	×	$(18X^2 + 18)$	+	0

Le dernier reste non nul est $18X^2 + 18$, qui normalisé, donne $X^2 + 1$ comme PGCD de P et Q.
Maintenant on remonte en partant de l'avant-dernière ligne :
$18X^2 + 18 = 3X^4 - 4X^3 + X^2 - 4X - 2 - (-\frac{27}{5}X + 18) \times (-\frac{5}{9}X^3 - \frac{10}{9}X^2 - \frac{5}{9}X - \frac{10}{9})$ d'où
$18X^2 + 18 = 3X^4 - 4X^3 + X^2 - 4X - 2 - (-\frac{27}{5}X + 18) \times \left[X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X - (\frac{1}{3}X - \frac{5}{9}) \times (3X^4 - 4X^3 + X^2 - 4X - 2)\right]$
d'où
$18X^2 + 18 = (1 + (-\frac{27}{5}X + 18) \times (\frac{1}{3}X - \frac{5}{9})) \times (3X^4 - 4X^3 + X^2 - 4X - 2) - (-\frac{27}{5}X + 18) \times (X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X)$ soit
$18X^2 + 18 = (-\frac{9}{5}X^2 + 9X - 9) \times (3X^4 - 4X^3 + X^2 - 4X - 2) - (-\frac{27}{5}X + 18) \times (X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X)$ d'où
$18X^2 + 18 = (-\frac{9}{5}X^2 + 9X - 9) \times \left[(X^5 - 2X^3 - 2X^2 - 3X - 2) \quad - (X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X)\right] - (-\frac{27}{5}X + 18) \times (X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X)$ soit
$18X^2 + 18 = (-\frac{9}{5}X^2 + 9X - 9) \times (X^5 - 2X^3 - 2X^2 - 3X - 2) + \left[(-\frac{9}{5}X^2 + 9X - 9) - (-\frac{27}{5}X + 18)\right] \times (X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X)$
$18X^2 + 18 = (-\frac{9}{5}X^2 + 9X - 9) \times (X^5 - 2X^3 - 2X^2 - 3X - 2) + (-\frac{9}{5}X^2 + \frac{82}{5}X - 27) \times (X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X)$
En divisant par 18 :
$(-\frac{1}{10}X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2})(X^5 - 2X^3 - 2X^2 - 3X - 2) + (\frac{1}{10}X^2 - \frac{1}{5}X - \frac{1}{2})(X^5 - 3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X) = X^2 + 1.$

Démonstration *L'exemple montre comment conduire la démonstration. Par récurrence sur* $n = \min(\deg P, \deg Q)$*.*
Si $n = -\infty$ *ou* $n = 0$ *la propriété est claire. Pour fixer les idées* $\deg P \geqslant \deg Q = n + 1$*. On écrit la division euclidienne de* P *par* Q*,* $P = BQ + R$ *avec* $\deg R \leqslant n$*. En utilisant la propriété de récurrence, il existe deux polynômes* U_1 *et* V_1 *de* $\mathbb{K}[X]$ *tels que* $\Delta = U_1 Q + V_1 R$ *avec* $\Delta = Q \wedge R$*. Or* $\Delta = P \wedge Q$ *d'une part, et d'autre part* $\Delta = U_1 Q + V_1(P - BQ) = V_1 P + (U_1 - BV_1)Q$*. D'où le résultat en penant* $U = V_1$ *et* $V = U_1 - BV_1$*.*

Remarque 21.11 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls. S'il existe trois polynômes U, V et D vérifiant $PU + QV = D$, alors D est un multiple de $\Delta = P \wedge Q$.
En effet on écrit $P = P_1\Delta$ et $Q = Q_1\Delta$. On obtient alors $D = (P_1U + Q_1V)\Delta$ donc $\Delta \mid D$.

PROPOSITION 21.41
Si C est unitaire alors $AC \wedge BC = C(A \wedge B)$.

Démonstration *Posons* $\Delta = AC \wedge BC$ *et* $D = A \wedge B$*. On a* $DC \mid AC$ *et* $DC \mid BC$ *donc* $DC \mid \Delta$*.*
Dans l'autre sens $D = AU + BV$ *donc* $DC = ACU + BCV$ *d'où* $\Delta \mid DC$*.*

21.5.3 Polynômes premiers entre eux

DÉFINITION 21.18 ♡ **Polynômes premiers entre eux**
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
On dit que P et Q sont *premiers entre eux* si leur PGCD est égal à 1.

PROPOSITION 21.42 **Bezout**
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
P et Q sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$PU + QV = 1.$$

Démonstration *Dans un sens c'est le théorème de Bezout déjà vu. Dans l'autre sens, comme* $PU + QV = 1$ *on en déduit que* $P \wedge Q$ *divise* 1*. Il n'y a qu'un seul polynôme unitaire qui divise* 1*, c'est* 1 *lui-même.*

Proposition 21.43 **Lemme de Gauss**
Si P, Q et R sont trois polynômes vérifiant $\begin{cases} ❶ & P \mid QR \\ ❷ & P \wedge Q = 1 \end{cases}$ alors $P \mid R$.

Démonstration *La condition* $P \wedge Q = 1$ *permet d'écrire une relation de Bezout :* $PU + QV = 1$ *qui multipliée par* R *donne* $PUR + QRV = R$. *Mainteant la condition* $P \mid QR$ *assure l'existence d'un polynôme* A *tel que* $AP = QR$ *et donc* $PUR + APV = P(UR + AV) = R$ *et donc* P *divise* R.

Proposition 21.44
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls et soit $D = P \wedge Q$. $\frac{P}{D}$ et $\frac{Q}{D}$ sont des polynômes et ils sont premiers entre eux.

Démonstration *On écrit* $P = P_1 D$ *et* $Q = Q_1 D$. *On a* $\frac{P}{D} = P_1$ *et* $\frac{Q}{D} = Q_1$. *De plus*

$$D = P \wedge Q = P_1 D \wedge Q_1 D = D(P_1 \wedge Q_1)$$

puisque D *est unitaire. Ceci établit le résultat (*$\mathbb{K}[X]$ *est intègre).*

Proposition 21.45
Si un polynôme P est premier avec Q_1 et avec Q_2 alors il est premier avec $Q_1 Q_2$.

Démonstration *On écrit une relation de Bezout pour* (P, Q_1) *:* $PU_1 + Q_1 V_1 = 1$ *puis une autre pour* (P, Q_2) *:* $PU_2 + Q_2 V_2 = 1$. *On effectue le produit de ces deux égalités :* $P^2 U_1 U_2 + PU_1 Q_2 V_2 + PU_2 Q_1 V_1 + Q_1 Q_2 U_1 U_2 = 1$ *soit* $P(PU_1 U_2 + U_1 Q_2 V_2 + U_2 Q_1 V_1) + Q_1 Q_2 (U_1 U_2) = 1$, *ce qui donne le résultat.*
Autre démonstration : Soit D *un diviseur commun à* P *et à* $Q_1 Q_2$. D *est premier avec* Q_1, *En effet, soit* d *diviseur commun à* Q_1 *et* D. *Comme* $d \mid D$ *et* $D \mid P$, *on a* $d \mid P$ *et donc* d *diviseur commun à* P *et* Q *donc* $\deg d = 0$. *Maintenant d'après le lemme de Gauss,* $D \mid Q_1 Q_2$ *et* $D \wedge Q_1 = 1$ *donc* $D \mid Q_2$, *donc* $D \mid P \wedge Q_2$, *ce qu'il fallait démontrer.*

Proposition 21.46
Si un polynôme P est premier avec $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ alors il est premier avec leur produit.

Démonstration *Par une récurrence sans malice.*

Corollaire 21.47
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls et premiers entre eux. Alors

- Pour tout entier m, P est premier avec Q^m.
- Pour tous entiers m et n, P^n est premier avec Q^m.

21.5.4 PPCM

Proposition 21.48
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls et soit $D = P \wedge Q$. $\frac{PQ}{D}$ est un polynôme, multiple commun à P et à Q.

Démonstration *On écrit* $P = P_1 D$ *et* $Q = Q_1 D$. *On a* $\frac{PQ}{D} = P_1 Q = PQ_1$ *ce qui établit le résultat.*

Proposition 21.49
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls et soit $D = P \wedge Q$.
Tout multiple commun à P et à Q est multiple de $\frac{PQ}{D}$.

Démonstration *Soit* M *un multiple commun à* P *et à* Q. *On écrit* $M = AP = AP_1 D = BQ = BQ_1 D$. *Après simplification par* D *on a* $AP_1 = BQ_1$ *avec* P_1 *et* Q_1 *premiers entre eux. Maintenant* P_1 *divise* BQ_1 *et* $P_1 \wedge Q_1$. *Donc d'après le lemme de Gauss,* $P_1 \mid B$. *Autrement dit, on peut écrire* $B = B_1 P_1$. *Donc* $M = BQ_1 D = B_1 P_1 Q_1 D = B_1 \frac{PQ}{D}$. *Ce qu'il fallait démontrer.*

Cette propriété permet d'énoncer la

Définition 21.19 ♡ **PPCM**
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls.
L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ multiples communs de P et Q admet un polynôme unitaire de plus petit degré μ noté : $\mu = P \vee Q$. C'est le *plus petit commun multiple* des polynômes P et Q.

ainsi que la

PROPOSITION 21.50
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non tous les deux nuls.

$$(P \wedge Q) \times (P \vee Q) \text{ est associé à } PQ.$$

ce qui fournit un procédé de calcul au PPCM de deux polynômes.

21.5.5 Polynômes irréductibles

Où l'on revient vers les polynômes irréductibles. Nous avions vu quels étaient les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ ou ceux de $\mathbb{R}[X]$. Le théorème fondamental de l'algèbre permet de décomposer tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles. Mais qu'en est-il des polynômes irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$? Nous ne répondrons pas à cette (difficile) question, mais nous allons établir un résultat à la fois plus général et plus élémentaire (il se passe du théorème fondamental de l'algèbre que nous avons dû admettre). C'est le pendant pour les polynômes de la décomposition en facteurs premiers.

PROPOSITION 21.51
Soient P et Q deux polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. P et Q sont soit associés, soit premiers enre eux.

Démonstration *Soit* $D = P \wedge Q$. *Comme* $D \mid P$ *et que* P *est irréductible, alors* $D = 1$ *ou* D *est associé à* P. *Dans le deuxième cas, comme* $D \mid Q$ *et que* Q *est irréductible, alors* $D = 1$ *(impossible) ou* D *est associé à* Q. *Donc* P *est associé à* Q.

THÉORÈME 21.52 **Décomposition en produit de facteurs irréductibles.**
Soit P un polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nul.
Il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}$, m polynômes $P_1, \dots, P_m$ unitaires et irréductibles tels que

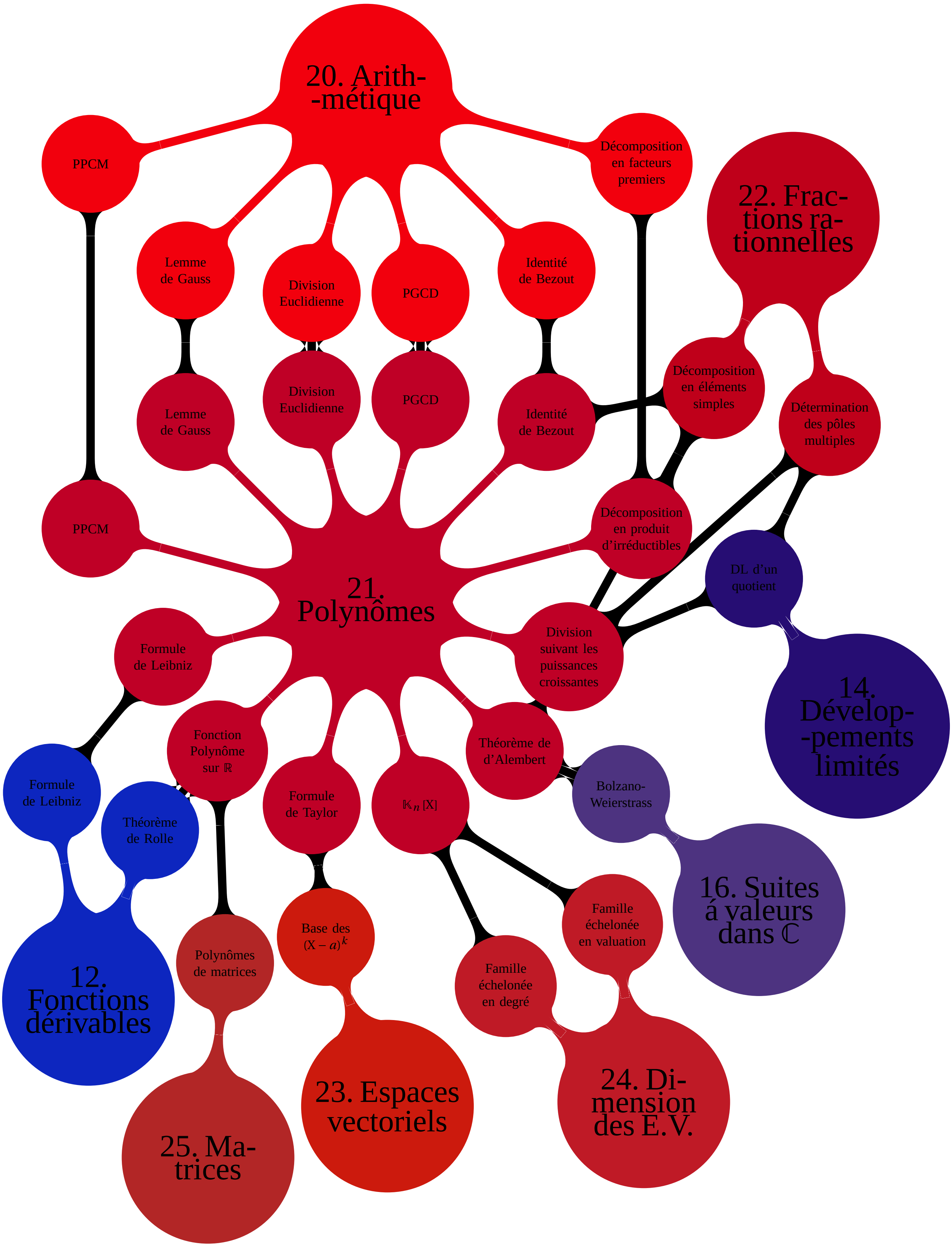
$$P = \alpha \prod_{k=1}^{m} P_k.$$

α, m sont uniques et les P_k sont uniques à l'ordre près.

Démonstration

- *Unicité : On suppose* $P = \alpha \prod_{k=1}^{m} P_k = \beta \prod_{\ell=1}^{n} Q_\ell$.
  Déjà, α *est égal au coefficient dominant de* P*, ainsi que* β. *Donc* $\alpha = \beta$.
  Pour établir que $m = n$ *et que la liste des* P_k *égale celle des* Q_ℓ *nous allons raisonner par récurrence sur* $\min(m, n)$. *Pour fixer les idées,* $m \leqslant n$. *Si* $m = 0$ *alors* $\prod_{\ell=1}^{n} Q_\ell$. *Comme* $\deg Q_\ell > 0$*, on a bien* $n = 0$.
  Supposons donc que $\prod_{k=1}^{m+1} P_k = \prod_{\ell=1}^{n} Q_\ell$ *avec* $n \geqslant m+1$. *Prenons* P_{m+1}. P_{m+1} *divise* $\prod_{\ell=1}^{n} Q_\ell$. *D'après la proposition précédente, il n'y a que deux possibilités : soit* P_{m+1} *est premier avec chacun des* Q_ℓ *soit il est associé à l'un d'entre eux. Le prmier cas ne se présente pas, car si* P_{m+1} *était premier avec chacun des* Q_ℓ *il serait premier avec leur produit ce qui n'est pas possible* ($\deg p_1 \geqslant 1$)*. Reste donc le second cas. Il existe* $\ell_0 \in [\![1, n]\!]$ *tel que* P_{m+1} *soit associé à* Q_{ℓ_0} *auquel cas ces deux polynômes - unitaires - sont égaux. On en déduit que* $\prod_{k=1}^{m} P_k = \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq \ell_0}} Q_\ell$. *Maintenant, en utilisant la propriété de récurrence u rang* m*, on en déduit que* $m = n-1$ *et que les* $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ *sont les* $(Q_\ell)_{\ell \neq \ell_0}$. *Ce qu'il fallait démontrer.*
- *Existence : Elle se démontre par récurrence sur le degré. Tout polynôme non nul de degré* $\leqslant 1$ *est soit constant, soit irréductible. On considère donc un polynôme non nul. Soit il est irréductible et il n'y a rien à faire, soit il peut s'écrire comme produit de deux polynômes de degré strictement inférieur et alors on applique la propriété de récurrence à chacun de ces deux polynômes.*

Le chapitre fut copieux. Pour s'en convaincre, il convient de jeter un coup d'œil au diagramme :


20. Arith-
-métique
PPCM
Décomposition
en facteurs
premiers
22. Frac-
tions ra-
tionnelles
Lemme
de Gauss
Division
Euclidienne
PGCD
Identité
de Bezout
Décomposition
en éléments
simples
Lemme
de Gauss
Division
Euclidienne
PGCD
Identité
de Bezout
Détermination
des pôles
multiples
PPCM
Décomposition
en produit
d'irréductibles
DL d'un
quotient
21.
Polynômes
Formule
de Leibniz
Division
suivant les
puissances
croissantes
14.
Dévelop-
-pements
limités
Fonction
Polynôme
sur ℝ
Théorème de
d'Alembert
Formule
de Leibniz
Théorème
de Rolle
Formule
de Taylor
$\mathbb{K}_n[X]$
Bolzano-
Weierstrass
16. Suites
á valeurs
dans ℂ
Base des
$(X-a)^k$
Famille
échelonée
en valuation
Polynômes
de matrices
12.
Fonctions
dérivables
Famille
échelonée
en degré
23. Espaces
vectoriels
24. Di-
mension
des E.V.
25. Ma-
trices

21.6 Exercices

21.6.1 L'anneau des polynômes

Exercice 21.1 ♡

Calculer $P = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots\left(1+X^{2^n}\right)$.

Solution : *Le produit* $(1-X)P$ *se téléscope en* $(1-X)P = 1 - X^{2^{n+1}}$. *On en déduit que* $P = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k$.

Exercice 21.2 ♡

Soit P *le polynôme* $P(X) = (1+X)(1+qX)(1+q^2X)\dots(1+q^{n-1}X), (q \neq 1)$.
Etablir une relation entre $P(qX)$ *et* $P(X)$. *En déduire la valeur des coefficients de* P.

Solution : *On a* $(1+X)P(qX) = (1+q^nX)P(X)$. *En posant* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, *on en déduit que pour* $k \geqslant 1$, $a_k\left(1-q^k\right) = a_{k-1}\left(q^{k-1}-q^n\right)$. *On en déduit, puisque* $a_0 = 1$, $a_k = \dfrac{1-q^n}{1-q} \times \dfrac{q-q^n}{1-q^n} \times \dots \times \dfrac{q^{k-1}-q^n}{1-q^k}$.

Exercice 21.3 ♡

Déterminer les coefficients de

1. $(1+X+X^2+\dots+X^n)^2$.
2. $(1-X+X^2+\dots+(-1)^nX^n)^2$.
3. $(1+X+X^2+\dots+X^n).(1-X+X^2-\dots+(-1)^nX^n)$

Solution :

1. *En développant* $(1+X+X^2+\dots+X^n) \times (1+X+X^2+\dots+X^n) = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, *on trouve* $a_k = k+1$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant n$ *et* $a_k = 2n+1-k$ *pour* $n \leqslant k \leqslant 2n$.
2. *D'après le résultat précédent, en composant par le polynôme* $-X$, *on trouve :*
$(1-X+X^2+\dots+(-1)^nX^n)^2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) X^k + \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k (2n+1-k) X^k$.
3. *Si* $k \leqslant n$, *le coefficient* a_k *de* X^k *est* $(-1)^k(1-1+1-\dots)$ *sachant qu'il y a* $k+1$ *termes dans la parenthèse. Donc* $a_k = 1$ *lorsque* k *est pair et* $a_k = 0$ *lorsque* k *est impair. Maintenant, lorsque* $n \leqslant k \leqslant 2n$, *on écrit* $k = n+\ell$ *et le coefficient de* X^k *est* $(-1)^\ell + (-1)^{\ell+1} + \dots + (-1)^n$ *soit* $n-\ell+1$. *Là encore si* $n-\ell+1$ *est pair tous les termes s'annulent et le coefficient* a_k *est nul. Cela se produit lorsque* $n-(k-n)+1$ *est pair c'est-à-dire lorsque* k *est impair. Sinon, lorsque* k *est pair* a_k *est égal au premier (ou au dernier) terme de la somme, à savoir* $(-1)^\ell = (-1)^{k-n} = (-1)^n$ *puisque* k *est pair.*
Exemples : $n = 4$. n *est pair,* $(1+X+X^2+X^3+X^4)(1-X+X^2-X^3-X^4) = 1+X^2+X^4+X^6+X^8$.
$n = 5$. n *est impair,* $(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)(1-X+X^2-X^3-X^4+X^5) = 1+X^2+X^4-X^6-X^8-X^{10}$.

Exercice 21.4 ♡

Calculer $S = (n-1) + (n-2)\times 2 + \dots + 2(n-2) + (n-1)$.

Solution :

1. *Tout d'abord un calcul sans malice :* $S = \sum_{k=0}^{n} k(n-k) = n\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 = n\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{n(n+1)}{6}[3n-2n-1] = \dfrac{n(n+1)(n-1)}{6}$. *Mais où sont les polynômes ?*
2. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$, *on a* $P' = \sum_{k=0}^{n} kX^{k-1}$ *et* $P'' = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)X^{k-2}$. S *est le coefficient de degré* $n-1$ *dans le polynôme* $(P')^2$.
Par ailleurs $(P^2)' = 2PP'$ *et* $(P^2)'' = 2P'^2 + 2PP''$.
Le coefficient de X^{n+1} *dans* (P^2) *c'est* $n+1$. *En dérivant deux fois,*
Le coefficient de X^{n-1} *dans* $(P^2)''$ *c'est* $(n+1)(n+1)n$.
D'autre part le coefficient de X^{n-1} *dans* $(P^2)''$ *c'est* $(n+1)n + n(n-1) + \dots + 2\times 1 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)k = \sum_{k=1}^{n} k^2 +$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$. *On en déduit* $n(n+1)^2 = 2S + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)$, *d'où* $2S = n(n+1)\left[(n+1)-1-\frac{2n+1}{3}\right] = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$. *On retrouve bien le même résultat.*

Exercice 21.5 ♡

Trouver tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ *vérifiant :*

1. $Q^2(X) = XP^2(X)$.
2. $P \circ P = P$.
3. $P(X^2) = P(X)$
4. $P(X+1) = XP(X)$

Solution :

1. *Soient* P *et* Q *deux polynômes vérifiant l'égalité. On a alors :* $2\deg Q = 2\deg P + 1$ *ce qui est impossible à moins que* $P = Q = 0$. *On vérifie réciproquement que si* $P = Q = 0$ *alors* P *et* Q *vérifient l'égalité.*
2. *Le polynôme nul est solution de l'équation. Soit* P *un polynôme non nul vérifiant l'égalité. On a :* $(\deg P)^2 = \deg P$ *ce qui amène* $\deg P = 1$ *ou* $\deg P = 0$. *Si* $\deg P = 1$ *alors il existe* $a, b \in \mathbb{C}$ *tels que* $P = aX + b$. *On a alors* $P \circ P = P$ *si et seulement si* $a = 1$ *et* $b = 0$ *donc si et seulement si* $P = X$. *Si* $\deg P = 0$, P *est alors un polynôme constant et on vérifie facilement que* P *est solution de l'équation. L'ensemble des solutions de l'équation est donc* $\boxed{\{X, \alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\}}$.
3. *Le polynôme nul est solution de l'équation. Soit* P *un polynôme non nul vérifiant l'égalité. On a :* $2\deg P = \deg P$ *ce qui n'est possible que si* $\deg P = 0$ *c'est à dire que si* P *est un polynôme constant. On vérifie que tout polynôme constant est solution de l'équation et l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des polynômes constants.*
4. *On vérifie que le polynôme nul est solution de l'équation. Supposons qu'il existe un polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *non nul solution de l'équation. Alors* $\deg P = \deg P(X+1) = 1 + \deg P$ *ce qui n'a pas de sens. Donc la seule solution de l'équation est le polynôme nul.*

Exercice 21.6 ♡

Trouver tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ *vérifiant :*

1. $P(X^2) = XP(X)$
2. $P(X)^2 = XP(X+1)$
3. $P(X) - P(X-1) = X^2$
4. $(X+3)P(X) = XP(X+1)$

Solution :

1. *Le polynôme nul est solution de l'équation. Soit* P *un polynôme non nul vérifiant l'égalité. On a :* $2\deg P = \deg P + 1$ *ce qui n'est possible que si* $\deg P = 1$. P *est donc de la forme* $P = aX + b$ *avec* $a, b \in \mathbb{C}$. *Mais* P *doit vérifier :* $aX^2 + b = X(aX + b)$ *et donc on a :* $b = 0$. *Réciproquement, on vérifie que les polynômes de la forme* aX *avec* $a \in \mathbb{C}$ *sont solutions de l'équation.*
2. *Le polynôme nul est solution de l'équation. Soit* P *un polynôme non nul vérifiant l'égalité. On a :* $2\deg P = \deg P + 1$ *ce qui n'est possible que si* $\deg P = 1$. P *est donc de la forme* $P = aX + b$ *avec* $a, b \in \mathbb{C}$. *Mais* P *doit vérifier :* $(aX + b)^2 = X(a(X+1) + b)$ *ce qui n'est possible que si* $a = b = 0$. *Seul le polynôme nul est solution de l'équation.*
3. *Soit* P *un polynôme solution de l'équation. Comme* $\deg(P(X) - P(X-1)) = \deg P - 1$, *on a :* $\deg P - 1 = 2$ *et donc* $\deg P = 3$. *On pose* $P_1 = P - P(0)$. P_1 *est aussi une solution et est de la forme* $P_1 = aX^3 + bX^2 + cX$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{C}$. *Injectant dans l'égalité on trouve alors* $P_1 = \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X$ *qui est l'unique solution de l'équation dont la valuation égale* 1. *On obtient toutes les solutions de l'équation en ajoutant les termes constants* $\boxed{P = \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X} + c$.
4. *On vérifie que le polynôme nul est solution de l'équation. Soit* $P = a_nX^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme non nul de degré* $n \in \mathbb{N}$ *solution de l'équation. On identifie les coefficients des termes de degré* n *dans l'égalité* $(X+3)P(X) = XP(X+1)$ *et on obtient :* $na_n = 3a_n$ [1] *. Comme* $a_n \neq 0$, *nécessairement* $n = 3$ *et* $\deg P = 3$. *Cherchons alors les polynômes de la forme* $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$ *solutions de l'équation. On obtient le système*

$$\begin{cases} b - 3a = 0 \\ 2c - a - b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

qui admet comme ensemble solution $\{(a, 3a, 2a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. *Les polynômes solutions de l'équation sont alors les* $a(X^3 + 3X^2 + 2X)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 21.7 ♡

Soit $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ *une fonction polynôme définie sur* $\mathbb{C}$. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sont* $n+1$ *nombres complexes tels que* $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$. *On se propose de redémontrer que les* a_k *sont tous nuls.*

Pour cela on calculera pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ *l'intégrale* $I_k = \int_0^{2\pi} f\left(e^{i\vartheta}\right) e^{-ik\vartheta}\, d\vartheta$ *de deux façons différentes.*

Solution : *On a* $f(z) = 0$ *pour tout* z *complexe, c'est donc vrai a fortiori pour tous les complexes de module* 1. *Donc* $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$, $f\left(e^{i\vartheta}\right) = 0$ *et donc* $I_k = 0$.
D'autre part $I_k = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m e^{im\vartheta}\right) e^{-ik\vartheta}\, d\vartheta = \sum_{m=0}^{n} a_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-k)\vartheta}\, d\vartheta$. *Or pour* $p \in \mathbb{Z}^*$, $J_p = \int_0^{2\pi} e^{ip\vartheta}\, d\vartheta = \left[\frac{e^{ip\vartheta}}{ip}\right]_0^{2\pi} = 0$ *et* $J_0 = 2\pi$. *Donc* $I_k = 2\pi a_k$.
On en déduit $a_k = 0$ *et ce pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 21.8 ♡♡

On considère un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ *à coefficients complexes et l'on note*

$$M = \sup_{z \in \mathbb{C},\ |z|=1} |P(z)|$$

1. *On note pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, ω_k *les* $n+1$ *racines* $(n+1)$*ième de l'unité. Pour* $p \in [\![0, n]\!]$, *calculer la somme*

$$S_p = \sum_{k=0}^{n} \omega_k^{-p} P(\omega_k)$$

2. *En déduire que* $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $|a_p| \leqslant M$.

Solution :

1. *En notant* ω *la racine nième primitive de l'unité,*

$$S_p = \sum_{k=0}^{n} \omega^{-kp} \sum_{j=0}^{n} a_j \omega^{jk} = \sum_{j=0}^{n} a_j \Big(\sum_{k=0}^{n} \omega^{k(j-p)}\Big)$$

Mais

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\omega^{j-p}\right)^k = \begin{cases} (n+1) & \text{si } j = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $S_p = (n+1) a_p$.

2. *Soit* $p \in [\![0, n]\!]$. *Avec l'inégalité triangulaire,*

$$\left|(n+1) a_p\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \omega_k^{-p} P(\omega_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |P(\omega_k)| \leqslant (n+1) M$$

d'où le résultat.

21.6.2 Dérivation, formule de Taylor

Exercice 21.9 ♡

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ *vérifiant :*

1. $P - XP' = X$
2. $P'^2 = 9P$
3. $\left(X^2 + 4\right) P'' = 6P$.

Solution :

1. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$. *Supposons que* $P - XP' = X$. *Alors* $P \neq 0$. *Notons* $n = \deg P$. *Comme* $\deg(P - XP') \leqslant n$, *il faut que* $n \geqslant 1$. *Mais si l'on cherche le coefficient de* X^n *dans* $P - XP'$, *on trouve* $(n-1) a_n$. *Par conséquent, si* $n = 1$, $\deg(P - XP') \leqslant 0$ *et ce n'est pas possible, et si* $n \geqslant 2$, $\deg(P - XP') = n$, *ce qui n'est pas possible non plus. Il n'existe donc aucun polynôme vérifiant la propriété.*
2. *Le polynôme nul est solution de l'équation. Supposons que* $P \in \mathbb{R}[X]$ *soit solution de l'équation. Alors :* $2\left(\deg P - 1\right) = \deg P$ *et donc* $\deg P = 1$. *On a alors* $P = aX + b$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$. *Mais* a *et* b *doivent vérifier :* $a^2 = 9^p aX + b$ *ce qui n'est possible que si* $a = b = 0$. *La seule solution de l'équation est donc le polynôme nul.*

3. *Le polynôme nul est solution de l'équation, c'est même le seul polynôme de degré* $\leqslant 1$ *solution de l'équation. Supposons que* $P \in \mathbb{R}[X]$ *soit solution et de degré* $n \geqslant 2$. *Raisonnant sur le monôme de degré* n *dans* P, *on obtient :* $n(n-1) = 6$ *ce qui donne* $n = 3$. *On vérifie par ailleurs que les seuls polynômes de la forme* $aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ *solutions de l'équations sont ceux de la forme :* $aX^3 + 4aX$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 21.10 ♡♡

Déterminer les polynômes non-constants $P \in \mathbb{R}[X]$ *tels que* P' *divise* P

Indication 21.5 : Etudier le degré du quotient, et utiliser la formule de Leibniz

Solution : *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *une solution de l'équation. Il existe* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P = QP'$. *On a forcément* $\deg Q = 1$ *et donc* $Q = \lambda(X-a)$ *où* $a, \lambda \in \mathbb{R}$. *En identifiant les coefficients de* X^n, *on trouve* $\lambda = \frac{1}{n}$ *et donc :*

$$nP = (X-a)P'$$

On utilise alors la formule de Leibniz. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, *il vient :* $nP^{(k)} = (X-a)P^{(k+1)} + kP^{(k)}$. *D'où* $(n-k)P^{(k)} = (X-a)P^{(k+1)}$. *On a alors* $P^{(k)}(a) = 0$ *pour* $k \in [\![0, n]\!]$ *et donc* $(X-a)^n \mid P$. *Alors* $P = \lambda(X-a)^n$. *On vérifie réciproquement que tout polynôme de cette forme convient.*

Exercice 21.11 ♡♡

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ *vérifiant :*

$$P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0$$

Indication 21.5 : Utiliser une formule de Taylor.

Solution : *Ecrivons les deux formules de Taylor :*

$$P(X+1) = P(X) + P'(X) + \frac{1}{2!}P''(X) + \cdots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(X)$$

$$P(X-1) = P(X) - P'(X) + \frac{1}{2!}P''(X) + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}P^{(n)}(X)$$

Alors la condition de l'énoncé dit que :

$$P''(X) + \frac{1}{4!}P^{(4)}(X) + \cdots = 0$$

Mais alors $P''(X) = 0$. *En effet, si* $P''(X) \neq 0$, $P''(X) = a_n X^n + \ldots$ *avec* $a_n \neq 0$. *Mais en cherchant le terme en* X^n *dans l'égalité précédente, on trouve qu'il vaut* $a_n X^n$ *(tous les polynômes* $P^{(4)}, \ldots$*sont de degré strictement inférieur à* n. *Donc* P *est un polynôme de degré* $\leqslant 1$ *:*

$$P(X) = aX + b$$

Et on vérifie réciproquement que tout polynôme de cette forme convient.

Une autre solution : On résout $P(X+1) - P(X) = 0$. *L'ensemble des solutions c'est l'ensemble des polynômes constants. On résout ensuite* $P(X+1) - P(X) = c$. *L'ensemble des solutions c'est l'ensemble des polynômes* $cX + d$. *Maintenant* $P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) = D(D(P))$ *avec* $D(P) = P(X+1) - P(X)$. *On en déduit que les polynômes de degré* $\leqslant 1$ *sont les solutions de* $P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) = 0$ *puis que les polynômes de degré* $\leqslant 1$ *sont les solutions de* $P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0$.

Exercice 21.12

1. *Quels sont les polynômes de* $\mathbb{C}[X]$ *tels que leur fonction polynôme associée soit une surjection de* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{C}$ *?*
2. *Quels sont les polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *tels que leur fonction polynôme associée soit une surjection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

Solution :

1. *Ce sont tous les polynômes* P *de degré* $\geqslant 1$. *En effet, soit* $z \in \mathbb{C}$, *le polynôme* $P - z$ *admet au moins une racine* α *d'après le théorème fondamental de l'algèbre. Cela signifie que* $P(\alpha) = z$ *et donc que la valeur* z *est atteinte par* P. *Donc* P *est une surjection de* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{C}$.
2. *Ce sont les polynômes de degré impair.*

21.6.3 Arithmétique des polynômes

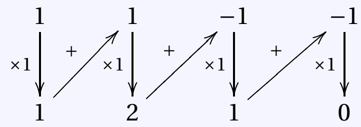
Exercice 21.13 ♡

Prouver que le polynôme A *divise le polynôme* B *et déterminer le quotient correspondant :*

1. $A = X - 1$ *et* $B = X^3 + X^2 - X - 1$
2. $A = X + 2$ *et* $B = 2X^3 + 5X^2 + X - 2$
3. $A = X - i$ *et* $B = X^3 - 2iX^2 - i$
4. $A = X + 1$ *et* $B = X^3 + X^2 - X - 1$

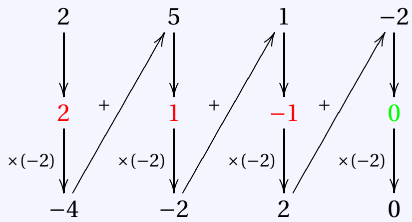
Solution :

1. *On utilise le schéma de Horner :*



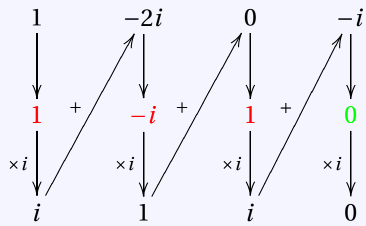
On trouve ainsi $B(1) = 0$ *et* $X^3 + X^2 - X - 1 = (X-1)(X^2 + 2X + 1)$

2. *Idem.*

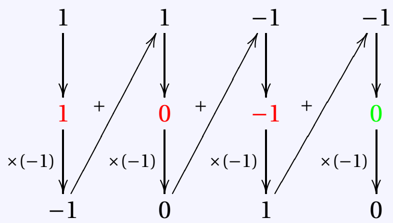


Le zéro en vert montre que A *divise* B. *Les coefficients du quotient s'affichent en rouge. Le quotient est :* $2X^2 + X - 1$.

3. *Idem.*



Le quotient est :$X^2 - iX + 1$.



4. *Idem. Le quotient est :*$X^2 - 1$.

Exercice 21.14 ♡

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ *divisibles par* $(X-1)$ *ayant même reste dans les divisions euclidiennes par* $(X-2), (X-3), (X-4)$.

Solution : *Soit* $P \in \mathbb{R}_3[X]$ *un polynôme vérifiant ces propriétés. On pose* $\mu = P(2)$ $P(X) - P(2)$ *est par hypothèse divisible par* $X-2$, X_3 *et* $X-4$. *Il est donc divisible par leur produit. Comme* $\deg P \leqslant 3$, *on peut écrire* $P(X) - \mu = \lambda(X-2)(X-3)(X-4)$. *La condition* $P(1) = 0$ *se traduit par* $-6\lambda + \mu = 0$. *Donc* $P(X) = \lambda(X^3 - 9X^2 + 26X - 18)$. *Par division euclidienne :*

$$P = \lambda(X-1)(X^2 - 8X + 18)$$

Exercice 21.15

Soit $A = X^{100} - X^4 + X - 1$ *et* $B = X^3 + X^2 + X + 1$. *Trouver le reste de la division de* A *par* B.
Indication 21.5 : Considérer $X^{100} - X^4$.

Solution : *On a* $B = (X+1)(X-i)(X+i)$. $-1, i$ *et* $-i$ *sont aussi racines de* $X^{100} - X^4$, *donc* $X^{100} - X^4$ *est divisible par* $(X+1)(X-i)(X+i)$. *On en déduit que le reste de la division de* A *par* B *est* $X - 1$.

Exercice 21.16 ♡♡

Soit $n \geqslant 1$. Trouver une CNS pour que $(X-1)^2 \mid aX^{n+1} + bX^n + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver le quotient.

Solution : *Notons $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$. Le polynôme $(X-1)^2$ divise P ssi 1 est racine double au moins de P, c'est à dire $P(1) = P'(1) = 0$. On trouve donc que $a = n$ et $b = -(n+1)$. On a alors*

$$P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = nX^n(X-1) - (X^n - 1) = (X-1)[nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1]$$

Mais en factorisant,

$$nX^n - X^{n-1} - \cdots - X - 1 = (X-1)[nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \cdots + 3X^2 + 2X + 1]$$

Donc

$$\boxed{Q = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k}$$

Exercice 21.17

1. *Montrer que $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.*
2. *Déterminer explicitement une relation de Bezout entre $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$*

Solution :

1. *j est racine de $X^2 + X + 1$. Mais il n'est pas racine de $X^5 - 1$. Par conjugaison, $\overline{j}$ n'est pas non plus racine de $X^5 - 1$. Aucune racine dans $\mathbb{C}$ de $X^2 + X + 1$ n'est racine de $X^5 - 1$. Par conséquent $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.*
2. *On descend :*

dividende		*quotient*		*diviseur*		*reste*
$X^5 - 1$	$=$	$(X^3 - X^2 + 1)$	$\times$	$(X^2 + X + 1)$	$-$	$(X+2)$
$X^2 + X + 1$	$=$	$(X-1)$	$\times$	$(X+2)$	$+$	3

ce qui redémontre que $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux. Maintenant, on remonte : $3 = X^2 + X + 1 - (X-1) \times (X+2) = X^2 + X + 1 - (X-1) \times \left[(X^3 - X^2 + 1) \times (X^2 + X + 1) - \left(X^5 - 1\right)\right] = \left(X^2 + X + 1\right)\left[1 - (X-1)(X^3 - X^2 + 1)\right] + (X-1)\left(X^5 - 1\right) = \left(X^2 + X + 1\right)\left(-X^4 + 2X^3 - X^2 - X + 2\right) + (X-1)\left(X^5 - 1\right)$.

Exercice 21.18

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que α est racine double de P ssi α est une racine de $P \wedge P'$.

Solution :
Si α est racine double de P, alors $(X - \alpha)$ divise P et P' et donc divise $P \wedge P'$, ce qui montre que α est racine de $P \wedge P'$. Réciproquement, si α est racine de $P \wedge P'$, comme $(X - \alpha)$ divise $P \wedge P'$, $(X - \alpha)$ divise à la fois P et P', et donc est racine de P et P'. Donc α est racine double de P.

Exercice 21.19

Trouver une CNS pour que $(X^b - X^a) \mid (X^d - X^c)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution : *En utilisant les congruences, il faut que $(b-a) \mid (d-c)$.*

Exercice 21.20

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$(P - Q) \mid P o P - Q o Q \implies (P - Q) \mid (P o Q - Q o P)$$

Solution : *Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $P - Q$, autrement dit $P(z) = Q(z)$. Dire que $(P - Q) \mid PoP - QoQ$, c'est dire que toute racine complexe de $P - Q$, est aussi une racine de $PoP - QoQ$. Donc on a $P(P(z)) = Q(Q(z))$. Mais alors on a aussi $P(Q(z)) = Q(P(z))$. Mais on démontre ici que $PoQ - QoP$ a toutes les racines de $P - Q$. C'est insuffisant. Il faut encore démontrer que les ordres de multiplicités pour $PoQ - QoP$ sont supérieurs à à ceux pour $P - Q$. On pourrait dériver, mais les formules (de Faà di Bruno) deviennent vite compliquées. Il vaut mieux chercher une autre voie :*

On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. On a donc $PoQ - PoP = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(Q^k - P^k\right) = \sum_{k=1}^{p} a_k \left(Q^k - P^k\right)$. Or pour $k \geqslant 1$, $P - Q \mid Q^k - P^k = (Q - P)\left(Q^{k-1} + Q^{k-2}P + \ldots + QP^{k-2} + P^{k-1}\right)$. Donc $P - Q \mid PoQ - PoP$. De même $P - Q \mid QoQ - QoP$. Donc $P - Q$ divise la somme $PoQ - PoP + QoQ - QoP$. Comme par hypothèse $P - Q \mid PoP - QoQ$, on en déduit que $(P - Q) \mid PoP - QoQ$.

Exercice 21.21

Soit un entier $n \geqslant 2$. Montrer que le polynôme

$$P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 1$$

est divisible par $(X-2)(X-3)$ et calculer le quotient.

Solution : *On calcule $P(3) = P(2) = 0$ et donc $(X-2)/P$, $(X-3)/P$ et comme $(X-2) \wedge (X-3) = 1$, il vient que $(X-2)(X-3)/P$. Pour le quotient par $(X-2)(X-3)$, développer avec le binôme.*

Exercice 21.22

Soient deux entiers $(n,p) \in \mathbb{N}\star^2$ et un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que

$$A^2 + A \mid A^{2n} + (A+1)^p - 1$$

Solution : *Soit $T = X^{2n} + (X+1)^p - 1$. 0 et -1 sont racines de T, donc $X(X+1) \mid T$. Autrement dit $T = X(X+1)Q$ pour un certain polynôme Q. Donc $ToA = A^{2n} + (A+1)^p - 1 = A(A+1).QoA$. Donc $A(A+1) \mid P$.*

Exercice 21.23

Soit un entier $n \geqslant 2$ et un complexe non-nul $\lambda \in \mathbb{C}^\star$. Déterminer les couples de polynômes $(A,B) \in \mathbb{C}[X]^2$ vérifiant :

$$A^n + B^n = \lambda$$

Solution : *Soient deux polynômes $A, B \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $A^n + B^n = \lambda$. En dérivant, on trouve ($n \geqslant 2$) : $A^{n-1}A' = -B^{n-1}B'$. Mais $A \wedge B = 1$ (si D est un diviseur commun à A et B, il doit diviser λ) et donc $A^{n-1} \wedge B^{n-1} = 1$ également. Donc puisque $A^{n-1}/B'B^{n-1}$, d'après le théorème de Gauss, on doit avoir A^{n-1}/B'. Il existe donc un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = A^{n-1}Q$. Mais en notant $p = \deg A$ et $q = \deg B$, d'après l'équation on trouve que $p = q$ et alors puisque $B' = QA^{n-1}$, en examinant les degrés, on a $\deg Q + (n-1)p = p - 1$, ce qui donne $\deg Q = (2-n)p - 1 < 0$. Par conséquent, $B' = 0$ et donc $B = b$ est constant. On a également $A = a$ constant, avec les complexes (a,b) vérifiant $a^n + b^n = \lambda$.*

Exercice 21.24

Soit P_n la suite de polynômes définie par $P_1 = 1; P_2 = X$ et $\forall n \geqslant 2, P_n = X.P_{n-1} - P_{n-2}$. Démontrer que $\forall n \geqslant 2 P_n^2 - P_{n-1}.P_{n+1} = 1$. En déduire que P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.

Solution : *On a $P_3 = XP_2 - P_1 = X^2 - 1$ et donc $P_2^2 - P_1P_3 = X^2 - \left(X^2-1\right) \times 1 = 1$.*
$P_{n+1}^2 - P_n.P_{n+2} = P_{n+1}(XP_n - P_{n-1}) - P_n(XP_{n+1} - P_n) = XP_{n+1}P_n - P_{n+1}P_{n-1} - XP_nP_{n+1} + P_n^2 = P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1}$. La récurrence tourne toute seule.

Exercice 21.25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Démontrer qu'il existe un unique couple $(P,Q) \in \mathbb{Q}_{n-1}[X]$, tel que $(1-X)^nP(X) + X^nQ(X) = 1$.*
2. *Démontrer que $P(X) = Q(1-X)$.*
3. *Démontrer que $\exists a \in \mathbb{Q}, (1-X).P'(X) - n.P(X) = aX^{n-1}$.*
4. *Calculer $P(0)$.*
5. *Déterminer les coefficients de P.*

Solution :

1. *Unicité : Soit (P_1, Q_1) un autre couple. On a $(1-X)^n(P-P_1) + X^n(Q-Q_1) = 0$. Donc X^n divise $(1-X)^n(P-P_1)$. Comme X^n et $(1-X)^n$ sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, X^n divise $P - P_1$. Comme ce dernier est de degé $< n$, $P - P_1 = 0$. Par suite, $Q = Q_1$.*
   Existence : Les polynômes X et $1-X$ sont premiers entre eux. Il en est donc de même pour $(1-X)^n$ et X^n. D'après la propriété de Bezout, il existe deux polynômes P_0 et Q_0 tels que $(1-X)^nP_0(X) + X^nQ_0(X) = 1$. Reste à règler le problème des degrés. Or pour tout polynôme A de $\mathbb{Q}[X]$, le couple $(P_0 - AX^n, Q_0 + A(1-X)^n)$ est aussi solution. A partir de là, on effectue la division euclidienne de P_0 par X^n : $P_0 = AX^n + P$ avec $\deg P < n$. En posant $Q = Q_0 + A(1-X)^n$ on a $X^nQ(X) = 1 - (1-X)^nP(X)$. En regardant les degrés, on a $n + \deg Q = n + \deg P$ et donc $\deg Q < n$.
2. *En substituant $1-X$ à X on a $X^nP(1-X) + (1-X)^nQ(1-X) = 1$. Comme $\deg Q(1-X) = \deg Q < n$, d'après l'unicité pécédente, on en déduit que $Q(1-x)$, qui joue le rôle de P est égal à P.*

3. *En dérivant* $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$, *on trouve* $-n(1-X)^{n-1}P + nX^{n-1}Q(X) + (1-X)^n P' + X^n Q'(X) = 0$, *soit* $(1-X)^{n-1}((1-X)P' - nP) + X^{n-1}(XQ' + nQ) = 0$. *On applique à nouveau le lemme de Gauss car* X^{n-1} *divise* $(1-X)^{n-1}((1-X)P'-nP)$ *et est premier avec* $(1-X)^{n-1}$ *donc* X^{n-1} *divise* $(1-X)P'-nP$. *Comme* $\deg((1-X)P'-nP) \leqslant n-1$, *on en déduit l'existence d'un* $a \in \mathbb{Q}$ *(éventuellement nul) tel que* $(1-X)P' - nP = aX^{n-1}$.
4. *On a* $(1-0)^n P(0) + 0^n Q(0) = 1$ *donc* $P(0) = 1$.
5. *On écrit* $P = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k X^k$, $P' = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1}$, $XP' = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^k$. *D'où*

$$(1-X)P' - nP = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) a_{k+1} X^k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^k - \sum_{k=1}^{n-1} n a_k X^k - n = aX^{n-1}.$$

On regarde, suivant les valeurs de k, le coefficient de X^k.

- $k = n-1$: $-(n-1)a_{n-1} - na_{n-1} - n = (1-2n)a_{n-1} - n = a$.
- $k = 1, \dots, n-2$: $(k+1)a_{k+1} - ka_k - na_k = 0$ *soit* $(k+1)a_{k+1} = (n+k)a_k$ *ou* $a_{k+1} = \dfrac{n+k}{k+1} a_k$.
- $k = n-1$: $a_1 = n$.

On trouve

$$\underbrace{a_{n-1}}_{k=n-2} = \frac{n-2+n}{n-1} \times \frac{2n-3}{n-2} \times \dots \times \underbrace{\frac{n+1}{2}}_{k=1} \times \underbrace{n}_{=a_1}$$

soit $a_{n-1} = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \binom{2n-2}{n-1}$.

De même $a_k = \dfrac{n+k-1}{k} \times \dots \times \dfrac{n+1}{2} \times n = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$.

21.6.4 Division euclidienne

Exercice 21.26

Effectuer la division euclidienne de A *par* B *dans les cas suivants :*

1. $A = X^3 + X^2 - 2X + 3$ *et* $B = X^2 + 2X - 1$
2. $A = X^4 + 2X^2 - 3X^3 - 2X + 4$ *et* $B = X^2 + 1$
3. $A = X^2 + IX + 3$ *et* $B = X + 2i$
4. $A = X$ *et* $B = X^2 + 1$
5. $A = 2X^2 + 4X - 1$ *et* $B = X^2 + 3X - 1$
6. $A = X^2 - 1$ *et* $B = X^3 + 2X - 1$

Solution :

1. $X^3 + X^2 - 2X + 3 = (X-1)\left(X^2 + 2X - 1\right) + (X+2)$
2. $X^4 + 2X^2 - 3X^3 - 2X + 4 = \left(X^2 - 3X + 1\right)\left(X^2 + 1\right) + (X+3)$
3. $X^2 + IX + 3 = (X - i)(X + 2i) + 3$
4. $X = 0\left(X^2 + 1\right) + X$.
5. $2X^2 + 4X - 1 = 2\left(X^2 + 3X - 1\right) - 2X + 1$
6. $X^2 - 1 = 0\left(X^3 + 2X - 1\right) + X^2 - 1$

Exercice 21.27 ♡

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* r *et* s *les restes de la division de* P *par* $(X-a)$ *et par* $(X-b)$. *Quel est le reste de la division de* P *par* $(X-a)(X-b)$ *? (on déterminera ce reste en fonction de* r, s *lorsque* $a \neq b$ *et si* $a = b$, *en fonction de* $P(a)$ *et* $P'(a)$.

Indication 21.5 : Lorsque $a = b$, *utiliser la formule de Taylor.*

Solution : *Par division euclidienne, il existe un unique couple* $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ *tel que* $P = (X-a)(X-b)Q + R$ *et* $\deg R \leqslant 1$. *Donc* $R = \alpha X + \beta$ *où* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

– *Si* $a \neq b$, *alors l'égalité précédente amène* $P(a) = \alpha a + \beta$ *et* $P(b) = \alpha b + \beta$. *On résout le système formé par ces deux équations et on trouve* $R = \dfrac{P(a) - P(b)}{a-b} X + \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b-a}$. *Comme* $r = P(a)$ *et* $s = P(b)$, *il vient* $\boxed{R = \dfrac{r-s}{a-b} X + \dfrac{br - as}{b-a}}$.

– *Si $a=b$, on écrit la formule de Taylor :*

$$P(X)=P(a)+(X-a)P'(a)+(X-a)^2Q(X)$$

et le reste vaut alors $\boxed{R=P(a)+(X-a)P'(a)}$.

Exercice 21.28 ♡

Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$.

Solution : *En utilisant la formule de Taylor, on trouve*

$$X^n=1+n(X-1)+\frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2+(X-1)^3Q$$

où $Q\in\mathbb{R}[X]$. Par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne de deux polynômes, on trouve pour le reste

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}(X-1)^2+n(X-1)+1}.$$

Exercice 21.29 ♡

Soient $a\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Solution : *Par division euclidienne, on a :*

$$P=Q(X-a)^2+\alpha X+\beta$$

où $Q\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ et il vient $P'=\left(Q'(X-a)+2Q\right)(X-a)+\alpha$. On remplace X par a dans ces deux égalités et on obtient le système :

$$\begin{cases}P(a) &=a\alpha+\beta\\ P'(a) &=\alpha\end{cases}.$$

Le reste est donc : $\boxed{P'(a)X+\left(P(a)-aP'(a)\right)}$.

Exercice 21.30 ♡

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X\sin a+\cos a)^n$ par X^2+1.

Solution : *Par division euclidienne, on a :*

$$(X\sin a+\cos a)^n=Q\left(X^2+1\right)+\alpha X+\beta$$

avec $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On remplace X par les racines i et $-i$ de X^2+1, on obtient :

$$\begin{cases}e^{ia} &=\alpha i+\beta\\ e^{-ia} &=\alpha i+\beta\end{cases}$$

On résout ce système, il vient : $\alpha=\sin a$ et $\beta=\cos a$. Donc le reste recherché est : $\boxed{X\sin a+\cos a}$.

Exercice 21.31

Pour $m\in\mathbb{N}^*$ et $\vartheta\in\mathbb{R}$, on considère $F_{m,\vartheta}=X^{2m}-2X^m\cos m\vartheta+1\in\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $F_{m,\vartheta}$ est divisible par $F_{1,\vartheta}$. Calculer le quotient.

Solution : *D'abord, il est bon de remarquer que $F_{m,\vartheta}=\left[X^m-\left(e^{i\vartheta}\right)^m\right]\left[X^m-\left(e^{-i\vartheta}\right)^m\right]$. On en déduit que le quotient égale $\left[X^{m-1}+e^{i\vartheta}X^{m-2}+\ldots+e^{i(m-1)\vartheta}\right]\left[X^{m-1}+e^{-i\vartheta}X^{m-2}+\ldots+e^{-i(m-1)\vartheta}\right]$. Les coefficients se calculent plutôt bien. 1 pour X^{2m-2}, $e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}=2\cos\vartheta$ pour X^{2m-3}, $e^{2i\vartheta}+1+e^{-2i\vartheta}=1+2\cos2\vartheta$ etc. Pour la suite on prendra $\vartheta\not\equiv0 \pmod\pi$. Pour $0\leqslant k\leqslant m-1$, le coefficient de X^k égale $e^{i(m-k-1)\vartheta}.e^{-i(m-1)\vartheta}+e^{i(m-k-2)\vartheta}e^{-i(m-2)\vartheta}+\ldots e^{-i(m-k-1)\vartheta}e^{i(m-1)\vartheta}$. On a la somme d'une suite géométrique de $k+1$ termes de raison $e^{2i\vartheta}$ soit $e^{-ik\vartheta}\dfrac{e^{2i(k+1)\vartheta}-1}{e^{2i\vartheta}-1}=e^{-ik\vartheta}\dfrac{e^{ik\vartheta}}{e^{i\vartheta}}\dfrac{e^{i(k+1)\vartheta}-e^{-i(k+1)\vartheta}}{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}=\dfrac{\sin(k+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$. Les coefficients sont symétriques, c'est-à-dire que le coefficient de X^{2m-2-k} est aussi $\dfrac{\sin(k+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$.*
Une dernière vérification, car il en faut pour tous les goûts : Il s'agit de calculer les coefficients de

$$\left(X^2-2X\cos\vartheta+1\right)\left(\sin\vartheta X^{2m-2}+\sin2\vartheta X^{2m-3}+\ldots+\sin(m-1)\vartheta X^m+\sin m\vartheta X^{m-1}+\sin(m-1)\vartheta X^{m-2}+\ldots+\sin\vartheta\right).$$

Le coefficient constant vaut $\sin\vartheta$*, pour* $2 \leqslant k \leqslant m-1$*, le coefficient de* X^k *vaut* $\sin(k+1)\vartheta - 2\cos\vartheta\sin k\vartheta + \sin(k-1)\vartheta = \sin k\vartheta\cos\vartheta + \cos k\vartheta\sin\vartheta - 2\cos\vartheta\sin k\vartheta + \sin k\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos k\vartheta = 0$.
le coefficient de X^m *vaut* $\sin(m+1)\vartheta - 2\cos\vartheta\sin m\vartheta + \sin(m-1)\vartheta = \sin m\vartheta\cos\vartheta - \cos m\vartheta\sin\vartheta - 2\cos\vartheta\sin m\vartheta + \sin m\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos m\vartheta = -2\cos m\vartheta\sin\vartheta$*. En utilisant les symétries des coefficients (on dit que ces polynômes sont réciproques. Voir aussi l'exercice 21.47 p.801), le coefficient de* X^k *pour* $m+1 \leqslant k \leqslant 2m-1$ *est nul et celui de* X^{2n} *vaut* $\sin\vartheta$*. D'où* $\left(X^2 - 2X\cos\vartheta + 1\right)\left(\sin\vartheta X^{2m-2} + \sin 2\vartheta X^{2m-3} + \ldots + \sin(m-1)\vartheta X^m + \sin m\vartheta X^{m-1} + \sin(m-1)\vartheta X^{m-2} + \ldots + \sin\vartheta\right)$
$= \sin\vartheta\left(X^{2m} - 2X^m\cos m\vartheta + 1\right)$.

Exercice 21.32 ♡

Vérifier que $X^n\sin\vartheta - X.\sin n\vartheta + \sin(n-1)\vartheta$ *est divisible dans* $\mathbb{C}[X]$ *par* $X^2 - 2X.\cos\vartheta + 1$ *et calculer le quotient.*

Solution : *Les racines de* $X^2 - 2X\cos\vartheta + 1$ *sont* $e^{i\vartheta}$ *et* $e^{-i\vartheta}$*. Vérifions qu'elles sont aussi racines du dividende. Pour* $e^{i\vartheta}$ *:*
$e^{in\vartheta}\dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i} - e^{i\vartheta}\dfrac{e^{in\vartheta}-e^{-in\vartheta}}{2i} + \dfrac{e^{i(n-1)\vartheta}-e^{-i(n-1)\vartheta}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left[e^{i(n+1)\vartheta} - e^{i(n-1)\vartheta} - e^{i(n+1)\vartheta} + e^{-i(n-1)\vartheta} + e^{i(n-1)\vartheta} - e^{-i(n-1)\vartheta}\right] = 0$*. Comme le dividende est un polynôme réel, le conjugué de* $e^{i\vartheta}$ *est aussi racine.*
On pose la division sans se dégonfler :

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
X^n\sin\vartheta & & & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & X^2 & -2X\cos\vartheta & +1 \\ \hline
 & X^{n-1}\sin 2\vartheta & X^{n-2}\sin\vartheta & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & X^{n-2}\sin\vartheta & +X^{n-3}\sin 2\vartheta & \\
 & & 2X^{n-2}\sin 2\vartheta\cos\vartheta & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & & +X^{n-4}\sin 3\vartheta + \ldots & \\
= & & X^{n-2}\sin\vartheta(4\cos^2\vartheta - 1) & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & & & \\
= & & X^{n-2}\sin 3\vartheta & -X.\sin n\vartheta & \sin(n-1)\vartheta & & &
\end{array}$$

On peut donc supposer que le quotient est $X^{n-2}\sin\vartheta + X^{n-3}\sin 2\vartheta + \ldots + \sin(n-1)\vartheta$*. En remarquant que* $\sin x = \mathrm{I}m(e^{ix})$ *on est amené à calculer* $\left(X^{n-2}e^{i\vartheta} + X^{n-3}e^{2i\vartheta} + \ldots + e^{i(n-1)\vartheta}\right)\left(X - e^{i\vartheta}\right) = e^{i\vartheta}\left(X^{n-2} + X^{n-3}e^{i\vartheta} + \ldots + e^{i(n-2)\vartheta}\right)\left(X - e^{i\vartheta}\right) = e^{i\vartheta}\left(X^{n-1} - e^{i(n-1)\vartheta}\right) = e^{i\vartheta}X^{n-1} - e^{in\vartheta}$*. En multipliant le résultat précédent par* $X - e^{i\vartheta}$, $\left(X^{n-2}e^{i\vartheta} + X^{n-3}e^{2i\vartheta} + \ldots + e^{i(n-1)\vartheta}\right)\left(X^2 - 2X\cos\vartheta + 1\right) = e^{i\vartheta}X^n - e^{in\vartheta}X - X^{n-1} + e^{i(n-1)\vartheta}$.
En prenant les parties imaginaires des deux membres, on a bien le résultat annoncé.
La partie imaginaire d'un polynôme P *c'est bien sûr le polynôme* $\frac{1}{2i}\left(P - \overline{P}\right)$.
Remarque : On a aussi démontré que $X^n\cos\vartheta - X^{n-1} - \cos n\vartheta X + \cos(n-1)\vartheta$ *est divisible par* $X^2 - 2X\cos\vartheta + 1$ *et que le quotient est* $X^{n-2}\cos\vartheta + X^{n-3}\cos 2\vartheta + \ldots + \cos(n-1)\vartheta$.

Exercice 21.33 ♡

Soit n *et* m *deux entiers naturels.*

1. *Démontrer que si* $d \mid n$ *alors* $X^d - 1 \mid X^n - 1$.
2. *On pose* $n = mq + r$ *à la faveur d'une division euclidienne.*
   Démontrer que $X^n - 1 \wedge X^m - 1 = X^m - 1 \wedge X^r - 1$.
3. *Démontrer que* $X^n - 1 \wedge X^m - 1 = X^{n\wedge m} - 1$.
4. *Soit* a *un entier naturel. Démontrer que* $a^n - 1 \wedge a^m - 1 = a^{n\wedge m} - 1$.
5. *Montrer que si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors* $\forall P \in \mathbb{K}[X], (P^a - 1).(P^b - 1)$ *divise* $(P-1).(P^{ab}-1)$.

Solution :

1. *On écrit* $n = dk$ *et on a immédiatement* $X^n - 1 = \left(X^d\right)^k - 1 = \left(X^d - 1\right)\left(1 + X^d + X^{2d} + \ldots + X^{d(k-1)}\right)$ *ce qui permet de conclure.*
   Sinon on écrit $X^d - 1 = \displaystyle\prod_{m=0}^{d-1}\left(X - \exp\left(\frac{2i\pi km}{n}\right)\right)$*. Cela veut dire que toutes les racines de* $X^d - 1$ *sont aussi racines de* $X^n - 1$*. Cela veut dire que* $X^n - 1$ *est divisible par chacun des* $X - \exp()\ \frac{2i\pi km}{n}$ *donc par leur produit puisque toutes ces racines sont notoirement distinctes.*
2. *On écrit* $X^n - 1 = X^{mq+r} - X^r + X^r - 1 = X^r\left(X^m q - 1\right) + X^r - 1 = X^r\left(X^m - 1\right)\left(1 + X^m + X^{2m} + \ldots + X^{m(q-1)}\right) + X^r - 1$.
   Comme $\deg X^r - 1 = r < m = \deg X^m - 1$ *on en déduit que* $X^r - 1$ *est le reste et* $X^r\left(1 + X^m + X^{2m} + \ldots + X^{m(q-1)}\right)$ *est le quotient. Par application de l'algorithme d'Euclide, on en déduit* $X^n - 1 \wedge X^m - 1 = X^m - 1 \wedge X^r - 1$.
3. *On effectue en parallèle l'algorithme d'Euclide pour* n *et* m *d'une part, et pour* $X^n - 1$ *et* $X^m - 1$ *d'autre part. Dans le premier cas on appelle* $r_0, r_1, \ldots, r_p, 0$ *la suite des restes. D'après le résultat précédent, la suite des restes pour* $X^n - 1$ *et* $X^m - 1$ *est* $X^{r_0} - 1, X^{r_1} - 1, \ldots, X^{r_p} - 1, 0$*. Dans les deux cas le PGCD est le dernier reste non nul. On en déduit bien que* $X^n - 1 \wedge X^m - 1 = X^{r_p} - 1$ *avec* $r_p = n \wedge m$*. Ce qu'il fallait démontrer.*

4. *On peut parfaitement appliquer la méthode précédente.*
5. *On va commencer par démontrer le résultat pour* $P = X$. *On sait que* $X^a - 1$ *divise* $X^{ab} - 1$ *soit* $X^{ab} - 1 = Q_1 (X^a - 1)$. *De même* $X^{ab} - 1 = Q_2 \left(X^b - 1\right)$. *Or on sait aussi que le PGCD de* $X^a - 1$ *et* $X^b - 1$ *égale* $X - 1$. *Donc on peut écrire* $X^a - 1 = (X-1)Q_3$ *et* $X^b - 1 = (X-1)Q_4$ *avec* $Q_3 \wedge Q_4 = 1$. *Donc on a* $Q_1 Q_3 = Q_2 Q_4$. Q_3 *divise* $Q_2 Q_4$ *et* $Q_3 \wedge Q_4 = 1$, *donc d'apès le lemme de Gauss,* Q_3 *divise* Q_2. *Autrement dit* $Q_2 = Q_3 D$. *Résumons-nous :* $\left(X^{ab} - 1\right)(X - 1) = Q_3 (X-1) D Q_4 (X-1) = D(X) (X^a - 1) \left(X^b - 1\right)$.
   En toute généralité, on a $\left(P^{ab} - 1\right)(P - 1) = D(P(X)) (P^a - 1) \left(P^b - 1\right)$. *Ce qu'il fallait démontrer.*

Exercice 21.34

Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}[X]$ *un morphisme de d'anneaux. Alors* $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \varphi(a) \wedge \varphi(b) = \varphi(a \wedge b)$.

Solution : *Soit* $d = a \wedge b$. *On écrit* $a = da'$, $b = db'$, *avec* $a' \wedge b' = 1$.
Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ *tels que* $ua' + vb' = 1$. *On a alors* $\varphi(u)\varphi(a') + \varphi(v)\varphi(b') = \varphi(1) = 1$, *et donc* $\varphi(a')$ *et* $\varphi(b')$ *sont premiers entre eux.*
Comme $\varphi(a) = \varphi(d)\varphi(a')$ *et* $\varphi(b) = \varphi(d)\varphi(b')$, *on a le résultat.*

21.6.5 Racines d'un polynômes

Exercice 21.35 ♡

On considère le polynôme : $P = -6X^3 + 4X^2 + X^4 + X^3 + 3X + 9$.

1. *Montrer que* 3 *est une racine double de* P.
2. *Factoriser* P *dans* $\mathbb{R}$.
3. *En déduire toutes les racines de* P *dans* $\mathbb{C}$.

Solution :

1. *Comme* $P(3) = P'(3) = 0$ *et que* $P''(3) \neq 0$, 3 *est une racine double de* P.
2. P *est donc de la forme :* $P = (X-3)^2 (aX + bX + c)$. *Par identification, on trouve :*
   $$\boxed{P = (X-3)^2 \left(X^2 + X + 1\right)}.$$
3. *Les racines de* $X^2 + X + 1$ *sont les racines troisièmes de l'unité :* $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ *et* $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ *donc :*
   $$\boxed{P = (X-3)^2 \left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}$$
   et P *comporte une racine double :* 3 *et deux racines simples complexes conjuguées :* $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ *et* $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 21.36 ♡

Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_3[X]$ *vérifiant :*

$$P(0) = P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P'(0) = 2$$

Solution : 0 *est une racine simple de* P *et* 1 *est une racine au moins double de* P. *Donc* P *est de la forme* $P = X(X-1)^2 (aX + b)$ *avec* $, b \in \mathbb{R}$. *Comme* $P'(0) = 2$, *on obtient* $b = 2$ *et comme* P *est unitaire, on a :* $a = 1$. *Donc* $\boxed{P = X(X-1)^2 (X+2)}$.

Exercice 21.37 ♡

Soient a, b, c *trois éléments non nuls et distincts de* $\mathbb{K}$. *Démontrer que le polynôme*

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

peut s'écrire sous la forme $P = \lambda (X-a)(X-b)(X-c) + 1$ *où* λ *est une constante que l'on déterminera.*

Solution : *Par division euclidienne, il existe un unique couple* $(Q,R) \in \mathbb{R}[\mathbb{K}]$ *tel que* $P = Q(X-a)(X-b)(X-c) + R$ *où* $R = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{K}[X]$. *Remarquons que* $P(a) = P(b) = P(c) = 1$ *donc* a, b, c *sont trois racines disctinctes du polynômes* $R-1$. *Ce polynôme étant de degré* $\leqslant 2$, *ceci n'est possible que si* $R-1=0$. *On a donc* $R=1$ *et* $P = Q(X-a)(X-b)(X-c)+1$. *En raisonnant sur les degrés, il est clair que* $\deg Q = 0$ *donc* $Q = \lambda$ *est une constante. Le coefficient du terme dominant de* P *est*

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$$

donc $\boxed{\lambda = 1/(abc)}$.

Exercice 21.38 ♡

Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 1 *dans le polynôme* $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ *?*

Solution : *On calcule* $P(1) = 1 - n + n - 1 = 0$, $P'(1) = 2n - n(n+1) + n(n-1) = 0$, $P''(1) = -n^2(2n-1) \neq 0$, *et donc* 1 *est une racine d'ordre* 2.

Exercice 21.39 ♡

On considère le polynôme

$$P_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

Montrer qu'il n'a pas de racine multiple.

Solution : *Supposons que* P_n *admet une racine* $\alpha \in \mathbb{C}$ *d'ordre au moins deux. Alors* $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. *Mais*

$$P_n(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_n'(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc par soustraction de ces deux égalités, on a $\dfrac{\alpha^n}{n!} = 0$ *et forcément* $\alpha = 0$. *Mais* $P_n(0) = 1$ *et on aboutit à une contradiction.*

Exercice 21.40 ♡

Trouver $P \in \mathbb{R}_5[X]$ *tel que* -1 *soit racine triple de* $P+1$ *et que* 1 *soit racine triple de* $P-1$.

Solution : *Soit* P *un polynôme répondant aux hypothèses de l'énoncé. Alors il existe* $S = aX^2 + bX^2 + c \in \mathbb{R}_2[X]$ *et* $T = dX^2 + eX^2 + f \in \mathbb{R}_2[X]$ *tels que*

$$P = (X+1)^3 S - 1 = (X-1)^3 T + 1.$$

On développe ces expressions et on identifie les termes de même degré. On obtient le système :

$$\begin{cases} a & = d \\ 3a + b & = e - 3d \\ 3a + 3b + c & = f - 3e + 3d \\ a + 3b + 3c & = -3f + 3e - d \\ b + 3c & = 3f - e \\ c - 1 & = -f + 1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $a = 3/8, b = -9/8, c = 1, d = 3/8, e = 9/8, f = 1$. *On en déduit que* $P = (x+1)^3(3/8x^2 - 9/8x + 1) - 1 = \boxed{3/8x^5 - 5/4x^3 + 15/8x}$. *Réciproquement, on vérifie que ce polynôme est solution de notre problème.*

Exercice 21.41 ♡

Soit

$$P_n = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1 \in \mathbb{R}[X]$$

Montrer que $(X^2 + X)$ *divise* P_n. *Est-ce que* (-1) *est racine double de* P *?*

Solution : *Comme* $X^2 + X = X(X+1)$ *et que* $P_n(-1) = P_n(0) = 0$, *le polynôme* $X^2 + X$ *divise* P. *Par ailleurs,* $P_n' = (2n+1)(X+1)^{2n} - (2n+1)X^{2n}$ *et* $P_n'(-1) = -(2n+1) \neq 0$ *donc* -1 *est une racine simple de* P.

Exercice 21.42 ♡

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *on considère* $P_n \in \mathbb{R}[X]$ *défini par* $P_n(X) = (2n-1)X^{n+2} - (2n+1)X^{n+1} + X^2 + X$.

1. *Calculer le quotient euclidien* Q_n *de* P_n *par* $(X-1)^2$.
2. *Démontrer qu'il existe un unique réel* $x_n \geqslant 0$ *tel que* $Q_n(x_n) = 1$.
3. *Etablir que la suite* (x_n) *est convergente et préciser sa limite.*

Solution :

1. *On a* $P_n(1) = 2n-1-(2n+1)+1+1 = 0$. $P'_n = (2n-1)(n+2)X^{n+1} - (n+1)(2n+1)X^n + 2X + 1$. *D'où* $P'_n(1) = (2n-1)(n+2) - (n+1)(2n+1) + 2 + 1 = 0$. *Donc* 1 *est racine de* P *d'ordre au moins* 2 *et donc* $(X-1)^2$ *divise* P_n. *On pose la division :*

$$\begin{array}{cccc|l} (2n-1)X^{n+2} & -(2n+1)X^{n+1} & & +\dots & X^2-2X+1 \\ \hline -(2n-1)X^{n+2} & +(4n-2)X^{n+1} & -(2n-1)X^n & +\dots & (2n-1)X^n+\dots \\ & (2n-3)X^{n+1} & -(2n-1)X^n & +\dots & \end{array}$$

Il semblerait donc que $P_n = (2n-1)X^n(X^2-2x+1) + P_{n-1}$ *en posant s'il le faut* $P_0 = -X^2 - X + X^2 + X = 0$. *Vérifions-le :*
$P_{n-1} + (2n-1)X^n(X^2-2x+1) = (2n-3)X^{n+1} - (2n-1)X^n + X^2 + X + (2n-1)X^{n+2} - 2(2n-1)X^{n+1} + (2n-1)X^n = (2n-1)X^{n+2} + [(2n-3)-4n+2] + X^2 + X = P_n$. *On en déduit que* $P_n = (X^2-2x+1)\sum_{k=1}^{n}(2k-1)X^k$.

2. *On a* $Q_n(x) = x + 3x^2 + \dots + (2n-1)x^n$. Q_n *est une fonction strictement croissante sur* $[0,+\infty[$, *avec* $Q_n(0) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} Q - n(x) = +\infty$. *Donc l'équation* $Q_n(x) = 1$ *admet une unique solution positive. Comme* $Q_n(1) = n^2$, *on a* $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.

3. *On a* $Q_{n+1}(x_n) = Q_n(x_n) + (2n+1)x_n^{n+1} = 1 + +(2n+1)x_n^{n+1} > 1 = Q_{n+1}(x_{n+1})$. *Donc, comme* Q_{n+1} *est croissante, la suite* (x_n) *est strictement décroissante. Comme elle est minorée par zéro, elle converge. Soit* $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$. *Pour* $x \in [0,1[$, *on a* $\lim_{n\to\infty}(2n-1)x^{n+2} = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty}(2n+1)x^{n+1} = 0$. *Donc* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)x^{n+2}-(2n+1)x^{n+1}+x^2+x}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2+x}{(x-1)^2}$. *On pose* $Q(x) = \dfrac{x^2+x}{(x-1)^2}$.
On a $1 - Q(\ell) = Q_n(x_n) - Q(x_n) + Q(x_n) - Q(\ell)$. *Pour* $n \geqslant 2$ *on a* $0 \leqslant x_n \leqslant x_2 = \dfrac{\sqrt{13}-1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. *D'après la continuité de la fonction* Q *sur* $[0,1[$ *on a* $\lim_{n\to\infty} Q(x_n) - Q(\ell) = 0$. *Par ailleurs* $Q_n(x_n) - Q(x_n) = \dfrac{(2n-1)x_n^{n+2}-(2n+1)x_n^{n+1}}{(x_n-1)^2}$, *donc* $|Q_n(x_n) - Q(x_n)| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\dfrac{2n-1+2n+1}{(x_n-1)^2}$ *et comme* $\dfrac{1}{2} \leqslant 1 - x_n \leqslant 1$, *on a* $\dfrac{1}{(x_n-1)^2} \leqslant 4$ *(toujours pour* $n \geqslant 2$*).*
On en déduit que $\lim_{n\to\infty} Q_n(x_n) - Q(x_n) = 0$.
Finalement, $1 - Q(\ell) = 0$, *donc* $\ell^2 + \ell = \ell^2 - 2\ell + 1$ *d'où* $\ell = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 21.43 ♡

On considère deux polynômes $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ *vérifiant*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left|P(z)\right| = \left|Q(z)\right|$$

Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$ *tel que* $P = uQ$.

Solution : *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$, *on a* $P(\alpha) = 0 \iff Q(\alpha) = 0$. *Donc* P *et* Q *ont les mêmes racines. Comme tout polynôme de* $\mathbb{C}[X]$ *est scindé, le résultat est immédiat.Du moins tant que les racines sont simples. Sinon on écrit* $P = \lambda\prod_{k=1}^{m}(X-\alpha_k)^{p_k}$ *et* $Q = \mu\prod_{k=1}^{m}(X-\alpha_k)^{q_k}$. *Soit* $k_0 \in [\![1,m]\!]$ *Pour fixer les idées, on peut supposer* $p_{k_0} \leqslant q_{k_0}$. *En divisant par* $\left(z-\alpha_{k_0}\right)^{p_{k_0}}$ *on obtient, pour* $z \neq \alpha_{k_0}$, $\left|\lambda\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{m}(z-\alpha_k)^{p_k}\right| = \left|\mu\left(z-\alpha_{k_0}\right)^{q_{k_0}-p_{k_0}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{m}(z-\alpha_k)^{q_k}\right|$. *Supposons l'espace d'un instant que* $q_{k_0} > p_{k_0}$, *on obtiendrait, en faisant tendre* z *vers* α_{k_0}, $\left|\lambda\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{m}\left(\alpha_{k_0}-\alpha_k\right)^{p_k}\right| = 0$ *contradiction. Donc* $q_{k_0} = p_{k_0}$, *et ce* $\forall k_0 \in [\![1,m]\!]$. *Ce qu'il fallait démontrer. Finalement, c'était bien immédiat.*

Exercice 21.44 ♡♡

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *un polynôme de degré* $n > 0$.

1. *On suppose que* P *admet* n *racines réelles distinctes. Montrer que* P' *admet* $n-1$ *racines réelles disctinctes.*
2. *En déduire que pour tout* $a \in \mathbb{R}^\star$, *le polynôme* $Q = P^2 + a^2$ *n'a pas de racines complexes multiples.*

Solution :

1. *Notons* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *les racines de* P *dans l'ordre croissant. Soit* $i \in [\![1, n-1]\!]$. P *est continue et dérivable sur le segment* $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ *et* $P(\alpha_1) = P(\alpha_{i+1}) = 0$. *D'après le théorème de Rolle, il existe* $c_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ *tel que* $P'(c_i) = 0$. *On démontre ainsi que* P' *admet une racine* $c_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ *pour tout* $i \in [\![1, n-1]\!]$. *Donc* P' *admet donc* $n-1$ *racines et ces racines sont toutes distinctes.*
2. *Par l'absurde, s'il existe* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = 0$, *on aurait*

$$\begin{cases} P^2(\alpha) + a^2 & = 0 \\ 2P(\alpha)P'(\alpha) & = 0 \end{cases}$$

et donc α *n'est pas réel car* $P^2(\alpha) + a^2 > 0$. *On ne peut pas avoir* $P(\alpha) = 0$ *(car* P *est scindé), et donc* $P'(\alpha) = 0$. *Mais comme* P' *est scindé, on aurait* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ce qui est absurde.*

Exercice 21.45 ♡♡

Trouver les racines de

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} \cos k\alpha$$

Solution : *Introduisons le polynôme* $Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} e^{ik\alpha}$. *Il est clair que* $P = \left(Q + \overline{Q}\right)/2$. *Mais d'après la formule du binôme,* $Q = \left(X + e^{i\alpha}\right)^n$ *et* $\overline{Q} = \left(X + e^{-i\alpha}\right)^n$. *L'ensemble des racines de* P *est exactement l'ensemble des racines de* $Q + \overline{Q}$. *Soit* a *une racine de* P. *Comme* $Q(a) + \overline{Q}(a) = 0$, $\left(a + e^{i\alpha}\right)^n = -\left(a + e^{-i\alpha}\right)^n$ *et il existe* $k \in [\![0, n-1]\!]$ *tel que* $a + e^{i\alpha} = e^{i\left(\pi + \frac{2k\pi}{n}\right)}\left(a + e^{-i\alpha}\right)$ *et*

$$a = -\frac{e^{-i\alpha} e^{i\left(\pi + \frac{2k\pi}{n}\right)} - e^{i\alpha}}{e^{i\left(\pi + \frac{2k\pi}{n}\right)} - 1}.$$

On obtient ainsi n *valeurs possibles pour* a. *Comme* P *est de degré* n, *il a exactement* n *racines dans* $\mathbb{C}$ *et les* n *nombres complexes de la forme précédente forme l'ensemble de toutes les racines de* P.

Exercice 21.46 ♡♡

On définit par récurrence la suite de polynômes (P_n) *:*

$$\begin{cases} P_0 = 2, \quad P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. *Calculer* P_2 *et* P_3.
2. *Déterminer le degré et le coefficient du terme dominant de* P_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$ *:*

$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

4. *En déduire une expression simple de* $P_n(2\cos\theta)$ *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$.
5. *Déterminer les racines de* P_n *et en déduire une factorisation de* P.

Solution :

1. $P_2 = X^2 - 2$, $P_3 = X^2 - 3X$.
2. *Par récurrence, montrons que pour tout* $n \geqslant 1$, *le coefficient du terme dominant de* P_n *est* 1 *et* $\deg P_n = n$. *La propriété est clairement vraie aux rangs* 1 *et* 2. *Soit* $n \geqslant 2$. *Supposons que le coefficient du terme dominant de* P_n *et de* P_{n-1} *est* 1 *et que* $\deg P_n = n$, $\deg P_{n-1} = n-1$. *Comme* $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$, *il est clair que* $\deg P_{n+1} = \deg P_n + 1 = n+1$ *et que le coefficient du terme dominant de* P_n *est* 1. *La propriété est prouvée par récurrence.*

3. *Démontrons à nouveau cette propriété par récurrence : Celle ci est vraie au rang* 0. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *Supposons que la propriété est vraie au rang* n *et au rang* $n+1$ *et prouvons là au rang* $n+2$ *:*

$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \left(z+\frac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right)-P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)-\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}} \end{aligned}$$

La propriété est alors prouvée par récurrence.

4. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Par application de la question précédente et utilisation des relations d'Euler :*

$$\begin{aligned} P_n(2\cos\theta) &= P_n\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right) \\ &= e^{in\theta}+\frac{1}{e^{in\theta}} \\ &= \boxed{2\cos(n\theta)} \end{aligned}$$

5. *La question précédente nous invite à chercher les racines de* P_n *sous la forme* $z = 2\cos\theta$. *Remarquons que si* $z \in [-2,2]$, *il existe un unique* $\theta \in [0,\pi]$ *tel que* $z = 2\cos\theta$. *Considérons donc* $\theta \in [0,\pi]$ *tel que* $P_n(2\cos\theta)$. *On a alors :* $\cos(n\theta) = 0$ *c'est à dire* $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ *avec* $k \in [\![0,n-1]\!]$. *Les* n *nombres* $2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ *pour* $k \in [\![0,n-1]\!]$ *sont tous distincts et comme* $\deg = n$, *ce sont les* n *racines de* P_n. *Le coefficient du terme dominant de* P *étant* 1 *on obtient :*

$$\boxed{P = \prod_{k=1}^{n}\left(X-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$$

Exercice 21.47

Polynômes réciproquesOn appelle polynômes réciproque un polynôme dont la suite des coefficients est symétrique. Par exemple $1-2X+X^2$ *ou* $1+2X+2X^2+X^3$ *sont réciproques. Voir aussi le paragraphe B.4.4 p.1176.*

1. *Démontrer qu'un polynôme de degré* n *est réciproque si et seulement si* $\forall x \in \mathbb{K}^*, P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. *Démontrer qu'un polynôme réciproque de degré impair admet* -1 *comme racine.*
3. *On suppose que* $P = (X+1)Q$. *Démontrer que si* P *est un polynôme réciproque alors* Q *l'est aussi.*
4. *Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est réciproque.*
5. *Résoudre* $x^5+3x^4-2x^3-2x^2+3x+1 = 0$. *(On utilisera les questions précédentes et on se souviendra de l'exercice précédent).*
6. *On considère la suite de polynômes :* $P_0 = 1$ *et* $P_n = (1+nX)P_{n-1}+X(1-X)P'_{n-1}, (n \geqslant 1)$. *Démontrer que les* P_n *sont des polynômes réciproques.*

Solution :

1. *Si on pose* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ *on a* $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x^n}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{a_1}{x}+a_0$ *et donc* $x^nP\left(\frac{1}{x}\right) = a_n+a_{n-1}x+\ldots+a_1x^{n-1}+a_0x^n$. *D'où le résultat.*
2. *Pour* P *polynôme réciproque de degré* $2p+1$, *on a* $P(-1) = (-1)^{2p+1}P\left(\frac{1}{-1}\right) = -P(-1)$. *D'où le résultat.*
3. *Soit* $n = \deg P$. *On a* $\deg Q = n-1$ *et* $\forall x \in \mathbb{K}^*, P(x) = x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$. *on en déduit* $x^nP\left(\frac{1}{x}\right) = x^n(\frac{1}{x}+1)Q\left(\frac{1}{x}\right)$ *d'où* $(x+1)Q(x) = (x+1)x^{n-1}Q\left(\frac{1}{x}\right)$ *d'où* $Q(x) = x^{n-1}Q\left(\frac{1}{x}\right)$ *ce qu'il fallait vérifier.*
4. *Soit* P *et* Q *deux polynômes réciproques de degrés respectifs* n *et* m. *On a* $P(x) = x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$ *et* $Q(x) = x^mQ\left(\frac{1}{x}\right)$. PQ *est un polynôme de degré* nm *et on a* $PQ(x) = x^{n+m}P\left(\frac{1}{x}\right)Q\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+m}PQ\left(\frac{1}{x}\right)$ *ce qu'il fallait vérifier.*
5. *On a un polynôme réciproque de de degré impair.* -1 *est racine (évidente ?). On peut factoriser par* $(x+1)$ *et on trouve (algorithme de Horner)* $x^5+3x^4-2x^3-2x^2+3x+1 = (x+1)(x^4+2x^3-4x^2+2x+1)$. *On est donc amené*

à résoudre $x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right)=x^2(y^2+2y-6)$ avec $y=x+\frac{1}{x}$. on trouve $y=1+\sqrt{7}$ ou $y=1-\sqrt{7}$. On résout donc $x+\frac{1}{x}=1+\sqrt{7}$ ce qui donne deux racines $x_1=\frac{1+\sqrt{7}+\sqrt{4+2\sqrt{7}}}{2}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{7}-\sqrt{4+2\sqrt{7}}}{2}$. $x+\frac{1}{x}=1-\sqrt{7}$ donne aussi deux racines $x_3=\frac{1-\sqrt{7}+\sqrt{4-2\sqrt{7}}}{2}$ et $x_4=\frac{1-\sqrt{7}-\sqrt{4-2\sqrt{7}}}{2}$ sans oublier $x_5=-1$.

6. Par récurrence, $P_0=1$ est réciproque. On suppose que P_{n-1} l'est aussi. On a alors $P_{n-1}(x)=x^{n-1}P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $P'_{n-1}(x)=(n-1)x^{n-2}P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-x^{n-3}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$. D'où
$x^nP\left(\frac{1}{x}\right)=x^n\left(1+\frac{n}{x}\right)P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)+x^n\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)=(x+n)P_{n-1}(x)+x^{n-1}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-x^{n-2}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
$=(x+n)P_{n-1}(x)-x^2P'_{n-1}(x)+(n-1)x^{n-1}P_{n-1}(x)+xP'_{n-1}(x)-(n-1)x^{n-2}P_{n-1}(x)=P_{n-1}(x)((x+n)+(n-1)x-n+1)+P'_{n-1}(x)(-x^2+x)$
$=P_{n-1}(x)(nx+1)+P'_{n-1}(x)x(1-x)$. Ce qu'il fallait vérifier.

Exercice 21.48 ♡♡

Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P(z)\in\mathbb{R}$$

Solution : Soit $P=a_nX^n+\cdots+a_0\in\mathbb{C}[X]$ vérifiant la condition de l'énoncé. Puisque $a_0=P(0)$, $a_0\in\mathbb{R}$. Montrons que tous les coefficients de P sont réels. Considérons le polynôme

$$\overline{P}=\overline{a_n}X^n+\cdots+\overline{a_0}$$

et $H=P-\overline{P}$. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$P(x)\in\mathbb{R}\implies\overline{P(x)}=P(x)$$

Mais $\overline{P(x)}=\overline{a_n}x^n+\cdots+\overline{a_0}=\overline{P}(x)$. Par conséquent,

$$\forall x\in\mathbb{R},H(x)=0$$

Le polynôme H a donc une infinité de racines, il est nul et donc $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $\overline{a_i}=a_i$. Donc $P\in\mathbb{R}[X]$. Réciproquement, tout polynôme à coefficients réels vérifie la propriété.

Exercice 21.49 ♡♡♡

Déterminer tous les polynômes complexes P tels que $P(1-2X)=P(X)$

Solution : Soit z une racine de P dans $\mathbb{C}$. $1-2z$ est aussi une racine de P. On s'intéresse donc à la suite z_n définie par $z_0=z$ et $z_{n+1}=1-2z_n$. L'étude est classique : on résout $x=1-2x$ ce qui donne $x=\frac{1}{3}$. Ensuite on regarde la suite auxilliaire $v_n=z_n-\frac{1}{3}$. On a $v_{n+1}=1-2z_n-\frac{1}{3}=1-2v_n-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-2v_n$, autrement dit (v_n) est une suite géométrique de raison -2. Elle prend une infinité de valeurs sauf pour $v_0=0$ soit $z=\frac{1}{3}$. On a donc deux possibilités,
- $P=0$.
- $P=\lambda\left(X-\frac{1}{3}\right)^m$, $\lambda\neq0$.

Dans le deuxième cas, P admet λ comme coefficient dominant et $P(1-2X)=\lambda\left(1-2X-\frac{1}{3}\right)^m$ admet $(-2)^m\lambda$ comme coefficient dominant. On en déduit $(-2)^m=1$ et $m=0$.
Réciproquement, les polynômes constants conviennent bien.

Exercice 21.50 ♡♡♡

Trouver tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2)=(X^2+1)P(X)$$

Indication 21.5 : Trouver des racines de P, les mettre en facteur ...

Solution : Soit P un tel polynôme. Alors $P(i^2)=0$, donc -1 est racine de P : il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X)=(X+1)Q(X)$, mais alors $(X^2+1)Q(X^2)=(X^2+1)(X+1)Q(X)$, donc Q vérifie

$$Q(X^2)=(X+1)Q(X)$$

(on peut simplifier par un polynôme non-nul). Alors $Q((-1)^2) = 0$*, et donc* 1 *est racine de* Q *: il existe* $R \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $Q(X) = (X-1)R(X)$*.* R *vérifie alors* $(X^2-1)R(X^2) = (X+1)(X-1)R(X)$*, c'est à dire*

$$R(X^2) = R(X)$$

Mais si on introduit le polynôme $S(X) = R(X) - R(2)$*, alors on montre par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $S(2^{2^n}) = 0$*, donc* S *possède une infinité de racines, donc* $S = 0$ *et alors* R *est constant. Finalement, il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$P(X) = \lambda(X+1)(X-1)$$

Réciproquement, tout polynôme de cette forme convient.

Exercice 21.51 ♡♡♡

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ *vérifiant*

$$P(X^2) = (P(X))^2$$

Solution : *Supposons* P *non-nul. Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$ *une racine complexe de* P*. On montre par récurrence que* $\forall k \in \mathbb{N}$*,* α^{2^k} *est encore racine de* P*. Mais puisque* P *n'admet qu'un nombre fini de racines, il est nécessaire qu'il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\alpha^{2^k} = \alpha$$

Par conséquent, $\alpha = 0$ *ou alors* $\alpha^{2^k-1} = 1$*, et alors* $|\alpha| = 1$*. On peut alors noter* $\alpha = e^{i\theta}$ *avec* $\theta \in [0, 2\pi]$*.*

Comme $(P(e^{i\frac{\theta}{2}}))^2 = P(e^{i\theta})$*, alors* $e^{i\frac{\theta}{2}}$ *est encore racine. Par récurrence, on montre que* $\forall k \in \mathbb{N}*$*,* $e^{i\dfrac{\theta}{2^k}}$ *est encore racine.*
La seule possibilité pour qu'il y ait un nombre fini de racines est que $\theta = 0$*, c'est à dire* $\alpha = 1$*.*
Les seules racines de P *sont donc* 0 *et* 1*. Donc* $P = \lambda X^n(1-X)^p$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors* $P(X^2) = P(X)^2 \implies \lambda X^{2n}(1-X)^p(1+X)^p = \lambda X^{2n}(1-X)^{2p}$ *et nécessairement,*

$$\boxed{P = X^n}$$

On vérifie réciproquement que les polynômes de la base canonique et le polynôme nul conviennent.

Exercice 21.52 ♡♡♡

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ *vérifiant :*

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0 \qquad (\star)$$

Solution : *Soit* P *un polynôme solution de l'équation et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *une racine de* P*. En utilisant l'égalité* $(\star)$*, on montre par une récurrence facile que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $P(\alpha^{2^n}) = P(\alpha) = 0$*. Mais* P *possède un nombre fini de racines donc il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\alpha^{2^N} = \alpha$ *Forcément,* $\alpha = 0$ *ou alors* $\alpha^{2^N-1} = 1$*, et alors* $|\alpha| = 1$*.*
Mais l'égalité $(\star)$ *amène aussi* $P((\alpha-1)^2) = P(\alpha)P(\alpha-1) = 0$*, donc* $(\alpha-1)^2$ *est aussi une racine de* P *et on doit avoir* $\alpha - 1 = 0$ *ou* $|\alpha - 1| = 1$*.*
Les seules racines de module 1 *sont* $-j$ *ou* $-j^2$ *(à l'intersection des cercles de rayon* 1 *centrés respectivement en* 0 *et en* 1*) ou* 1*.*
Mais $-j$ *ne peut être une racine de* P*. En effet, comme* $(-j-1)^2 = j$*,* j *devrait aussi être une racine de* P *ce qui n'est pas possible car on n'a pas* $\left|j-1\right| = 1$*. De même comme* $(-j^2-1)^2 = j^2$*,* $-j^2$ *ne peut être une racine de* P*.*
En conclusion, les seules racines éventuelles de P *sont* 0 *et* 1*. Donc* $P = \lambda X^k(1-X)^p$ *où* $k, p \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*.. Comme* P *doit vérifier* $(\star)$*, il vient que* $\lambda = -1$*, et finalement* $\boxed{P = X^k(1-X)^p}$*. La réciproque est immédiate.*

Exercice 21.53 ♡♡♡

Soient deux polynômes $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ *et* $k \in \mathbb{N}^\star$*.*

1. *Montrer que* $(X-1) \mid P(X^k) \implies (X-1) \mid P$*.*
2. *Montrer que* $(X^2+X+1) \mid (P(X^3) + XQ(X^3)) \implies (X-1) \mid P$ *et* $(X-1) \mid Q$*.*

Solution :

1. *Si* $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$*, alors* $P(X^k) = a_0 + a_1X^k + \dots + a_nX^{nk}$*. Par conséquent, en notant* $Q = P(X^k)$*, si* $(X-1) \mid Q$*, alors* $Q(1) = P(1) = 0$*. Donc* $(X-1) \mid P$*.*
2. *En notant* $H = P(X^3) + XQ(X^3)$*, puisque* $X^2+X+1 = (X-j)(X-j^2)$*, on a* $H(j) = H(j^2) = 0$*, c'est à dire*

$$\begin{cases} P(1) + jQ(1) & = 0 \\ P(1) = j^2Q(1) & = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $P(1) = Q(1) = 0$*, c'est à dire que* $(X-1) \mid P$ *et que* $(X-1) \mid Q$*.*

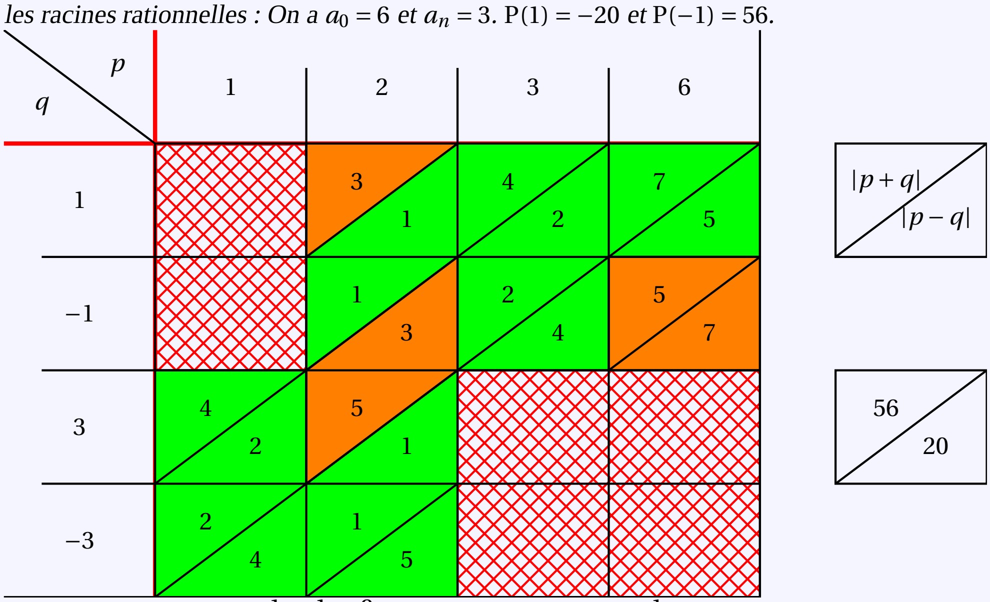
Exercice 21.54 ♡♡♡

1. *On considère le polynôme* $P = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ *un polynôme à* ***coefficients entiers*** *tel que* $a_n \neq 0$ *et* $a_0 \neq 0$. *On suppose que* P *admet une racine rationnelle* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *où* $p \wedge q = 1$. *Montrer que* $p \mid a_0$ *et que* $q \mid a_n$.
2. *En déduire une factorisation de* $P = 2X^3 - X^2 - X - 3$ *dans* $\mathbb{C}$.
3. *Vérifier si le polynôme* $P = X^5 + 3X^2 + 2$ *est irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$ *?*
4. *Démontrer que* $p - q \mid P(1)$ *puis, sans effort, que* $p + q \mid P(1)$.
5. *Factoriser dans* $\mathbb{R}$ *le polynôme* $3X^4 - 19X^3 + 9X^2 - 19X + 6$.

Voir aussi le paragraphe B.4.3 page 1174 de l'annexe B.

Solution :

1. *Comme* $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, *il vient :* $a_n \frac{p^n}{q^n} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$ *ce qui amène :*
$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$
Comme $a_n p^n = -\left(a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n\right)$, q *divise* $a_n p^n$ *et comme* p *et* q *sont premiers entre eux,* q *divise* a_n. *On montre de même que* $p \mid a_0$.
2. *Le résultat prouvé dans la question précédente nous invite à vérifier si* $3/2$ *est une racine évidente de* P, *ce qui est le cas. On vérifie alors que* $\boxed{P = (2X-3)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}$
3. *Si le polynôme* P *n'était pas irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$, *il aurait une racine* $p/q \in \mathbb{Q}$ *avec* $p \wedge q = 1$. *Comme* $p|2$ *et* $q|1$, *cette racine doit être un des entiers relatifs :* ± 2 *ou* ± 1. *On vérifie qu'aucun de ces nombres n'est une racine de* P. P *est donc irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$
4. *On écrit* $q^n P(1) = q^n\left(P(1) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right) = a_n\left(q^n - p^n\right) + a_{n-1} q\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right) + \ldots a_k q^{n-k}\left(q^{k-1} - p^{k-1}\right) + \ldots + a_1 q^{n-1}(q-p)$.
Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p - q$ *divise* $a_k q^{n-k}\left(q^{k-1} - p^{k-1}\right) = a_k q^{n-k}(q-p)\left(q^{k-2} + p q^{k-2} + \ldots + p^{k-2}\right)$ *donc il divise leur somme* $q^n P(1)$.
Maintenant, q *est premier avec* $p - q$ *(Bezout, algorithme des différences ou tout ce que vous voudrez) donc* q^n *est premier avec* $p - q$. *Il est l'heure d'utiliser le lemme de Gauss :* $p - q$ *divise* $P(1)$.
Pour démontrer sans effort que $p + q \mid P(1)$, *on applique le résultat précédent à* $Q = P(-X)$.
5. *Comme il n'existe pas de méthode simple pour factoriser un polynôme de degré* 4 *un jour d'oral, il faut chercher les racines rationnelles : On a* $a_0 = 6$ *et* $a_n = 3$. $P(1) = -20$ *et* $P(-1) = 56$.



Les candidats sont donc $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 3, -3, 6$. *On trouve enfin* $\frac{1}{3}$ *et* 6. *Après division par* $(3X-1)(X-6)$ *on a* $3X^4 - 19X^3 + 9X^2 - 19X + 6 = (3X-1)(X-6)(X^2+1)$.
Remarque : Lorsqu'on programme la recherche des racines rationnelles, le raffinement avec $P(1)$ *et* $P(-1)$ *est inutile. Lorsqu'on travaille à la main, il n'est pas de trop.*

Exercice 21.55

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$*, non constant, n'admettant aucune racine complexe.* $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n, (a_n \neq 0, n \geqslant 1)$

1. *Démontrer que* $a_0 \neq 0$*.*
2. *On considère* $f : z \longmapsto \dfrac{1}{|P(z)|}$*.*
   - *Démontrez que* $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |a_n|.|z|^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.|z|^k$*.*
   - *Démontrez que* $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0, |z| > M_\varepsilon \Longrightarrow f(z) < \varepsilon$*.*
   - *Démontrez que si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres complexes qui converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$ *alors la suite* $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(\ell)$*.*
3. *On pose* $\varepsilon = f(0)$*.*
   - *Démontrez que* f *est majorée sur* $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant M_\varepsilon\}$*. (On pourra penser au théorème de Bolzano-Weïerstrass au milieu d'une démonstration par l'absurde.)*
   - *Démontrez qu'il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la borne supérieure des* $f(z)$ *pour* $z \in D_\varepsilon$*. (On pourra penser au théorème de Bolzano-Weïerstrass).*
   - *Démontrer que* f *est majorée sur* $\mathbb{C}$*, et que* $m = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} f(z)$ *existe.*
   - *Démontrez que* $\exists z' \in \mathbb{C}, f(z') = m$*. Déduisez-en que* $m \neq 0$*.*
4. *On pose* $Q(z) = \dfrac{P(z+z')}{P(z')}$ *.*
   - *Démontrez que* $\exists (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n, Q(X) = 1 + b_1X + \ldots + b_nX^n$ *avec* $b_n \neq 0$*.*
   - *Démontrez que* $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = 1$*.*
5. *Soit* p *la valuation de* $Q(X) - 1$*, c'est-à-dire le plus petit indice* $k \geqslant 1$ *tel que* $b_k \neq 0$*, et soit* α *une racine* $p^{\text{ième}}$ *de* $-b_p$*.*
   - *Démontrez que* $\forall z \in \mathbb{C}, 1 \leqslant |1 - z^p| + \left|\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k\right|$*.*
   - *En prenant* z *réel dans* $]0,1[$ *et en faisant tendre* z *vers zéro, quel théorème avez-vous démontré ?*

Solution :

1. *On a* $a_0 = P(0)$*. Comme* P *n'a pas de racine,* $a_0 \neq 0$*.*
2. - *On a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = P(z) - a_n z^n$*, donc d'après l'inégalité triangulaire,* $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leqslant |P(z)| + |a_n||z|^n$*.*

     Donc $|P(z)| \geqslant |a_n||z|^n - \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \geqslant |a_n||z|^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k$*.*
   - *On pose, pour* $r > 0$*,* $g(r) = |a_n|r^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|r^k = |a_n|r^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{r^{n-k}}\right)$*.*

     Comme $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{r^{n-k}} = 1$*, on a* $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} g(r) = +\infty$*. Donc* $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0, r > M_\varepsilon \Longrightarrow g(r) > \dfrac{1}{\varepsilon}$*. Et comme* $f(z) \geqslant g(|z|)$*, on a pour* $|z| \geqslant M_\varepsilon, f(z) < \varepsilon$*.*
   - *La démonstration est identique à celle de la propriété pour les fonctions (continues) de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et les suites réelles. On remplace simplement les valeurs absolues* $|\ |$ *par des modules* $|\ |$*, c'est dire si ça ne se voit pas !*
3. - *Supposons que* f *ne soit pas majorée sur* D_ε*. Alors* $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in D_\varepsilon, f(u_n) \geqslant n$*. Comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weïerstrass, on peut en extraire une sous-suite* $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* ℓ*. On aurait alors* $f\left(u_{n_k}\right) \geqslant n_k \geqslant k$ *et donc* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f\left(u_{n_k}\right) = +\infty$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f\left(u_{n_k}\right) = f(\ell)$*. Contradiction.*
   - *L'ensemble* $\left\{f(z) \mid z \in D_\varepsilon\right\}$ *est non vide et majoré. Il admet donc une borne supérieure* m*. D'après la caractérisation de la borne supérieure,* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in D_\varepsilon, m - \frac{1}{n} \leqslant f(u_n) \leqslant m$*. Toujours d'après le théorème de Bolzano-Weïerstrass, on peut en extraire une sous-suite* $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* z'*. On a alors* $m - \frac{1}{k} \leqslant m - \frac{1}{n_k} \leqslant f\left(u_{n_k}\right) \leqslant m$*. La limite de la suite* $f\left(u_{n_k}\right)$ *est* m *d'après la propriété des gendarmes, et* $f(z')$ *d'après la question 2.*
   - *On a* $\forall z \in D_\varepsilon, f(z) \leqslant m$ *et* $\forall z \notin D_\varepsilon, f(z) \leqslant \varepsilon = f(0) \leqslant m$*. Donc* m *est un majorant de* $\left\{f(z) \mid z \in \mathbb{C}\right\}$*. C'est aussi la borne supérieure et le maximum puisque* $m = f(z')$*.*
   - *L'existence de* z' *a été vue plus haut.* $m = 0$ *voudrait dire que* $\dfrac{1}{|P(z')|} = 0$ *ce qui est impossible.*
4. - Q *est un polynôme de degré* n *qui vérifie* $Q(0) = \dfrac{1}{P(z')} \times P(z') = 1$*. D'où le résultat.*

► *On a* $\forall z \in \mathbb{C}, |Q(z)| = f(z') \times \dfrac{1}{f(z+z')} = m\dfrac{1}{f(z+z')} \geqslant \dfrac{m}{m} = 1$. *Comme* $|Q(z)| = 1$, *on a bien* $\inf_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = 1$.

5. ► *On a donc* $Q\left(\frac{z}{\alpha}\right) = 1 + b_p\left(\frac{z}{\alpha}\right)^p + \sum_{k=p+1}^{n} b_k \left(\dfrac{z}{\alpha}\right)^k = 1 - z^p + \left|\sum_{k=p+1}^{n} b_k \left(\dfrac{z}{\alpha}\right)^k\right|$ *puisque* $b_p\left(\frac{z}{\alpha}\right)^p = b_p \dfrac{z^p}{\alpha^p} = b_p \dfrac{z^p}{-b_p} = -z^p$. *Il ne reste plus qu'à écrire* $1 \leqslant \left|Q\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right| \leqslant |1 - z^p| + \left|\sum_{k=p+1}^{n} b_k \left(\dfrac{z}{\alpha}\right)^k\right|$ *grâce à l'inégalité triangulaire.*

   ► *On prend* $z = t$ *réel dans* $]0,1[$, *on a* $|1 - t^p| = 1 - t^p$. *On a donc* $t^p \leqslant t^{p+1}\left|\sum_{k=p+1}^{n} \dfrac{b_k}{\alpha^k} t^{k-p-1}\right|$, *puis* $1 \leqslant t\left|\sum_{k=p+1}^{n} \dfrac{b_k}{\alpha^k} t^{k-p-1}\right|$. *On fait tendre* t *vers zéro pour obtenir* $1 \leqslant 0$.
   L'hypothèse de départ, à savoir que P *n'admet aucune racine complexe est donc absurde.*
   On a donc démontré par l'absurde le théorème fondamental de l'algèbre.

21.6.6 Factorisations de polynômes

Exercice 21.56 ♡

Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ *puis dans* $\mathbb{R}[X]$ *les polynômes suivants :*

1. $P_1 = X^4 - 1$
2. $P_2 = X^5 - 1$
3. $P_3 = X^4 + X^2 + 1$
4. $P_4 = X^6 + 1$
5. $P_5 = \left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$
6. $P_6 = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$
7. $P_7 = \left(X^2 + 1\right)^2 + \left(X^2 - X - 1\right)^2$
8. $P_8 = X^8 + X^4 + 1$

Solution :

1. *Dans* $C[X]$: $p_1 = \Pi_{k=0^3}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{4}}\right) = \boxed{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)}$ *et dans* $\mathbb{R}[X]$, *en appariant les deux racines complexes conjuguées :* $P_1 = \boxed{(X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)}$.
2. *Dans* $C[X]$: $p_1 = \Pi_{k=0^4}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = \boxed{(X-1)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{6i\pi}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{8i\pi}{5}}\right)}$ *et dans* $\mathbb{R}[X]$, *en appariant les racines complexes conjuguées :* $P_2 = \boxed{(X-1)\left(X^2 - 2\cos\dfrac{2\pi}{5} + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\dfrac{4\pi}{5} + 1\right)}$.
3. *On a :* $X^4 + X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - X^2 = \boxed{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$. *Les discriminants des deux polynômes de ce produit sont négatifs, donc la décomposition de* P_3 *dans* $\mathbb{R}[X]$ *est* $P_3 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$. *Par ailleurs :* $X^2 + X + 1 = \left(X + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $X^2 - X + 1 = \left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $P_3 = \boxed{\left(X + \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$.
4. *Les six racines de* -1 *sont données par les complexes* $e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}$ *avec* $k \in [\![0,5]\!]$. *La factorisation dans* $\mathbb{C}$ *de* P_4 *est donc :* $X^6 + 1 = \Pi_{k=0}^{5}\left(X - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}\right) = \boxed{\left(X - e^{i\pi/6}\right)\left(X - e^{-i\pi/6}\right)\left(X - e^{i5\pi/6}\right)\left(X - e^{-i5\pi/6}\right)}(X-i)(X+i)$. *En appariant les racines complexes conjuguées, on obtient la factorisation de* P_4 *sur* $\mathbb{R}$: $P_4 = \left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + 1\right)$.
5. $P_5 = \left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1 = \left(X^2 - X + 1 + i\right)\left(X^2 - X + 1 - i\right) = (X - 1 + i)(X - 1 - i)(X + i)(X - i) = \left(X^2 - 2X + 2\right)\left(X^2 + 1\right)$
6. *Comme* $1 - X^7 = \left(1 + X + \ldots + X^6\right)(1 - X)$, $(1 + X)P_6 = 1 + X^7$. *Mais* $1 + X^7 = \Pi_{k=0}^{6}\left(X - e^{i(2k+1)\pi/7}\right)$ *donc* $P_6 = \Pi_{k=1}^{6}\left(X - e^{2ik\pi/7}\right)$. *On apparie les racines conjuguées pour obtenir la factorisation de* P_6 *dans* $\mathbb{R}$. *On obtient :* $\boxed{P_6 = \left(X^2 - 2\cos 2\pi/7 + 1\right)\left(X^2 - 2\cos 4\pi/7 + 1\right)\left(X^2 - 2\cos 6\pi/7 + 1\right)}$

7.

$$\begin{aligned} P_7 &= \left(X^2+1\right)^2+\left(X^2-X-1\right)^2 \\ &= \left(X^2+X-1+i\left(X^2+1\right)\right)\left(X^2+X-1-i\left(X^2+1\right)\right) \\ &= \left((1+i)X^2+X-1+i\right)\left((1-i)X^2+X-1-i\right) \\ &= \boxed{\left(X-\frac{1-i}{2}\right)(X+1-i)\left(X-\frac{1+i}{2}\right)(X+1+i)} \end{aligned}$$

On en déduit la factorisation sur $\mathbb{R}$ *:* $P_7=\left(X^2-X+1/2\right)\left(X^2+2X+2\right)$

8. *Comme dans la question* 3.*, on commence par décomposer le polynôme bicarré* Y^4+Y^2+1*. On a :* $Y^4+Y^2+1=(Y^2+1)^2-Y^2=(Y^2+Y+1)(Y^2-Y+1)$*. Alors* $P_8=(X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$*. On recommence pour ces deux polynômes bicarrés. On obtient finalement que*

$$\boxed{P_8=(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)}$$

et on en déduit la factorisation de P_8 *dans* $\mathbb{C}$ *:*

$$\boxed{P_8=\left(X-e^{2i\pi/3}\right)\left(X-e^{-2i\pi/3}\right)\left(X-e^{i\pi/3}\right)\left(X-e^{-i\pi/3}\right)\left(X-e^{5i\pi/6}\right)\left(X-e^{-5i\pi/6}\right)\left(X-e^{i\pi/6}\right)\left(X-e^{-i\pi/6}\right)}.$$

Exercice 21.57 ♡♡

Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ *et sur* $\mathbb{R}[X]$ *le polynome* $X^{2n}-2X^n\cos\alpha+1\,(\alpha\in\mathbb{R})$ *. Écrire l'égalité obtenue en substituant* 1 *à* X.

Solution : $X^{2n}-2X^n\cos\alpha+1=\left(X^n-e^{in\alpha}\right)\left(X^n-e^{-in\alpha}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\alpha+\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X-e^{-i\alpha-\frac{2ik\pi}{n}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)X+1\right)$. *On en déduit* $2(1-\cos n\alpha)=2^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ *ou* $\sin^2\left(\frac{n\alpha}{2}\right)=2^{2n-2}\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 21.58 ♡♡

Factoriser sur $\mathbb{R}$ *le polynôme*

$$P=1-X+\frac{X(X-1)}{2!}-\frac{X(X-1)(X-2)}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)}{n!}.$$

Solution : *Soit* $k\in[\![1,n]\!]$*. Prouvons que* k *est une racine de* P *:*

$$\begin{aligned} P(k) &= 1-k+\frac{k(k-1)}{2!}-\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}+\ldots+(-1)^k\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-k+1)}{k!} \\ &= 1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\ldots+(-1)^k\binom{k}{k} \\ &= (1-1)^k \text{ d'après la formule du binôme} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme P *est de degré* n*, il admet au plus* n *racines et nécessairement :* $\boxed{P=\frac{(-1)^n}{n!}(X-1)(X-2)\ldots(X-n)}$.

Exercice 21.59 ♡♡

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

1. *Factoriser dans* $\mathbb{C}[X]$ *le polynôme :* $(X+1)^n-(X-1)^n$
2. *En déduire pour tout* $m\in\mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{2m}\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2m+1}$ *et* $\prod_{k=1}^{m}\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2m+1}$.
3. *En déduire aussi pour tout* $m\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2m}\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2m+1}$.

Solution :

1. *Remarquons que* $\deg \mathrm{P} = n-1$. *Il nous faut alors trouver les* $n-1$ *racines de* P *dans* $\mathbb{C}$. *Remarquons que* 1 *n'est pas une racine de* P. *Soit* $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. *On a, avec* $\omega = e^{2i\pi/n}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) = 0 &\iff \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!], \quad \frac{x+1}{x-1} = \omega^k \text{ on reconnaît des racines nième de l'unité} \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!], \quad x = \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1} \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!], \quad x = \frac{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}} \text{ en factorisant par les angles moitiés} \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!], \quad x = -i \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n} \text{ d'après les formules d'Euler}
\end{aligned}$$

Comme le coefficient du terme dominant de P *est* $2n$, *on obtient alors* $\boxed{\mathrm{P} = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(\mathrm{X} + i \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}\right)}$.

2. *On suppose ici que* $n = 2m+1$. *On identifie les termes constants entre l'expression développée et l'expression factorisée de* P. *On trouve alors que :* $(2m+1) \prod_{k=1}^{2m} \left(-i \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1}\right) = 2$ *ce qui amène :* $\boxed{\prod_{k=1}^{2m} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2m+1}}$.

Remarquons que pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, $\frac{(m+k)\pi}{2m+1} = \pi - \frac{(m-k+1)\pi}{2m+1}$ *donc*

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2m} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1} &= \prod_{k=1}^{m} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1} \prod_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}\left(\pi - \frac{(m-k+1)\pi}{2m+1}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{m} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1} \times (-1)^m \times \prod_{k=1}^{m} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1} \\
&= (-1)^m \left(\prod_{k=1}^{m} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1}\right)^2
\end{aligned}$$

car pour tout $x \neq 0 \ [\pi]$, $\operatorname{cotan}(\pi - x) = -\operatorname{cotan} x$. *Finalement :* $\boxed{\prod_{k=1}^{m} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1} = \sqrt{\frac{1}{2m+1}}}$.

3. *En développant avec la formule du binôme, on remarque que le coefficient du terme de degré* $n-2$ *dans* P *est nul. On en déduit que la somme des racines de* P *est nulle, ce qui donne* $\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1}$. *On retrouve facilement ce résultat en utilisant la relation* $\operatorname{cotan}(\pi - x) = -\operatorname{cotan} x$.

Exercice 21.60 ♡♡♡

On note

$$\mathscr{E} = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mid \exists (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \ \text{ avec } \mathrm{P} = \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2\right\}$$

1. *Montrer que* $\mathscr{E}$ *est stable pour la multiplication.*
2. *En déduire que* $\mathscr{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mid \forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{P}(x) \geqslant 0\}$.

Solution :

1. *Si* $\mathrm{P}_1 = \mathrm{Q}_1^2 + \mathrm{R}_1^2 \in \mathscr{E}$, $\mathrm{P}_2 = \mathrm{Q}_2^2 + \mathrm{R}_2^2 \in \mathscr{E}$, *alors* $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = (\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 + \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2)^2 + (\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1 - \mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2)^2$ *et* $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \in \mathscr{E}$.
2. *Effectuons un raisonnement par double inclusion. L'inclusion direct* $\subset$ *est clair. Montrons l'inclusion réciproque* $\supset$. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *un polynôme positif. Décomposons* P *en produit de polynômes irréductibles normalisés de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{P} = \lambda \mathrm{P}_1^{\alpha_1} \dots \mathrm{P}_k^{\alpha_k}$$

où les P_i, *pour* $i \in [\![1, k]\!]$ *sont soit des polynômes de degré* 1, *soit des polynômes de degré* 2 *à discriminant strictement négatif.*

Si cette décomposition contient effectivement des polynômes de degré 1 *alors* P *ne peut être positif. Il change de signe en la racine de ces polynômes. Donc la décomposition de* P *ne contient que des termes de degré* 2 *de la forme* $\mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$ *où* $p, q \in \mathbb{R}$ *sont tels que* $p^2 - 4q < 0$. *Mais un tel polynôme est élément de* $\mathscr{E}$ *car il s'écrit* $\mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q = (\mathrm{X} - p/2)^2 + (\sqrt{q - p^2/4})^2 \in \mathscr{E}$. *Comme* $\mathscr{E}$ *est stable pour le produit, on en déduit que* $\mathrm{P} \in \mathscr{E}$ *(la constante* λ *est nécessairement positive et elle s'écrit par exemple* $\lambda = 0^2 + \left(\sqrt{\lambda}\right)^2$.

21.6.7 Relations entre coefficients et racines

Exercice 21.61 ♡

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ *pour que*

$$P = 2X^3 - X^2 - 7X + \lambda$$

possède deux racines de somme 1.

Solution : *Notons* x_1, x_2, x_3 *les racines de* P. *Supposons, quitte à re-indicier les racines, que* $x_1 + x_2 = 1$. *D'après les relations coefficients-racines, on sait que* $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$. *Une condition necessaire est donc que la troisième vale* $-\frac{1}{2}$. *Par conséquent,* $P(-1/2) = 0$ *d'où* $\lambda = -3$. *On vérifie facilement que la réciproque est vraie.*

Exercice 21.62 ♡

Soit $P(X) = X^3 + 2X^2 - 7X + \lambda \in \mathbb{C}[X]$. *Trouver* λ *pour que le carré d'une racine de* P *soit égal à la somme des carrés des autres racines.*

Solution : *Notons* x_1, x_2, x_3 *les trois racines de* P. *On suppose, quitte à les renuméroter, que* $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. *On écrit les relations coefficients racines :*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -2 \quad \sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -7 \quad \sigma_3 = x_1 x_2 x_3 = -\lambda.$$

Donc $2x_3^2 == \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 18$ *et* $x_3^2 = 9$. *On trouve alors* $\lambda = -24$ *ou* $\lambda = -12$. *On vérifie que* $\lambda = -24$ *convient. En effet, dans ce cas les racines de* P *sont* $x_3 = 3, x_1 = -5/2 + i\sqrt{7}/2$ *et* $x_2 = -5/2 - i\sqrt{7}/2$ *et on a bien* $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. *Si* $\lambda = -12$ *alors les racines de* P *sont* $x_3 = -3$ *et* $x_1 = 1/2 + \sqrt{17}/2$, $x_2 = 1/2 - \sqrt{17}/2$ *et on n'a pas* $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. *Donc seul* $\boxed{\lambda = -24}$ *convient.*

Exercice 21.63 ♡♡

Montrer qu'il n'existe pas de triplet de réels (u, v, w) *vérifiant :*

$$u + v + w = 3 \quad \text{et} \quad uv + vw + wu = 6$$

Indication 21.5 : Utiliser les relations coefficients-racines et le théorème de Rolle.

Solution : *Si un tel triplet* (u, v, w) *existait, les réels* u, v, w *seraient racines de* $P(X) = X^3 - 3X^2 + 6X + c$ *d'après les relations coefficients-racines. Mais d'après le théorème de Rolle,* P' *posséderait alors deux racines réelles distinctes, ce qui est faux. Un tel triplet n'existe donc pas.*

Exercice 21.64 ♡♡

Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ *du polynôme* $X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 6$ *sachant qu'il possède deux racines dont la somme est* 0.

Solution : *Notons* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *les racines de* P *et supposons que* $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. *Écrivons les relations coefficients racines pour* P *:*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = -7 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -1 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 6 \end{cases}$$

De la première, on tire que $\alpha_3 + \alpha_4 = 1$. *La seconde se re-écrit* $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = -7$ *et il vient que* $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = -7$. *La troisième équivaut à* $\alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 + \alpha_2) = -1$ *et donc on a* $\alpha_1\alpha_2 = -1$. *Comme les réels* α_1, α_2 *satisfont le système*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 = -1 \end{cases}$$

ce sont les racines du trinôme $X^2 - 1$. *Donc on a par exemple* $\alpha_1 = 1$ *et* $\alpha_2 = -1$. *Il vient alors que* α_3, α_4 *satisfont le système*

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 & = 1 \\ \alpha_3\alpha_4 = -6 \end{cases}$$

ce sont les racines du trinôme $X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2)$. *Donc* $\alpha_3 = 3$ *et* $\alpha_4 = -2$. *Les racines de* P *sont alors :* $\boxed{-2, -1, 1, 3}$.

Exercice 21.65 ♡♡

Soit $P = X^3 + X - 1 \in \mathbb{C}[X]$. *On note* x_k *avec* $k \in [\![1,3]\!]$ *ses trois racines complexes.*

1. *Vérifier (sans chercher à les calculer) que les trois racines sont distinctes.*
2. *Effectuer la division euclidienne de* X^5 *par* P.
3. *En déduire la valeur de*

$$S = \sum_{k=1}^{3} x_k^5$$

Solution :

1. *Par l'absurde, si* x *est une racine double de* P, *alors* $P(x) = P'(x) = 0$. *Mais* $P'(x) = 0 \implies 3x^2+1 = 0 \implies x = \pm\frac{i}{\sqrt{3}}$, *qui ne sont pas des racines de* P. *Donc toutes les racines complexes de* P *sont simples.*
2. *On trouve que* $X^5 = (X^2-1)P(X) + X^2 + X - 1$.
3. *Si* x_k *est une racine de* P, *alors* $x_k^5 = (x_k^2-1)P(x_k) + x_k^2 + x_k - 1 = x_k^2 + x_k - 1$. *On peut alors exprimer la somme cherchée en fonction des fonctions symétriques élémentaires des racines de* P. *Si* $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ *et si* $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$ *alors*

$$S = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 + \sigma_1 - 3 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1 - 3 = -2 - 3 = \boxed{-5}$$

Exercice 21.66 ♡♡

Trouver $m \in \mathbb{C}$ *pour que le polynôme*

$$P = X^3 + X^2 + mX + 6 \in \mathbb{C}[X]$$

possède deux racines x_1, x_2 *vérifiant*

$$x_1 + x_2 = x_1x_2$$

Déterminer alors explicitement ces racines.

Solution : *Notons* x_1, x_2, x_3 *les racines de* P. *En écrivant les relations coefficients-racines, il vient que :*

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m \quad x_1x_2x_3 = -6$$

En supposant que $x_1 + x_2 = x_1x_2$, *de la deuxième et la troisième relation, on tire*

$$(x_1 + x_2)x_3 = -6 \implies x_1x_2 = m + 6.$$

Mais de la première, on tire aussi

$$(-1 - x_3)x_3 = -6 \implies x_3^2 + x - 6 = 0$$

et par conséquent, l'une des racines de P *doit être égale à* 2 *ou alors à* -3. *Etudions les deux cas :*

- $x_3 = 2$ *: comme* $P(2) = 0$, $m = -9$ *et alors* $P = (X-2)(X^2+3X-3)$. *Alors comme* x_1, x_2 *sont les racines du trinôme* $X^2 + 3X - 3$, $x_1x_2 = -3$ *et* $x_1 + x_2 = -3$ *conviennent.*
- $x_3 = -3$ *: comme* $P(-3) = 0$, $m = -4$ *et alors* $P = (X+3)(X^2-2X+2)$ *et dans ce cas,* $x_1x_2 = 2$, $x_1 + x_2 = 2$ *conviennent également.*

En conclusion, $\boxed{m = -9}$ *ou* $\boxed{m = -4}$.

Exercice 21.67 ♡♡♡

Trouver les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ *solutions de*

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} & = 1 \end{cases}.$$

Solution : *Exprimons ces trois quantités en fonction de* $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$ *et* $\sigma_3 = xyz$. *On a* $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ *et* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$. *Si* x, y, z *sont solutions du système d'équations de l'énoncé, alors on doit avoir* $\sigma_1 = 1$, $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9$ *et* $\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 1$ *d'où l'on tire* $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -4$ *et* $\sigma_3 = -4$. *Alors* x, y, z *sont racines du polynôme* $X^3 - \sigma_1X^2 + \sigma_2X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2)$ *et donc* $\boxed{(x, y, z) = (1, 2, -2)}$ *à permutation près. On vérifie que réciproquement, ces valeurs, à permutation près, donnent des solutions au système.*

Exercice 21.68 ♡♡♡

Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

Solution : *Il est clair que les racines cubiques de l'unité* 1, j *et* j^2 *sont un triplet de solutions.*
Soient trois complexes (z_1, z_2, z_3) *vérifiant les conditions. Ils sont racines du polynôme*

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)X - z_1 z_2 z_3 = 0$$

Mais puisque $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, *et que* $z_1 z_2 z_3 = 1$,

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} = \overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0.$$

Par conséquent, les complexes z_1, z_2, z_3 *sont racines du polynôme* $P(X) = X^3 - 1$. *Ce sont donc les racines cubiques de l'unité :* $\{z_1, z_2, z_3\} = \{1, j, j^2\}$.

Sinon, en considérant les points M_k *d'affixes respectives* z_k, *l'égalité* $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ *se traduit par* O *est le centre de gravité de* $M_1M_2M_3$. *Comme on a* $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, O *est aussi le centre du cercle circonsrit. Les médianes sont donc aussi médiatrices, donc* $M_1M_2M_3$ *est équilatéral. Quitte à changer la numérotation, il existe* α *tel que* $z_k = \exp\left(i\alpha + \frac{2ik\pi}{3}\right)$. *La troisième égalité* $z_1 z_2 z_3 = 1$ *dit alors que* $\alpha^3 = 1$ *ce qu'il fallait vérifier.*

Exercice 21.69 ♡♡

On considère une vraie ellipse $\begin{cases} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= a\sin t \end{cases}$, $a^2 \neq b^2$ *Démontrer que quatre points* $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ *sont cocycliques si et seulement si leurs paramètres* $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ *vérifient* $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \equiv 0[2\pi]$ *(passer en* e^{it}*).*

Solution : *Une intersection se détermine simplement lorsqu'un ensemble est déterminé par une équation cartésienne et l'autre en paramétrique. Ici cela fournit la solution. On considère un cercle d'équation* $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ *qui coupe l'ellipse en quatre points* $M_i(a\cos t_k, b\sin t_k)$ *qui vérifient* $a^2\cos^2 t_k + b^2\sin^2 t_k + 2a\alpha\cos t_k + 2b\beta\sin t_k + \gamma = 0$. *Soit* $a^2\dfrac{e^{2it_k} + 2 + e^{-2it_k}}{4} - b^2\dfrac{e^{2it_k} - 2 + e^{-2it_k}}{4} + 2a\alpha\dfrac{e^{it_k} + e^{-2it_k}}{2} + 2b\beta\dfrac{e^{it_k} - e^{-2it_k}}{2i} + \gamma = 0$. *En multipliant par* e^{2it_k} *:* $\dfrac{a^2 - b^2}{4}e^{4it_k} + (a\alpha - ib\beta)e^{3it_k} + \dfrac{a^2 + b^2}{2}e^{2it_k} + (a\alpha + ib\beta)e^{it_k} + \dfrac{a^2 - b^2}{4} = 0$. *Donc les* e^{it_k} *sont des racines distinctes du polynôme :* $\dfrac{a^2 - b^2}{4}X^4 + (a\alpha - ib\beta)X^3 + \dfrac{a^2 + b^2}{2}X^2 + (a\alpha + ib\beta)X + \dfrac{a^2 - b^2}{4}$. *Le produit des racines vaut d'une part* $\exp(i(t_1 + t_2 + t_3 + t_4))$ *et d'autre part* $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{4}}{\frac{a^2-b^2}{4}} = 1$. *D'où le résultat.*

Exercice 21.70 ♡♡♡

Juliette se réveille à la fin du cours d'algèbre du mardi après-midi. A ce moment précis, elle entend le professeur dire : "… et je vous donne comme indication que toutes les racines sont positives et réelles." En levant les yeux vers le tableau, elle découvre une équation du $20^{\text{ème}}$ *degré à résoudre à la maison, qu'elle essaie de recopier à toute vitesse. Elle arrive seulement à voir les deux premiers termes :* $x^{20} - 20.x^{19}$ *avant que le professeur n'efface complètement le tableau. Heureusement elle se souvient que le terme constant est* $+1$. *Pouvez- vous aider notre héroïne à résoudre cette équation ?*

Solution : *Facile ! Si on appelle* $a_1, \ldots, a_{20}$ *les racines. On a* $\dfrac{a_1 + \ldots + a_{20}}{20} = a_1 \ldots . a_{20} = 1$. *On est dans le cas d'égalité de l'inégalité arithetico-géométrique, donc tous les* a_k *sont égaux à* 1.

Chapitre 22

Fractions rationnelles

Pour bien aborder ce chapitre

Les fractions rationnelles sont aux polynômes ce que les nombres rationnels de $\mathbb{Q}$ sont aux entiers relatifs de $\mathbb{Z}$. On construit ainsi un corps contenant l'anneau des polynômes. Cette construction peut s'adapter à tous les anneaux intègres. Elle ne sera qu'évoquée dans les lignes qui suivent.
Comme les polynômes, les fractions rationnelles sont des objets abstraits, plus algébriques qu'analytiques. Par exemple la dérivation est purement formelle.
L'essentiel est de savoir calculer avec les fractions rationnelles, et ce ne sont pas les calculs qui manquent.
Vous devrez donc apprendre un certain nombre de techniques qui pourront vous éviter de vous noyer. Après quoi, vous verrez en fin de chapitre des applications surprenantes des fractions rationnelles.
Lapartie la plus utilitaire de ce chapitre reste l'application au calcul de primitives.

22.1 Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

22.1.1 Définition

DÉFINITION 22.1 ♡ **Fractions rationnelles**

Une fraction rationnelle est un « quotient » de deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On la note $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles.

22.1.2 Égalité de deux fractions

On dit que deux fractions $\dfrac{P_1}{Q_1}$ et $\dfrac{P_2}{Q_2}$ sont égales si et seulement si

$$P_1Q_2 = P_2Q_1.$$

Autrement dit $\dfrac{P_1}{Q_1}$ et $\dfrac{P_2}{Q_2}$ sont des écritures d'une même fraction.

Remarque 22.1 Si $\delta = P \wedge Q$, alors $P = P_1\delta$ et $Q = Q_1\delta$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$ et alors $\frac{P}{Q} = \frac{P_1\delta}{Q_1\delta} = \frac{P_1}{Q_1}$. On peut également diviser au numérateur et au dénominateur par le coefficient dominant du polynôme Q_1. Dans la suite, on considérera donc uniquement des fractions rationnelles de la forme $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ et Q un polynôme unitaire.

22.1.3 Polynômes

On assimile les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ aux fractions $\dfrac{P}{1}$ de $\mathbb{K}(X)$. En particulier le polynôme nul de $\mathbb{K}[X]$ est assimilé à la fraction nulle $\dfrac{0}{1}$ de $\mathbb{K}(X)$.

22.1.4 Opérations sur les fractions

On peut définir la somme et le produit de deux fractions rationnelles par les formules suivantes :

$$F_1(X) = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}, \quad F_2(X) = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$$

et

$$F_1 + F_2 = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2} \quad F_1F_2 = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}.$$

Les sommes ou produits de fractions ne dépendent pas des écritures choisies.
Muni de ces lois, $\left(\mathbb{K}(X), +, \times\right)$ est un corps commutatif. $\mathbb{K}[X]$ en est un sous-anneau.

22.1.5 Degré d'une fraction

DÉFINITION 22.2 ♡ **Degré d'une fraction rationnelle**

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle degré de F :

$$\deg F = \deg P - \deg Q \in \mathbb{Z}$$

On vérifie que la notion de degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas de l'écriture choisie.
On vérifie que le degré des fractions rationnelles prolonge le degré des polynômes, c'est-à-dire que

$$\underbrace{\deg P}_{\mathbb{K}[X]} = \deg \underbrace{\frac{P}{1}}_{\mathbb{K}(X)}.$$

PROPOSITION 22.1
On a les mêmes propriétés que pour le degré des polynômes :

$$\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2), \quad \deg(F_1F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$$

Lorsque $F \neq 0$, le degré de F est un entier relatif. Lorsque $F = 0$, $\deg F = -\infty$.

DÉFINITION 22.3 ♡ **Zéros, pôles d'une fraction rationnelle, fonctions rationnelles**

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On rappelle que P et Q sont premiers entre eux. Les racines de P s'appellent les *zéros* de F et les racines de Q les *pôles* de F. Si $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des pôles de F, on peut définir la *fonction rationnelle* associée à F :

$$\widetilde{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \setminus \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{array} \right.$$

Remarque 22.2 Un pôle $a \in \mathbb{K}$ de la fraction $F = \frac{P}{Q}$, est dit de multiplicité $k \in \mathbb{N}$, lorsque le scalaire a est un zéro de multiplicité k du polynôme Q.

DÉFINITION 22.4 ♡ **Dérivée d'une fraction rationnelle**

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On définit *formellement* la dérivée de cette fraction rationnelle par la formule

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Remarque 22.3 On associe la *fonction rationnelle* dérivée associée $\widetilde{F}' : \mathbb{K} \setminus \mathscr{P} \mapsto \mathbb{K}$. Cette fonction dérivée coïncide avec la dérivée usuelle de la fonction $\widetilde{F}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On vérifie aussi que cette dérivée des fractions prolonge celle des polynômes.

22.2 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

PROPOSITION 22.2 ♡ **Partie entière d'une fraction rationnelle**

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$\begin{cases} F = E + G \\ \deg G < 0 \end{cases}$$

Le polynôme E est appelé la *partie entière* de la fraction F.

Démonstration

- *Unicité.*
  On suppose que $F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2$ *avec* $E_1, E_2 \in \mathbb{K}[X]$ *et* $G_1, G_2 \in \mathbb{K}(X)$ *avec* $\deg G_1 < 0$ *et* $\deg G_2 < 0$. *On en déduit* $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$. *Donc* $\deg(G_2 - G_1) < 0$ *soit* $\deg(E_1 - E_2) < 0$. *Le seul polynôme qui a un degré négatif est le polynôme nul. Donc* $E_1 = E_2$ *et donc* $G_2 = G_1$. *Ce qu'il fallait vérifier.*
- *Existence.*
  on effectue la division euclidienne du polynôme A *par le polynôme* B : $A = BE + R$ *avec* $\deg R < \deg B$ *et alors* $F = E + \frac{R}{B}$ *avec* $E \in \mathbb{K}[X]$ *et* $G = \frac{R}{B}$ *de degré strictement négatif.*

PROPOSITION 22.3 ♡ **Partie polaire d'une fraction rationnelle**

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et un pôle $a \in \mathbb{K}$ de multiplicité k :

$$B = (X-a)^k \widehat{B} \text{ avec } \widehat{B}(a) \neq 0$$

Il existe un unique couple $(C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ de polynômes tels que

$$F = \frac{C}{\widehat{B}} + \frac{D}{(X-a)^k} \text{ et } \deg(D) < k$$

La fraction rationnelle $\frac{A_2}{(X-a)^k}$ est appelée *partie polaire* de la fraction F relative au pôle a.

Démonstration

- *Unicité.*
  On écrit $F = \frac{C_1}{\widehat{B}} + \frac{D_1}{(X-a)^k} = \frac{C_2}{\widehat{B}} + \frac{D_2}{(X-a)^k}$ *avec* $\deg(D_1) < k$*et* $\deg(D_2) < k$. *On en déduit que* $\frac{C_1 - C_2}{\widehat{B}} = \frac{D_2 - D_1}{(X-a)^k}$ *et donc* $(C_1 - C_2)(X-a)^k = (D_2 - D_1)\widehat{B}$. *On en déduit que* a *est une racine d'ordre au moins* k *du polynôme* $(D_2 - D_1)\widehat{B}$ *donc du polynôme* $(D_2 - D_1)$ *puisque* $\widehat{B}(a) \neq 0$. a *est une racine d'ordre* $\geqslant k$ *d'un polynôme de degré* $< k$ *: Ce polynôme est nul.* $D_2 = D_1$ *et par suite* $C_1 = C_2$. *Ce qu'il fallait vérifier.*
- *Existence.*
  Dans un premier temps on ne s'occupe pas du degré de D *: Comme* $\widehat{B}(a) \neq 0$, $\widehat{B}$ *et* $X - a$ *sont premiers entre eux. Il en est donc de même pour* $\widehat{B}$ *et* $(X-a)^k$. *D'après la propriété de Bézout, il existe deux polynômes* U *et* V *vérifiant*

  $$A(X) = U(X)(X-a)^k + V(X)\widehat{B}(X).$$

  Dans un deuxième temps on s'occupe du degré de D *: On effectue la division euclidienne de* V *par* $(X-a)^k$. *Il existe deux polynômes* Q *et* D *avec* $\deg D < k$ *tels que*

  $$V = Q(X-a)^k + D.$$

  En remplaçant V, *on obtient* $A = (U+Q)(X-a)^k + D\widehat{B}$, *ce qui donne le résultat en prenant* $C = U + Q$.

PROPOSITION 22.4 ♡ **Coefficient associé à un pôle simple**

Si une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ est de degré < 0 avec $Q(X) = (X - a)V(X)$, où $V(a) \neq 0$, la partie polaire de la fraction F relativement au pôle simple a est de la forme $\frac{\lambda}{X-a}$:

$$F = \frac{\lambda}{X - a} + \frac{U}{V} \tag{22.1}$$

C'est le résultat précédent dans le cas particulier $k = 1$.

Remarque 22.4
Pour trouver le scalaire λ, on peut :

- Multiplier (22.1) par $(X - a)$, puis faire $x = a$ dans la fonction rationnelle associée. On trouve que : $\boxed{\lambda = \frac{P(a)}{V(a)}}$.
- Utiliser la formule de Taylor pour Q, et obtenir $\boxed{\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}}$. Cette formule est très utile lorsqu'il est difficile de trouver le quotient V du polynôme Q par $(X - a)$.

22.2.1 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

THÉORÈME 22.5 ♡ **Décomposition dans** $\mathbb{C}(X)$

Soit une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$, avec la décomposition du polynôme Q en éléments irréductibles qui s'écrit :

$$Q = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_n)^{\alpha_n}$$

Alors la fraction F s'écrit de façon *unique* sous la forme

$$F = E + \left(\frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}}\right) + \dots + \\ + \left(\frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}}\right)$$

où la partie entière $E \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme nul, ou de degré $\deg(P) - \deg(Q)$ et où les coefficients $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ sont complexes.

Démonstration

- *Unicité.*
  On part de l'écriture

$$F = E + \left(\frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}}\right) + \dots + \\ + \left(\frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}}\right)$$

  et on réduit chaque partie polaire au même dénominateur :

$$F = E + \frac{D_1(X)}{(X - a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{D_n(X)}{(X - a_n)^{\alpha_n}}$$

  Chaque polynôme $D_k = \lambda_{k1}(X - a_k)^{\alpha_k - 1} + \dots + \lambda_{k\alpha_k}$ *vérifie* $\deg(D_k) < \alpha_k$. *D'après la proposition 22.3, les polynômes* D_k *sont uniques. Il en est de même des coefficients* $\lambda_{kp}, 1 \leqslant p \leqslant \alpha_k$ *qui sont les coordonnées du polynôme* D_k *dans la famille libre* $(X - a_k)^{\alpha_k - p}$.
- *Existence.*
  La proposition 22.3 utilisée jusqu'à épuisement des parties polaires donne

$$F = E + \frac{D_1(X)}{(X - a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{D_n(X)}{(X - a_n)^{\alpha_n}}$$

  avec $\deg(D_k) < \alpha_k$. *La fraction rationnelle* E *est une fraction sans pôle, c'est donc un polynôme. Comme la fraction*

$$\frac{D_1(X)}{(X - a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{D_n(X)}{(X - a_n)^{\alpha_n}}$$

est de degré strictement négatif, E *est donc la partie entière de* F.
Il ne reste plus qu'à obtenir les coefficients $\lambda_{kp}, 1 \leqslant p \leqslant \alpha_k$ *qui sont les coordonnées du polynôme* D_k *dans la famille génératrice* $(X - a_k)^{\alpha_k - p}$.

Remarque 22.5 Tous les coefficients $\lambda_{k\alpha_k}$ sont différents de zéro.

Exercice 22.1

Décomposer les fractions rationnelles $F(X) = \dfrac{X-4}{(X-1)(X+1)X}$ *et* $G(X) = \dfrac{1}{X^n - 1}$ *dans* $\mathbb{C}(X)$.

Solution : *Pour chaque fraction, tous les pôles sont simples.*
Pour F*, en multipliant par* $X - a$ *où* a *vaut successivement* $1, -1$ *et* 0*, on trouve :*

$$\frac{X-4}{(X-1)(X+1)X} = \frac{-3/2}{X-1} + \frac{-5/2}{X+1} + \frac{4}{X}.$$

En effectuant un développement limité à l'infini à l'ordre 1 *de* $f(x) = \dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)x}$ *de deux façons différentes on trouve d'une part :* $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ *et d'autre part :* $f(x) = \dfrac{-3/2}{x} + \dfrac{-5/2}{x} + \dfrac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$*. Ce qui est bien cohérent. Cette vérification simple et rapide est à retenir.*

Pour $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ *on utilise* $\lambda_a = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$*. Les pôles sont les* $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), 0 \leqslant k \leqslant n-1$.

$Q(X) = X^n - 1$, $Q'(X) = nX^{n-1}$, $Q'\left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right) = \dfrac{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)}{n}$*. On en déduit* $\dfrac{1}{X^n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)}{n\left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right)}$.

Recherche des coefficients associés aux pôles multiples

On suppose que $F(X) = \dfrac{P}{Q}$ avec $\deg F < 0$ et $Q(X) = (X-a)^n V(X)$ avec $(V(a) \neq 0)$. La décomposition de F s'écrit alors

$$F = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{(X-a)^n} + \frac{U(X)}{V(X)} \tag{22.2}$$

- En multipliant (22.2) par $(X-a)^n$ et en faisant $x = a$, on trouve λ_n ;
- Si n est petit, ($n \leqslant 2$), on retranche $\dfrac{\lambda_n}{(X-a)^n}$ à F, et on recommence pour trouver λ_{n-1} etc ;
- Si $n \geqslant 3$, on fait le changement de variables $Y = X - a$, $F(Y) = \dfrac{P_1(Y)}{Y^n V_1(Y)}$, et on effectue une division selon les puissances croissantes (ou un $DL(0, n-1)$) à l'ordre $n-1$:

$$P_1 = V_1(a_0 + a_1 Y + \cdots + a_{n-1} Y^{n-1}) + R \text{ avec } \operatorname{val}(R) \geqslant n$$

  On a alors :

$$F(Y) = \frac{a_0}{Y^n} + \frac{a_1}{Y^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{Y} + \ldots$$

  et on trouve les coefficients $\lambda_1 = a_{n-1}$, $\lambda_2 = a_{n-2}, \ldots$.

Exercice 22.2

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ *les fractions rationnelles* $F(X) = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ *et* $G(X) = \dfrac{X+1}{(X-1)^4 X}$.

Solution : *Pour* F*, on commence par déterminer la partie entière en posant la division euclidienne de* $X^5 + 1$ *par* $X(X-1)^2$*. On trouve* $X^5 + 1 = (X^2 + 2X + 3)X(X-1)^2 + 4X^2 - 3X + 1$*. On obtient donc* $E(X) = X^2 + 2X + 3$*. Donc* $F(X) = X^2 + 2X + 3 + \dfrac{A}{X} + \dfrac{B}{(X-1)^2} + \dfrac{C}{X-1}$.
On trouve $A = 1$ *par multiplication par* X*. Pour la partie polaire relative à* 1*, on pose* $X = 1 + Y$*. En utilisant les techniques des développements limités :* $\dfrac{(1+y)^5 + 1}{1+y} = (2+5y)(1-y) + o(y) = 2 + 3y + o(y)$*. D'où* $B = 2$ *et* $C = 3$*. Finalement,* $\dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2} = X^2 + 2X + 3 + \dfrac{1}{X} + \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{3}{X-1}$.
Autre méthode, en utilisant le fait qu'il n'y a qu'un seul pôle d'ordre 2 *:*

On détermine la partie entière et on écrit $F(X) = X^2+2X+3+\dfrac{4X^2-3X+1}{X(X-1)^2} = X^2+2X+3+\dfrac{A}{X}+\dfrac{B}{(X-1)^2}+\dfrac{C}{X-1}$. *On détermine* $A=1$ *comme précédemment, et* $B=2$ *en multipliant par* $(X-1)^2$. *Ensuite en écrivant le développement limité à l'infini à l'ordre* 1 *de* $f_1(x)=\dfrac{4x^2-3x+1}{x(x-1)^2}$. *On trouve d'une part :* $f_1(x)=o\left(\frac{4}{x}\right)$ *et d'autre part :* $f_1(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{C}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. *D'où* $1+C=4$ *et* $C=3$.

On écrit $G(X)=\dfrac{A}{X}+\dfrac{B}{(X-1)^4}+\dfrac{C}{(X-1)^3}+\dfrac{D}{(X-1)^2}+\dfrac{E}{X-1}$. *On a* $A=1$ *facilement. Pour la partie polaire relative à* 1, *on pose* $x=1+y$. $g(1+y)=\dfrac{2+y}{y^4(1+y)}$. *On détermine donc un développement limité à l'ordre* 3 *de* $\dfrac{2+y}{1+y}=1+\dfrac{1}{1+y}=2-y+y^2-y^3+o(y^3)$. *D'où* $B=2, C=-1, D=1, E=-1$. *On vérifie après coup que* $A+E=1+(-1)=0$, *le coefficient de* $\frac{1}{x}$ *dans le développement limité à l'infini à l'ordre* 1 *de* $g(x)$.

Finalement, $\dfrac{X+1}{(X-1)^4X}=\dfrac{1}{X}+\dfrac{2}{(X-1)^4}-\dfrac{1}{(X-1)^3}+\dfrac{1}{(X-1)^2}-\dfrac{1}{X-1}$.

Remarque 22.6 Trois astuces à retenir pour obtenir des relations entre coefficients :
- multiplier par x^p et faire $x\to+\infty$ (ou prendre la partie entière des fractions résultantes) ;
- Utiliser la parité éventuelle de la fraction ;
- Donner une valeur particulière à x ($x=0$).

Exercice 22.3

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ *les fractions rationnelles* $F(X)=\dfrac{X+2}{(X-1)^2(X-2)^2}$ *et* $G(X)=\dfrac{X}{(X^2-1)^2}$.

Solution : *On écrit la décomposition à priori :* $F(X)=\dfrac{A}{(X-1)^2}+\dfrac{B}{(X-1)}+\dfrac{C}{(X-2)^2}+\dfrac{D}{(X-2)}$. *On pose* $x=1+y$, *on a* $F(1+y)=\dfrac{3+y}{y^2(y-1)^2}$ *et on détermine un développement limité à l'ordre* 1 *de* $\dfrac{3+y}{(y-1)^2}=(3+y)(1+2y)+o(y)=3+7y+o(y)$. *D'où* $A=3$ *et* $B=7$. *On détermine* $C=4$ *en calculant* $F(X)(X-2)^2$ *en* 2. *En écrivant le développement limité à l'infini à l'ordre* 1 *de* $F(x)$ *on obtient* $B+D=0$ *soit* $D=-7$.

Finalement, $\dfrac{X+2}{(X-1)^2(X-2)^2}=\dfrac{3}{(X-1)^2}+\dfrac{7}{(X-1)}+\dfrac{4}{(X-2)^2}-\dfrac{7}{(X-2)}$.

On écrit la décomposition à priori : $G(X)=\dfrac{A}{(X-1)^2}+\dfrac{B}{(X-1)}+\dfrac{C}{(X+1)^2}+\dfrac{D}{(X+1)}$. *On pose* $x=1+y$, *on a* $G(1+y)=\dfrac{1+y}{y^2(2+y)^2}$ *et on détermine un développement limité à l'ordre* 1 *de* $\dfrac{1+y}{(2+y)^2}=(1+y)\dfrac{1-y}{4}+o(y)=\dfrac{1}{4}+o(y)$. *D'où* $A=\dfrac{1}{4}$ *et* $B=0$. *On écrit aussi* $G(X)=-G(-X)=-\dfrac{A}{(-X-1)^2}+\dfrac{B}{(-X-1)}+\dfrac{C}{(-X+1)^2}+\dfrac{D}{(-X+1)}=-\dfrac{A}{(X+1)^2}+\dfrac{B}{(X+1)}-\dfrac{C}{(X-1)^2}+\dfrac{D}{(X-1)}$.

D'après l'unicité de l'écriture de la décomposition en éléments simples, $C=-A=-\dfrac{1}{4}$ *et* $B=A=0$. *Finalement,* $\dfrac{X}{(X^2-1)^2}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(X-1)^2}-\dfrac{1}{(X+1)^2}\right)$.

22.2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ est aussi dans $\mathbb{C}(X)$. On peut comme telle lui appliquer le théorème 22.5. Comme ses pôles non réels sont conjugués deux à deux, on peut additionner les parties polaires correspondant à ces pôles conjugués pour obtenir :

THÉORÈME 22.6 ♡ **Décomposition dans** $\mathbb{R}(X)$

Soit $F=\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{R}(X)$, où la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur s'écrit :

$$Q=(X-a_1)^{\alpha_1}\dots(X-a_n)^{\alpha_n}(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}\dots(X^2+b_pX+c_p)^{\alpha_p}$$

Alors la fraction F s'écrit de façon unique :

$$\begin{aligned}F = E + \Bigg[\left(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1}+\frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}}\right)+\cdots+\\ +\left(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n}+\frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\right)\Bigg]+\\ +\Bigg[\left(\frac{\mu_{11}X+\delta_{11}}{X^2+b_1X+c_1}+\frac{\mu_{12}X+\delta_{12}}{(X^2+b_1X+c_1)^2}+\cdots+\frac{\mu_{1\beta_1}X+\delta_{1\beta_1}}{(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}}\right)+\cdots+\\ +\left(\frac{\mu_{p1}X+\delta_{p1}}{X^2+b_pX+c_p}+\frac{\mu_{p2}X+\delta_{p2}}{(X^2+b_pX+c_p)^2}+\cdots+\frac{\mu_{p\beta_p}X+\delta_{p\beta_p}}{(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

où la partie entière $E \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme nul ou de degré $\deg P - \deg Q$, et tous les λ_{ij}, μ_{ij}, δ_{ij} sont des réels. Le premier groupe est formé *d'éléments simples de première espèce* et le second groupe d'*éléments simples de seconde espèce*.

– La recherche de la partie entière et des coefficients des éléments simples de première espèce se fait comme précédemment ;
– On peut utiliser une décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et regrouper les éléments simples correspondant aux pôles conjugués pour obtenir les éléments simples de seconde espèce ;
– Si $X^2+pX+q=(X-a)(X-\overline{a})$, on peut multiplier la décomposition par $(X^2+pX+q)^k$ et faire $x=a$, puis $x=\overline{a}$;
– Utiliser les remarques précédentes pour trouver des relations entre coefficients.

Exercice 22.4

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ *les fractions rationnelles* $F(X)=\dfrac{1}{X^{2n}-1}$, $G(X)=\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2}$ *et* $H(X)=\dfrac{X}{(X^2+1)^2(X-1)^2}$.

Solution : *On a déjà vu la décomposition sur* $\mathbb{C}$ *:* $F(X)=\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n-1}\frac{\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)}{\left(X-\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)\right)}$*. On regroupe les pôles conjugués qui correspondent aux valeurs de k opposées. Restent* $k=-n$*, (pôle* -1*) et* $k=0$*, (pôle* 1*). Enfin*
$\dfrac{\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)}{X-\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)}+\dfrac{\exp\left(-\frac{2ik\pi}{2n}\right)}{X-\exp\left(-\frac{2ik\pi}{2n}\right)}=\dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X-2}{X^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X+1}$*. Donc*

$$\frac{1}{X^{2n}-1}=\frac{1}{2n}\left(-\frac{1}{X+1}+\frac{1}{X-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X-2}{X^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X+1}\right).$$

Un jour l'Empereur voulut engager un conseiller qui soit aussi sage que savant. À cette fin il fit réunir tous les prétendants au poste dans une pièce fermée par une lourde porte sur laquelle était une serrure aussi imposante que complexe. Il leur fit savoir que le premier qui passerait cette porte serait nommé mais qu'ils devaient prendre garde à ne pas bloquer la serrure auquel cas tous seraient livrés à leur sort.
Tous les prétendants se mirent fébrilement à observer, à mesurer la serrure, à effectuer de longs et savants calculs pour percer le mystère du mécanisme. Tous sauf un qui méditait dans un coin de la pièce, insensible au brouhaha. Alors que l'excitation était à son comble parmi les doctes savants, l'adepte du zen se leva, alla droit sur la porte, en tourna la poignée et s'en alla.
La serrure $G(X)$ *est déjà un élément simple. Les Empereurs et les interrogateurs sont parfois facétieux.*

On écrit la décomposition à priori : $H(X)=\dfrac{AX+B}{(X^2+1)^2}+\dfrac{CX+D}{X^2+1}+\dfrac{E}{(X-1)^2}+\dfrac{F}{X-1}$*. On s'occupe de la partie polaire relative au pôle* 1*. On pose* $y=x-1$*,* $H(1+y)=\dfrac{1+y}{((1+y)^2+1)^2y^2}$*. On détermine un développement limité à l'ordre* 1 *de* $\dfrac{1+y}{((1+y)^2+1)^2y^2}=\dfrac{1+y}{4(1+y^2}+o(y)=\dfrac{1}{4}(1-y)+o(y)$*. D'où* $E=\dfrac{1}{4}$ *et* $F=-\dfrac{1}{4}$*.*
Calcul de A *et* B *: On multiplie par* $(X^2+1)^2$ *et on calcule la valeur des deux membres en* i*.* $Ai+B=\dfrac{i}{(i-1)^2}=\dfrac{i}{-1+2i+1}=\dfrac{i}{-2i}=-\dfrac{1}{2}$*. D'où* $A=0$ *et* $B=-\dfrac{1}{2}$*.*
Calcul de C *et* D *: On soustrait* $-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(X^2+1)^2}$ *à chaque membre. Or* $\dfrac{X}{(X^2+1)^2(X-1)^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(X^2+1)^2}=\dfrac{1}{2\left((X^2+1)^2\right)}\left(\dfrac{X^2+1}{(X-1)^2}\right)=\dfrac{1}{2(X^2+1)(X-1)^2}$*. Maintenant on multiplie par* $(X^2+1)^2$ *et on calcule la valeur des deux mem-*

bres en i. $\quad Ci + D = \dfrac{1}{2(i-1)^2} = \dfrac{1}{-4i} = \dfrac{i}{4}$. *D'où* $C = \dfrac{1}{4}$ *et* $D = 0$.
Finalement, $\dfrac{X}{(X^2+1)^2(X-1)^2} = -\dfrac{1/2}{(X^2+1)^2} + \dfrac{X/4}{X^2+1} + \dfrac{1/4}{(X-1)^2} - \dfrac{1/4}{X-1}$.

Exercice 22.5

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ *la fraction* $F(X) = \dfrac{1}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}$.

Solution : *On écrit la décomposition à priori :* $F(X) = \dfrac{A}{(X+1)^3} + \dfrac{B}{(X+1)^2} + \dfrac{C}{X+1} + \dfrac{DX+E}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{FX+G}{X^2+X+1}$. *On s'occupe de la partie polaire relative au pôle* 1. *On pose* $y = x+1$, $F(y-1) = \dfrac{1}{y^3(1-y+y^2)^2}$. *On détermine un développement limité à l'ordre* 2 *de* $\dfrac{1}{(1-y+y^2)^2} = 1 + 2y + y^2 + o(y^2)$. *D'où* $A = 1, B = 2$ *et* $C = 1$.

Calcul de D *et* E *: On multiplie par* $(X^2+X+1)^2$ *et on calcule la valeur des deux membres en* j. $\quad Dj + E = \dfrac{1}{(j+1)^3} = \dfrac{1}{1+3j+3j^2+1} = -1$. *D'où* $D = 0$ *et* $E = -1$.

Calcul de F *et* G *: On soustrait* $-\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2}$ *à chaque membre. Or* $\dfrac{1}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2} + \dfrac{1}{(X^2+X+1)^2} = \dfrac{1}{(X^2+X+1)^2}\left[\dfrac{1}{(X+1)^3} + 1\right] = \dfrac{1}{(X^2+X+1)^2}\dfrac{X^3+3X^2+3X+2}{(X+1)^3} = \dfrac{(X+2)(X^2+X+1)}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}$. *Miracle ? Non. Comme on a transformé le pôle d'ordre 2 en pôle d'ordre 1, on est sûr que la factorisation existe ! Maintenant on multiplie par* X^2+X+1 *et on calcule la valeur des deux membres en* j. $\quad Fj + G = \dfrac{j+2}{(j+1)^3} = -(j+2)$. *D'où* $F = -1$ *et* $G = -2$.

Finalement, $\dfrac{1}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2} = \dfrac{1}{(X+1)^3} + \dfrac{2}{(X+1)^2} + \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{(X^2+X+1)^2} - \dfrac{X+2}{X^2+X+1}$.

Exercice 22.6

Utiliser la décomposition de la fraction $F(X) = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ *pour trouver la limite de la suite de terme général*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Solution : *Tous les pôles sont simples, et on obtient simplement* $F(X) = \dfrac{1/2}{X} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1/2}{X+2}$. *On peut donc écrire* $F(k) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right] - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\right]$. *La somme* S_n *se télescope en* $\dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{n+1}\right] - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}\right]$. *La limite de* S_n *égale donc* $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 22.7

a. *Soit* f *la fonction* arctan. *Décomposer* $f'(x)$ *dans* $\mathbb{C}(X)$, *puis utiliser cette décomposition pour calculer explicitement* $f^{(n)}(x)$. *En déduire les zéros de* $f^{(n)}$.
b. *Calculer les dérivées successives de* $F = \dfrac{1}{1 - 2X\cos\vartheta + X^2}$.
c. *Calculer les dérivées successives de* $G = \dfrac{1 - X\cos\vartheta}{1 - 2X\cos\vartheta + X^2}$.

Solution :

a. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{x+i}\right]$.

En dérivant $n-1$ *fois cette égalité, on obtient* $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left[\dfrac{1}{(x-i)^n} - \dfrac{1}{(x+i)^n}\right]$.

On peut écrire $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\dfrac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(x^2+1)^n}$. *Le polynôme* $P_n(X) = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^n - (X-i)^n\right)$ *est réel, de degré* $n-1$. *Son coefficient dominant égale* n. *Les racines sont les solutions de* $(x+i)^n = (x-i)^n$, *soit* $x + i = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)(x-i)$, $k = 0, \dots, n-1$, *soit pour* $k = 1, \dots, n-1$, $\quad x = i\dfrac{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)+1}{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)-1} = i\dfrac{\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) + \exp\left(-\frac{ik\pi}{n}\right)}{\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{n}\right)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. *Ces* $n-1$ *racines sont distinctes car la fonction* cotan *est strictement décroissante sur* $]0;\pi[$. *Ce sont donc les* $n-1$ *racines de* P_n. *Donc* $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}n!}{(x^2+1)^n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} x - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

b. $F(X) = \dfrac{-1}{2i\sin\vartheta}\left(\dfrac{1}{X-e^{i\vartheta}} - \dfrac{1}{X-e^{-i\vartheta}}\right)$. *Donc* $F^{(n-1)}(x) = \dfrac{(-1)^n(n-1)!}{2i\sin\vartheta}\left[\dfrac{\left(X-e^{-i\vartheta}\right)^n - \left(X-e^{i\vartheta}\right)^n}{\left(1-2X\cos\vartheta+X^2\right)^n}\right]$. *Le polynôme* $\left(X-e^{-i\vartheta}\right)^n - \left(X-e^{i\vartheta}\right)^n$ *est de degré* $n-1$. *Ses racines sont les solutions de* $\left(z-e^{-i\vartheta}\right)^n = \left(z-e^{i\vartheta}\right)^n$ *soit* $z-e^{-i\vartheta} = e^{2ik\pi/n}\left(z-e^{i\vartheta}\right)$. *Soit* $z\left(1-e^{2ik\pi/n}\right) = e^{-i\vartheta} - e^{i\vartheta}e^{2ik\pi/n}$, *soit* $z = \dfrac{e^{-i(\vartheta+k\pi/n)} - e^{i(\vartheta+k\pi/n)}}{e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}} = \dfrac{\sin(\vartheta+k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$, $k = 1,\dots,n-1$.

Comme le coefficient dominant de $\left(X-e^{-i\vartheta}\right)^n - \left(X-e^{i\vartheta}\right)^n$ *égale* $-2in\sin\vartheta$ *on en déduit que* $F^{(n-1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}n!\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\frac{\sin(\vartheta+k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}\right)}{\left(1-2X\cos\vartheta+X^2\right)^n}$.

c.

Exercice 22.8

Soit un polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ *de degré* n *à coefficients réels n'admettant que des racines réelles simples.*

- *a.* *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $F = \dfrac{P'}{P}$.
- *b.* *En déduire que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $P''(x)P(x) \leqslant P'(x)^2$.
- *c.* *En déduire que le polynôme* $(P')^2 - PP''$ *n'a aucune racine réelle.*
- *d.* *Vérifier que* $\forall k \in \{1,\dots,n-1\} a_{k-1}.a_{k+1} \leqslant a_k^2$

Solution :

- *a.* *Comme les racines* $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$*de* P *sont simples on peut écrire* $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_k}{X-x_k}$. *On calcule* $\lambda_k = \dfrac{P'(x_k)}{P'(x_k)} = 1$, *d'où* $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{X-x_k}$.
- *b.* *On dérive les deux membres (en dehors des pôles) pour obtenir* $\dfrac{P''(x)P(x)-P'(x)^2}{P^2(x)} = -\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(x-x_k)^2} < 0$. *L'inégalité reste vraie pour les racines de* P.
- *c.* *Donc les seules racines réelles de* $(P')^2 - PP''$ *ne peuvent être que les racines de* P. *Mais si* x_k *est racine de* $PP'' - (P')^2$, *alors* a_k *serait aussi racine de* P' *et donc racine double de* P *ce qui est impossible.*
- *d.* *D'après le théorème de Rolle,* P' *est aussi un polynôme à coefficients réels n'admettant que des racines réelles simples. Il en est de même de sa dérivée* $k-1$*-ième. On en déduit que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $P^{(k+1)}(x)P^{(k-1)}(x) \leqslant P^{(k)}(x)^2$. *En particulier pour* $x=0$, $P^{(k+1)}(0)P^{(k-1)}(0) \leqslant P^{(k)}(0)^2$, *soit* $(k+1)!a_{k+1}(k-1)!a_{k-1} \leqslant (k!)^2 a_k^2$
  donc $a_{k+1}a_{k-1} \leqslant a_k^2\dfrac{k^2}{k(k+1)} \leqslant a_k^2$.

22.2.3 Moralité

- On peut traiter les parties polaires séparéments.
- Il est déconseillé de soustraire la partie entière.

Traduction du théorème d'existence et unicité : Pour obtenir les coefficients, tous les coups sont permis !

- Pour les pôles simples : multiplication par $(X-a)$ et valeur en a, ou P/Q' lorsqu'on ne connaît pas explicitement la fraction.
- Pour les pôles multiples : Division suivant les puissances croissantes ou développement limité.
- Exploiter la parité ou plus généralement les symétries.
- Regarder le comportement à l'infini.
- Prendre une valeur particulière.

22.3 Exercices

22.3.1 Fractions rationnelles

Exercice 22.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x+12}+\frac{1}{x+14}=0.$$

Solution : $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+14}\right)+\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+12}\right)-\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+10}\right)-\left(\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}\right)=0 \Leftrightarrow (2x+14)\left(\frac{1}{x(x+14)}+\frac{1}{(x+2)(x+12)}-\frac{1}{(x+4)(x+10)}-\frac{1}{(x+6)(x+8)}\right)=0$

$x=-7$ *est solution. Pour trouver les autres solutions, on suppose* $x\neq-7$*, en posant* $y=(x+7)^2$ *l'équation devient :* $\left(\frac{1}{y-7^2}-\frac{1}{y-1^2}\right)+\left(\frac{1}{y-5^2}-\frac{1}{y-3^2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{(y-7^2)(y-1^2)}+\frac{1}{(y-5^2)(y-3^2)}=0 \Leftrightarrow y^2-38y+181=0$ *avec* $y\neq 1^2,3^2,5^2,7^2 \Leftrightarrow y=19\pm6\sqrt{5} \Leftrightarrow x=-7\pm\sqrt{19+6\sqrt{5}}$ *soit* $x=-7\pm\sqrt{19-6\sqrt{5}}$ *sont les seules solutions autres que* $x=-7$.

Exercice 22.10

Soit $F\in\mathbb{C}(X)$. *On suppose qu'il existe* $P_1,P_2,\dots,P_n$ *dans* $\mathbb{C}[X]$ *tels que :* $F^n+P_1F^{n-1}+\dots+P_n=0 (n\geqslant 1)$ *Démontrer que* $F\in\mathbb{C}[X]$. *Commentaire.*

Solution : *On pose* $F=P/Q$, P *et* Q *sont deux polynômes de* $\mathbb{C}[X]$ *premiers entre eux. En chassant les dénominateurs on a* $P^n+P_1P^{n-1}Q+\dots+P_nQ^n=0$, *soit* $P^n=-Q\left(P_1P^{n-1}Q+\dots+P_nQ^{n-1}\right)$. *Donc* Q *divise* P^n. *Comme* Q *est premier avec* P^{n-1}, *d'après le lemme de Gauss,* Q *divise* P, *donc* $F=P/Q$ *est un polynôme.*
Sinon, on peut appliquer le résultat de l'exercice suivant pour établir que F *n'a pas de pôle.*

Exercice 22.11

Soit $F\in\mathbb{C}(X)$. *On suppose qu'il existe* $G_1,G_2,\dots,G_n$ *dans* $\mathbb{C}(X)$ *tels que :* $F^n+G_1F^{n-1}+\dots+G_n=0 (n\geqslant 1)$ *Démontrer que l'ensemble des pôles de* F *est inclus dans la réunion de l'ensemble des pôles de* $(G_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

Solution : *On pose* $F=P/Q$, P *et* Q *sont deux polynômes de* $\mathbb{C}[X]$ *premiers entre eux. En chassant les dénominateurs on a* $P^n+G_1P^{n-1}Q+\dots+G_nQ^n=0$. *Soit* z *un pôle de* F. z *est donc une racine de* Q. *Supposons que* z *ne soit un pôle d'aucun* G_k. *C'est donc aussi une racine de* $P^n=-\left(G_1P^{n-1}Q+\dots+G_nQ^n\right)$. *C'est donc une racine de* P. *Ce qui contredit le fait que* P *et* Q *sont premiers entre eux.*
Sinon, on peut appliquer le résultat de l'exercice précédant : On pose $G_k=P_k/Q_k$ *où les* P_k *et* Q_k *sont deux polynômes de* $\mathbb{C}[X]$. *On appelle* M *le ppcm des* Q_k. *En multipliant l'égalité par* M^n *on obtient* $(FM)^n+G_1M(FM)^{n-1}+\dots+G_nM^n=0$. *Chacune des fractions* $P_k=G_kM^k$, $k=1\dots,n$ *est un polynôme, donc* $P=FM$ *est un polynôme, donc les pôles de* $F=P/M$ *sont parmi les racines des* $(G_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

Exercice 22.12

Quelles sont les fractions de $\mathbb{C}(X)$ *qui sont des dérivées (de fractions rationnelles) ?*

Solution : *Ce sont les fractions rationnelles dont les coefficients* λ *des éléments simples* $\frac{\lambda}{X-z}$ *sont tous nuls. Exemple* $\frac{1}{X^2+1}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{X-i}-\frac{1}{X+i}\right]$ *n'est pas une dérivée.*

Décomposition sur $\mathbb{C}$

Exercice 22.13

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, $F(X)=\frac{X^{n-1}}{X^n-1}$.

Solution : *La décomposition s'écrit*

$$F(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}\qquad \omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

On utilise la formule $\lambda_k=\frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)}=\frac{\omega_k^{n-1}}{n\omega_k^{n-1}}=\frac{1}{n}$ *et donc*

$$F(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{X-\omega_k}$$

Exercice 22.14

Décomposer les fractions $F(X) = \dfrac{X^2}{(X+1)^3(X-1)^2}$, $G(X) = \dfrac{2}{X(X-1)^2}$

Solution : *On trouve :*

$$F(X) = \frac{\frac{-1}{16}}{X+1} - \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(X+1)^3} + \frac{\frac{1}{16}}{X-1} + \frac{\frac{1}{8}}{(X-1)^2}$$

$$G(X) = \frac{2}{X} - \frac{2}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$$

Exercice 22.15

Décomposer $\dfrac{X^2+1}{X^2(X-1)^4}$.

Solution : $\dfrac{X^2+1}{X^2(X-1)^4} = \dfrac{4}{X} + \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{4}{X-1} + \dfrac{3}{(X-1)^2} - \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{2}{(X-1)^4}$.

Exercice 22.16

Décomposer $F(X) = \dfrac{1}{X(X-1)^n}$ *puis* $G(X) = \dfrac{1}{X^2(X-1)^n}$.

Solution : *La partie polaire de* F *relative au pôle nul est obtenue par multiplication par* X : $\dfrac{(-1)^n}{X}$. *La partie polaire de* F *relative au pôle* 1 *est obtenue par développement limité à l'ordre* $n-1$ *de* $y^n F(1+y) = \dfrac{1}{1+y} = 1 - y + \ldots + (-1)^{n-1} y^{n-1} + o(y^{n-1})$.

Finalement $\dfrac{1}{X(X-1)^n} = \dfrac{1}{(X-1)^n} - \dfrac{1}{(X-1)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{X-1} + \dfrac{(-1)^n}{X}$.

La partie polaire de G *relative au pôle* 1 *est obtenue par développement limité à l'ordre* $n-1$ *de*

$y^n F(1+y) = \dfrac{1}{(1+y)^2} = -\dfrac{d}{dy}\dfrac{1}{1+y} = 1 - 2y + \ldots + (-1)^{n-1} n y^{n-1} + o(y^{n-1})$.

La partie polaire de G *relative au pôle nul est* $\dfrac{\lambda_1}{X^2} + \dfrac{\lambda_2}{X}$. λ_1 *s'obtient par multiplication par* X^2 : $\lambda_1 = (-1)^n$. λ_2 *s'obtient par développement limité à l'infini de* $G(x)$ *à l'ordre* 1 *qui donne* $\lambda_2 + (-1)^{n-1} n = 0$. *D'où* $\lambda_1 = (-1)^n n$. *Finalement,*

$\dfrac{1}{X^2(X-1)^n} = \dfrac{1}{(X-1)^n} - \dfrac{2}{(X-1)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1} n}{X-1} + \dfrac{(-1)^n}{X^2} + \dfrac{(-1)^n n}{X}$.

Exercice 22.17

Décomposer $F(X) = \dfrac{1}{(X-1)^n (X+1)^n}$ *sur* $\mathbb{R}$. *Ecrire une relation de Bézout entre* $(X+1)^n$ *et* $(X-1)^n$.

Solution : *On écrit* $\dfrac{1}{(X-1)^n(X+1)^n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(X-1)^{n-1+k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(X+1)^{n-1+k}}$. *On détermine les* a_k *par développement limité :* $y = x - 1$, $(2+y)^{-n} = 2^{-n}\left(1 + \frac{y}{2}\right)^{-n} = \dfrac{1}{2^n}\left(1 - \dfrac{y}{2} + \dfrac{3y^2}{8} - \ldots + (-1)^k \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2k+1)}{2^k} \dfrac{y^k}{k!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}{2^n} \dfrac{y^n}{n!}\right) + o(y^{n-1})$.

D'où $a_k = (-1)^k \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2k+1)}{2^{n+k}} \dfrac{1}{k!} = (-1)^k \dfrac{(2k+1)!}{2^{n+2k}(k!)^2}$. F *est une fraction paire, donc* $b_k = (-1)^k a_k$.

Exercice 22.18

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$, k *nombres complexes deux à deux distincts et non nuls.*

Soit $P(X) = (X - a_1).(X - a_2)\ldots.(X - a_k)$ *et soient* $P_i(X) = \dfrac{P(X)}{X - a_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, *montrer que la décomposition de* $\dfrac{X^n}{P}$ *est :* $\dfrac{X^n}{P} = E_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^n}{P'(a_i)(X - a_i)}$. *Quel est le degré de* E_n *?* *Former une relation de récurrence entre* E_n *et* E_{n+1}. *Déterminer les coefficients de* E_n.
2. *En déduire* $\forall \ell \in \{0, .., k-2\}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^\ell}{P'(a_i)} = 0$. *Que vaut* $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^{k-1}}{P'(a_i)}$ *?*
3. *Ecrire la décomposition en éléments simples de* $\dfrac{1}{P^2}$. *On fera apparaitre les dérivées successives de* P *aux points* a_i.

Solution :

1. *L'écriture de la décomposition provient de ce que les pôles sont simples.* E_n *est la partie entière. Elle est nulle lorsque* $n < k$ *et de degré* $n-k$ *sinon.*

$$\begin{aligned}\frac{X^{n+1}}{P} &= X\left(E_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^n}{P'(a_i)(X-a_i)}\right)\\ &= XE_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^n(X-a_i+a_i)}{P'(a_i)(X-a_i)}\\ &= XE_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^n(X-a_i)}{P'(a_i)(X-a_i)} + \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^{n+1}}{P'(a_i)}\end{aligned}$$

D'où $E_{n+1} = XE_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^n}{P'(a_i)}$. *Les* $\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^m}{P'(a_i)}, m = 0,\dots,n$ *sont donc les coefficients de* E_{n+1}.

2. *Puisque les* $E_n, n \in \{0,..,k-1\}$ *sont nuls, on en déduit que les coefficients* $\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^\ell}{P'(a_i)}, \ell \in \{0,..,k-2\}$ *le sont aussi.*

   Le premier coefficient non nul est obtenu pour $n+1 = k$: $1 = E_k = XE_{n-1} + \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^{k-1}}{P'(a_i)}$ *soit* $\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^{k-1}}{P'(a_i)} = 1$.

3. *On pose* $Q(X) = P^2(X)$ *et on écrit la formule de Taylor à l'ordre* 3 : $Q(x) = Q(a_i) + (x-a_i)Q'(a_i) + \frac{1}{2}(x-a_i)^2Q''(a_i) + \frac{1}{6}(x-a_i)^3Q'''(a_i) + o(x-a_i)^3 = (x-a_i)^2\left(Q''(a_i)/2 + Q''(a_i)/6\right) + o(x-a_i)^3$. *On en déduit un développement limité en* a_i *de* $\frac{(x-a_i)^2}{P(x)} = \frac{2}{Q''(a_i)}\left[1 - \frac{Q'''(a_i)}{3Q''(a_i)}\right] + o(x-a_i)$. *On a donc* $\frac{1}{P^2(X)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{(X-a_i)^2} + \frac{\mu_i}{X-a_i}$ *avec* $\lambda_i = \frac{2}{Q''(a_i)}$ *et* $\mu_i = -\frac{2Q'''(a_i)}{3(Q''(a_i))^2}$. $Q' = (P^2)' = 2PP'$, $Q'' = 2P'^2 + 2PP''$ *et* $Q''' = 4P''P' + 2P'P'' + 2PP'''$. *Comme* $P(a_i) = 0$, $Q''(a_i) = 2P'(a_i)^2$ *et* $Q'''(a_i) = 6P''(a_i)P'(a_i)$. *D'où* $\lambda_i = \frac{1}{P'(a_i)^2}$ *et* $\mu_i = -\frac{P''(a_i)}{P'(a_i)^3}$.

   Remarque : En regardant de développement limité de $\frac{1}{P^2}$ *à l'infini à l'ordre* 1, *on en déduit que* $\sum_{i=1}^{k}\frac{P''(a_i)}{P'(a_i)^3} = 0$.

Exercice 22.19

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ *tel que* $\frac{P(X)}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{X+e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}$

Solution : $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{X+e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \frac{2e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}} = n - \frac{2n}{X^n-1} = \frac{n(X^n-3)}{X^n-1}$. *D'où* $P(X) = n(X^n-3)$.

Exercice 22.20

On appelle Ω *l'ensemble des racines* n*-ièmes de l'unité. Démontrer que* $\frac{1}{n}\sum_{\omega\in\Omega}\frac{\omega}{X-\omega} = \frac{1}{X^n-1}$.

Trouver A *et* B *appartenant à* $\mathbb{R}[X]$ *tels que* $G(X) = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{\omega}{X-\omega} = \frac{A(X)}{B(X)}$.

Trouver C *et* D *appartenant à* $\mathbb{R}[X]$ *tels que* $H(X) = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{\omega X+1}{\omega^2X^2+\omega X+1} = \frac{C(X)}{D(X)}$.

Solution : *On obtient* $\frac{1}{n}\sum_{\omega\in\Omega}\frac{\omega}{X-\omega} = \frac{1}{X^n-1}$ *en décomposant* $\frac{1}{X^n-1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{C}$.

En dérivant le relation précédente : $-\frac{1}{n}\sum_{\omega\in\Omega}\frac{\omega}{(X-\omega)^2} = -\frac{nX^{n-1}}{(X^n-1)^2}$. *On décompose* $H(X)$ *en éléments simples sur* $\mathbb{C}$:

$H(X) = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{\omega X+1}{\omega^2X^2+\omega X+1} = \frac{1}{1-j}\sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{\omega}\left(\frac{-j}{x-j\overline{\omega}} + \frac{1}{x-j^2\overline{\omega}}\right) = \frac{1}{1-j}\left(-jS+T\right)$,

avec $T = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{\omega\left(x-j^2\overline{\omega}\right)}$ *et* $S = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{\omega\left(x-j\overline{\omega}\right)} = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{\overline{\omega}}{x-j\overline{\omega}} = \sum_{\omega\in\Omega}\frac{\omega}{x-j\omega}$ *car* $\omega \longmapsto \overline{\omega}$ *est une permutation de* Ω. *On déduit de la première question que* $S = \frac{n}{j}\frac{1}{j^{2n}X^n-1}$, *et comme* $T = \overline{S} = \frac{n}{j^2}\frac{1}{j^nX^n-1}$.

D'où $H(X) = \frac{n}{1-j}\left(\frac{-1}{j^{2n}X^n-1} + \frac{j}{j^nX^n-1}\right) = \frac{n}{1-j}\frac{\left(-j^n+j^{2n+1}\right)X^n+1-j}{X^{2n}-(j^{2n}+j^n)X^n+1}$.

$n \equiv 0 \pmod 3$: $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \dfrac{-n}{\mathrm{X}^n - 1}$ $\quad n \equiv 1 \pmod 3$: $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \dfrac{n(\mathrm{X}^n+1)}{\mathrm{X}^{2n}+\mathrm{X}^n+1}$ $\quad n \equiv 2 \pmod 3$: $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \dfrac{n}{\mathrm{X}^{2n}+\mathrm{X}^n+1}$.

Exercice 22.21

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

1. $\dfrac{\mathrm{X}^4+1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1)}$.
2. $\dfrac{\mathrm{X}^6}{(\mathrm{X}-1)^4(\mathrm{X}^2+1)}$
3. $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^n-1)}$
4. $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)^3(\mathrm{X}^3+1)}$
5. $\dfrac{(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1)^2}{\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)^2}$
6. $\dfrac{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\dots(\mathrm{X}-n+1)}{(\mathrm{X}+1)\dots(\mathrm{X}+n)}$

Solution :

1. $\dfrac{\mathrm{X}^4+1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1)} = \mathrm{X} - \dfrac{1}{\mathrm{X}} + \dfrac{1}{\mathrm{X}-1} + \dfrac{1}{\mathrm{X}+1}$.

2. $\dfrac{\mathrm{X}^6}{(\mathrm{X}-1)^4(\mathrm{X}^2+1)} = 1 + \dfrac{\mathrm{A}}{(\mathrm{X}-1)^4} + \dfrac{\mathrm{B}}{(\mathrm{X}-1)^3} + \dfrac{\mathrm{C}}{(\mathrm{X}-1)^2} + \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{X}-1} + \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{X}-i} + \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{X}+i}$. *On trouve* A, B, C *et* D *en posant* $\mathrm{X}-1=\mathrm{Y}$ *et en effectuant la division suivant les puissances croissantes de* $1+6\mathrm{Y}+15\mathrm{Y}^2+20\mathrm{Y}^3$ *par* $2+2\mathrm{Y}+\mathrm{Y}^2$. *On trouve* $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{Y}-\frac{39}{4}\mathrm{Y}^2+\frac{37}{2}\mathrm{Y}^3$ *d'où* $\mathrm{A}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{B}=\frac{5}{2}$, $\mathrm{C}=-\frac{39}{4}$, $\mathrm{D}=\frac{37}{2}$. $\mathrm{E} = \dfrac{i^6}{(i-1)^4 2i} = -\dfrac{1}{-4\times 2i} = \dfrac{-i}{8}$ *Donc* $\mathrm{F}=\dfrac{i}{8}$. *Donc* $\dfrac{\mathrm{X}^6}{(\mathrm{X}-1)^4(\mathrm{X}^2+1)} = 1 + \dfrac{1/2}{(\mathrm{X}-1)^4} + \dfrac{5/2}{(\mathrm{X}-1)^3} + -\dfrac{39/4}{(\mathrm{X}-1)^2} + \dfrac{37/2}{\mathrm{X}-1} - \dfrac{1/8}{\mathrm{X}-i} + \dfrac{1/8}{\mathrm{X}+i}$.

3. *On pose* $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^n-1)} = \dfrac{\mathrm{A}}{(\mathrm{X}-1)^2} + \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}-1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\lambda_k}{\mathrm{X}-\zeta^k}$. *En posant* $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^n-1)$, $\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}^n-1)+n(\mathrm{X}-1)\mathrm{X}^{n-1}$, $\mathrm{P}'(\zeta^k) = n\dfrac{\zeta^k-1}{\zeta^k}$ *d'où* $\lambda_k = \dfrac{\zeta^k}{n(\zeta^k-1)}$. *Pour le calcul de* A *et* B, *on pose* $x-1=h$ *et on multiplie* $\dfrac{1}{(x-1)(x^n-1)}$ *par* $h^2=(x-1)^2$ *pour obtenir* $\dfrac{x-1}{x^n-1} = \dfrac{h}{(h+1)^n-1} = \dfrac{1}{n+\frac{n(n-1)}{2}h}+o(h) = \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{n-1}{2}h\right)+o(h)$. *D'où* $\mathrm{A}=\dfrac{1}{n}$ *et* $\mathrm{B} = -\dfrac{n-1}{2n}$. *Donc* $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^n-1)} = \dfrac{1}{n(\mathrm{X}-1)^2} - \dfrac{n-1}{2n(\mathrm{X}-1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\zeta^k}{n(\zeta^k-1)(\mathrm{X}-\zeta^k)}$.

On peut aussi multiplier par $\dfrac{1}{\mathrm{X}-1}$ *la fraction* $\dfrac{1}{\mathrm{X}^n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\zeta^k}{n(\mathrm{X}-\zeta^k)}$. *Or* $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-\zeta^k)} = \dfrac{1}{(1-\zeta^k)(\mathrm{X}-1)} - \dfrac{1}{(1-\zeta^k)(\mathrm{X}-\zeta^k)}$. *Donc* $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^n-1)} = \dfrac{1}{n(\mathrm{X}-1)^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\zeta^k}{n(1-\zeta^k)(\mathrm{X}-1)} + \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\zeta^k}{n(\zeta^k-1)(\mathrm{X}-\zeta^k)}$, *ce qui donne le même résultat si l'on sait que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\zeta^k}{n(1-\zeta^k)} = -\dfrac{n-1}{2n}$. *En effet, on a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\zeta^k}{n(\mathrm{X}-\zeta^k)} = \dfrac{1}{\mathrm{X}^n-1} - \dfrac{1}{n(\mathrm{X}-1)} = \dfrac{1}{\mathrm{X}-1}\left[\dfrac{1}{1+\mathrm{X}+\dots+\mathrm{X}^{n-1}} - \dfrac{1}{n}\right]$. *On pose* $f(x) = \dfrac{1}{1+x+\dots+x^{n-1}}$, $f'(x) = -\dfrac{1+\dots+(n-1)x^{n-2}}{(1+x+\dots+x^{n-1})^2}$ *donc* $f'(1) = -\dfrac{1+\dots+n-1}{n^2} = -\dfrac{n-1}{2n}$. *Donc* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\zeta^k}{n(1-\zeta^k)} = -\dfrac{n-1}{2n}$, *ce qu'il fallait démontrer.*

Ceci dit on peut démontrer plus simplement ce résultat sans fractions : $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\zeta^k}{n(1-\zeta^k)} = \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{n(\zeta^{-k}-1)} = \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{n(\zeta^k-1)}$ *en sommant de* $n-1$ *à* 1. *Donc* S *égale la demi-somme de ces deux sommes :*

$\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{\zeta^k}{n(1-\zeta^k)} + \dfrac{1}{n(\zeta^k-1)}\right) = -\dfrac{n-1}{2n}$.

4. $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)^3(\mathrm{X}^3+1)} = \dfrac{\mathrm{A}}{(\mathrm{X}-1)^3} + \dfrac{\mathrm{B}}{(\mathrm{X}-1)^2} + \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{X}-1} + \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{X}+1} + \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{X}+j} + \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{X}+j^2}$. *Soit* $x=1+h$, $\dfrac{1}{2+3h+3h^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{3}{2}h+\frac{3}{2}h^2} = \dfrac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}h+\frac{3}{8}h^2\right)+o(h)$, *d'où* $\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{B}=-\dfrac{3}{4}$, $\mathrm{C}=\dfrac{3}{8}$. $\mathrm{D} = \dfrac{1}{(-2)^3(1-1+1)} = -\dfrac{1}{8}$.
$\mathrm{E} = \dfrac{-1}{(j+1)^3(1-j)(-j+j^2)} = \dfrac{1}{(j+1)^3(1-j)^2 j} = \dfrac{1}{(1-j^2)^2(1+j)j} = \dfrac{1}{(1-2j^2+j)(1+j)j} = \dfrac{1}{3(1+j^2)j} = \dfrac{1}{3j^2} = \dfrac{j}{3}$. *Donc* $\mathrm{F}=\dfrac{j^2}{3}$. *Finalement* $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)^3(\mathrm{X}^3+1)} = \dfrac{1/2}{(\mathrm{X}-1)^3} - \dfrac{3/4}{(\mathrm{X}-1)^2} + \dfrac{3/8}{\mathrm{X}-1} - \dfrac{1/8}{\mathrm{X}+1} + \dfrac{j/3}{\mathrm{X}+j} + \dfrac{j^2/3}{\mathrm{X}+j^2}$.

5. $\dfrac{\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{X}} + \dfrac{1}{\mathrm{X}-1}$. *En élevant au carré :* $\dfrac{(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1)^2}{\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)^2} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}^2} + \dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)^2} - \dfrac{2}{\mathrm{X}} + \dfrac{2}{\mathrm{X}-1} - \dfrac{2}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}^2} + \dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)^2} - \dfrac{2}{\mathrm{X}} + \dfrac{2}{\mathrm{X}-1} - \dfrac{2}{\mathrm{X}-1} + \dfrac{2}{\mathrm{X}} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}^2} + \dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)^2}$.

6. *Tous les pôles sont simples :* $\dfrac{(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)}{(X+1)\dots(X+n)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\lambda_k}{X+k}$ *avec* $\lambda_k = \dfrac{(-k-1)(-k-2)\dots(-k-n+1)}{(-k+1)\dots(-1)\cdot 1\dots(X+n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n+k-1)!}{k!(k-1)!(-1)^{k-1}(n-k)!} = (-1)^{n-k}\binom{n+k-1}{n}\binom{n}{k}$.

$\dfrac{(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)}{(X+1)\dots(X+n)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{n-k}\binom{n+k-1}{n}\binom{n}{k}}{X+k}$

Décomposition sur $\mathbb{R}$

Exercice 22.22

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$*, la fraction :*

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X-1)^4}$$

Solution : *Puisque* $\deg F = -6 < 0$*, il n'y a pas de partie entière et la décomposition de* F *en éléments simples s'écrit :*

$$F = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{a_4}{(X-1)^4} + \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1}$$

Cherchons les coefficients associés au pôle multiple en utilisant la méthode du DL. Posons $y = x-1$ *et calculons*

$$f(y) = \frac{1}{y^4(2+2y+y^2)} = \frac{1}{2y^4}\frac{1}{1+(y+\frac{y^2}{2})}$$

On effectue ensuite le DL(3,0) de $\dfrac{1}{1+u}$ *avec* $u = y + \frac{y^2}{2}$ *:*

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

$$f(y) = \frac{1}{2y^4}\left(1-(y+\frac{y^2}{2}) + (y+\frac{y^2}{2})^2 - (y+\frac{y^2}{2})^3 + \dots\right) = \frac{1}{2y^4}\left(1 - y + \frac{y^2}{2} + 0.y^3 + \dots\right) = \frac{1}{2y^4} - \frac{1}{2y^3} + \frac{1}{4y^2} + \dots$$

(on ne garde dans la parenthèse que les termes de degré $\leqslant 3$*) et alors* $a_1 = 0$*,* $a_2 = \dfrac{1}{4}$*,* $a_3 = -\dfrac{1}{2}$*,* $a_4 = \dfrac{1}{2}$.

Ensuite, en multipliant F *par* x *en en faisant* $x \to \infty$*, on trouve* $a_1 + \alpha = 0$*, d'où* $\alpha = 0$.

Ensuite, en faisant $x = 0$*, on trouve* $1 = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \beta$ *d'où* $\beta = -\dfrac{1}{4}$*. Finalement :*

$$F = \frac{1/4}{(X-1)^2} + \frac{-1/2}{(X-1)^3} + \frac{1/2}{(X-1)^4} + \frac{-1/4}{X^2+1}$$

Exercice 22.23

a) Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ *la fraction* $\dfrac{1}{X(X+1)}$

b) En déduire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ *de*

$$\frac{1}{X^3(X^3+1)}$$

Solution : *Puisque* $\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1}$*, il vient que*

$$\frac{1}{X^3(X^3+1)} = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^3+1}$$

et il ne reste qu'à décomposer

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} - \frac{1}{3}\frac{X-2}{X^2-X+1}$$

Exercice 22.24

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, $\dfrac{1}{(X^2+1)^2-X^2}$.

Solution : *Utiliser la parité de la fraction pour trouver des relations entre coefficients. Finalement :*

$$F(X) = -1/2\,\frac{X-1}{X^2-X+1} + 1/2\,\frac{X+1}{X^2+X+1}$$

Exercice 22.25

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ $\dfrac{X}{(X+1)(X^2+1)^2}$.

Solution :

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{X+1} + \frac{1}{4}\frac{X-1}{(X^2+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(X^2+1)^2}$$

Exercice 22.26

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ *la fraction*

$$\frac{X^2+2}{X^2(1+X^2)^2}$$

Solution :

$$\frac{2}{X^2} - \frac{2}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}$$

Exercice 22.27

Décomposer $\dfrac{X^3+X}{(X+1)^2(X-1)}$

Solution :

$$1 + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{3}{2(X+1)}$$

Exercice 22.28

Soit un entier $n \geqslant 1$. *Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}(X)$ *la fraction rationnelle suivante :*

$$F(X) = \frac{1}{X^{2n}+1}$$

Solution : *Les solution de* $z^{2n}+1=0$, *soit* $z^{2n} = e^{i\pi}$ *sont les* $z_k = \exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2n}\right), 0 \leqslant k \leqslant 2n-1$. *On a* $\dfrac{1}{X^{2n}+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\lambda_k}{X-z_k}$ *avec* $\lambda_k = \dfrac{1}{P'(z_k)} = \dfrac{1}{2nz_k^{2n-1}} = -\dfrac{z_k}{2n}$. *En regroupant* z_k *avec* $z_{2n-1-k} = \overline{z_k}$, *on obtient* $\dfrac{1}{X^{2n}+1} = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)X-1}{X^2-2X\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)X+1}$.

Exercice 22.29

Décomposer $\dfrac{1}{X^4+1}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.

Solution : $X^4+1 = X^4+2X^2+1-2X^2 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2+1+\sqrt{2}X)(X^2+1-\sqrt{2}X)$.
Donc la décomposition s'écrit a priori : $\dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{AX+B}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \dfrac{A'X+B'}{X^2-\sqrt{2}X+1}$.
La fraction est paire. Donc, comme $\dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{AX+B}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \dfrac{A'X+B'}{X^2-\sqrt{2}X+1}$.
en changeant X *en* −X *on obtient* $\dfrac{1}{X^4+1} = \dfrac{-AX+B}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \dfrac{-A'X+B'}{X^2+\sqrt{2}X+1}$. *D'après l'unicité de la décomposition, on en déduit que* $A=-A'$ *et* $B=B'$. *Pour* $x=0$ *on trouve* $1 = B+B'$ *d'où* $B=B'=\dfrac{1}{2}$.

Pour $x = i$ on trouve $\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{A}i + \frac{1}{2}}{i\sqrt{2}} + \frac{-\mathrm{A}i + \frac{1}{2}}{-i\sqrt{2}}$, donc $\frac{1}{2} = \frac{2\mathrm{A}}{\sqrt{2}}$, soit $\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
Finalement $\boxed{\frac{1}{X^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}+X}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}-X}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right)}$.

Exercice 22.30

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Démontrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que $P_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$. Quelles sont ses racines ? Décomposer $\frac{1}{P_n}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Solution : Unicité : On a $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(2\operatorname{ch} x) = 2\operatorname{ch} nx$. Deux solutions coïncideraient sur un ensemble infini et seraient donc égales.
Existence : Par récurrence, on a $P_0(Y) = 2$, $P_1(Y) = Y$ et comme $\left(X^n + \frac{1}{X^n}\right)\left(X + \frac{1}{X}\right) = \left(X^{n+1} + \frac{1}{X^{n+1}}\right) + \left(X^{n-1} + \frac{1}{X^{n-1}}\right)$ d'où $YP_n(Y) = P_{n+1}(Y) + P_{n-1}(Y)$.
T_n est un polynôme de degré n qui vérifie aussi $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(2\cos x) = 2\cos nx$. Donc $P_n(2\cos x) = 0$ lorsque $nx = \frac{\pi}{2} + k\pi$ soit $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ ce qui fournit n racines distinctes en prenant $k = 0, \dots, n-1$. Ce sont donc les n racines simples de P_n.
On en déduit $\frac{1}{P_n(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$ avec $\lambda_k = \frac{1}{P'_n\left(2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$. En dérivant l'égalité $P_n(2\cos x) = 2\cos nx$ on trouve $-2\sin x P_n(2\cos x) = -2n\sin nx$ d'où $\lambda_k = \frac{1}{P'_n\left(2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)} = (-1)^n n \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

Exercice 22.31

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

1. $\frac{x^5+2}{(x^2+x+1)^3}$
2. $\frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$
3. $\frac{1}{(X^2+1)^4(X^2+X+1)^2}$
4. $\frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos\vartheta + 1}$
5. $\frac{3X^2-2X+5}{(X^2-X+1)^3(X^3+1)^2}$

Solution :

1. On effectue la division euclidienne de x^5+2 par x^2+x+1 : $x^5+2 = (x^3-x^2+1)(x^2+x+1) - x + 1$, d'où $\frac{x^5+2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{x^3-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{-x+1}{(x^2+x+1)^3}$. On réitère : $x^3-x^2+1 = (x-2)(x^2+x+1) + x + 3$. Finalement, $\frac{x^5+2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{-x+1}{(x^2+x+1)^3} + \frac{x+3}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+x+1}$.
2. $\frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = \frac{AX+B}{X^2+1} + \frac{CX+D}{X^2+X+1}$. On multiplie par X^2+1 et on regarde en i pour avoir $Ai + B = \frac{1}{i} = -i$ d'où $A = -1$ et $B = 0$. On multiplie par X^2+X+1 et on regarde en j pour avoir $Cj + D = \frac{1}{j^2+1} = -i = -\frac{1}{j} = -j^2 = 1 + j$ d'où $C = 1$ et $D = 1$. Finalement $\frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = -\frac{X}{X^2+1} + \frac{X+1}{X^2+X+1}$.
3. D'après l'exemple précédent, $\frac{1}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)} = -\frac{X}{(X^2+1)^2} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)(X^2+1)} = -\frac{X}{(X^2+1)^2} - \frac{X(X+1)}{X^2+1} - \frac{(X+1)^2}{X^2+X+1} = -\frac{X}{(X^2+1)^2} - \frac{X-1}{X^2+1} + \frac{X}{X^2+X+1}$. En élevant au carré : $\frac{1}{(X^2+1)^4(X^2+X+1)^2} = \frac{X^2}{(X^2+1)^4} + \frac{(X-1)^2}{(X^2+1)^2} + \frac{X^2}{(X^2+X+1)^2} + \frac{2X(X-1)}{(X^2+1)^3} - \frac{2X^2}{(X^2+1)^2(X^2+X+1)} - \frac{2X(X-1)}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = \frac{1}{(X^2+1)^3} - \frac{1}{(X^2+1)^4} + \frac{1}{X^2+1} - \frac{2X}{(X^2+1)^2} + \frac{1}{X^2+X+1} - \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{2}{(X^2+1)^2} - \frac{2(X+1)}{(X^2+1)^3} - \frac{2}{(X^2+1)^2} + \frac{2(X+1)}{(X^2+X+1)(X^2+1)^2} - \frac{2}{X^2+1} + \frac{2(X+1)}{(X^2+X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{(X^2+1)^3} - \frac{1}{(X^2+1)^4} + \frac{1}{X^2+1} - \frac{2X}{(X^2+1)^2} + \frac{1}{X^2+X+1} - \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{2}{(X^2+1)^2} - \frac{2(X+1)}{(X^2+1)^3} - \frac{2}{(X^2+1)^2} + \frac{2X(X+1)}{X^2+X+1} - \frac{2(X-1)(X+1)}{X^2+1} - \frac{2X(X+1)}{(X^2+1)^2} - \frac{2}{X^2+1} - \frac{2(2X+1)(X+1)}{X^2+X+1} - \frac{2(2X+1)X}{X^2+1} = \frac{1}{(X^2+1)^3} - \frac{1}{(X^2+1)^4} + \frac{1}{X^2+1} - \frac{2X}{(X^2+1)^2} + \frac{1}{X^2+X+1} - \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{2}{(X^2+1)^2} - \frac{2(X+1)}{(X^2+1)^3} - \frac{2}{(X^2+1)^2} + 2 - \frac{2}{X^2+X+1} - 2 + \frac{4}{X^2+1} - \frac{2}{X^2+1} -$

$\dfrac{2(X-1)}{(X^2+1)^2}-(X^2+1)^2+4+\dfrac{2(X-1)}{X^2+X+1}-4-\dfrac{2(X-2)}{X^2+1}=-\dfrac{1}{(X^2+1)^4}-\dfrac{2X+1}{(X^2+1)^3}+\dfrac{-4X+2}{(X^2+1)^2}+\dfrac{-2X+5}{X^2+1}-\dfrac{X+1}{(X^2+X+1)^2}+\dfrac{2X-3}{X^2+X+1}$

4. $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos\vartheta+1}=\dfrac{1}{4\cos\frac{\vartheta}{2}}\cdot\dfrac{X}{X^2-2X\cos\frac{\vartheta}{2}+1}-\dfrac{1}{4\cos\frac{\vartheta}{2}}\cdot\dfrac{X}{X^2+2X\cos\frac{\vartheta}{2}+1}$.

Si $\cos\frac{\vartheta}{2}=0(\vartheta=\pi+2k\pi)$; $F(X)=-\dfrac{1}{(X^2+1)^2}+\dfrac{1}{X^2+1}$.

5. $\dfrac{3X^2-2X+5}{(X^2-X+1)^3(X^3+1)^2}=\dfrac{3X^2-2X+5}{(X^2-X+1)^5(X+1)^2}$. *On commence par écrire une relation de Bezout entre* $(X^2-X+1)^5=X^{10}-5X^9+15X^8-30X^7+45X^6-51X^5+45X^4-30X^3+15X^2-5X+1$ *et* $(X+1)^2=X^2+2X+1$.

On trouve $X^{10}-5X^9+15X^8-30X^7+45X^6-51X^5+45X^4-30X^3+15X^2-5X+1=(X^8-7X^7+28X^6-79X^5+175X^4-322X^3+514X^2-736X+973)(X^2+2X+1)+243(-5X+4)$ $X^2+2X+1=\left(-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{5}\right)\dfrac{243}{405}(-5X+4)+\dfrac{1}{25}$. *D'où* $243=3^5=(-5X^9+29X^8-98X^7+227X^6-401X^5+560X^4-638X^3-449X+79)(X+1)^2+(5X+6)(X^2-X+1)^5$. *En multipliant par* $3X^2-2X+5$ *:* $243\dfrac{3X^2-2X+5}{(X^2-X+1)^3(X^3+1)^2}=\dfrac{15X^3+8X^2+13X+30}{(X+1)^2}+\dfrac{-15X^{11}+97X^{10}-377X^9+1022X^8-2147X^7+3617X^6-5039X^5+5864X^4-5729X^3+4589X^2-2719X+1185}{(X^2-X+1)^5}$.

On effectue ensuite les divisions euclidiennes successives pour trouver les éléments simples : $15X^3+8X^2+13X+30=(15X-22)(X^2+2X+1)+42X+52$. *D'où* $\dfrac{15X^3+8X^2+13X+30}{(X+1)^2}=15X-22+\dfrac{42}{X+1}+\dfrac{10}{(X+1)^2}$

De même $-15X^{11}+97X^{10}-377X^9+1022X^8-2147X^7+3617X^6-5039X^5+5864X^4-5729X^3+4589X^2-2719X+1185=(-15X+22)(X^2-X+1)^5-42X^9+242X^8-812X^7+3392X^6-5486X^5+4424X^4-4844X^3+4184X^2-2594X+1163$, $-42X^9+242X^8-812X^7+3392X^6-5486X^5+4424X^4-4844X^3+4184X^2-2594X+1163=(-42X+74)(X^2-X+1)^4-96X^7+1980X^6-3504X^5+2346X^4-3240X^3+3276X^2-2256X+1089$, $-96X^7+1980X^6-3504X^5+2346X^4-3240X^3+3276X^2-2256X+1089=(-96X+1692)(X^2-X+1)^3+2148X^5-8478X^4+9180X^3-7164X^2+2916X-603$, $2148X^5-8478X^4+9180X^3-7164X^2+2916X-603=(2148X-4182)(X^2-X+1)^2-5628X^3+9678X^2-7596X+3579$, $-5628X^3+9678X^2-7596X+3579=(-5628X-1578)(X^2-X+1)-5124X+5157$. *D'où* $\dfrac{-15X^{11}+97X^{10}-377X^9+1022X^8-2147X^7+3617X^6-5039X^5+5864X^4-5729X^3+4589X^2-2719X+1185}{(X^2-X+1)^5}=-15X+22+\dfrac{-42X+74}{X^2-X+1}+\dfrac{-96X+1692}{(X^2-X+1)^2}+\dfrac{2148X-4182}{(X^2-X+1)^3}+\dfrac{-5628X-1578}{(X^2-X+1)^4}+\dfrac{-5124X+5157}{(X^2-X+1)^5}$.

Finalement, $\dfrac{3X^2-2X+5}{(X^2-X+1)^3(X^3+1)^2}$
$=\dfrac{1}{243}\left(\dfrac{42}{X+1}+\dfrac{10}{(X+1)^2}+\dfrac{-42X+74}{X^2-X+1}+\dfrac{-96X+1692}{(X^2-X+1)^2}+\dfrac{2148X-4182}{(X^2-X+1)^3}+\dfrac{-5628X-1578}{(X^2-X+1)^4}+\dfrac{-5124X+5157}{(X^2-X+1)^5}\right)$.

Calcul de primitives

Exercice 22.32

Calculer les primitives des fonctions suivantes :(a, b et c sont non nuls et distincts deux à deux).

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1-x^2)}$
2. $\displaystyle\int\frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)}$
3. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
4. $\displaystyle\int\frac{(2x+3)\,dx}{(x^2-1)(2x+3)}$
5. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}$
6. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+3x^2-4}$
7. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
8. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
9. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
10. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
11. $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
12. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$
13. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$
14. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$
15. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}$
16. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(1-x)^2}$
17. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{x^2(1-x)^2}$
18. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x^2-1)^2}$
19. $\displaystyle\int\frac{(3x+2)\,dx}{x(x+1)^3}$
20. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-1)^3}$
21. $\displaystyle\int\frac{(x+1)\,dx}{x(x^2+1)}$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$

25. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^3}$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}$

29. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^4+3x^2+2}$

30. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^2(1+x^2)}$

31. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+x^2+1}$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^3}$

Solution : C_k *désignant une constante qui dépend de l'intervalle d'intégration considéré.*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(|1-x^2|\right) + \mathrm{C}_k$

2. $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dx}{x(x-1)(x+2)} = \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + \mathrm{C}_k$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - 4\ln|x-2| + \frac{9}{2}\ln|x-3| + \mathrm{C}_k$

4. $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2-1)(2x+3)} = \frac{5}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{10}\ln|x-1| - \frac{12}{5}\ln|2x+3| + \mathrm{C}_k$

5. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}\right| + \mathrm{C}_k$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+3x^2-4} = \frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + \mathrm{C}_k$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\ln|x-a| + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)}\ln|x-b| + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ln|x-c| + \mathrm{C}_k$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x}{b}\right)\right) + \mathrm{C}$

9. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{2\left(b^2-a^2\right)}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\right) + \mathrm{C}$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2}\left(a\arctan\left(\frac{x}{a}\right) - b\arctan\left(\frac{x}{b}\right)\right) + \mathrm{C}$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{2\left(b^2-a^2\right)}\left(a^2\ln(x^2+a^2) - b^2\ln(x^2+b^2)\right) + \mathrm{C}$

12. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2} = -\frac{2}{x+2} + \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| + \mathrm{C}_k$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + \mathrm{C}_k$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + \mathrm{C}_k$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{2(x^2-)} + \mathrm{C}_k$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2} = 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{2x-1}{x(1-x)} + \mathrm{C}_k$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2-1} + \mathrm{C}_k$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)^2} = -\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2-1} + \mathrm{C}_k$

19. $\displaystyle\int \frac{(3x+2)\,dx}{x(x+1)^3} = 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \mathrm{C}_k$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^3} = \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{3}{8}\,\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2-1)^2} + \mathrm{C}_k$

21. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x(x^2+1)} = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + \arctan x + \mathrm{C}_k$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C}_k$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C}_k$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3} = -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{C}_k$

25. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{C}_k$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C}_k$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C}_k$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C_k$

29. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^4+3x^2+2} = \ln(x^2+2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

30. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x-1)} + C_k$

31. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C_k$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^3} = -\frac{2x^2+1}{4(x^2+1)^2} + C$

Exercice 22.33

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$
2. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+4x+5)^2}$
3. $\displaystyle\int \frac{\left(1-x^2\right)dx}{\left(x^4-x^2+1\right)}$
4. $\displaystyle\int \frac{(x^4+1)}{x^6+1}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^5+2x^3+3x^2}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x^4+4x}{(x^2-1)^3}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(x^4+1)^2}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^7-x}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^7-x-1}$

Solution :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{x\,dx}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)^2}$. $\displaystyle\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t+1}$. *On trouve* $A=1$ *et en développant* $\displaystyle\frac{1}{-1+h} = -1-h+o(h)$ *on trouve* $B=-1$ *et* $C=-1$. *Donc* $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + \frac{1}{2(t+1)} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$

2. *Puisque* $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$, *en posant* $u=x+2$, *on a* $\displaystyle\int \frac{(u-1)\,du}{(u^2+1)^2} = \int \frac{u\,du}{(u^2+1)^2} - \int \frac{du}{u^2+1} + \int \frac{u^2\,du}{(u^2+1)^2} = -\frac{1}{2(u^2+1)} - \arctan u + \int u\frac{u\,du}{(u^2+1)^2}$, *et en intégrant par parties la dernière intégrale,* $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+4x+5)^2} = -\frac{1}{2(u^2+1)} - \arctan u - \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan u + C = -\frac{u+1}{2(u^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan u + C = -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\arctan(x+2) + C.$

3. *Le dénominateur est* $(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$. *D'où* $\displaystyle\frac{\left(1-x^2\right)dx}{\left(x^4-x^2+1\right)} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{3}x+1} - \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{3}x+1}$. *Donc* $\displaystyle\int \frac{\left(1-x^2\right)dx}{\left(x^4-x^2+1\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{2u}{u^2+\frac{1}{4}}\,du - \int \frac{2v}{v^2+\frac{1}{4}}\,dv = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\ln(u^2+\frac{1}{4}) - \ln(v^2+\frac{1}{4})) + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\ln\left(\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right) - \ln\left(\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\right] + C.$

4.
$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^4+1)dx}{x^6+1} &= \int \frac{((x^4-x^2+1)+(x^2+1)-1)dx}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} \\
&= \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^4-x^2+1} - \int \frac{dx}{1+x^6} \\
&= \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dx}{x^4-x^2+1} - \int \frac{x^2+1-x^2\,dx}{x^6+1} \\
&= \arctan x + \int \frac{dx}{x^4-x^2+1} - \int \frac{x^2+1\,dx}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \int \frac{x^2\,dx}{1+x^6} \\
&= \arctan x + \int \frac{dx}{x^4-x^2+1} - \int \frac{dx}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{3}\arctan x^3 \\
&= \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C.
\end{aligned}$$

Vérification en dérivant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^6} &= \frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}\\ &= \frac{1-x^2+x^4+x^2}{1+x^6}\\ &= \frac{x^4+1}{x^6+1}.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3 &= \frac{1}{3}\arctan\frac{x^3-3x}{3x^2-1}+\frac{1}{3}\arctan x^3\\ &= \frac{1}{3}\arctan\frac{\frac{x^3-3x}{3x^2-1}+x^3}{1-\left(\frac{x^3-3x}{3x^2-1}\right)(x^3)}\\ &= \frac{1}{3}\arctan\frac{3x\left(1-x^2\right)}{x^4-4x^2+1}.\end{aligned}$$

5. *On écrit* $\dfrac{x^2-x+2}{x^5+2x^3+3x^2}=\dfrac{x^2-x+2}{x^2(x+1)(x^2-x+3)}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{Dx+E}{x^2-x+3}$. *Par division suivant les puissances croissantes de* $2-x$ *par* $3+2x$ *on trouve* $A=\dfrac{2}{3}$ *et* $B=-\dfrac{7}{9}$. $C=\dfrac{4}{5}$. *Les racines de* $x^2-x+3=0$ *sont* α *et* $\overline{\alpha}$, *avec* $\alpha\overline{\alpha}=3$ *et* $\alpha+\overline{\alpha}=1$. *On a* $D\alpha+E=\dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{\alpha^2(\alpha+1)}=\dfrac{\alpha-3-\alpha+2}{(\alpha-3)(\alpha+1)}=\dfrac{-1}{\alpha^2-2\alpha-3}=-\dfrac{1}{\alpha-3-2\alpha-3}=\dfrac{1}{\alpha+6}=\dfrac{\overline{\alpha}+6}{\alpha\overline{\alpha}+6(\alpha+\overline{\alpha})+36}=\dfrac{\overline{\alpha}+6}{3+6+36}=\dfrac{7-\alpha}{45}$. *D'où* $D=-\dfrac{1}{45}$ *et* $E=\dfrac{7}{45}$.

En écrivant $\dfrac{x-7}{x^2-x+3}=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+3}-\dfrac{13}{2}\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+3}-\dfrac{26}{11}\dfrac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{11}}\right)^2}$, *on a*

$\displaystyle\int\frac{x^2-x+2}{x^5+2x^3+3x^2}\,dx=-\frac{2}{3x}-\frac{7}{9}\ln|x|+\frac{4}{5}\ln|x+1|-\frac{1}{90}\ln(x^2-x+3)+\frac{13}{45\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{11}}\right)+C$

6. *En intégrant par parties,* $\displaystyle\int(x^3+4)\frac{x\,dx}{(x^2-1)^3}=-\frac{1}{4}\frac{x^3+4}{(x^2-1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{3x^2}{(x^2-1)^2}\,dx=-\frac{1}{4}\frac{x^3+4}{(x^2-1)^2}-\frac{3}{8}\frac{x}{x^2-1}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2-1}=-\frac{1}{4}\frac{x^3+4}{(x^2-1)^2}-\frac{3}{8}\frac{x}{x^2-1}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C_k$.

7. $\displaystyle\int x\frac{x^3\,dx}{(x^4+1)^2}=-\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^4+1}$. *On a déjà vu la décomposition* $\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{\sqrt{2}+x}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\dfrac{\sqrt{2}-x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$, *d'où*

$\displaystyle\int x\frac{x^3\,dx}{(x^4+1)^2}=-\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{16\sqrt{2}}-\frac{\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{16\sqrt{2}}+\frac{\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)}{8\sqrt{2}}+\frac{\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)}{8\sqrt{2}}+C.$

8. (a)

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^7-x}\,dx &= \int\left(\frac{x^5}{x^6-1}-\frac{1}{x}\right)dx\\ &= \int\frac{\frac{1}{6}(x^6-1)'}{x^6-1}\,dx-\int\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{1}{6}\ln|x^6-1|-\ln|x|+C.\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{1}{x^7-x}=\dfrac{1}{x^4(x^3-\frac{1}{x^3})}$.

Avec $\frac{1}{x^3} = u$ d'où $du = -\frac{3}{x^4}\,dx$, $\frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{du}{3}$. L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^7 - x}\,dx &= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{(\frac{1}{u} - u)}\,du \\ &= -\frac{1}{3}\int \frac{u}{1-u^2}\,du \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{-2u}{1-u^2}\,du \\ &= \frac{1}{6}\ln|1-u^2| + C \\ &= \frac{1}{6}(\ln|x^6 - 1| - 6\ln|x|) + C \\ &= \frac{1}{6}\ln|x^6-1| - \ln|x| + C\end{aligned}$$

9. Soit $P(X) = (X+1)^7 - X - 1$. On a $P(0) = 0$, $P(-1) = 0$. D'où $P(X) = 7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)$. $X^4+2X^3+3X^2+2X+1$ est un polynôme réciproque. C'est $X^2\left(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2 + 2X + 2\frac{1}{X} + 1\right)$. En posant $Y = X + \frac{1}{X}$, on cherche les racines de $Y^2 + 2Y + 1$, -1 (racine double). On cherche donc les racines de $X + \frac{1}{X} + 1$ soit j et $-j$. Finalement, $P(X) = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$. On décompose donc la fraction $\frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{(X^2+X+1)^2} + \frac{EX+F}{X^2+X+1}$. $A = 1$, $B = \frac{1}{-1\times 1^2} = -1$, $Cj + D = \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j.(-j^2)} = -1$. D'où $C = 0$ et $D = -1$. Par soustraction, $\frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2} + \frac{1}{(X^2+X+1)^2} = \frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)}$. La partie polaire de cette dernière fraction, par le calcul précédent, donne aussi $E = 0$ et $F = -1$. Donc $\frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X^2+X+1)^2} - \frac{1}{X^2+X+1}$. En écrivant $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, on obtient $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$. En intégrant par parties, $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x}{x^2+x+1} + \int \frac{x(2x+1)\,dx}{x^2+x+1} = \frac{x}{x^2+x+1} + \int \frac{2)\,dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ soit $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x}{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$. Donc $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C$. Finalement,
$\int \frac{dx}{(x+1)^7 - x - 1} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C$.

Exercice 22.34

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$
2. $\int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2x-x^2}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{\cos x - \cos 3x}$
4. $\int \frac{dx}{\tan x - \tan\alpha}$
5. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$
6. $\int \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)dx$
7. $\int x\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$
8. $\int \frac{\tan x\,dx}{1+\sin 3x}$
9. $\int \frac{dx}{2\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 1}$

Solution :

1. On pose $u = \sqrt{x}$, d'où $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du$. $u^4+1 = (u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)$, la décomposition sur $\mathbb{R}$ donne $\frac{2u^2}{u^4+1} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right)$ Ce qui donne : $\frac{-1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2u+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\,du + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2u-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}\,du = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln(u^2+\sqrt{2}u+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}\,du + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(u^2-\sqrt{2}u+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(x+\sqrt{2x}+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2x}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(x-\sqrt{2x}+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2x}+1) + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2x}+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2x}-1) + C$

2. *Les primitives existent sur* $[0,2]$. *En posant* $u = x-1$, $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2x-x^2}\,dx = \int \frac{u}{u+2}\sqrt{1-u^2}\,du = \int \frac{\sin\vartheta}{2+\sin\vartheta}\sqrt{1-\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta$ *en posant* $u=\sin\vartheta, \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, *on obtient donc* $\displaystyle\int \frac{\sin\vartheta(1-\sin^2\vartheta)}{2+\sin\vartheta}\,d\vartheta = \int\left(-\sin^2\vartheta+2\sin\vartheta-3+\frac{6}{2+\sin\vartheta}\right)d\vartheta = -\frac{7\vartheta}{2}+\frac{\sin 2\vartheta}{4}-2\cos\vartheta+6\int\frac{dt}{2+2t^2+2t}$ *en posant* $t=\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$. *On trouve donc* $\displaystyle -\frac{7\vartheta}{2}+\frac{\sin 2\vartheta}{4}-2\cos\vartheta+2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C = -\frac{7\arcsin(x+1)}{2}+\frac{\sin 2\arcsin(x+1)}{4}-2\cos\arcsin(x+1)+ 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{\arcsin(x+1)}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

3. *On a* $\cos x-\cos 3x = 2\sin x\sin 2x = 4\sin^2 x\cos x$. *D'où* $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x-\cos 3x}=\frac{1}{4}\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.
On pose $t=\sin x$, $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x-\cos 3x}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}$. *Or* $\displaystyle\frac{1}{t^2(1-t^2)}=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}$.
Donc $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x-\cos 3x}=-\frac{1}{4t}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=-\frac{1}{4\sin x}+\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\sin x+1}{1-\sin x}\right)+C.$

4. *On pose* $t=\tan x$, *et on décompose* $\displaystyle\frac{1}{(t^2+1)(t-\tan\alpha)}=\frac{A}{t-\tan\alpha}+\frac{Bt+C}{t^2+1}$. *On obtient* $\displaystyle A=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha$ *et* $\displaystyle Bi+C=\frac{1}{i-\tan\alpha}=\frac{-\tan\alpha-i}{1+\tan^2\alpha}=-i\cos\alpha\,\sin\alpha-\cos^2\alpha$. *D'où* $C=-\cos\alpha\,\sin\alpha$ *et* $B=-\cos^2\alpha$.
Donc $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x-\tan\alpha}=\cos^2\alpha\ln|t-\tan\alpha|-\frac{1}{2}\cos^2\alpha\ln(t^2+1)-\cos\alpha\,\sin\alpha\arctan t+C=\cos^2\alpha\ln|\tan x-\tan\alpha|+\cos^2\alpha\ln|\cos x|-x\cos\alpha\,\sin\alpha+C.$

5. *On pose* $\displaystyle t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $\displaystyle x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$ $\displaystyle dx=\frac{4t\,dt}{(1-t^2)^2}$. *Donc* $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=4\int\frac{t^2(t^2+1)\,dt}{(1-t^2)^3}$. *On décompose la fraction paire* $\displaystyle\frac{4t^2(t^2+1)}{(1-t^2)^3}=\frac{A}{(1+t)^3}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{A}{(1-t)^3}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{1-t}$. *En posant* $t=-1+h$, $\displaystyle\frac{4t^2(t^2+1)}{(1-t^2)^3}=\frac{4(2-2h+h^2)(1-2h+h^2)}{h^3(2-h)^3}=\frac{4(2-6h+7h^2}{h^3(8-12h+6h^2)}+o(\tfrac{1}{h})$. *En posant la division suivant les puissances croissantes de* $4-12h+14h^2$ *par* $4-6h+3h^2$ *on trouve* $\displaystyle\frac{4(2-2h+h^2)(1-2h+h^2)}{h^3(2-h)^3}=1-\frac{3h}{2}+\frac{h^2}{2}+o(h^2)$. *D'où* $A=1$, $B=-\dfrac{3}{2}$ $C=\dfrac{1}{2}$. *Donc* $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{(x-2)(x+1)}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}\right|+C.$

6. *On pose* $u=\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$, $\displaystyle x=\frac{3u^2-1}{1-u^2}=-3+\frac{2}{1-u^2}$ $\displaystyle dx=\frac{2u\,du}{(1-u^2)^2}$. *Donc* $\displaystyle\int\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)dx=\int\arctan u\,\frac{2u\,du}{(1-u^2)^2}$.
En intégrant par parties, on obtient $\displaystyle\frac{2\arctan u}{1-u^2}-\int\frac{2u\,du}{(1-u^2)(1+u^2)}=\frac{2\arctan u}{1-u^2}-\int\frac{du}{1-u^2}-\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{2\arctan u}{1-u^2}-\arctan u-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$. *On remplace* u *par* $\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$ *en remarquant que* $\displaystyle\frac{2u^2+1}{1-u^2}=\frac{3x+5}{2}$, *on a* $\displaystyle\int\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)dx=\frac{3x+5}{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}}{1-\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}}\right|+C.$

7. *On pose* $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$; $\displaystyle x=\frac{u^3+1}{u^3-1}=1-\frac{2}{u^3-1}$; $\displaystyle dx=\frac{6u^2\,du}{(u^3-1)^2}$ $\displaystyle\int x\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx=6\int\frac{(u^6+u^3)\,du}{(u^3-1)^3}$ *avec* $\displaystyle\frac{u^6+u^3}{(u^3-1)^3}=\frac{1}{(u^3-1)^2}+\frac{2}{(u^3-1)^3}$ *On pose* $\displaystyle F_n(u)=\int\frac{du}{(u^3-1)^n}$
Une IPP donne $\displaystyle F_n(u)=\frac{u}{(u^3-1)^n}+3n(F_{n+1}+F_n)$.
Soit $\displaystyle F_{n+1}=\frac{1-3n}{3n}F_n-\frac{u}{3n(u^3-1)^n}$
Ce qui donne : $\displaystyle F_2=-\frac{2}{3}F_1-\frac{u}{3(u^3-1)}$
et $\displaystyle F_2=-\frac{5}{6}F_2-\frac{u}{6(u^3-1)^2}$
$\displaystyle F_1(u)=\int\frac{du}{(u^3-1)}$ *avec* $\displaystyle\frac{1}{(u^3-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{u-1}-\frac{1}{3}\frac{u+2}{u^2+u+1}$

et $F_1(u) = \dfrac{1}{3}\ln|u-1| - \dfrac{1}{6}\ln(u^2+u+1) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}Atan\left(\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

$$\begin{aligned}\frac{u^6+u^3}{(u^3-1)^3} &= F_2 + 2F_3\\ &= -\frac{5}{3}F_2 + F_2 - \frac{u}{3(u^3-1)^2}\\ &= -\frac{2}{3}F_2 - \frac{u}{3(u^3-1)^2}\\ &= \frac{4}{9}F_1 + \frac{2u}{9(u^3-1)} - \frac{u}{3(u^3-1)^2}\\ &= \frac{4}{27}\ln|u-1| - \frac{2}{27}\ln(u^2+u+1) + \frac{4\sqrt{3}}{27}Atan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2u}{9(u^3-1)} - \frac{u}{3(u^3-1)^2} + C\end{aligned}$$

Reste à remplacer u par $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

8. *On pose* $t = \sin x$, $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\cos^2 x(1+\sin 3x)} = \int \frac{t\,dt}{(1-t^2)(1-t)(1+2t)^2}$. $\dfrac{t\,dt}{(1-t^2)(1-t)(1+2t)^2} = \dfrac{A}{1+t} + \dfrac{B}{(t-1)^2} + \dfrac{C}{t-1} + \dfrac{D}{(t+\frac{1}{2})^2} + \dfrac{E}{t+\frac{1}{2}}$. $A = \dfrac{-1}{4}$. *En posant* $h = t-1$, $\dfrac{1+h}{(2+h)(3+2h)^2} = \dfrac{1}{18} - \dfrac{5h}{108} + o(h)$ *en effectuant la division de* $1+h$ *par* $18+33h$. *D'où* $B = \dfrac{1}{18}$ *et* $C = -\dfrac{5}{108}$. *En posant* $h = t+\frac{1}{2}$, $\dfrac{h-\frac{1}{2}}{4(h-\frac{3}{2})^2(h+\frac{1}{2})} = -\dfrac{1}{9} + \dfrac{8h}{27} + o(h)$ *en effectuant la division de* $-1+2h$ *par* $9+6h$. *D'où* $D = -\dfrac{1}{9}$ *et* $E = \dfrac{8}{27}$. *D'où* $\displaystyle\int \frac{\tan x\,dx}{1+\sin 3x} = -\frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{18}\frac{1}{t-1} - \frac{5}{108}\ln|t-1| + \frac{1}{9}\frac{1}{t+\frac{1}{2}} + \frac{8}{27}\ln\left|t+\frac{1}{2}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln(\sin x+1) - \frac{1}{18}\frac{1}{\sin x-1} - \frac{5}{108}\ln(1-\sin x) + \frac{1}{9}\frac{1}{\sin x+\frac{1}{2}} + \frac{8}{27}\ln\left|\sin x+\frac{1}{2}\right| + C.$

9. *En posant* $t = \text{th}\,\frac{x}{2}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,\text{ch}\,x + \text{sh}\,x + 1} = \int \frac{2\,dx}{t^2+2t+3} = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + C = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\text{th}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$
Ou alors, en posant $u = e^x$, $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,\text{ch}\,x+\text{sh}\,x+1} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} + 1} = \int \frac{2u\,du}{3u^2+2u+1} = \frac{1}{3}\ln\left(u^2 + \frac{2}{3}u + 1\right) - \frac{2}{3\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3u+1}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{3}\ln\left(e^x + \frac{2}{3} + e^{-x}\right) + x - \frac{2}{3\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3e^x+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$

Exercice 22.35

Calculer $\displaystyle\int_3^x \frac{at+5}{(t-1)^3(t-2)^3}\,dt$

Solution : *On pose* $h = t-1$. *La fraction devient* $\dfrac{a+5+ah}{h^3(h-1)^3}$. $(h-1)^3 = -1+3h-3h^2+o(h^2)$, $\dfrac{1}{(h-1)^3} = -1-3h-6h^2+o(h^2)$, $\dfrac{a+5+ah}{(h-1)^3} = -\left(a+5+(3a+15+a)h+(6a+30+3a)h^2\right)+o(h^2) = -\left(a+5+(4a+15)h+(9a+30)h^2\right)+o(h^2)$.
Donc la partie polaire relative au pôle 1 s'écrit : $-\dfrac{a+5}{(t-1)^3} - \dfrac{4a+15}{(t-1)^2} - \dfrac{9a+30}{t-1}$.
On pose $h = t-2$. *La fraction devient* $\dfrac{2a+5+ah}{h^3(h+1)^3}$. $\dfrac{1}{(h+1)^3} = 1-3h+6h^2+o(h^2)$, $\dfrac{2a+5+ah}{(h+1)^3} = -\left(2a+5+(-6a-15+a)h+(6a-15-6a)h^2\right)+o(h^2) = -\left(2a+5-(5a+15)h-(15)h^2\right)+o(h^2)$. *Donc la partie polaire relative au pôle* 2 *s'écrit :* $-\dfrac{2a+5}{(t-2)^3} - \dfrac{5a+15}{(t-2)^2} - \dfrac{15}{t-1}$.
Soit à calculer $\left[\dfrac{a+5}{2(t-1)^2} + \dfrac{4a+15}{t-1} + (9a+30)\ln(t-1) + \dfrac{2a+5}{2(t-2)^2} + \dfrac{5a+15}{(t-2)} + 15\ln(t-2)\right]_3^x = \dfrac{a+5}{2(x-1)^2} + \dfrac{4a+15}{x-1} + (9a+30)\ln(x-1) + \dfrac{2a+5}{2(x-2)^2} + \dfrac{5a+15}{(x-2)} + 15\ln(x-2) - \dfrac{a+5}{8} - \dfrac{4a+15}{2} - (9a+30)\ln 2 - \dfrac{2a+5}{2} - 5a - 15$

Exercice 22.36

Solution :

Dérivée logarithmique

C'est le coup du $\dfrac{P'}{P}$

Exercice 22.37

On considère $P \in \mathbb{C}[X]$ *ayant* n *racines distinctes notées* x_k. *Soit* $a \in \mathbb{C}$ *tel que* $P(a) \neq 0$. *Exprimer les sommes*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a - x_k} \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a-x_k)^2}$$

en fonction de P, P' *et* a.

Solution : *Regarder pour un polynôme de degré* 2, *puis utiliser la dérivée logarithmique formelle. Enfin décomposer la fraction* $\frac{P'(X)}{P(X)}$. *On trouve* $S_1 = \frac{P'(a)}{P(a)}$ *puis en dérivant,* $S_2 = \frac{P'^2 - PP''}{P^2}(a)$.

Exercice 22.38

Démontrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$, *les racines de* P' *sont des barycentres à coefficients positifs ou nuls des racines de* P. *Quelle propriété connue cela généralise-t-il ?*

Solution : *Soit* $a_1, \dots, a_n$ *les racines de* P *d'ordres de multiplicités respectifs* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. *On a* $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - a_k}$.
Soit z *une racine de* P'. *Si* z *est aussi racine de* P *(c'est-à-dire si* z *est racine multiple de* P*) il n'y a rien à démontrer. Sinon* $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{z - a_k} = 0$. *Donc en conjuguant,* $\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\overline{z} - \overline{a_k}} = 0$ *soit* $\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{|z - a_k|^2}(z - a_k) = 0$. *C'est bien dire que* z *est barycentre des* $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *avec les coefficients* $\mu_k = \frac{\alpha_k}{|z - a_k|^2}$ *qui sont strictement positifs.*

Exercice 22.39

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ *vérifiant* $\forall x, y \in \mathbb{R}, P(xy) = P(x)P(y)$. *On pourra démontrer que* $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{P'(1)}{X}$.

Solution : *En dérivant par rapport à* y, $xP'(xy) = P(x)P'(y)$ *a fortiori* $xP'(x) = P(x)P'(1)$, *d'où* $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{P'(1)}{X}$. *On obtient une décomposition de* P'/P *en éléments simples. On en déduit que* P *admet zéro comme unique racine complexe. Donc* $P(X) = \alpha X^n$. *On a* $\alpha = 1$ *ou zéro. Réciproquement,* 0 *et* X^n *sont solutions.*

Exercice 22.40

Soit P *un polynôme de degré* n, *tel que* $P(1) \neq 0$ *et* $\frac{P'(1)}{P(1)} \leqslant \frac{n}{2}$. *Démontrer que* P *admet au moins une racine de module supérieur ou égal à* 1.

Solution : *Soit* $a_1, \dots, a_n$ *les* n *racines (distinctes ou non) de* P. $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - a_k}$ *D'où* $\frac{P'(1)}{P(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - a_k} \leqslant \frac{n}{2}$ *d'où* $\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{n}{2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - a_k} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + a_k}{1 - a_k}$. *Comme* $\frac{P'(1)}{P(1)} - \frac{n}{2}$ *est un nombre réel, il est égal à sa partie réelle, à savoir* $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2}$. *Si tous les* a_k *sont de module strictement inférieur à* 1, *alors tous les* $\frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2} > 0$ *et donc* $\frac{P'(1)}{P(1)} > \frac{n}{2}$. *Par contraposée, la proposition en résulte.*

Sicelides Musae, Paulo Majora Canamus

Exercice 22.41

Soit a, b *et* c *trois nombres réels distincts. Décomposer la fraction rationnelle* $\frac{\lambda X + \mu}{(X-a)(X-b)(X-c)}$ *sous la forme :* $\frac{A}{X-a} + \frac{B}{X-b} + \frac{C}{X-c}$. *Démontrer que la somme* $A + B + C$ *ne dépend pas de* (λ, μ). *En déduire les identités d'Euler :* $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$ *et* $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$.

Solution : *On a* $A + B + C = 0$. *En effet, à l'infini* $\frac{\lambda x + \mu}{(x-a)(x-b)(x-c)} = o(\frac{1}{x})$ *et* $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \frac{A+B+C}{x} + o(\frac{1}{x})$. *Or* $A = \frac{\lambda a + \mu}{(a-b)(a-c)}$, $B = \frac{\lambda b + \mu}{(b-a)(b-c)}$, $C = \frac{\lambda c + \mu}{(c-a)(c-b)}$. *Pour* $\lambda = 0$ *et* $\mu = 1$ *on trouve* $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$ *et pour* $\lambda = 1$ *et* $\mu = 0$ *on trouve* $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$.

Exercice 22.42

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* $n, P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$. *On suppose que* P *admet* n *racines non nulles et distinctes deux à deux :* $x_1, \ldots, x_n$. *Calculer* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)}$

Solution : *On considère* $F(X) = \frac{1}{P(X)}$. *On décompose* F *en éléments simples :* $F(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - x_i}$. *On a* $\lambda_i = \frac{1}{P'(x_i)}$. *Donc* $\frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)(X - x_i)}$ *et* $-\frac{1}{P(0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i) x_i} = -\frac{1}{a_0}$

Exercice 22.43

On considère une fraction rationnelle avec un pôle double :

$$F = \frac{U}{(X-a)^2 V_1} \qquad V(a) \neq 0$$

La décomposition en éléments simples s'écrit

$$F = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{(X-a)^2} + \frac{U_1}{V_1}$$

En définissant la fraction $G = (X-a)^2 F = \frac{U}{V_1}$, *exprimer les coefficients* α *et* β *à l'aide de* G. *Généraliser à un pôle multiple.*

Solution : *En multipliant la décomposition par* $(X-a)^2$, *on obtient*

$$G = \beta + \alpha(X-a) + (X-a)^2 \frac{U_1}{V_1}$$

On trouve donc que $\beta = G(a)$, *puis en dérivant, que* $\alpha = G'(a)$.
La généralisation est immédiate. Si la fraction F *possède un pôle d'ordre* k,

$$F = \frac{U}{(X-a)^k V_1} = \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{(X-a)^k} + \frac{U_1}{V_1}$$

en multipliant par $(X-a)^k$, *on trouve*

$$G = (X-a)^k F = \frac{U}{V_1} = \alpha_k + \alpha_{k-1}(X-a) + \cdots + \alpha_1 (X-a)^k + \frac{U_1}{V_1}$$

d'où l'on tire en dérivant k *fois, que*

$$\begin{cases} \alpha_k & = G(a) \\ \alpha_{k-1} & = G'(a) \\ \alpha_{k-2} & = \frac{G''(a)}{2} \\ \vdots & = \vdots \\ \alpha_1 & = \frac{G^{(k)}(a)}{k!} \end{cases}$$

Exercice 22.44

Soit $F(X) = \frac{U(X)}{V(X)}$ *On suppose que* a *est un pôle double de* F. *Exprimer les coefficients associés à ce pôle double en ne calculant pas de quotient de* V *par* $(X-a)^2$.

Solution : *On a* $V(X) = (X-a)^2 Q(X)$ *avec* $Q(a) \neq 0$. *Donc*

$$F(X) = \frac{U(X)}{(X-a)^2 Q(X)} = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\mu}{(X-a)^2} + \frac{P(X)}{Q(X)}$$

En multipliant par $(X-a)^2$ *et en faisant* $x = a$, *on trouve que* $\mu = \frac{U(a)}{Q(a)}$. *Il s'agit de trouver* $Q(a)$ *en fonction de* V. *Par Taylor :*

$$V(X) = V(a) + (X-a)V'(a) + (X-a)^2 \left[\frac{V''(a)}{2} + (X-a)T(X) \right]$$

Donc $Q(a) = \dfrac{V''(a)}{2}$. *Alors*

$$\boxed{\mu = \frac{2U(a)}{V''(a)}}$$

En retranchant,

$$\frac{U(X) - \mu Q(X)}{(X-a)^2 Q(X)} = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{P(X)}{Q(X)}$$

Si l'on note $H(X) = U(X) - \mu Q(X)$, *alors* $H(a) = 0$. *Donc* H *est divisible par* $(X-a)$ *:*

$$H(X) = (X-a)\theta(X)$$

En multipliant alors par $(X-a)$ *et en faisant* $x = a$, *on trouve*

$$\lambda = \frac{\theta(a)}{Q(a)}$$

En utilisant encore Taylor, $\theta(a) = H'(a) = U'(a) - \mu Q'(a)$. *Mais puisque*

$$Q(X) = \frac{V''(a)}{2} + (X-a)\frac{V'''(a)}{6} + (X-a)^3 Z(X)$$

$$Q'(a) = \frac{V'''(a)}{6}$$

Finalement,

$$\boxed{\lambda = \frac{6U'(a)V''(a) - 2U(a)V'''(a)}{3(V''(a))^2}}$$

Exercice 22.45

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}$$

En déduire l'identité :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p}\binom{n}{p} = -\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$$

Solution : *La décomposition s'écrit :*

$$\frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)} = \sum_{p=0}^{n}\frac{\lambda_p}{X+p}$$

En multipliant par $(X+p)$ *et en faisant* $x = -p$, *on en déduit le coefficient* λ_p *:*

$$\lambda_p = \frac{n!}{(-p)(-p-1)\dots(-1)(1)(2)\dots(n-p)} = \frac{n!}{(-1)^p p!(n-p)!} = (-1)^p\binom{n}{p}$$

Finalement :

$$F(X) = \sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p\binom{n}{p}}{X+p}$$

En faisant passer l'élément simple $\dfrac{\lambda_0}{X}$ *dans le membre gauche, on obtient :*

$$\frac{1}{X}\left[\frac{n!}{(X+1)\dots(X+n)} - 1\right] = \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p\binom{n}{p}}{X+p}$$

Notons φ *la fonction rationnelle*

$$\varphi(x) = \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n)}$$

On reconnaît alors un taux d'accroissement :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{\binom{n}{p}}{x+p}$$

L'idée consiste à prendre la limite lorsque $x \to 0$. *Cherchons donc* $\varphi'(0)$. *Comme* $\varphi(0) = 1 > 0$, *et que* φ *est continue en* 0, *il existe un voisinage de* 0, $V =]-\alpha, \alpha[$ ($\alpha > 0$) *sur lequel* φ *est strictement positive. Nous pouvons donc considérer* $\psi(x) = \ln\big(\varphi(x)\big)$ *sur ce voisinage* V. *Alors* $\forall x \in V$,

$$\psi(x) = \ln(n!) - \sum_{p=1}^{n} \ln(x+p)$$

en dérivant :

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{x+p}$$

et en prenant la limite lorsque $x \to 0$, *puisque* $\varphi(0) = 1$, *on trouve que*

$$\varphi'(0) = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p \binom{n}{p}}{p}$$

Exercice 22.46

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. *Démontrer qu'il existe une unique fraction* F *de* $\mathbb{R}(X)$ *telle que* $\operatorname{cotan}(2m+1)x = F(\tan x)$ *pour tout* x *tel que chacun des deux membres ait un sens.*

Calculer $P_m = \prod_{k=-m}^{m} \operatorname{cotan}\left(x + \frac{k\pi}{2m+1}\right)$. *Quels sont les pôles de* F *? Décomposer* F *en éléments simples. En déduire que :*

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{(2m+1)\tan\left(\frac{x}{2m+1}\right)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{2(2m+1)\tan\left(\frac{x}{2m+1}\right)}{(2m+1)^2\cos^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\tan^2\left(\frac{x}{2m+1}\right) - (2m+1)^2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}.$$

Solution : *On écrit* $\cos(2m+1)x = \operatorname{Re}\left((\cos x + i\sin x)^{2m+1}\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} (-1)^k \sin^{2k} x \cdot \cos^{2(m-k)+1} x$ *et* $\sin(2m+1)x = \operatorname{Im}\left((\cos x + i\sin x)^{2m+1}\right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} x \cdot \cos^{2(m-k)} x$. *D'où*

$$\operatorname{cotan}(2m+1)x = \frac{\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} (-1)^k \sin^{2k} x \cdot \cos^{2(m-k)+1} x}{\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} x \cdot \cos^{2(m-k)} x} = \frac{\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} (-1)^k \tan^{2k} x}{\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \tan^{2k+1} x}$$ *en divisant en haut et en bas par* $\cos^{2m+1} x$. *Donc* $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$ *avec* $A(X) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} (-1)^k X^{2k}$ *et* $B(X) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k X^{2k*1}$.

On détermine maintenant les racines z_k *de* $(X+1)^{2m+1} - e^{2(2m+1)ix}$. *Elles vérifient* $z_k + 1 = e^{2ix} e^{2ik\pi/(2m+1)}$ *soit* $z_k = \left(e^{i(x+k\pi/(2m+1)} - e^{-i(x+k\pi/(2m+1))}\right) e^{i(x+k\pi/(2m+1)} = 2i\sin(x+k\pi/(2m+1))e^{i(x+k\pi/(2m+1))}$. *Donc le produit des racines est d'une part* $(-1)^{2m+1}\left(1 - e^{2(2m+1)ix}\right) = -\left(e^{-(2m+1)ix} - e^{(2m+1)ix}\right) e^{(2m+1)ix} = 2ie^{(2m+1)ix}\sin((2m+1)x)$ *et d'autre part* $\prod_{k=-m}^{m} 2i\sin(x+k\pi/(2m+1))e^{i(k\pi/(2m+1)}e^{ix} = (2i)^{2m+1}e^{(2m+1)ix} \prod_{k=-m}^{m} \sin(x+k\pi/(2m+1))$. *D'où* $\prod_{k=-m}^{m} \sin(x+k\pi/(2m+1)) = \frac{\sin(2m+1)x}{2^{2m}i^{2m}} = \frac{(-1)^m \sin(2m+1)x}{2^{2m}}$.

En changeant x *en* $x+\pi/2$, $\prod_{k=-m}^{m} \cos(x+k\pi/(2m+1)) = \frac{(-1)^m \sin((2m+1)x + m\pi + \pi/2)}{2^{2m}} = \frac{\cos(2m+1)x}{2^{2m}}$. *Finalement,* $P_m = (-1)^m \operatorname{cotan}(2m+1)x$. *Les pôles sont obtenus pour* $x = \frac{k\pi}{2m+1}$ *pour* $k = -m, \dots, m$ *ce sont donc les* $\tan\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$. *Puisque* $\deg A = 2m$ *et* $\deg B = 2m+1$, $F(X) = \sum_{k=-m}^{m} \frac{\lambda_k}{X - \tan\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}$. *Donc* $\operatorname{cotan}(2m+1)x = \sum_{k=-m}^{m} \frac{\lambda_k}{\tan x - \tan\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}$.

En particulier $\lambda_k = \operatorname{cotan}(2m+1)x\left(\tan x - \tan\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)\Big|_{x=\frac{k\pi}{2m+1}}$. *En posant* $x = \frac{k\pi}{2m+1} + h$, $\operatorname{cotan}(2m+1)x = \operatorname{cotan}(2m+$

1) $h \sim \dfrac{1}{(2m+1)h}$ et $\tan x - \tan\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \sim h\dfrac{d}{dx}\tan\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) \sim \dfrac{h}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}$. D'où $\lambda_k = \dfrac{1}{(2m+1)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}$. En regroupant les termes d'indices k et $-k$ et en changeant x en $\frac{x}{2m+1}$, on trouve le résultat demandé.

Exercice 22.47

Ecrire $F(X) = \dfrac{1}{(1-X)\left(1-X^2\right)\left(1-X^5\right)} = \dfrac{A}{(1-X)^3} + \dfrac{B}{(1-X)^2} + \dfrac{C}{1-X} + \dfrac{D}{1+X} + \dfrac{P(X)}{1+X+X^2+X^3+X^4}$ *où* P *est un polynôme.*
Démontrer que $\deg P < 4$. *Ecrire un développement limité de* F *à l'ordre* 100, *puis à l'ordre* n.
De combien de façons différentes peut-on rendre la monnaie de 1 *euro avec des pièces de* 1, 2 *et* 5 *centimes ? Idem en remplaçant* 100 *par* n.

Solution : On obtient une telle écriture en regroupant les parties polaires relatives aux pôles complexes non réels. $\dfrac{P(X)}{1+X+X^2+X^3+X^4}$ est une fraction de degré strictement négatif comme différence de fractions de degré strictement négatif. Donc $\deg P < 4$.
On trouve facilement $D = \dfrac{1}{2^3\times 1} = \dfrac{1}{8}$. On trouve A, B et C par un développement limité en posant $x = 1+h$. On a $1+x+x^2+x^3+x^4 = 5+10h+10h^2+o(h^2)$ et $\dfrac{1}{(2+h)(5+10h+10h^2)} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{2+5h+6h^2} + o(h^2) = \dfrac{1}{10}\left(1+\frac{5}{2}h+3h^2\right)+o(h^2) = \dfrac{1}{10}\left(1-\frac{5}{2}h-3h^2+\frac{25}{4}h^2\right)+o(h^2)$ d'où $A = \dfrac{1}{10}, B = \dfrac{1}{4}$ et $C = \dfrac{13}{40}$.
Soit $\zeta = \exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right), k \in \{1,2,3,4\}$. On a $\dfrac{1}{(1-\zeta)^3(1+\zeta)} = \dfrac{1}{1-2\zeta+2\zeta^3-\zeta^4} = \dfrac{1}{2-\zeta+\zeta^2+3\zeta^3}$. On écrit une relation de Bézout entre $X^4+X^3+X^2+X+1$ et $3X^3+X^2-X+2$:
$\left(-\dfrac{3}{5}X^2-\dfrac{4}{5}X+\dfrac{3}{5}\right)\left(X^4+X^3+X^2+X+1\right) + \left(\dfrac{1}{5}X^3+\dfrac{2}{5}X^2+\dfrac{1}{5}X+\dfrac{1}{5}\right)\left(3X^3+X^2-X+2\right) = 1$. Donc $\left(\dfrac{1}{5}\zeta^3+\dfrac{2}{5}\zeta^2+\dfrac{1}{5}\zeta+\dfrac{1}{5}\right)\left(3\zeta^3+\zeta^2-\zeta+2\right) = 1$ et donc $P(\zeta) = \dfrac{1}{5}\zeta^3+\dfrac{2}{5}\zeta^2+\dfrac{1}{5}\zeta+\dfrac{1}{5}$ ceci pour les quatre valeurs de ζ et donc $P(X) = \dfrac{1}{5}X^3+\dfrac{2}{5}X^2+\dfrac{1}{5}X+\dfrac{1}{5}$. On en déduit $F(X) = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{(1-X)^3} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(1-X)^2} + \dfrac{13}{40}\dfrac{1}{1-X} + \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{1+X} + \dfrac{1}{5}\dfrac{(X^3+2X^2+X+1)(1-X)}{1-X^5} = \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{(1-X)^3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(1-X)^2} + \dfrac{13}{40}\dfrac{1}{1-X} + \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{1+X} + \dfrac{1}{5}\dfrac{(1+X^2-X^3-X^4)}{1-X^5}$.
Comme $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$, en dérivant, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k + o(x^n)$ et $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(k+2)(k+1)}{2}x^k + o(x^n)$, on en déduit que $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k + o(x^n)$ avec $p_k = \dfrac{(k+2)(k+1)}{20} + \dfrac{k+1}{4} + \dfrac{13}{40} + \dfrac{(-1)^k}{8} + \dfrac{a_k}{5}$ avec $a_k = 1$ pour $k \equiv 0, 2 \pmod 5$, $a_k = -1$ pour $k \equiv 3, 4 \pmod 5$ et $a_k = 0$ pour $k \equiv 1 \pmod 5$. Pour $k = 100$, $p_{100} = 541$.
On écrit les développements limités : $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} x^k + o(x^m)$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} x^{2k} + o(x^{2m})$, $\dfrac{1}{1-x^5} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} x^{5k} + o(x^{5m})$. En effectuant le produit de ces trois développements limités : $\dfrac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^5\right)} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m} x^k\right)\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{m} x^{2p}\right)\left(\displaystyle\sum_{q=0}^{m} x^{5q}\right) + o(x^m)$.
Le coefficient de x^n pour $n \leqslant m$ est donc le nombre $p(n)$ d'obtenir $n = k+2p+5q$. On a donc bien $p(n) = p_n$.

Exercice 22.48

Méthode de Ramanujan pour résoudre le système suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k^p \qquad p \in \{0,\dots,2n-1\}$$

des $2n$ *inconnues* $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *et* $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

1. *On considère* $\varphi(u) = \dfrac{x_1}{1-uy_1} + \ldots + \dfrac{x_n}{1-uy_n}$
2. *Soit* $\varphi(u) = a_0 + a_1.u + \ldots + a_{2n-1}.u^{2n-1} + o(u^{2n-1})$ *son développement limité à l'ordre* $2n-1$ *en zéro.*
3. *On réduit* φ *au même dénominateur :* $\varphi(u) = \dfrac{A_1 + A_2u + \ldots + A_n u^{n-1}}{1 + B_1 u + \ldots + A_n u^n}$.
   D'où $(1 + B_1 u + \ldots + B_n u^n).(a_0 + \ldots + a_{2n-1}u^{2n-1} + o(u^{2n-1})) = A_1 + \ldots + A_n u^n$
4. *On résout un système pour trouver les* B_k *puis les* A_k. *On a donc enfin l'expression de* φ.
5. *On décompose* φ *en éléments simples. Dans le cas où* φ *ainsi obtenue n'admet que des pôles simples on obtient l'unique* $2n$*-uplet solution du système.*

6. *Application : Résoudre dans* $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ px + qy + rz + st = 1 \\ p^2x + q^2y + r^2z + s^2t = 7 \\ p^3x + q^3y + r^3z + s^3t = -2 \\ p^4x + q^4y + r^4z + s^4t = 15 \\ p^5x + q^5y + r^5z + s^5t = -23 \\ p^6x + q^6y + r^6z + s^6t = 50 \\ p^7x + q^7y + r^7z + s^7t = -95 \end{cases}$$

Solution : *On écrit a priori la fraction* $\varphi(u) = \dfrac{A_1 + A_2 u + A_3 u^2 + A_4 u^3}{1 + B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + B_4 u^4} = 2 + u + 7u^2 - 2u^3 + 15u^4 - 23u^5 + 50u^6 - 95u^7 + o(u^7)$. *On obtient alors* $A_1 + A_2 u + A_3 u^2 + A_4 u^3 = 2 + (2B_1 + 1)u + (7 + B_1 + 2B_2)u^2 + (-2 + 7B_1 + B_2 + 2B_3)u^3 + (15 - 2B_1 + 7B_2 + B_3 + 2B_4)u^4 + (-23 + 15B_1 - 2B_2 + 7B_3 + B_4)u^5 + (50 - 23B_1 + 15B_2 - 2B_3 + 7B_4)u^6 + (-95 + 50B_1 - 23B_2 + 15B_3 - 2B_4)u^7$.

Soit : $\begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = 1 + 2B_1 \\ A_3 = 7 + B_1 + 2B_2 \\ A_4 = -2 + 7B_1 + B_2 + 2B_3 \end{cases}$ $\begin{cases} -2B_1 + 7B_2 + B_3 + 2B_4 = -15 \\ 15B_1 - 2B_2 + 7B_3 + B_4 = 23 \\ -23B_1 + 15B_2 - 2B_3 + 7B_4 = -50 \\ 50B_1 - 23B_2 + 15B_3 - 2B_4 = 95 \end{cases}$

La résolution du deuxième système fournit : $B_1 = 0$, $B_2 = -2$, $B_3 = 3$, $B_4 = -2$. *Le premier système fournit ensuite* $A_1 = 2$, $A_2 = 1$, $A_3 = 3$, $A_4 = 2$. *On obtient donc* $\varphi(u) = \dfrac{2 + u + 3u^2 + 2u^3}{1 - 2u^2 + 3u^3 - 2u^4}$. *Au dénominateur* 1 *et* $-1/2$ *sont des racines (plus ou moins) évidentes et* $1 - 2u^2 + 3u^3 - 2u^4 = -2(u-1)(u+\frac{1}{2})(u^2 - u + 1)$. *Donc* $\varphi(u) = \dfrac{a}{u-1} + \dfrac{b}{u+\frac{1}{2}} + \dfrac{c}{u+j} + \dfrac{d}{u+j^2}$. *On trouve alors* $a = -\dfrac{8}{3}$, $b = \dfrac{8}{21}$, $c = \dfrac{2 - j + 3j^2 - 2}{-2(-j-1)(-j+\frac{1}{2})(-j+j^2)} = \dfrac{-3+4j}{-1-5j} = -\dfrac{17+39j}{21}$, $d = \overline{c} = -\dfrac{17+39j^2}{21}$. *On trouve alors* $x = \dfrac{8}{3}$, $y = \dfrac{16}{21}$, $z = -\dfrac{1}{j}\dfrac{17+39j}{21} = \dfrac{-22+17j}{21}$, $t = \dfrac{-22+17j^2}{21}$, $p = 1$, $q = -2$, $r = -j^2$, $s = -j$ *ou toute permutation des lettres* (x, y, z, t) *avec la permutation correspondante des lettres* (p, q, r, s).

Exercice 22.49

On considère l'équation différentielle suivante : $u' = u^2 + \dfrac{a}{x} - b$ **(*)** *pour* $x > 0$ *(*a *et* b *non nuls)*

1. *Recherche des solutions fonctions rationnelles.*
   Soit $u(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *une solution de* **(*)** *avec* $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, P *et* Q *premiers entre eux.*
   (a) *Démontrer que* $\deg P = \deg Q$.
   (b) *Démontrer que les zéros de* Q *sont simples. (On pourra étudier à part le cas éventuel de la racine nulle. Si* z *est une racine non nulle de* Q *, on pourra démontrer que* $Q'(z).P(z) = -P^2(z)$ *)*
   (c) *Décomposer* $u = \dfrac{P}{Q}$ *en éléments simples.*
   (d) *Exprimer* u *en fonction de* Q *seulement.*
2. *On pose* $z = \exp(-\alpha x).Q(x)$ *où* α *désigne la partie entière de* u.
   (a) *Donner une équation différentielle vérifiée par* z.
   (b) *Donner une équation différentielle vérifiée par* Q.
   (c) *Démontrer que* $b = \alpha^2$.
   (d) *Déterminer Q. (On pourra exprimer* α *en fonction de* a *et de* $\deg(Q)$ *)*

Solution :

1. (a) *Supposons* $\deg u > 0$. *On aurait alors* $u^2 - u' = -\dfrac{a}{x} + b$, *égalité entre une fraction de degré strictement positif et une de degré strictement négatif. Impossible. Supposons* $\deg u < 0$. *On aurait alors* $b = u^2 - u' + \dfrac{a}{x}$, *égalité entre une fraction de degré strictement positif et une de degré strictement négatif. Impossible aussi. Reste une possibilité :* $\deg u = 0$ *soit* $\deg P = \deg Q$.
   (b) *On a* $P'Q - PQ' = P^2 + \left(\dfrac{a}{x} - b\right)Q^2$. *Donc si* $z \neq 0$ *est une racine de* Q, *on a* $-Q'(z).P(z) = P^2(z)$. *Or* z *n'est pas racine de* P *(sinon* $X - z$ *serait un diviseur commun à* P *et à* Q*), donc* $Q'(z) = -P(z) \neq 0$. *Donc* z *est racine simple.*

Pour le pôle nul : On a $Q(0)=0$*, donc* $P(0)\neq 0$*. On écrit* $Q=XQ_1$*. Ainsi* $(a-bX)X^2Q_1(Q_1-P')=XP(Q'-P)$ *Après simplification par* X*, on obtient* $-P(0)(Q'(0)+P(0))=0$ *donc* $Q'(0)=-P(0)$ *est non nul.* 0 *est donc une racine simple de* Q*.*

(c) *Tous les pôles de* u *sont simples, donc* $u(x)=\alpha+\frac{\lambda_0}{x}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{x-z_k}$ *où* $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ *sont les racines non nulles de* Q *et* α *désigne la partie entière de* u*. On a* $\lambda_k=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$*. Or, que* z *soit une racine de* Q *nulle ou non nulle, on a* $\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}=-1$*. Donc* $u(x)=\alpha+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{-1}{x-z_k}$*.*

(d) *Donc* $u=\alpha-\frac{Q'}{Q}$*.*

2. (a) *On a* $z'=(-\alpha Q+Q')\exp(-\alpha x)=-Q\left(\alpha-\frac{Q'}{Q}\right)\exp(-\alpha x)=-zu$*. En dérivant, cela donne* $z''=-z'u-zu'=zu^2-z\left(u^2+\frac{a}{x}-b\right)=-z\left(\frac{a}{x}-b\right)$*.*

(b) *On dérive* $z'=(-\alpha Q+Q')\exp(-\alpha x)$ *:* $z''=(Q''-2\alpha Q'+\alpha^2Q)\exp(-\alpha x)$*. L'équation* $z''==-z\left(\frac{a}{x}-b\right)$ *s'écrit* $Q''-2\alpha Q'+(\alpha^2-b+\frac{a}{x})Q=0$*.*

(c) *On en déduit :* $X(\alpha^2-b)Q=-XQ''+2\alpha XQ'-aQ$*. A droite, on a un polynôme de degré inférieur ou égal à* $\deg Q$*. Donc nécessairement* $\alpha^2-b=0$*.*

(d) *On pose* $n=\deg Q$*. On a* $XQ''-2\alpha XQ'+aQ=0$*. En regardant le coefficient de* X^n *: on a* $-2\alpha n+a=0$*. En écrivant* $Q(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ *en prenant par exemple* $a_n=0$*. En regardant le coefficient de* X^n *: on a* $(k+1)ka_{k+1}=(2\alpha k-a)a_k=2\alpha(k-n)a_k$*. D'où* $a_k=\frac{k(k+1)}{2\alpha(k-n)}$*. On retrouve bien* $a_0=Q(0)=0$*. On trouve de proche en proche* $a_{n-1}=-\frac{(n-1)n}{2\alpha}$*,* $a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-1)(n-1)n}{2\alpha4\alpha}$*, ...,* $a_{n-k}=\frac{(-1)^k(n-k)\,[]^2\,n}{2^k\alpha^kk!}=\frac{(-1)^k}{2^k\alpha^kk!}\frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2}\frac{n-k}{n}$*. Donc* $Q(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k\alpha^kk!}\frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2}\frac{n-k}{n}X^k$*.*

Exercice 22.50

1. *On considère l'équation différentielle* $(**)\,y'+y^2+\frac{a}{x}y-1=0$*.*
   (a) *Intégrer* **(**)** *dans le cas où* $a=0$*.*
   (b) *On suppose* $a\neq 0$*. Montrer que si l'on pose* $y=\frac{1}{z}$*,* z *doit satisfaire à une équation différentielle que l'on formera. En conclure que l'on peut, pour étudier* **(**)** *, se borner au cas où* a *est positif.*
2. *On suppose désormais* $a>0$*.*
   On cherche des solutions $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ *de* **(**)** *avec* P *et* Q *premiers entre eux.*
   (a) *Démontrer que* y *est solution de* **(**)** *si et seulement si* P *et* Q *vérifient* $P'Q-PQ'+P^2+\frac{a}{x}.P.Q-Q^2=0$*.*
   (b) *Démontrer que l'on a nécessairement :*
   - *Le produit* $P(X).Q(X)$ *admet zéro comme racine.*
   - *Un et un seul des polynômes* P *et* Q *s'annule en zéro.*
   - *Les polynômes* P *et* Q *sont de même degré. On désigne par* n *leur degré commun éventuel.*

   Démontrer que leurs coefficients dominants sont égaux ou opposés.

   (c) *On suppose ici que* $Q(0)=0$*.*
   Démontrer que $Q(X)-P'(X)$ *est divisible par* $P(X)$*. En déduire* $\exists\varepsilon\in\{-1;1\}$ *tel que*

$$Q(X)-P'(X)=\varepsilon P(X). \tag{22.3}$$

$$P(X)-Q'(X)+\frac{a}{X}Q(X)=\varepsilon.Q(X) \tag{22.4}$$

$$P''(X)+2\varepsilon P'(X)=\frac{a}{X}(P'(X)+\varepsilon P(X)) \tag{22.5}$$

$$a=2n.\quad (n\in\mathbb{N}^*) \tag{22.6}$$

(d) *Si* $P(0)=0$, *alors il existe des propriétés analogues qu'on obtiendra soit en suivant une voie analogue à celle de* **IV.3**, *soit simplement en transformant ces résultats. En conclure que l'hypothèse* $P(0)=0$ *ne peut être retenue.*

(e) *On se place dans le cas où* a *est le double d'un entier naturel. (notons-le* n*). On se propose de démontrer qu'il existe un couple* (P,Q) *satisfaisant aux conditions du* **IV.1**.
Déterminer les polynomes P *qui satisfont à* **(3)** *en calculant leurs coefficients grâce à une relation de récurrence. On désignera par* $P_n(X)$ *celui de ces polynômes qui est unitaire et qui correspond à* $\varepsilon=+1$ *et par* P_n^* *celui, unitaire qui correspond à* $\varepsilon=-1$. *Déterminer les polynômes* Q_n *et* Q_n^* *associés.*

(f) *On pose* $f_n = P_n/Q_n$ *et* $f_n^* = P_n^*/Q_n^*$.
Comparer $f_n(-x)$ *et* $f_n^*(x)$ *pour* $x\in\mathbb{R}$. *Démontrer que*

$$f_n(X)-f_n^*(X)=\frac{Q_n'(X)}{Q_n'(X)}-\frac{Q_n^{*\prime}(X)}{Q_n^*(X)}+2.$$

(On pourra penser à **(2)** *)*

(g) *Soit* y *une solution de* **(**)**. *On pose* $y=\dfrac{f_n-f_n^* z}{1-z}$. *Donner une équation différentielle très simple vérifiée par* z.
Intégrer cette équation différentielle en z *à l'aide de* Q_n *et* Q_n^*. *En déduire la solution générale de* **(**)** *qui s'exprime très simplement à l'aide de* $P_n, Q_n P_n^*, Q_n^*$ *et de la fonction exponentielle.*

(h) *Intégrer* $y'+y^2+\dfrac{2}{x}.y-1=0$.

Solution :

1. (a) *Lorsque* $a=0$ *on intègre l'équation à variables séparables* $y'=1-y^2$. *On obtient les solutions* $y=\pm1$ *ou* $\dfrac{y'}{1-y^2}=1$ *soit* $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|=x+C$ *soit* $\dfrac{1+y}{1-y}=Ke^{2x}$ *ou encore* $y=\dfrac{Ke^{2x}-1}{Ke^{2x}+1}$, K *étant une constante. Pour* $K=0$ *on retrouve la solution* $y=-1$.

   (b) *En posant* $y=\dfrac{1}{z}$, *on obtient* $y'=-\dfrac{z'}{z^2}$. *Donc* $-\dfrac{z'}{z^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{a}{xz}-1=0$ *soit* $-z'+1+\dfrac{a}{x}z-z^2=0$ *ou* $z'+z^2-\dfrac{a}{x}z-1=0$. *Donc si* y *est solution pour un certain* a, *alors* $z=\frac{1}{y}$ *sera solution pour le* a *opposé. (Remarque pour* $a=0$ *les solutions qui correspondent à des* K *opposés sont inverses.)*

2. (a) *En posant* $y=\dfrac{P}{Q}$, *on a* $y'=\dfrac{P'Q-PQ'}{Q^2}$ *d'où* $\dfrac{P'Q-PQ'}{Q^2}+\dfrac{P^2}{Q^2}+\dfrac{a}{x}\dfrac{P}{Q}-1$ *soit* $P'Q-PQ'+P^2+\dfrac{a}{x}PQ-Q^2=0$.

   (b) *On a donc* $PQ=\dfrac{X}{a}\left[PQ'-P'Q-P^2+Q^2\right]$. *Donc* 0 *est racine du polynôme* PQ. *S'il était racine de* P *et de* Q, X *diviserait* P *et* Q *et donc* P *et* Q *ne seraient pas premiers entre eux.*
   Supposons $p=\deg P>q=\deg Q$. *on aurait alors*

$$\underbrace{P^2}_{d^\circ 2p}=\underbrace{PQ'-P'Q-\frac{a}{X}PQ+Q^2}_{\text{somme de polynômes de } d^\circ<2p}$$

   ce qui est impossible. De même supposons $p<q$. *Cette fois on aurait*

$$\underbrace{Q^2}_{d^\circ 2q}=\underbrace{P'Q-PQ'+\frac{a}{X}PQ+P^2}_{\text{somme de polynômes de } d^\circ<2q}$$

   ce qui est également impossible. On a donc $p=q=n$. *Maintenant* $P^2-Q^2=PQ'-P'Q-\dfrac{a}{X}PQ$. *Comme* $\deg\left(PQ'-P'Q-\dfrac{a}{X}PQ\right)<2n$, *on en déduit que* P^2 *et* Q^2 *ont même coefficient de degré* $2n$, *ce qu'il fallait démontrer.*

   (c) *Si* $X\mid Q$ *alors* $Q(Q-P')=P\left(P-Q'+a\dfrac{Q}{X}\right)$. *Donc* $P\mid Q(Q-P')$. *Comme* P *et* Q *sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss,* $P\mid Q-P'$. *Or* $\deg(Q-P')=n$, *donc* $P=k(Q-P')$, $k\in\mathbb{R}$. *En regardant les termes de plus haut degrés qui sont égaux ou opposés, on obtient* $k=\varepsilon\in\{-1,1\}$ *(1).*
   Dans l'égalité $Q(Q-P')=P\left(P-Q'+a\dfrac{Q}{X}\right)$, *on remplace* $Q-P'$ *par* εP *et on obtient après simplification par* P : $\varepsilon Q=P-Q'+a\dfrac{Q}{X}$ *(2).*

D'après l'égalité (1), on a $\frac{a}{x}(P'+\varepsilon P) = \frac{a}{x}Q = \varepsilon Q - P + Q'$ d'après (2). Comme $\varepsilon Q - P = \varepsilon P'$ d'après (1) et $Q' = P'' + \varepsilon P'$ en dérivant (1), on obtient bien (3).

Si on appelle a_n le coefficient dominant de P, en regardant le coefficient de X^n dans $X(P''+2\varepsilon P') = a(P'+\varepsilon P)$ on trouve $2\varepsilon a_n n = a\varepsilon a_n$ donc $2n = a$ (4) puisque $\varepsilon a_n \neq 0$.

(d) Si pour un certain a, on a $P(0) = 0$, on obtient pour $a' = -a, Q(0) = 0$ puisqu'on échange les rôles de P et de Q. Donc d'après (4) on aurait $a' = 2n$ soit $a = -2n$ ce qui est impossible.

(e) On écrit $P = \sum a_k X^k$, $P' = \sum (k+1)a_{k+1}X^k$, $XP' = \sum k a_k X^k$, $P'' = \sum k(k-1)a_k X^{k-2}$, et $XP'' = \sum (k+1)k a_{k+1} X^k$. (3) se traduit par $XP'' + (2\varepsilon X - 2n)P' - 2n\varepsilon P = 0$. Donc $(k+1)k a_{k+1} + 2\varepsilon k a_k - 2n(k+1)a_{k+1} - 2n\varepsilon a_k = 0$, soit $a_{k+1}(k+1)(k-2n) = -2\varepsilon(k-n)a_k$ ou encore $a_k = -\varepsilon \frac{(k+1)(2n-k)}{2(n-k)}$. En partant de $a_n = 1$, $a_{n-1} = -\varepsilon \frac{n(n+1)}{2}$, $a_{n-k} = (-\varepsilon)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{2^k k!} = (-\varepsilon)^k \frac{(n+k)!}{2^k (n-k)! k!}$. Finalement

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{n} (-\varepsilon)^k \frac{(n+k)!}{2^k k!(n-k)!} X^{n-k}}$$

D'où $\varepsilon P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon(-\varepsilon)^k \frac{(n+k)!}{2^k k!(n-k)!}(n-k)X^{n-k-1} = \sum_{h=1}^{n} \varepsilon^h (-1)^{h-1} \frac{(n+h-1)!}{2^{h-1}!(n-h)!} X^{n-h}$.

Donc $Q(X) = P + \varepsilon P' = X^n + \sum_{k=1}^{n} \left[(-\varepsilon)^k \frac{(n+k)!}{2^k k!(n-k)!} + \varepsilon^k (-1)^{k-1} \frac{(n+k-1)!}{2^{k-1}!(n-k)!} \right] X^{n-k} = X^n + \sum_{k=1}^{n} (-\varepsilon)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-k)! 2^{k-1}(k-1)!} \left[\frac{n+k}{2k} - 1 \right] X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)! 2^k k!} X^{n-k}$ car pour $k = n$ le coefficient est nul, ce qui est conforme avec le fait que $Q(0) = 0$, et pour $k = 0$, $(-\varepsilon)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)! 2^k k!} = 1$.

(f) Soit $g(x) = -f_n(-x)$, on a $g'(x) = f_n'(x)$. Or $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_n'(-x) + f_n^2(-x) + \frac{a}{-x} f_n(-x) - 1 = 0$ on en déduit que $g'(x) + g^2(x) + \frac{a}{x} g(x) - 1 = 0$. On en déduit que g est une fraction rationnelle solution de $y' + y^2 + \frac{a}{x} y - 1 = 0$. C'est donc soit f_n soit f_n^*. Or $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 1$ et que $\lim_{x\to\pm\infty} f_n^*(x) = -1$ on en déduit que $g(x) = -f_n(-x) = f_n^*(x)$ donc $f_n(-x) = -f_n^*(x)$.

D'après (2), en divisant par Q, on a $\frac{P}{Q} = \frac{Q'}{Q} - \frac{a}{x} + \varepsilon$. Donc $f_n(x) - f_n^*(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} - \frac{P_n^*(x)}{Q_n^*(x)} = \frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} - \frac{a}{x} + 1 - \frac{Q_n^{*\prime}(x)}{Q_n^*(x)} + \frac{a}{x} + 1 = \frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} - \frac{Q_n^{*\prime}(x)}{Q_n^*(x)} + 2$ ce qu'il fallait vérifier.

(g) On a : $y = \frac{f_n - f_n^* z}{1-z}$ d'où

$y' = \frac{(f_n' - f_n^{*\prime} z - f_n^* z')(1-z) + (f_n - f_n^* z)z'}{(1-z)^2} = \frac{f_n' - f_n^{*\prime} z - f_n^* z' - f_n' z + f_n^{*\prime} z^2 + f_n^* z' z + f_n z' - f_n^* z' z}{(1-z)^2}$.

$y' + y^2 + \frac{a}{x} y - 1$

$= \frac{f_n' - f_n^{*\prime} z - f_n^* z' - f_n' z + f_n^{*\prime} z^2 + + f_n z' + \left(f_n - f_n^* z\right)^2 + \frac{a}{x}\left(f_n - f_n^* z\right)(1-z) - (1-z)^2}{(1-z)^2}$

$= \frac{f_n' - f_n^{*\prime} z - f_n^* z' - f_n' z + f_n^{*\prime} z^2 + + f_n z' + f_n^2 - 2 f_n f_n^* z + \left(f_n^*\right)^2 z^2 + \frac{a}{x}\left(f_n - f_n^* z - f_n z + f_n^* z^2\right) - 1 + 2z - z^2}{(1-z)^2}$

En regroupant les termes en z, z' et z^2 et en multipliant par $(1-z)^2$,

$f_n' + f_n^2 + \frac{a}{x} f_n - 1 + z\left(-f_n^{*\prime} - f_n' - 2 f_n f_n^* - \frac{a}{x}(f_n^* + f_n) + 2\right) + z'\left(-f_n^* + f_n\right) + z^2\left(f_n^{*\prime} + \left(f_n^*\right)^2 + \frac{a}{x} f_n^* - 1\right) = 0$.

Or $f_n' + f_n^2 + \frac{a}{x} f_n - 1 = 0$ et $f_n^{*\prime} + \left(f_n^*\right)^2 + \frac{a}{x} f_n^* - 1 = 0$ donc le coefficient de z^2 et le coefficient constant sont nuls et le coefficient de z égale $-f_n^{*\prime} - f_n' - 2 f_n f_n^* - \frac{a}{x}(f_n^* + f_n) + 2 = f_n^2 + \left(f_n^*\right)^2 - 2 f_n f_n^*$. Donc l'égalité se simplifie en $z'(f_n - f_n^*) + z(f_n - f_n^*)^2 = 0$ donc $z' + z(f_n - f_n^*) = 0$ ou encore $z' + z\left(\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} - \frac{Q_n^{*\prime}(x)}{Q_n^*(x)} + 2\right) = 0$.

Cette équation s'intègre en $z = K\frac{Q_n^*}{Q_n} e^{-2x}$. On obtient enfin $y = \frac{P_n - K P_n^* e^{-2x}}{Q_n - K Q_n^* e^{-2x}}$. On retrouve les solutions rationnelles pour $K = 0$ et $K = \infty$.

(h) On a $n = 1$. C'est le degré des polynômes P et Q. Pour $\varepsilon = 1$, on a $P(X) = X + \alpha$ et $XP' = 2(P' + P)$ d'où $\alpha = -1$ et $P_1 = X - 1$. Pour $\varepsilon = -1$, on a $P(X) = X + \beta$ et $-XP' = 2(P' - P)$ d'où $\beta = 1$ et $P_1^* = X + 1$. On a tout de suite $Q_1 = X$ et $Q_1^* = -X$. On obtient les solutions $y = \frac{x - 1 - K(x+1)e^{-2x}}{x(1 + K e^{-2x})}$ pour un certain $K \in \mathbb{R}$.

Chapitre 23

Espaces vectoriels

Pour bien aborder ce chapitre

La géométrie prédominait dans les mathématiques grecques et il fallut attendre Descartes au 17e siècle pour faire le lien, grâce à la notion de repère, entre les notions géométriques :
– de points du plan ou de l'espace,
– de courbes
et celles algébriques
– de couples ou de triplets de réels,
– d'équations.
Cette approche s'avéra féconde à la fois pour les géomètres et les analystes. Elle offrit aux premiers toute la puissance de l'analyse pour traiter des problèmes de géométrie et, au second, les représentations de la géométrie pour visualiser et énoncer les phénomènes de l'analyse.
La généralisation des notions géométriques du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$ à des espaces de dimension plus grande n'a pas été immédiate. Il manquait le formalisme pour pouvoir aborder ce problème. C'est le mathématicien allemand autodidacte Hermann Grassmann qui, au 19e siècle, esquissa les notions d'espace vectoriel et de dimension. Son travail était d'un abord difficile et c'est grâce au mathématicien italien Giuseppe Peano que ces concepts se précisèrent et prirent leur forme définitive.
Les mathématiciens disposèrent alors d'outils permettant d'aborder des problèmes de géométrie en dimension quelconque. Cependant c'est l'analyse qui donnera aux espaces vectoriels toute leur importance.
À la fin du 19e siècle et au début du 20e siècle, les mathématiciens allemands étudient des espaces de fonctions et créent l' analyse fonctionnelle. Les espaces étudiés ont des structures d'espace vectoriel. Le mathématicien polonais Stefan Banach écrira, dans sa thèse, que plutôt que d'étudier des problèmes particuliers et de démontrer isolément leurs propriétés, une meilleure stratégie est de prouver ces propriétés pour des ensembles généraux pour lesquels on a postulé des propriétés, puis de montrer que ces axiomes sont vérifiés par les problèmes particuliers.
Cette approche fonde en quelque sorte les mathématiques modernes. On introduit et étudie dans un premier temps des structures (groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ...) puis on vérifie à quelle catégorie se rattache un exemple particulier donné. Il hérite alors de toutes les propriétés de la catégorie à laquelle il appartient.
Les premiers pas en algèbre linéaire sont en général difficiles et rebutants. La difficulté ne tient pas tellement, contrairement à ce qu'on pourrait penser, à la difficulté des raisonnements mathématiques ou à l'abstraction des notions utilisées. Elle réside plutôt dans le caractère nouveau de ces raisonnements et de ces notions. Un conseil, ne vous laissez pas impressionner, ne vous braquez pas. Le temps et le travail aidant, vous allez vite comprendre dans quel nouvel endroit vous avez mis les pieds et, passé la phase de découverte, vous allez vite vous sentir en sécurité. Les chapitres 2 et 3 de géométrie dans le plan et dans l'espace vont vous être d'un grand secours car ils vous aideront à vous forger des représentations et ils guideront votre intuition.

23.1 Espace vectoriel

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

23.1.1 Définitions

Nous allons donner les axiomes qui définissent un espace vectoriel.

DÉFINITION 23.1 ♡♡♡ $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps. On appelle *espace vectoriel* sur le corps $\mathbb{K}$ tout ensemble E muni d'une loi de composition interne + (addition)

$$+ : \begin{cases} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{cases}$$

et d'une loi de composition externe · (multiplication par un scalaire)

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{cases}$$

telles que

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif. On note 0_E son élément neutre.
2. Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ et pour tout $(x,y)\in E^2$, on a

① $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$

② $(\alpha\times\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)$

③ $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y$

④ $1_{\mathbb{K}}\cdot x = x$

On dit alors que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel*. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*, ceux de E, *vecteurs*. L'élément neutre de $(E,+)$, 0_E est appelé *vecteur nul*.

Remarque 23.1 On vous avait prévenu, cela peut sembler abstrait... Cela ne l'est en fait pas tant que ça. Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel on peut définir une addition et une multiplication par un scalaire et rien de plus, si ce n'est que cette addition et cette multiplication doivent vérifier les axiomes ci-dessus. Vous connaissez un certain nombre d'ensembles de ce type :

- $\mathbb{R}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) et $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- L'ensemble des vecteurs du plans ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$).
- L'ensemble des vecteurs de l'espace ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$).
- Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$).
- L'ensemble des suites réelles $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou complexes $\mathscr{S}(\mathbb{C})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- L'ensemble $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) (ou dans $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$)) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Les ensembles de polynômes $\mathbb{R}[X]$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) et $\mathbb{C}[X]$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $n\in\mathbb{N}$.

Nous allons formaliser cette remarque dans la prochaine section.

Remarque 23.2 Prenons tout de suite de bonnes habitudes. Il est essentiel de bien distinguer les notions vectorielles des notions affines. Les espaces affines sont ceux que vous connaissez depuis le collège. Dans un **espace affine** :

① Un vecteur est donné par deux points, un point de « départ »A et un point « d'arrivée »B. On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si ABDC est un parallélogramme.

② Une droite est composée de points. Elle est donnée par un point par lequel elle passe et par un vecteur qui la dirige. On parle de droite affine (Voir la définition dans chapitre 2).

③ Un plan est lui aussi composé de points. Il est donné par un point par lequel il passe et par deux vecteurs qui l'engendrent. On parle de plan affine (Voir la définition dans chapitre 3).

Si on fixe une origine O dans notre espace affine, ses points peuvent être identifiés aux vecteurs d'origine O. Ce sont ces vecteurs qui nous intéressent dans un espace vectoriel. La notion de point n'a pas de sens. Dans un **espace vectoriel** :

① Tous les éléments sont des vecteurs. On peut se les représenter comme les vecteurs d'origine O d'un espace affine.

② Une droite est engendrée par un vecteur u (non nul) et est formée de vecteurs. On peut se l'imaginer dans un espace affine comme une droite passant par O et dirigée par u.

③ Un plan est engendré par deux vecteurs u et v (non colinéaires) et est formé de vecteurs. On peut se l'imaginer dans un espace affine comme un plan passant par O et engendré par u et v.

⚠ *Attention 23.1* Autant il est utile parfois de se représenter certaines notions d'algèbre linéaire dans le plan ou dans l'espace, autant parfois ceci est impossible...Cela n'est en général pas gênant...

23.1.2 Espaces produits

Exemple 23.2 Soit $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corps. Alors $(\mathbb{K},+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'addition dans $\mathbb{K}$ est une loi interne sur $\mathbb{K}$ et la multiplication sur $\mathbb{K}$ peut être vue comme une loi externe. On vérifie facilement que ces deux lois vérifient les axiomes définissant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 23.3 On va munir l'ensemble des couples de réels $\mathbb{R}^2$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On définit une addition et une multiplication par un scalaire ainsi. Pour tous $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y') \quad \text{et} \quad \alpha.(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

On vérifie (c'est un peu long et laborieux mais c'est facile) que ces deux lois vérifient les axiomes définissant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Attention, le vecteur nul de cet espace est donné par $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$.

⚠ *Attention 23.4* Attention au sens des opérations + et . dans les définitions ci-dessus :

Addition dans $\mathbb{R}^2$ → $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$ ← Addition dans $\mathbb{R}$

Multiplication par un scalaire dans $\mathbb{R}^2$ → $\alpha.(x,y) = (\alpha.x, \alpha.y)$ ← Multiplication par un scalaire dans $\mathbb{R}$

On généralise cette construction ainsi :

PROPOSITION 23.1 **Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$**
Sur l'ensemble des n-uplets de scalaires $\mathbb{K}^n$, on définit
– une addition +

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \big((x_1,\dots,x_n),(x'_1,\dots,x'_n)\big) & \longmapsto & (x_1+x'_1,\dots,x_n+x'_n) \end{array} \right.$$

– une multiplication par un scalaire $\cdot$

$$\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (\alpha,(x_1,\dots,x_n)) & \longmapsto & (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n) \end{array} \right.$$

Muni de ces lois, l'ensemble $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est le n-uplet $\boxed{0_{\mathbb{K}^n} = (0,\dots,0)}$.

Démonstration *Vérifications faciles.*

Un corollaire immédiat est alors le suivant :

COROLLAIRE 23.2 **Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$**
– Le triplet $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
– Le triplet $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque 23.3 En particulier, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

De manière plus générale, on a :

PROPOSITION 23.3 **Produit d'espaces vectoriels**
Soient $(E_1,+,\cdot)$ et $(E_2,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur l'ensemble $E_1 \times E_2$
– une addition +

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} (E_1 \times E_2)^2 & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \longmapsto & (x_1+y_1,x_2+y_2) \end{array} \right.$$

– une multiplication par un scalaire $\cdot$

$$\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ (\alpha,(x_1,x_2)) & \longmapsto & (\alpha\cdot x_1,\alpha\cdot x_2) \end{array} \right. .$$

Alors $(E_1 \times E_2,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est $\boxed{(0_{E_1},0_{E_2})}$.

Démonstration *Vérifications faciles.*

23.1.3 Espaces de suites et de fonctions

Comme précisé dans l'introduction, on peut munir certains espaces de fonctions de structure d'espace vectoriel. Il suffit pour cela que les fonctions soient à valeurs dans un espace vectoriel.

PROPOSITION 23.4 Espace vectoriel de fonctions
Soit X un ensemble non vide et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit sur l'ensemble $\mathscr{F}(X,E)$ des fonctions définies sur X à valeurs dans E
– une addition +

$$+ : \begin{cases} \mathscr{F}(X,E)^2 & \longrightarrow & \mathscr{F}(X,E) \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \end{cases}$$

donnée par $\forall x \in X, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
– une multiplication par un scalaire ·

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathscr{F}(X,E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(X,E) \\ (\alpha, f) & \longmapsto & \alpha \cdot f \end{cases}$$

donnée par $\forall x \in X, \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$
Muni de ces lois, l'ensemble $(\mathscr{F}(X,E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est la fonction identiquement nulle sur X à valeurs dans E : $0_{\mathscr{F}(X,E)} : \begin{cases} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E \end{cases}$

Démonstration *Les vérifications sont immédiates.*

Attention 23.5 Attention au sens des opérations + et . dans les définitions ci-dessus :

Addition dans $\mathscr{F}(X,E)$ → $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ← Addition dans E

Multiplication par un scalaire dans $\mathscr{F}(X,E)$ → $(\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$ ← Multiplication par un scalaire dans E

En appliquant ce résultat avec $X = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{K}$, on obtient :

COROLLAIRE 23.5 Suites à coefficients dans $\mathbb{K}$
Notons $\mathscr{S}(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$. Avec les lois

$$+ : \begin{cases} \mathscr{S}(\mathbb{K}) \times \mathscr{S}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{K}) \\ ((u_n),(v_n)) & \longmapsto & (u_n + v_n) \end{cases}$$

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathscr{S}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{K}) \\ (\lambda,(u_n)) & \longmapsto & (\lambda \cdot u_n) \end{cases}$$

$(\mathscr{S}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Son vecteur nul est la suite constante nulle.

23.1.4 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Les quatre axiomes donnés dans la définition 23.1 ne traduisent à priori pas toutes les règles de calculs qu'on est habitué à utiliser quand on manipule des vecteurs. On va montrer que ces règles découlent bien de ces quatre axiomes.

PROPOSITION 23.6 ♡ Règles de calcul dans un espace vectoriel
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous scalaires $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$ et pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a

1. $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
2. $(-1) \cdot x = -x$
3. $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$
4. $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$
5. $\lambda(x-y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$
6. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
7. $\lambda \cdot x = 0_E \iff [\lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E]$

Démonstration ♡

Les démonstrations de ces règles vous sembleront sans doute un peu arides dans un premier temps. Il est important de bien les travailler jusqu'à être capable de les refaire seul.

1.

$$\begin{aligned} 0_E + 0_K x &= 0_K x \text{ car } (E,+) \text{ est un groupe} \\ &= (0_K + 0_K)\, x \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps} \\ &= 0_K x + 0_K x \text{ d'après l'axiome } 4 \end{aligned}$$

D'où $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ en soustrayant $0_K x$ à droite des deux membres de cette égalité.

2. *On a :*

$$\begin{aligned} x + (-1)\,x &= 1.x + (-1)\,x \text{ grâce à l'axiome } d \\ &= (1 + (-1))\,x \text{ grâce à l'axiome } 1 \\ &= 0_K x \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps} \\ &= 0_E \text{ d'après le point précédent} \end{aligned}$$

donc $(-1)\,x$ est l'opposé de x. On peut alors écrire :

$-x = (-1)\,x$.

3 *on a :*

$$\begin{aligned}(-\lambda)\,x &= (-1.\lambda)\,x \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps}\\ &= (-1)\,(\lambda x) \text{ d'après l'axiome } \textbf{2}\\ &= -\lambda.x \text{ d'après le point précédent}\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\,x &= \left(\alpha+(-\beta)\right)x \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps}\\ &= \alpha x + (-\beta x) \text{ d'après l'axiome } \textbf{1}\\ &= \alpha x - \beta x \text{ d'après le point précédent}\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}\lambda\,(x-y) &= \lambda\left(x+(-y)\right) \text{ car } (\mathrm{E},+) \text{ est un groupe}\\ &= \lambda x + \lambda(-y) \text{ d'après l'axiome } \textbf{3}\\ &= \lambda x + \lambda(-1y) \text{ d'après le second point}\\ &= \lambda x + (\lambda.(-1))\,y \text{ d'après l'axiome } \textbf{2}\\ &= \lambda x + (-\lambda)\,y \text{ car } \mathbb{K} \text{ est un corps}\\ &= \lambda x - \lambda y \text{ d'après le point 3}\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}\lambda 0_{\mathrm{E}} &= \lambda\,(x-x) \text{ car } (\mathrm{E},+) \text{ est un groupe}\\ &= \lambda x + \lambda\,(-x) \text{ d'après l'axiome } \textbf{1}\\ &= \lambda x - \lambda x \text{ d'après le point 3}\\ &= 0_{\mathrm{E}} \text{ car } (\mathrm{E},+) \text{ est un groupe}\end{aligned}$$

7 *Supposons que $\lambda x = 0_{\mathrm{E}}$. Si $\lambda = 0_{\mathrm{K}}$ alors d'après le point* 1, $\lambda x = 0_{\mathrm{E}}$. *Sinon, si $\lambda \neq 0_{\mathrm{K}}$ alors comme $\mathbb{K}$ est un corps, λ^{-1} existe et*

$$x = 1.x = \left(\lambda.\lambda^{-1}\right)x = \lambda^{-1}\,(\lambda x) = \lambda^{-1} 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$$

et donc $x = 0_{\mathrm{E}}$. La réciproque est évidente.

23.2 Sous-espace vectoriel

23.2.1 Définitions

DÉFINITION 23.2 ♡ **Combinaison linéaire**

- Soient $x_1,\dots,x_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathrm{E},+,.)$. On appelle *combinaison linéaire de ces n vecteurs* tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ de la forme
$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot x_k$$
où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
- Si A est une partie de E, on appelle *combinaison linéaire d'éléments de* A toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de A.

Remarque 23.4 On montre par une récurrence facile qu'une combinaison linéaire de vecteurs de E est encore un vecteur de E.

Exemple 23.6

- Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos x + 2\sin x\end{array}\right.$. C'est une combinaison linéaire des deux fonctions cos et sin de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et c'est un encore un élément de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Soient $u = (1,2)$ et $v = (-1,1)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Alors la combinaison linéaire $2u - 3v = 2(1,2) - 3(-1,1) = (5,1)$ est encore un élément de $\mathbb{R}^2$.
- Soit $\omega > 0$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y'' + \omega y = 0$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions $\varphi_1 : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos(\omega x)\end{array}\right.$ et $\varphi_2 : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sin(\omega x)\end{array}\right.$.

DÉFINITION 23.3 ♡♡♡ **Sous-espace vectoriel**

Soient $(\mathrm{E},+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, une partie de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E si et seulement si

1 La partie F est non vide : $\mathrm{F} \neq \varnothing$,

2 la partie F vérifie :
$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathrm{F}$$

Remarque 23.5

- Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$. En effet, comme F est non vide, il existe $x \in \mathrm{F}$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $x - x = 1.x - 1.x = 0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$.

– En partant de second axiome de la définition d'un sous-espace vectoriel et au moyen d'une récurrence, on montre sans peine que F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de vecteurs de F est encore un vecteur de F.
– Dans tout espace vectoriel E, il y a toujours deux sous-espaces vectoriels importants, $F = \{0_E\}$ et $F = E$.
– Dans l'idée de faire le parallèle avec les groupes, on aurait pu définir la notion de sous-espace vectoriel de la façon suivante : F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est un sous-groupe de E stable pour la multiplication par tout scalaire.

PLAN 23.1 : Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

1. *On montre que* $F \subset E$.
2. *On montre que* $F \neq \varnothing$ *(la plupart du temps on montre que* $0 \in A$*).*
3. *Soit* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ *et soit* $(x, y) \in F^2$. *Montrons que* $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$.

On étudiera avec attention les exemples suivants :

Exemple 23.7

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. De même, l'ensemble des nombres imaginaires purs $i\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$. En effet :
   1. $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
   2. $i\mathbb{R}$ est non vide...
   3. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $ix, iy \in i\mathbb{R}$ alors $\alpha ix + \beta iy = i \underbrace{(\alpha x + \beta y)}_{\in \mathbb{R}} \in i\mathbb{R}$.
2. Soit u un vecteur non nul du plan (ou de l'espace). L'ensemble F de tous les vecteurs du plan colinéaires à $\overrightarrow{u}$, $F = \{\lambda \overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel du plan (ou de l'espace). C'est la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{u}$:
   1. Il est clair que F est un sous-ensemble du plan (ou de l'espace).
   2. F est non vide, il contient par exemple u.
   3. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $\lambda u, \lambda' u \in F$ alors $\alpha(\lambda u) + \beta(\lambda' u) = (\alpha\lambda + \beta\lambda') u \in F$.
3. Soient u et v deux vecteurs non colinéaires de l'espace. L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires de u et v, $F = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace :
   1. Il est clair que F est un sous-ensemble de l'espace.
   2. F est non vide, il contient u, v,...
   3. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $au + bv, a'u + b'v \in F$ alors $\alpha(au + bv) + \beta(a'u + b'v) = (a\alpha + a'\beta) u + (b\alpha + b'\beta) v \in F$.

   Si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, F est le plan vectoriel engendré par u et v.
4. L'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ solutions de $2x + y - z = 0$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
   1. Il est clair que $F \subset \mathbb{R}^3$.
   2. F est non vide, le triplet $(0,0,0)$ est solution de $2x + y - z = 0$.
   3. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $u = (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ alors $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')$ est élément de F. En effet $u = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$ et
   $$2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') - (\alpha z + \beta z') = \alpha \underbrace{(2x + y - z)}_{=0 \text{ car } (x,y,z)\in F} + \beta \underbrace{(2x' + y' - z')}_{=0 \text{ car } (x',y',z')\in F} = 0.$$
   On remarque que F est un plan vectoriel.
5. L'ensemble $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet :
   1. Il est clair que $F \subset E$.
   2. Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ $(\cos, \sin, \exp, ...)$ donc F est non vide.
   3. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ alors par le théorème d'opération sur les fonctions continues, $\alpha f + \beta g$ est encore continue sur $\mathbb{R}$. Donc F est stable par combinaison linéaire.

   On montre de la même façon que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles $\mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
6. Soit F l'ensemble des fonctions définies sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui s'annulent en 0. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}([-1,1], \mathbb{C}), +, .)$.
   1. Il est clair que $F \subset \mathscr{F}([-1,1], \mathbb{C})$.

2. F est non vide. Par exemple, la fonction identiquement nulle sur $[-1,1]$ est élément de F.
3. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ et si $f, g \in F$ alors $(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = 0$ donc $\alpha f + \beta g \in F$.

7. En reprenant le troisième item de l'exemple 23.6, l'ensemble F des solutions de $y'' + \omega y = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. En effet :
   1. Toute solution de cette équation est (deux fois) dérivable et donc continue. Donc $F \subset E$.
   2. F est non vide car l'équation différentielle admet des solutions, par exemple la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
   3. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. Alors $(\alpha f + \beta g)'' + \omega(\alpha f + \beta g) = \alpha \underbrace{(f'' + \omega f)}_{=0 \text{ car } f \in F} + \beta \underbrace{(g'' + \omega g)}_{=0 \text{ car } g \in F} = 0$ donc $\alpha f + \beta g \in F$.
8. L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Cela se prouve de la même façon que l'item 6. précédent.

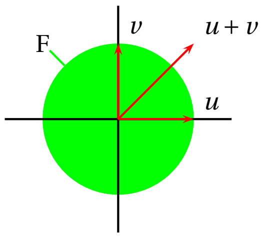
Remarque 23.6 On verra dans l'exemple 23.10 page 852 comment traiter les exemples 1., 2., 3., 4., 7. et 8. plus rapidement.

PLAN 23.2 : **Pour montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E**

On peut montrer au choix que
- $F \not\subset E$.
- $F = \varnothing$.
- $0_E \notin F$.
- F *n'est pas stable par combinaison linéaire : il existe* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ *et* $(x,y) \in F^2$ *tels que* $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \notin F$.

Exemple 23.8

1. L'ensemble $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ car il existe des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et qui ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $F = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = -1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il est vide...
3. L'ensemble $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car le vecteur nul de E qui est la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ n'est pas élément de F.
4. L'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas stable par combinaison linéaire : soient $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$. On vérifie facilement que $u, v \in F$. Par contre $u + v = (1,1)$ et $\|u+v\|^2 = 2 > 1$ donc $u + v \notin F$.



PROPOSITION 23.7 **Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel**
Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$, une partie *non vide* de E. On a équivalence entre les deux propositions suivantes.
1. La partie F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.
2. Muni des lois de E restreintes à F, $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration *Soient* $(x,y) \in F^2$ *et* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.
- *On vérifie que* + *définit une loi interne sur* E, $x + y = 1.x + 1.y \in F$ *car* F *est stable par combinaison linéaire.*
- *De même,* . *définit une loi externe sur* F. $\alpha.x = \alpha.x + 0.y \in F$ *car* F *est stable par combinaison linéaire.*
- *Les axiomes d'un espace vectoriel sont vérifiés dans* F *car ils sont vérifiés dans* E

La réciproque est facile.

PLAN 23.3 : **Pour montrer que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel...**

... il suffit de montrer que F *est un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *dans lequel il est contenu.*

Remarque 23.7 Cette dernière proposition permet d'économiser beaucoup de travail quand on doit montrer qu'un triplet $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Plutôt que de vérifier tous les axiomes définissant un espace vectoriel, on cherche si F n'est pas une partie d'un espace vectoriel E (souvent bien connu) puis on vérifie que c'est un sous-espace vectoriel de E.

23.2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels

PROPOSITION 23.8 **Une intersection de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel**
Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration *Soit $i\in I$, puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E, $0_E\in F_i$ et donc $0_E\in\bigcap_{i\in I}F_i$. Soient $(x,y)\in \bigcap_{i\in I} F_i^{\,2}$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$. Montrons que $\alpha.x+\beta.y\in\bigcap_{i\in I}F_i$. Soit $i\in I$, comme F_i est un sous-espace vectoriel de E et que $x,y\in F_i$, $\alpha.x+\beta.y\in F_i$ ce qui montre que $\alpha.x+\beta.y\in\bigcap_{i\in I}F_i$.*

Exemple 23.9
- L'intersection de deux droites vectorielles de l'espace $\mathbb{R}^3$ dirigées par des vecteurs non colinéaires est égale au singleton $0_{\mathbb{R}^3}=\{(0,0,0)\}$ qui est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- L'intersection de deux plans vectoriels dans l'espace est une droite vectorielle si ces deux plans ne sont pas confondus.
- Dans $\mathscr{S}(R)$, en notant

$$F=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n) \text{ est convergente}\right\} \text{ et } G=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n) \text{ géométrique de raison } r\right\}$$

où $r\in\mathbb{R}$. Alors

$$F\cap G=\begin{cases}F \text{ si } r\in\,]-1,1]\\ \{(0)\} \text{ sinon}\end{cases}$$

qui sont dans les deux cas des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

DÉFINITION - PROPOSITION 23.4 ♡♡♡ **Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel**
Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par* A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. On le note $\mathrm{V}ect(A)$ et on a :

$$\mathrm{V}ect(A)=\bigcap_{F\in\mathscr{F}_A}F$$

où $\mathscr{F}_A$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A.

Démonstration *D'après la proposition 23.8, $\bigcap_{F\in\mathscr{F}_A}F$ est un sous-espace vectoriel de E. Il contient de plus A et par construction, il est inclus dans tout sous-espace vectoriel de E contenant A. On a donc $\mathrm{V}ect(A)=\bigcap_{F\in\mathscr{F}_A}F$.*

Remarque 23.8
- A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\mathrm{V}ect(A)=A$.
- $\mathrm{V}ect(\varnothing)=\{0\}$.

PROPOSITION 23.9 ♡♡♡ **Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie**
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ une partie finie à n éléments de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A :

$$\boxed{\mathrm{V}ect(A)=\left\{\lambda_1\cdot x_1+\ldots+\lambda_n\cdot x_n \mid (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n\right\}}$$

Démonstration *Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de A. L'ensemble $\mathscr{A}$ est non vide et stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $\mathscr{A}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. Pour ce faire, il suffit de montrer que si $\mathscr{B}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A alors $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$. Soit $x\in\mathscr{A}$. Par définition de $\mathscr{A}$, il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ et $x_1,\dots,x_n\in A$ tels que $x=\alpha_1x_1+\ldots\alpha_n.x_n$. Comme $A\subset\mathscr{B}$, il vient que $x_1,\dots,x_n\in\mathscr{B}$ et comme $\mathscr{B}$ est un sous-espace vectoriel de E, il est stable par combinaison linéaire et donc $x=\alpha_1x_1+\ldots\alpha_n.x_n\in B$. Ce qui prouve que $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$ et termine la démonstration.*

Remarque 23.9
- Si $u\in E\setminus\{0\}$, la droite vectorielle engendrée par u est le sous-espace vectoriel engendré par u : $\mathrm{V}ect(u)=\{\lambda\cdot u\mid\lambda\in\mathbb{K}\}$.
- Si $u,v\in E\setminus\{0\}$, le plan vectoriel engendré par u et v est le sous-espace vectoriel engendré par $\{u,v\}$: $\mathrm{V}ect(\{u,v\})=\left\{\alpha\cdot u+\beta\cdot v\mid(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\right\}$.

PLAN 23.4 : Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

Il suffit de décrire F sous forme d'un $\mathrm{V}ect$.

Exemple 23.10

On reprend les items 1., 2., 3., 4., 7. et 8. de l'exemple 23.7 page 849.

- Les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ donnés par $G=\mathbb{R}$ et $F=i\mathbb{R}$ s'écrivent $G=\mathrm{Vect}(1)$ et $G=\mathrm{Vect}(i)$ donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$.
- Si u est un vecteur du plan (ou de l'espace) alors $F=\{\lambda u \mid \lambda\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(u)$ donc F est un sous-espace vectoriel du plan (ou de l'espace).
- Si u et v sont des vecteurs du plan (ou de l'espace) alors $F=\{\alpha u+\beta v \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(u,v)$ donc F est un sous-espace vectoriel du plan (ou de l'espace).
- On a $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0\}=\{(x,y,2x+y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,2)+y(0,1,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,0,2),(0,1,1))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $(1,0,2),(0,1,1)$.
- Soit F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+\omega y=0$ avec $\omega\in\mathbb{R}^+$. Alors après avoir résolu l'équation, on trouve que $F=\mathrm{Vect}(x\mapsto\cos\omega x, x\mapsto\sin\omega x)$. Ainsi F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.
- On a $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}=\{(X-1)(aX^2+bX+c) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}=\{aX^2(X-1)+bX(X-1)+c(X-1) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(X^2(X-1),X(X-1),(X-1))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

La remarque suivante permet de fixer les choses dans l'espace :

Remarque 23.10 ♡♡♡ Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soit $\mathscr{F}=\{u,v,w\}$ où u, v et $w\in\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F})=\begin{cases}\bullet \text{ La droite dirigée par } u \text{ si les trois vecteurs sont colinéaires}\\ \bullet \text{ Le plan engendré par } u \text{ et } v \text{ si les trois vecteurs sont coplanaires mais tels}\\ \quad\text{que deux d'entre eux, } u \text{ et } v \text{ par exemple, ne sont pas colinéaires}\\ \bullet \text{ L'espace } \mathbb{R}^3 \text{ si les trois vecteurs ne sont pas coplanaires}\end{cases}$$

Donc les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :

1. L'ensemble réduit au vecteur nul $\{0\}$
2. Les droites passant pas 0.
3. Les plans passant par 0.
4. L'espace tout entier.

BIO 20 Giuseppe Peano, né le 27 août 1858 à Spinetta di Cuneo et mort le 20 avril 1932 à Turin.



Giuseppe Peano a été un des premiers mathématiciens à comprendre la nécessité de l'axiomatisation des mathématiques. Celles-ci doivent reposer sur quelques règles simples desquelles on fait découler les théorèmes après avoir défini avec précision les objets utilisés. Grâce à cette démarche et à sa grande rigueur, il mit en évidence de nombreuses erreurs dans les traités mathématiques alors existants. Il comprit aussi l'importance de la théorie des ensembles et de la logique pour exprimer les mathématiques et généralisa au reste des mathématiques l'usage des symboles issus de ces théories . Il fut le premier à utiliser les symboles d'union et d'intersection.
Giuseppe Peano s'intéressa au début de sa carrière au calcul infinitésimal qu'il participe à formaliser et à rendre plus rigoureux. À partir de 1887, son travail se porte sur la construction formelle des mathématiques et il définit de manière axiomatique l'ensemble des entiers naturels. Ce système d'axiomes porte maintenant son nom. Grâce aux travaux de Grassmann, il axiomatise la notion d'espace vectoriel.
À partir de 1900, il s'attelle à deux grands chantiers. Le premier consiste en la construction d'un langage international qu'il baptisa « Interlingua » basé sur un latin simplifié et augmenté de vocabulaire anglais, allemand et français. Le second est l'écriture d'une encyclopédie mathématique « Formulario Mathematico » utilisant le formalisme qu'il a inventé et qui vise à contenir toutes les mathématiques alors connues. Notons que Peano, excellent enseignant au début de sa carrière finit sa vie piètre pédagogue, ses cours étant rendu complètement obscurs par ses notations.

⚠ *Attention 23.11* Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, ce n'est pas forcément le cas de $F\cup G$ et jamais le cas de $F\setminus G$, $G\setminus F$ et $E\setminus F$ car ils ne contiennent pas le vecteur nul. Par exemple :

- Deux droites vectorielles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ du plan $\mathbb{R}^2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ mais ce n'est pas le cas de leur réunion à moins que ces deux droites ne soient confondues. En effet, si ces deux droites ne sont pas confondues, la somme d'un vecteur non nul u_1 de la première droite et d'un vecteur non nul u_2 de la seconde n'est un vecteur d'aucune des deux droites et n'appartient donc pas à leur réunion.

– La partie $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ de $E = \mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de E mais ce n'est pas le cas de $E \setminus F$. En effet, les polynômes de $E \setminus F$ sont ceux qui ne s'annulent pas en 0 donc $E \setminus F$ ne contient pas le polynôme nul.

23.3 Somme de sous-espaces vectoriels

23.3.1 Définitions

DÉFINITION - PROPOSITION 23.5 ♡♡♡ **Somme de deux sous-espaces vectoriels**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. On appelle *somme de* F *et* G et on note $F+G$ le sous-espace vectoriel de E donné par

$$F+G = \left\{x+y \mid (x,y) \in F \times G\right\}$$

Démonstration *Le sous-ensemble* $F+G$ *est bien un sous-espace vectoriel de* E*. En effet,* $F+G \subset E$ *car* E *est stable pour l'addition. De plus,* $F+G$ *est non vide car* F *et* G *le sont. Enfin, si* $u = x+y \in F+G$ *et* $u' = x'+y' \in F+G$ *avec* $x,x' \in F$ *et* $y,y' \in G$ *alors, pour* $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$*,*

$$\alpha u + \beta u' = \underbrace{\alpha x + \beta x'}_{\in F} + \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{\in G} \in F+G$$

car F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels.*

PROPOSITION 23.10 ♡♡♡ **La somme de deux sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. Alors $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Démonstration *On a prouvé dans la remarque précédente que* $F+G$ *est un sous-espace vectoriel de* E*. Il contient* F *et* G *car* 0_E *est élément de* F *et* G *et donc* $F = F + 0_E \subset F+G$ *et* $G = 0_E + G \subset F+G$*. De plus, si on considère un sous-espace* H *de* E *qui contient* $F \cup G$ *alors montrons que* $F+G \subset H$*. Soient* $x+y \in F+G$ *avec* $x \in F$ *et* $y \in G$*. Comme* $F \cup G \subset H$*, on a aussi* $x,y \in H$ *et comme* H *est un sous-espace vectoriel, il s'ensuit que* $x+y \in H$*. Donc* $F+G \subset H$ *et* $F+G$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* F *et* G*.*

Exemple 23.12
– Soient deux droites vectorielles $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ du plan euclidien $\mathscr{P}$. On a : $\mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2 = \mathscr{P}$ si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont dirigées par des vecteurs non colinéaires et $\mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2 = \mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$ sinon.
– Soient $\mathscr{D}$ une droite vectorielle de l'espace $\mathscr{V}$ dirigée par un vecteur u et $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de l'espace. On a : $\mathscr{D} + \mathscr{P} = \mathscr{V}$ si $u \notin \mathscr{P}$ et $\mathscr{D} + \mathscr{P} = \mathscr{P}$ sinon (la droite est alors incluse dans le plan $\mathscr{P}$).
– Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ soient $F = \mathrm{V}ect(\sin)$ et $G = \mathrm{V}ect(exp)$ alors :

$$F+G = \mathrm{V}ect(\sin,\exp) = \left\{x \mapsto \alpha \sin(x) + \beta \exp(x) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$$

La proposition suivante est bien pratique pour calculer des sommes :

PROPOSITION 23.11 ♡ **Calcul pratique d'une somme de** $\mathrm{V}ect$
Soient A et B deux parties d'un K-espace vectoriel E alors

$$\boxed{\mathrm{V}ect(A) + \mathrm{V}ect(B) = \mathrm{V}ect(A \cup B)}$$

Démonstration *Voir l'exercice 23.26 page 874.*

Exemple 23.13 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les parties $F = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminons le sous-espace $F+G$. On a $F = \mathrm{V}ect(1,0,0)$ et $G = \mathrm{V}ect(1,1,0)$ donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. De plus $F+G = \mathrm{V}ect((1,0,0),(1,1,0))$ et on reconnait que $F+G$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0,0)$ et $(1,1,0)$.

23.3.2 Somme directe

DÉFINITION 23.6 ♡♡♡ **Somme directe**
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en *somme directe* si $F \cap G = \{0\}$. On note alors $F \oplus G$ leur somme.

THÉORÈME 23.12 **Caractérisation de la somme directe**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. On a équivalence entre :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall x \in F+G, \quad \exists\,!(x_1, x_2) \in F \times G : \quad x = x_1 + x_2$ (c'est-à-dire, *tout* vecteur de F + G se décompose de manière *unique* comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

Démonstration

$\Rightarrow$ *Supposons que* F *et* G *soient en somme directe et soit* $x \in F+G$. *Par définition, il existe* $x_1 \in F$ *et* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *Supposons qu'il existe* $x_1' \in F$ *et* $x_2' \in G$ *tels qu'on ait encore* $x = x_1' + x_2'$. *Comme* $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$, *on a l'égalité :* $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$. *Notons* y *ce vecteur. Comme* F_1 *et* F_2 *sont des sous-espaces vectoriels de* E, $y = x_1 - x_1' \in F_1$ *et* $y = x_2' - x_2 \in F_2$. *Par conséquent* $y \in F_1 \cap F_2$. *Mais* F_1 *et* F_2 *étant en somme directe, on a* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ *donc* $y = 0$. *Par conséquent,* $x_1 = x_1'$ *et* $x_2 = x_2'$ *et l'unicité est prouvée.*

$\Leftarrow$ *Prouvons maintenant la réciproque. Soit* $x \in F \cap G$. *Il existe alors deux couples de* $F \times G$ *permettant de décomposer* x *en un vecteur de* F *et un vecteur de* G *:* $(x, 0)$ *et* $(0, x)$. *Par hypothèse, elles sont égales :* $(x, 0) = (0, x)$. *Par conséquent* $x = 0$ *et les sous-espaces* F *et* G *sont en somme directe.*

PLAN 23.5 : Pour montrer que F et G sont en somme directe

1. *Soit* $x \in F \cap G$.
2. $x \in F$ *donc ...*
3. $x \in G$ *donc ...*
4. *... alors* $x = 0$.

Exemple 23.14

– Dans $\mathbb{C}$, les sous-espace vectoriels $F = \mathbb{R}$ et $G = i\mathbb{R}$ sont en somme directe :
  1. Soit $x \in F \cap G$.
  2. $x \in F$ donc x est réel.
  3. $x \in G$ est imaginaire pur.
  4. Le seul complexe à la fois réel et imaginaire pur est 0 donc $x = 0$.

– Dans $\mathbb{R}^3$, les droites vectorielles $F = \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \end{cases}$ et $G = \begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ -y+z &= 0 \end{cases}$ sont en somme directe.
  - Montrons que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ -y+z &= 0 \end{cases} \iff x = 0 \quad \text{et} \quad y = z$$

  donc

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0 \quad \text{et} \quad 2x-y+z = 0\right\} = \left\{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(0, 1, 1).$$

  - On montre de la même façon que $G = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$ et donc G est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
  - Ces deux droites vectorielles ne sont pas engendrées par des vecteurs colinéaires. Elles ne se coupent donc qu'en $0_{\mathbb{R}^3}$.

– Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $F = \left\{f \in E \mid f(0) = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1)$. On a montré dans l'item 5. de l'exemple 23.7 page 849 que F est un sous-espace vectoriel de E. Comme G est décrit par un Vect, c'est un sous-espace vectoriel de E. Remarquons que G est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  1. Soit $f \in F \cap G$.
  2. $f \in F$ donc $f(0) = 0$.
  3. $f \in G$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto a$.
  4. Mais $a = f(0) = 0$ donc $f = 0$.

– Toujours dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}(\cos)$ et $G = \mathrm{Vect}(\sin)$ sont en somme directe. Il est clair que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Montrons qu'ils sont en somme directe

1. Soit $f \in F \cap G$.
2. $f \in F$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \cos$.
3. $f \in G$ donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f = \beta \sin$.
4. et il vient que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cos x = \beta \sin x$ ce qui n'est possible que si $\alpha = \beta = 0$. En effet, comme précisé, l'égalité précédente est vraie pour tout réel x. En particulier, si $x = 0$, alors $\alpha = 0$ et si $x = \pi/2$, on trouve que $\beta = 0$. Finalement, $f = 0$.

23.3.3 Sous-espaces supplémentaires

DÉFINITION 23.7 **Sous-espaces supplémentaires**
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *supplémentaires* si et seulement si ils vérifient :

(H1) $E = F + G$

(H2) $F \cap G = \{0\}$

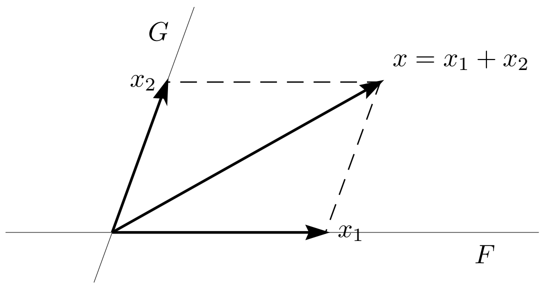


FIGURE 23.1 – Décomposition d'un vecteur suivant deux sous-espaces supplémentaires

L'intérêt de disposer d'espaces supplémentaires est donné par le théorème suivant. Il dit que si on dispose de deux sous-espaces supplémentaires F et G dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors tout vecteur de E peut être décomposé de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

THÉORÈME 23.13 **Caractérisation des sous-espaces supplémentaires**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. On a équivalence entre :

1. $E = F \oplus G$ (c'est-à-dire F et G sont supplémentaires).
2. $\forall x \in E, \quad \exists ! (x_1, x_2) \in F \times G : \quad x = x_1 + x_2$ (c'est-à-dire, tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

Démonstration

$\Rightarrow$ *Supposons que* F *et* G *sont supplémentaires. Soit* $x \in E$. *Comme* $E = F + G$, *il existe* $x_1 \in F$ *et* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *En appliquant la proposition 23.12, comme* F *et* G *sont en somme directe, cette décomposition est unique.*

$\Leftarrow$ *Réciproquement, si pour tout* $x \in E$, *il existe un unique couple* $(x_1, x_2) \in F \times G$ *tel que* $x = x_1 + x_2$ *alors on a nécessairement* $E = F + G$. *On peut de plus appliquer à nouveau la proposition 23.12 et affirmer que les deux sous-espaces* F *et* G *sont supplémentaires. On a ainsi montré que* $E = F \oplus G$.

PLAN 23.6 : Pour montrer que $F \oplus G = E$

1. *Montrons que la somme est directe :* *voir le plan 57 page 854.*
2. *Montrons que* $E = F + G$ *:* *Voir la remarque ci-dessous.*

Remarque 23.11 La partie souvent difficile dans ce plan est souvent de montrer que $E = F + G$. Dans ce chapitre, on utilisera une des deux techniques suivantes :

– Si on sait écrire F et G sous forme d'un Vect, $F = \mathrm{Vect}(A)$, $G = \mathrm{Vect}(B)$, on peut, grâce à la proposition 23.11, écrire $F + G = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) = \mathrm{Vect}(A \cup B)$. Reste alors à montrer que $\mathrm{Vect}(A \cup B) = E$.
– Si cette technique ne fonctionne pas, on utilise alors la définition : Soit $x \in E$. Posons $x_1 = \ldots$. Posons $x_2 = \ldots$. On a bien :

1. $x_1 \in F$.
2. $x_2 \in G$.
3. $x = x_1 + x_2$.

La difficulté de cette méthode consiste en la détermination de x_1 et x_2. On procède souvent ainsi. Dans la pratique, il est souvent facile de déterminer un des deux vecteurs x_1 ou x_2, supposons que ce soit x_1. On pose alors $x_2 = x - x_1$. Il suffit alors de vérifier que $x_2 \in G$.

– On verra au chapitre 24 que grâce à la formule de Grassmann (voir 24.19 page 907) on arrivera à traiter très simplement cette question dans le cas où on travaille avec des espaces vectoriels de « dimension finie ».

Exemple 23.15

– Dans $E = \mathbb{C}$, $F = \mathrm{V}ect(\{1\})$ et $G = \mathrm{V}ect(\{i\})$. On sait que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Si $x \in F \cap G$ alors x est à la fois réel et imaginaire pur donc $x = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.
2. $F + G = \mathrm{V}ect(1) + \mathrm{V}ect(i) = \mathrm{V}ect(1, i) = \mathbb{C}$ donc $E = F + G$.

On a montré que $E = F \oplus G$.

– Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ la droite F donnée par le système $\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{cases}$ et le plan G d'équation $z = 0$ sont supplémentaires. Comme $F = \mathrm{V}ect(0,1,1)$ et $G = \mathrm{V}ect((1,0,0),(0,1,0))$, F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E.

1. Si $(x, y, z) \in F \cap G$ alors (x, y, z) vérifie le système $\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$ et on trouve que $x = y = z = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$.
2. $F + G = \mathrm{V}ect(-4,1,-3) + \mathrm{V}ect((1,0,0),(0,1,0)) = \mathrm{V}ect((-4,1,-3),(1,0,0),(0,1,0)) = E$ car on vérifie, en utilisant par exemple le produit mixte, que ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires. Ils forment ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

On a montré que $E = F \oplus G$.

– Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $F = \{$ fonctions paires$\}$ et $G = \{$ fonctions impaires$\}$. On vérifie que F est un sous-espace vectoriel de E. F est non vide, il contient par exemple la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $f, g \in F$ alors, en utilisant la parité de f et g, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$$

donc $\alpha f + \beta g \in F$. On prouve de même que G est un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit $f \in F \cap G$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$ et donc $f = 0$. Alors $F \cap G = \{0\}$.
2. Soit $f \in E$. On cherche deux fonctions f_1 et f_2 telles que f_1 est paire, f_2 impaire et $f = f_1 + f_2$. Effectuons un raisonnement par analyse et synthèse.

   Analyse : Supposons que deux telles fonctions existent. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et que $f(-x) = f_1(x) - f_2(x)$. On tire de ces deux égalités que

   $$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

   Synthèse : Posons $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. On vérifie facilement que f_1 est paire, donc que $f_1 \in F$ et que f_2 est impaire, donc que $f_2 \in G$. On vérifie aussi que $f = f_1 + f_2$.

   Finalement, on a montré que $E = F + G$.

On a donc $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$. Que dire des fonctions exp, ch et sh ?

– Toujours dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax \mid a \in \mathbb{R}\}$. On vérifie facilement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Pour G, on peut remarque que $G = \mathrm{V}ect(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$.

1. Soit $f \in F \cap G$. Comme $f \in F$, $f(1) = 0$ et comme $f \in G$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto ax$. Alors $f(1) = a = 0$ et donc $f = 0$. On a montré que $F \cap G = \{0\}$.
2. Soit $f \in E$. S'il existe $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$ tels que $f = f_1 + f_2$ alors $f(1) = f_2(1)$. On est alors invité à poser $f_2 : x \mapsto f(1)\,x$. Il est clair que $f_2 \in G$. Posons $f_1 = f - f_2$. Il est clair que $f_1(1) = 0$ donc $f_1 \in F$. On a bien de plus $f = f_1 + f_2$. Donc $E = F + G$.

En conclusion $E = F \oplus G$.

23.4 Applications linéaires

Dans toute la suite $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

23.4.1 Définitions

DÉFINITION 23.8 ♡♡♡ **Application linéaire**

Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est *linéaire* si et seulement si :

1. $\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

(On dit aussi que f est un *morphisme d'espaces vectoriels*).

THÉORÈME 23.14 ♡♡♡ **Caractérisation des applications linéaires**

Soit $f : E \to F$. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \boxed{f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)}$$

Remarque 23.12

Si $f : E \to F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$. En effet $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$ donc par soustraction du vecteurs $f(0_E)$ des deux côtés de cette égalité, il vient $f(0_E) = 0_F$.

PLAN 23.7 : Pour montrer que $f : E \to F$ est linéaire

1. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $x, y \in E$.
2. *Montrons que* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$

PLAN 23.8 : Pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas linéaire

on peut :

1. *montrer que* $f(0_E) \neq 0_F$.
2. *ou trouver* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$ *tels que* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \neq \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$

DÉFINITION 23.9 **Forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire*.
- Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme* de E.
- Si $f : E \to F$ est bijective, on dit que f est un *isomorphisme de* E *sur* F.
- Si f est à la fois un endomorphisme de E et un isomorphisme, on dit que f est un *automorphisme de* E.

Exemple 23.16

- Les applications linéaires $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les applications $x \mapsto \lambda \cdot x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons qu'une telle application est linéaire. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ alors $f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Donc f est linéaire. Montrons que les applications f de cette forme sont les seules qui soient linéaires sur $\mathbb{R}$. Si f est linéaire sur $\mathbb{R}$ alors on doit avoir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x.1) = x f(1)$ donc f est de la forme indiquée avec $\lambda = f(1)$.
- Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque E, les homothéties $h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont linéaires. La preuve est identique à celle donnée dans l'item précédent.
- Les translations de vecteur non nul ne sont pas linéaires...En effet, dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, pour $u \in E$ tel que $u \neq 0$, considérons la translation $t_u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + u \end{array} \right.$. On a $t_u(0_E) = 0_E + u = u \neq 0_F$ donc t_u n'est pas linéaire.
- La dérivation $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & D(f) = f' \end{array} \right.$ est linéaire. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ alors $D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g)$.
- L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(x)\,dx \end{array} \right.$ est une forme linéaire. En effet, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ alors $\varphi(\alpha f + \beta g) = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx + \beta \int_0^1 g(x)\,dx = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$.

– L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+z) \end{cases}$ est linéaire. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')) &= \varphi(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z') \\ &= (\alpha x+\beta x'-(\alpha y+\beta y')+\alpha z+\beta z', 2(\alpha x+\beta x')+\alpha z+\beta z') \\ &= \alpha(x-y+z, 2x+z)+\beta(x'-y'+z', 2x'+z') \\ &= \alpha\varphi(x,y,z)+\beta\varphi(x',y',z'). \end{aligned}$$

23.4.2 Noyau, image d'une application linéaire

Rappels : Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$. Par définition :

1. L'image de E' par f est $f(\mathrm{E}') = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}'\}$
2. L'image réciproque de F' par f est $f^{-1}(\mathrm{F}') = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) \in \mathrm{F}'\}$

THÉORÈME 23.15 ♡♡♡ **Image directe et réciproque d'une application linéaire**

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ une application linéaire. Soient E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F alors :

1. $f(\mathrm{E}')$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. $f^{-1}(\mathrm{F}')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

1. *Comme $0_\mathrm{E} \in \mathrm{E}'$ et que f est linéaire, $0_\mathrm{F} = f(0_\mathrm{E}) \in f(\mathrm{E}')$ et $f(\mathrm{E}')$ est non vide. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ et $y, y' \in f(\mathrm{E}')$. Il existe $x, x' \in \mathrm{E}$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Montrons que $\alpha y + \alpha' y' \in f(\mathrm{E}')$. En utilisant la linéarité de f : $\alpha y + \alpha' y' = \alpha f(x) + \alpha' f(x') = f(\alpha x + \alpha' x')$ et donc $\alpha y + \alpha' y' \in f(\mathrm{E}')$. $f(\mathrm{E}')$ est donc bien un sous-espace vectoriel de F.*
2. *De même que précédemment, comme $0_\mathrm{F} \in \mathrm{F}'$ et que f est linéaire, $0_\mathrm{E} \in f^{-1}(\mathrm{F}')$. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ et $x, x' \in f^{-1}(\mathrm{F}')$. Il existe donc $y, y' \in \mathrm{F}'$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Donc, toujours par linéarité de f, $f(\alpha x + \alpha' x') = \alpha y + \alpha' y' \in \mathrm{F}'$. Il vient alors que $\alpha x + \alpha' x' \in f^{-1}(\mathrm{F}')$.*

DÉFINITION 23.10 ♡♡♡ **Noyau, Image**

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire. On appelle :

– *Noyau de f* et on note $\operatorname{Ker} f$ le sous-ensemble de E : $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = 0_\mathrm{F}\}$
– *Image de f* et on note $\operatorname{Im} f$ le sous-ensemble de F : $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}\}$.

THÉORÈME 23.16 ♡♡♡ $\operatorname{Ker} f$ **et** $\operatorname{Im} f$ **sont des sous-espaces vectoriels**

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire. Alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration *C'est un corollaire immédiat du théorème*

Exemple 23.17

– Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, posons $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y-z \end{cases}$. Alors, f est une forme linéaire et $\mathrm{F} = \operatorname{Ker} f$. On peut être ici plus précis : F est le plan vectoriel de vecteur normal $(1,1,-1)$.
– Soit $\mathrm{D} : \begin{cases} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{D}(f) = f' \end{cases}$. On a :
  - $\operatorname{Ker} \mathrm{D} = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \mid \mathrm{D}(f) = 0\}$ qui est égal à l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
  - $\operatorname{Im} \mathrm{D} = \{\mathrm{D}(f) \mid f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})\} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Autrement dit, D est surjective. Démontrons le. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ est un intervalle, f possède une primitive $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De plus F est dérivable et sa dérivée f est continue. Donc $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. On a bien $\mathrm{D}(\mathrm{F}) = f$ et D est bien surjective.

THÉORÈME 23.17 ♡♡♡ **Caractérisation des applications linéaires injectives**

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire. Alors :

f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_\mathrm{E}\}$

Démonstration
$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que f est injective. Rappelons que comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Ainsi 0_F admet donc comme antécédent 0_E. Mais f étant injective 0_E est le seul antécédent de 0_F. Il est alors clair que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.*
$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Par linéarité de f, on peut écrire que $f(x_1 - x_2) = 0_F$. Donc $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Il s'ensuit que $x_1 - x_2 = 0_E$ et donc que $x_1 = x_2$. f est donc injective.*

Exemple 23.18
- On reprend l'exemple précédent, $D : \begin{cases} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & D(f) = f' \end{cases}$ n'est par injective car son noyau contient d'autres fonctions que la fonction nulle, comme par exemple $f : x \to 1$.
- Soit $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{cases}$. On vérifie facilement que $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$ en résolvant le système $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ et donc f est injective.

Remarque 23.13 [Caractérisation des applications linéaires surjectives] Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Par définition, f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

23.4.3 Étude de $\mathscr{L}(E,F)$

Notation 23.19 On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

PROPOSITION 23.18 **$(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel**
Le triplet $(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, si $(f, g) \in (\mathscr{L}(E,F))^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire.

Démonstration *Comme F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathscr{F}(E,F)$ des fonctions de E dans F a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour montrer que $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il suffit alors de montrer que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$. Il est clair que $\mathscr{L}(E,F)$ est non vide car il contient par exemple l'application identiquement nulle $f : x \mapsto 0_F$. On vérifie de plus facilement que si $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire. Donc $\mathscr{L}(E,F)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.*

23.4.4 Étude de $\mathscr{L}(E)$

Notation 23.20 On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

COROLLAIRE 23.19 **$(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.**
Le triplet $(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration *C'est une conséquence directe de la proposition précédente car $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,F)$*

PROPOSITION 23.20 **La composée de deux applications linéaires est une application linéaire**
Soient $(E, +, \cdot)$, $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Démonstration *La preuve, facile, est laissée en exercice.*

DÉFINITION 23.11 **Identité de E**
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit la fonction *identité de* E par $\mathrm{I}d_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$.

DÉFINITION 23.12 **Homothétie de E**
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *homothétie vectorielle de rapport* $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $h_\lambda = \lambda \cdot \mathrm{I}d$, $h_\lambda : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{cases}$.

Remarque 23.14
- Ces deux applications sont linéaires et sont donc des endomorphismes de E.
- Toute homothétie vectorielle de rapport $\lambda \neq 0$ est injective.

PROPOSITION 23.21 **$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire**
Le triplet $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire (généralement non commutatif).

Démonstration *On vérifie facilement que $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ vérifie les axiomes d'un anneau unitaire.*

23.4.5 Étude de GL(E)

Notation 23.21 On note GL(E) l'ensemble des automorphismes de E.

PROPOSITION 23.22 ♡ **L'inverse d'une application linéaire bijective est linéaire**
Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ un isomorphisme entre les espaces vectoriels E et F alors $f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ (qui existe car f est bijective) est aussi linéaire, c'est-à-dire $f^{-1} \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$.

Démonstration *Soient $x, x' \in \mathrm{E}$ et $y, y' \in \mathrm{F}$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. On a :*

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha y + \alpha' y') &= f^{-1}(\alpha f(x) + \alpha' f(x')) \\ &= f^{-1}(f(\alpha x + \alpha' x')) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha x + \alpha' x' \\ &= \alpha f^{-1}(y) + \alpha' f^{-1}(y') \end{aligned}$$

et f^{-1} est bien linéaire.

COROLLAIRE 23.23 ♡ $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$ **est un groupe**
Le couple $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$ est un groupe (en général non commutatif) d'élément neutre $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$. On l'appelle *groupe linéaire de* E.

Démonstration *En utilisant la propriété précédente, on vérifie facilement que GL(E) vérifie les axiomes d'un groupe.*

Remarque 23.15 Pour prouver qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est bijective on utilise souvent la propriété suivante f est bijective si et seulement s'il existe $g : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$. Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Exemple 23.22 Soient un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant : $u^3 + u^2 + 2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} = 0$. Montrons que $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et déterminons son inverse u^{-1}. En utilisant la linéarité de u, l'égalité se factorise en $u \circ \left[-\frac{1}{2}\left(u^2 + u\right)\right] = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ou encore $-\frac{1}{2}\left(u^2 + u\right) \circ u = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Donc u est inversible et $u^{-1} = -\frac{1}{2}\left(u^2 + u\right)$.

23.5 Équations linéaires

23.5.1 Définitions

On va expliquer dans cette section que l'ensemble des solutions d'un système linéaire ou d'une équation différentielle linéaire sont équipés d'une même structure.

DÉFINITION 23.13 **Équations linéaires**
On appelle *équation linéaire* une équation de la forme $u(x) = b$ où :
- u est une application linéaire définie entre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F : $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
- b est un vecteur de F appelé *second membre de l'équation*.
- L'inconnue x est à valeurs dans E.

Exemple 23.23
- Soient $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$, $\mathrm{F} = \mathbb{K}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_m)$. Soit

$$u : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow \quad \mathrm{F} \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alors u est linéaire et l'équation $u(x) = b$ est équivalente au système d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

– Soient $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a, b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \varphi & \longmapsto & a\varphi' + b\varphi \end{array} \right. .$$

Soit $c \in F$. L'équation linéaire $\theta(\varphi) = c$ d'inconnue $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une équation différentielle du premier degré.

– Soient $E = \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ et

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \varphi & \longmapsto & a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi \end{array} \right.$$

Soit $d \in F$. L'équation linéaire $\theta(\varphi) = c$ d'inconnue $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une équation différentielle du second degré à coefficients constants.

23.5.2 Structure de l'ensemble des solutions

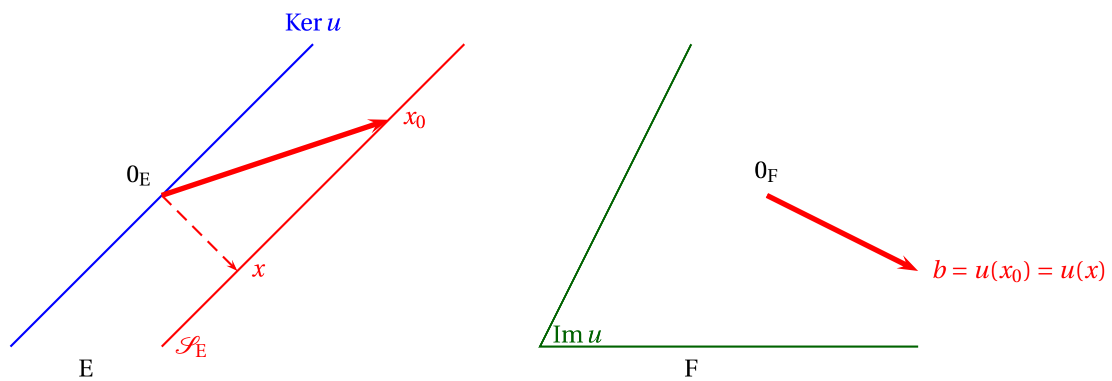


FIGURE 23.2 – Équation $u(x) = b$

PROPOSITION 23.24 Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre : $u(x) = 0$. On a :
– $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E (et donc $\mathscr{S}_0$ est non vide !).
– Si $S \neq \varnothing$ et si $x_0 \in S$ alors $S = \{x_0 + h \mid h \in S_0\} = x_0 + S_0$

Démonstration *L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est le noyau de u, c'est donc un sous-espace vectoriel de E d'après le théorème 23.16 page 858. Soit $x_0 \in S$, c'est-à-dire un élément x_0 de E tel que $u(x_0) = b$. Montrons que $S = \{x_0 + h \mid h \in S_0\}$. Pour ce faire, effectuons un raisonnement par double inclusion :*
$\boxed{\subset}$ *Soit $x \in S$. Alors $u(x - x_0) = u(x) - u(x_0) = b - b = 0$. Donc $x - x_0 = h \in S_0$ et $x = x_0 + h$ avec $h \in S_0$ et $x \in x_0 + S_0$.*
$\boxed{\supset}$ *Soit $h \in S_0$. On a $u(x_0 + h) = u(x_0) + u(h) = b$ et donc $x_0 + h \in S$.*

Remarque 23.16 Autrement dit, toute solution d'une équation linéaire est la somme d'une solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation linéaire. Les théorèmes 5.6 page 202 et 5.16 page 213 du chapitre 5 sont des cas particuliers de ce théorème. On retrouvera ce théorème dans le cas des systèmes linéaires au chapitre 25 section 25.11, proposition 25.56 page 981.

23.6 Projecteurs et symétries

E désigne là encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

23.6.1 Projecteurs

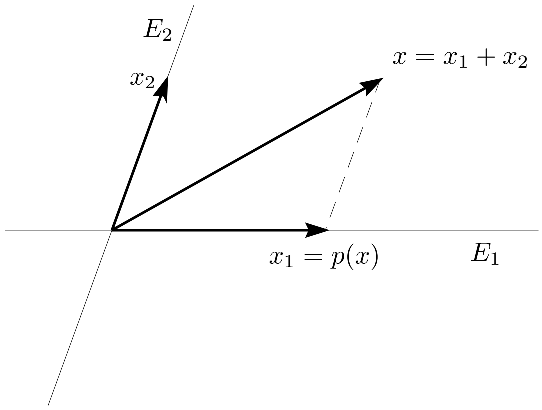


FIGURE 23.3 – Projection sur E_1 parallèlement à E_2

DÉFINITION 23.14 ♡ **Projecteurs**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$. Pour tout $x \in E$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit

$$p : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 \end{cases}$$

L'application p est bien définie et est appelée *projecteur de* E *sur* E_1 *parallèlement à* E_2.

PROPOSITION 23.25 ♡ **Propriétés des projecteurs**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$ et soit p le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 alors :

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $\operatorname{Ker} p = E_2$.
3. $\operatorname{Im} p = E_1$.
4. $p(x) = x \iff x \in E_1$ (E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p).

Démonstration

1. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ *et* $x' = x'_1 + x'_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ *ainsi que deux scalaires* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. *On a :*

$$\alpha x + \alpha' x' = \underbrace{\left(\alpha x_1 + \alpha' x'_1\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\left(\alpha x_2 + \alpha' x'_2\right)}_{\in E_2} \in E_1 \oplus E_2.$$

et :

$$\begin{aligned} p\left(\alpha x + \alpha' x'\right) &= \alpha x_1 + \alpha' x'_1 \\ &= \alpha p(x) + \alpha' p\left(x'\right) \end{aligned}$$

ce qui prouve que p *est linéaire.*

2. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*

$$p(x) = 0 \iff x_1 = 0 \iff x = x_2 \iff x \in E_2.$$

Par conséquent : $\operatorname{Ker} p = E_2$.

3. *Soient* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Im} p &\iff \exists x' = x'_1 + x'_2 \in E_1 \oplus E_2 : \quad x = p\left(x'\right) \\ &\iff x = x'_1 \in E_1 \\ &\iff x \in E_1. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Im} p = E_1$.

4. *Soit* $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. *On a :*

$$p(x) = x \iff x = x_1 \iff x \in E_1$$

PROPOSITION 23.26 ♡ **Caractérisation des projecteurs**
Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Alors p est un projecteur si et seulement si $\boxed{p \circ p = p}$ (c'est-à-dire si et seulement si p est *idempotente*).
Dans ce cas, p est le projecteur sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si p est un projecteur et si $x \in \mathrm{E}$, alors en appliquant la proposition précédente, $p(x) \in \mathrm{E}_1$ et comme E_1 est stable par p, $p(p(x)) = p(x)$. Donc $p \circ p = p$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$: posons $\mathrm{E}_1 = \operatorname{Im} p$ et $\mathrm{E}_2 = \operatorname{Ker} p$ et montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires dans E.*

- *Soit $x \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$. Alors, on a à la fois $p(x) = 0$ car $x \in \mathrm{E}_2 = \operatorname{Ker} p$ et $x = p(x')$ où $x' \in \mathrm{E}$ car $x \in \mathrm{E}_1 = \operatorname{Im} p$. Par conséquent : $0 = p(x) = p(p(x'))$. Mais comme $p \circ p = p$, on a $p(p(x')) = p(x') = x$ et donc $x = 0$, ce qui prouve que E_1 et E_2 sont en somme directe.*
- *Soit $x \in \mathrm{E}$. On a :*

$$x = \underbrace{p(x)}_{=x_1} + \underbrace{(x - p(x))}_{=x_2}$$

et $x_1 \in \mathrm{E}_1$ (car $x_1 = p(x) \in \operatorname{Im} p$) et $x_2 \in \mathrm{E}_2$ (car $p(x_2) = p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$). Par conséquent : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$

Donc $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. Si $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$, comme $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $p(x_1) = x_1$ et comme $x_2 \in \mathrm{E}_2$, $p(x_2) = 0$. Par linéarité de p, $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1$. p est donc bien le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2.

PROPOSITION 23.27 ♡
Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$, si p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 et si $q \in Ł(\mathrm{E})$ alors on a équivalence entre :

1. q est le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1.
2. $\boxed{p + q = \mathrm{id}_\mathrm{E}}$.

Démonstration

- *Supposons que q est le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1. Si $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors $p(x) = x_1$ et $q(x) = x_2$. Donc $x = p(x) + q(x)$ et on a bien $p + q = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.*
- *Réciproquement, si $p + q = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et si $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ alors $q(x) = x - x_1 = x_2$ donc q est le projecteur de E sur E_2 parallèlement à E_1.*

23.6.2 Symétries

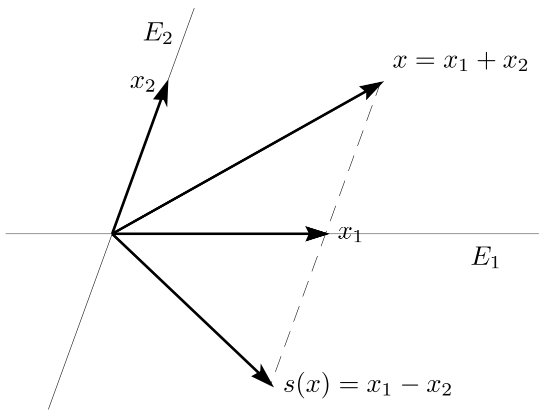


FIGURE 23.4 – Symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2

DÉFINITION 23.15 ♡ **Symétries**
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe donc un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soit

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

s est bien définie et est appelée *symétrie par rapport à* E_1 *parallèlement à* E_2, ou plus simplement *symétrie*.

PROPOSITION 23.28 ♡ Propriétés des symétries
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = E_1 \oplus E_2$ et soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, alors :

1. L'application s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. Si p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 alors $\boxed{s = 2p - \mathrm{Id}_E}$.
3. s est *involutive*, c'est-à-dire : $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration *Soit p le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2. Soit $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$. On a : $p(x) = x_1$ et*

$$\left(2p - \mathrm{Id}_E\right)(x) = 2p(x) - x = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2 = s(x)$$

ce qui démontre le second point. Comme p est linéaire et qu'une combinaison linéaire d' applications linéaires est linéaire, s est linéaire et le premier point est aussi démontré. Enfin, en utilisant la linéarité et l'idempotence de p :

$$\begin{aligned} s \circ s &= \left(2p - \mathrm{Id}_E\right) \circ \left(2p - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= 2p \circ \left(2p - \mathrm{Id}_E\right) - \left(2p - \mathrm{Id}_E\right) \\ &= 4p^2 - 2p - 2p + \mathrm{Id}_E \\ &= 4p - 4p + \mathrm{Id}_E \\ &= \mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

et le troisième point est démontré.

PROPOSITION 23.29 ♡ Caractérisation des symétries
Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Si s est involutive, c'est-à-dire si $\boxed{s \circ s = \mathrm{Id}_E}$, alors s est la symétrie par rapport à $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$).

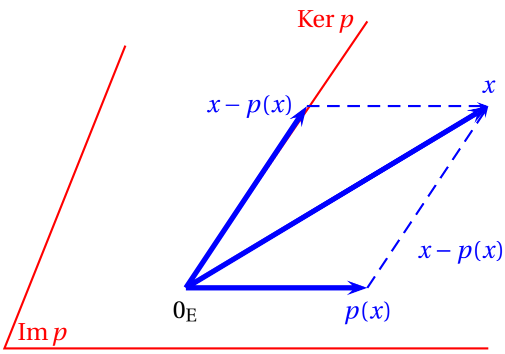
Démonstration *Supposons que s est linéaire et involutive. Posons $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires dans E.*

- *Soit $x \in E_1 \cap E_2$. On a donc : $s(x) - x = 0$ et $s(x) + x = 0$. Soustrayant ces deux égalités, on obtient $x = 0$, donc E_1 et E_2 sont en somme directe*
- *Soit $x \in E$. On a :*

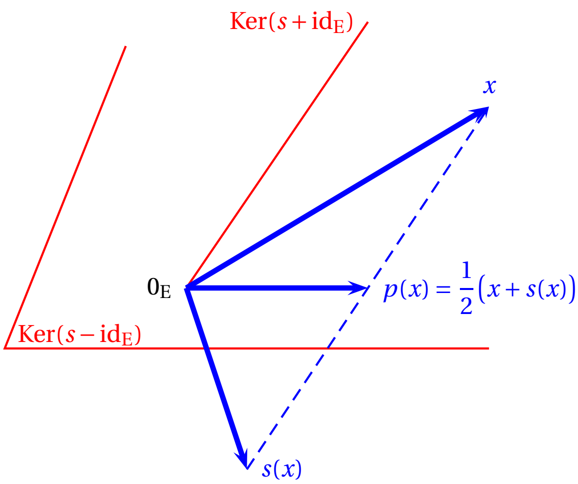
$$x = \underbrace{-\frac{1}{2}\left(s(x) - x\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(s(x) + x\right)}_{\in E_2}$$

  et donc $E = E_1 + E_2$.

On en déduit que $E = E_1 \oplus E_2$. De plus, si $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$ alors : comme $x_1 \in E_1$, on a : $s(x_1) = x_1$ et comme $x_2 \in E_2$, on a aussi : $s(x_2) = -x_2$. Par linéarité de s, on en déduit que : $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$. L'application s est donc bien la symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_2



(a) Décomposition associée à un projecteur



(b) Décomposition associée à une symétrie

FIGURE 23.5 – Projecteur, symétrie

En résumé

1. Les différentes définitions de ce chapitre doivent être connues avec la plus grande précision.
2. Vous devez être capable de donner différents exemples d'espace vectoriels, de sous-espaces vectoriels, de sous-espaces supplémentaires. Il faudra passer du temps à reprendre les différents exemples de ce chapitre.
3. Les notions de projecteurs et symétries doivent être bien assimilées.
4. Ne vous découragez pas. Les premiers pas en algèbre linéaire sont souvent difficiles. Le temps et le travail aidant, ces nouvelles notions vont vite s'éclaircir.

23.7 Exercices

23.7.1 Espace vectoriel

Exercice 23.1 ♡

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ *?*

1. $\left(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes\right)$ *où :*

$$\oplus : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (a,b) & \longmapsto & a \oplus b = ab \end{array} \right.$$

$$\otimes : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, a) & \longmapsto & \lambda \otimes a = a^\lambda \end{array} \right.$$

2. $\left(\mathrm{R}^2, \oplus, \otimes\right)$ *où :*

$$\oplus : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left((a,b), \left(a',b'\right)\right) & \longmapsto & (a,b) \oplus \left(a',b'\right) = \left(a+a', b+b'\right) \end{array} \right.$$

$$\otimes : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (a,b)) & \longmapsto & \lambda \otimes (a,b) = (\lambda a, b) \end{array} \right.$$

Solution :

1. *Vérifions les différents axiomes.*
   (a) $\oplus$ *admet* 1 *comme élément neutre et si* $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, *il est clair que* $a \oplus b^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$. *Donc* $\mathbb{R}_+^*$ *est un sous-groupe du groupe commutatif* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *et* $\left(\mathbb{R}_+^*, \oplus\right)$ *admet alors bien une structure de groupe commutatif.*
   (b) *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. *On vérifie que :*
      i. $\left(\alpha+\beta\right) \otimes x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x$
      ii. $\left(\alpha \times \beta\right) \otimes x = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha = \alpha \otimes \left(\beta \otimes x\right)$
      iii. $\alpha \otimes \left(x \oplus y\right) = \left(xy\right)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha \otimes x \oplus \alpha \otimes y$.
      iv. $1 \otimes x = x^1 = x$.
2. *La loi externe n'est pas distributive. En effet* $(1+2) \otimes (1,2) = (3,2)$ *et* $1 \otimes (1,2) \oplus 2 \otimes (1,2) = (1,2) \oplus (2,2) = (3,4)$.

23.7.2 Sous-espace vectoriel

Exercice 23.2 ♡

On considère $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues définies sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Indiquer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. *L'ensemble* F_1 *des fonctions polynomiales de degré* n *où* $n \in \mathbb{N}$.
2. *L'ensemble* F_2 *des fonctions polynomiales de degré au plus* n *où* $n \in \mathbb{N}$ *et à coefficients dans* $\mathbb{R}$.
3. *L'ensemble* F_3 *des fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$.
4. *L'ensemble* F_4 *des fonctions* f *vérifiant telles qu'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que* f *est* k*-lipschitzienne.*
5. *L'ensemble* F_5 *des fonctions* f *dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $f(0) = 1$
6. *L'ensemble* F_6 *des fonctions* f *dérivables sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $f(0) = 0$
7. *L'ensemble* F_7 *des fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *solutions de* $y' - y = 0$.
8. *L'ensemble* F_8 *des fonctions* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *solutions de* $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - y(t) = t$.

Solution :

1. *L'ensemble* F_1 *est clairement une partie de* E *car toute fonction polynomiale est continue sur* $\mathbb{R}$. *Elle ne contient par contre pas la fonction nulle car le polynôme correspondant est de degré* $-\infty$. *Ce n'est donc par un sous-espace vectoriel de* E.
2. *L'ensemble* F_2 *est clairement une partie de* E. *Il est évident que* F_2 *est non vide et qu'une combinaison linéaire de polynômes de degré* $\leqslant n$ *est encore un polynôme de degré* $\leqslant n$ *donc* F_2 *est un sous-espace vectoriel de* E.
3. *Toute fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc* $\mathrm{F}_3 \subset \mathrm{E}$. F_3 *est par ailleurs non vide et une combinaison linéaire de fonctions dérivables est encore dérivable donc* F_3 *est un sous-espace vectoriel de* E.

4. Toute fonction k-lipschitzienne est continue (et même uniformément continue) sur $\mathbb{R}$ donc F_4 est bien une partie de E. Si on considère une fonction f_1 k_1-lipschitzienne et une fonction f_2 k_2-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$, on a, par application de l'inégalité triangulaire :

$$\left|\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)(x) - \left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)\left(x'\right)\right| \leqslant \left(|\alpha_1|\, k_1 + |\alpha_2|\, k_2\right)\left|x - x'\right|$$

et donc $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est $|\alpha_1|\, k_1 + |\alpha_2|\, k_2$-lipschitzienne. F_4 est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

5. La fonction nulle n'est pas élément de F_5 donc F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
6. L'inclusion de F_6 dans E est évidente car toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$. F_6 est clairement non vide, la fonction identiquement nulle en est un élément. Par ailleurs, une combinaison linéaire de fonctions dérivables nulles en 0 est encore dérivable et nulle en 0 donc F_6 est bien un sous-espace vectoriel de E.
7. F_7 est non vide car la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$. Toute fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_7 est bien une partie de E. On vérifie de plus que toute combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle est encore $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle. F_7 est donc un sous-espace vectoriel de E.
8. La fonction identiquement nulle n'est pas solution de $y' - y = t$ donc F_8 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 23.3 ♡

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les parties suivantes sont elles des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. L'ensemble F_1 des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble F_2 des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble F_3 des fonctions qui s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble F_4 des fonctions qui ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble F_5 des fonctions qui s'annulent une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble F_6 des fonctions qui valent 0 en 1.
7. L'ensemble F_7 des fonctions qui valent 1 en 0.
8. L'ensemble F_8 des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
9. L'ensemble F_9 des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.
10. L'ensemble F_{10} des fonctions T-périodiques où T est un réel strictement positif fixé.

Solution :

1. Une combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. F_1 est non vide donc F_1 est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère les fonctions $f_1 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}\right.$ et $f_2 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$. f_1 et f_2 sont monotones (croissantes) mais ce n'est pas le cas de $f_1 - f_2$ comme on peut le vérifier facilement. F_2 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
3. On considère les fonctions $f_1 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ et $f_2 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}\right.$. f_1 et f_2 s'annulent toute deux au moins une fois sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas le cas de $f_2 - f_1$. Donc F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
4. La fonction nulle n'est pas élément de F_4 donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
5. Les fonctions $f_1 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}\right.$ et $f_2 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x - \frac{1}{2} \end{array}\right.$ s'annulent une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas le cas de $f_1 - f_2 = \frac{1}{2}$. F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
6. On montre facilement que F_6 est un sous-espace vectoriel de E.
7. La fonction nulle n'est pas dans F_7. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
8. Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable et F_8 est non vide donc F_8 est un sous-espace vectoriel de E.
9. F_9 est non vide. Si f et g sont deux fonctions paires et si α, β sont deux scalaires réels alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\alpha f + \beta g\right)(-x) = \left(\alpha f + \beta g\right)(x)$$

et donc F_8 est stable par combinaison linéaire. On en déduit que c'est un sous-espace vectoriel de E.

10. On vérifie facilement que F_{10} est non vide et qu'une combinaison linéaire de fonctions T-périodiques est encore T-périodique. F_{10} est donc un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 23.4 ♡

On note $\mathrm{E}=\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions définies sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de* E *?*

1. $\mathrm{F}_1=\left\{f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})\mid f'(0)=f'(1)\right\}$
2. $\mathrm{F}_2=\left\{f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})\mid \forall x\in[0,1],\quad f\geqslant 0\right\}$.
3. $\mathrm{F}_3=\left\{f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})\mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=1\right\}$
4. $\mathrm{F}_4=\left\{f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})\mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$

Solution :

1. *L'ensemble* F_1 *est clairement un sous-ensemble de* E. F_1 *est non vide car il contient la fonction nulle. Soient* $f,g\in\mathrm{F}_1$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*. On combinaison linéaire de fonctions* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0,1]$ *est encore* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0,1]$ *et* $(\alpha f+\beta g)'(0)=(\alpha f+\beta g)'(1)$. F_1 *est donc bien un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Une combinaison linéaire de fonctions positives n'est pas forcément positive. Il s'ensuit que* F_2 *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E.
3. *L'intégrale entre* 0 *et* 1 *de la fonction nulle est nulle. Cette fonction n'est donc pas élément de* F_3 *et* F_3 *ne peut être un sous-espace vectoriel de* E.
4. *L'ensemble* F_4 *est clairement une partie non vide de* E*. De plus, une combinaison linéaire de fonctions d'intégrales nulles est d'intégrale nulle et si* $f,g\in\mathrm{F}_4$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *alors, par linéarité de l'intégrale :* $\int_0^1(\alpha f+\beta g)(t)\,\mathrm{d}t=\alpha\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=0$. F_4 *est donc bien stable par combinaison linéaire et c'est bien un sous-espace vectoriel de* E.

Exercice 23.5 ♡

On note $\mathrm{E}=\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *?*

1. $\mathrm{F}_1=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n)\text{ est bornée}\right\}$
2. $\mathrm{F}_2=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n)\text{ est monotone}\right\}$
3. $\mathrm{F}_3=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n)\text{ est convergente}\right\}$
4. $\mathrm{F}_4=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n)\text{ est convergente vers }0\right\}$
5. $\mathrm{F}_5=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n)\text{ est convergente vers }l\right\}$ *où* l *est un réel fixé non nul.*
6. $\mathrm{F}_6=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n)\text{ est divergente}\right\}$
7. $\mathrm{F}_7=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n)\text{ est géométrique}\right\}$
8. $\mathrm{F}_8=\left\{(u_n)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\mid (u_n)\text{ est géométrique de raison }a\right\}$ *où* a *est un réel fixé.*

Solution :

1. *Une combinaison linéaire de suites bornées étant encore bornée, on vérifie facilement que* F_1 *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *En considérant par exemple les suites* (u_n) *et* (v_n) *de terme général* $u_n=n^2$ *et* $v_n=4n-1$ *on vérifie que* (u_n) *et* (v_n) *sont croissantes mais que* u_n-v_n *n'est pas monotone (il suffit de calculer les* 4 *premiers termes de cette suite).* F_2 *n'est donc pas stable par combinaison linéaire et ne forme donc pas un sous-espace vectoriel de* E.
3. *L'ensemble* F_3 *est clairement une partie non vide de* E*. Par le théorème d'opérations sur les limites, on sait qu'une combinaison linéaire de suites convergentes est encore convergente. Donc* F_3 *est un sous-espace vectoriel de* E.
4. *L'ensemble* F_4 *est une partie non vide de* E*. Par le théorème d'opérations sur les limites, on sait qu'une combinaison linéaire de suites convergentes vers* 0 *est encore convergente vers* 0*. Donc* F_3 *est un sous-espace vectoriel de* E.
5. *La suite nulle ne converge pas vers* $l\neq 0$ *et donc* F_5 *ne peut être un sous-espace vectoriel de* E.
6. *La suite nulle n'est pas divergente et donc n'appartient pas à* F_6 *qui ne peut du coup être un sous-espace vectoriel de* E..
7. *Une combinaison linéaire de suites géométriques n'est pas forcément géométrique donc* F_7 *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E.
8. *L'ensemble* F_8 *est une partie non vide de* E*. On vérifie facilement qu'un combinaison linéaire de suites de raison* a *est encore une suite géométrique de raison* a *et* F_8 *est donc un sous-espace vectoriel de* E.

Exercice 23.6 ♡

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *?*

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y \geqslant 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
4. $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 3\}$

Solution : *Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si c'est le singleton $\{0\}$, une droite vectorielle ou $\mathbb{R}^2$ tout entier.*

1. *Le couple $(0,1)$ est élément de F_1 mais ce n'est pas le cas du couple $(0,-1)$ qui lui est pourtant colinéaire. F_1 n'est donc pas stable par combinaison linéaire et ce ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Le couple nul $(0,0)$ n'est pas élément de F_2 et donc F_2 ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*
3. *On vérifie facilement que F_3 est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. Si $(x, y), (x', y') \in F_3$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors on vérifie facilement que $\alpha x + \beta x' = \alpha y + \beta y'$ et donc que $\alpha(x, y) + \beta(x', y') \in F_3$. F_3 est donc un sous-espace vectoriel de R^2.*
4. *Le couple nul $(0,0)$ n'est pas élément de F_4 et donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 23.7 ♡

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(s - t, s + t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

1. *Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer $F \cap G$.*

Solution : *Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est le singleton $\{0\}$, une droite vectorielle, un plan vectoriel ou $\mathbb{R}^3$ tout entier.*

1. *F est une partie non vide de $\mathbb{R}^3$. Si $(x, y, z), (x', y', z') \in F$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors on vérifie facilement que le triplet $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')$ vérifie l'équation $x + y + z = 0$. F est donc stable par combinaison linéaire et forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (on aura reconnu que F est un plan vectoriel de l'espace). On vérifie aussi que G est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^3$ et si $(s - t, s + t, t)$ et $(s' - t', s' + t', t')$ sont deux éléments de G (avec $s, s', t, t' \in \mathbb{R}$) et si alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :*
$$\alpha(s - t, s + t, t) + \beta(s' - t', s' + t', t') = (S - T, S + T, T)$$
avec $S = \alpha s + \beta s'$ et $T = \alpha t + \beta t'$ et donc G est aussi stable par combinaison linéaire (On aura là encore remarqué que G est un plan vectoriel de l'espace).
2. *Pour déterminer $F \cap G$ il suffit de résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = s - t \\ y = s + t \\ z = t \end{cases}$ et on obtient comme ensemble solution celui paramétré par : $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ (on reconnait l'équation paramétrée d'une droite vectorielle).*

Exercice 23.8 ♡♡

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel A de E. On suppose que $A \neq \{0_E\}$ et $A \neq E$. Montrer que la partie $B = (E \setminus A) \cup \{0_E\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Solution : *Par l'absurde, supposons que B est un sous-espace vectoriel de E. Soient $a \in A$ et $b \in B$ deux vecteurs non nuls. Posons $x = a + b$. Comme E est un espace vectoriel, x est élément de E et comme $E = A \cup B$, soit $x \in A$, soit $x \in B$. Si $x \in A$ alors $b = x - a$ est élément de A car A est un sous-espace vectoriel. Mais $A \cap B = \{0\}$ donc $b = 0$ ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ. De même, si $x \in B$ alors $a = x - b \in B$ et $a = 0$ ce qui est aussi une contradiction. En conclusion, B ne peut être un sous-espace vectoriel de E.*

23.7.3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 23.9 ♡

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$F \cap G = F + G \Longleftrightarrow F = G$$

Solution :

- $\boxed{\Rightarrow}$ *Soit* $x \in F$. *Alors* $x = x + 0 \in F + G = F \cap G$. *Donc* $x \in G$. *Ce qui prouve que* $F \subset G$. *On montre de la même façon que* $G \subset F$ *et donc que* $F = G$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ *Trivial.*

Exercice 23.10 ♡

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *Montrer que* $F \cup G$ *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si* $F \subset G$ *ou* $G \subset F$.

Solution :

- $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $F \not\subset G$ *et que* $G \not\subset F$. *On peut alors trouver deux vecteurs non nuls* $x \in F \setminus G$ *et* $y \in G \setminus F$. $x + y$ *ne peut être élément de* $F \cup G$ *: sinon on aurait* $x + y \in F$ *(ou* $x + y \in G$*) et donc,* F *étant stable par combinaison linéaire* $y = x + y - x$ *serait élément de* F *(on fait le même raisonnement si* $x + y \in G$*) ce qui n'est pas possible par hypothèse. Par conséquent* $F \cup G$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E. *La première implication est ainsi prouvée par contraposée.*
- $\boxed{\Leftarrow}$ *Trivial.*

Exercice 23.11 ♡

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, et l'on note* $\mathcal{V}(E)$ *l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de* E. *On se donne un sous-espace vectoriel* $V \in \mathcal{V}(E)$ *et l'on définit l'application*

$$\varphi_V : \begin{cases} \mathcal{V}(E) & \longrightarrow & \mathcal{V}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap V \end{cases}$$

Montrer que

$$(i) \quad \varphi_V \text{ injective} \iff (ii) \quad \varphi_V \text{ surjective} \iff (iii) \quad V = E$$

Solution :

1. $(i) \implies (iii)$ *: il suffit de prendre* $X_1 = E$ *et* $X_2 = V$. *Alors comme* $\varphi(X_1) = \varphi(X_2) = V$ *et que* φ *est injective,* $X_1 = X_2$*, c'est-à-dire* $V = E$.
2. $(iii) \implies (i)$ *: le résultat est clair car dans ce cas* $\varphi_E = \mathrm{id}$.
3. $(ii) \implies (iii)$ *: comme* $E \in \mathcal{V}(E)$ *et que* φ *est surjective, il possède un antécédent* $X \in \mathcal{V}(E)$ *et l'égalité* $X \cap V = E$ *n'est possible que si* $V = E$.
4. $(ii) \implies (i)$ *: clair car dans ce cas* $\varphi_E = \mathrm{id}$.

Exercice 23.12 ♡

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, et l'on note* $\mathcal{V}$ *l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de* E. *On se donne un sous-espace vectoriel* $V \in \mathcal{V}$ *et l'on définit l'application*

$$\varphi_V : \begin{cases} \mathcal{V}(E) & \longrightarrow & \mathcal{V}(E) \\ X & \longmapsto & X + V \end{cases}$$

Montrer que

$$(i) \quad \varphi_V \text{ injective} \iff (ii) \quad \varphi_V \text{ surjective} \iff (iii) \quad V = \{0_E\}$$

Solution :

1. $(iii) \implies (i)$ *et* $(iii) \implies (ii)$ *sont claires puisque si* $V = \{0_E\}$*,* $\varphi_V = \mathrm{id}_{\mathcal{V}(E)}$.
2. $(i) \implies (iii)$ *: par l'absurde, si* $V \neq \{0_E\}$*, il existe* $v \in V$ *tel que* $v \neq 0_E$. *En prenant* $X_1 = \{0_E\}$ *et* $X_2 = \mathrm{Vect}(v)$*, on aboutit à une contradiction car* $\varphi(X_1) = V = \varphi(X_2)$.
3. $(ii) \implies (iii)$ *: par l'absurde, si* $V \neq \{0_E\}$*, il existe* $v \in V$ *avec* $v \neq 0_E$. *En posant* $Y = \{0\}$*, on ne lui trouve pas d'antécédent par* φ_V.

Exercice 23.13 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et quatre sous-espaces vectoriels* A*,* B*,* C *et* D *de* E. *Montrer que*

1. $A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C$.
2. $A + \big(B \cap (A + C)\big) = (A + B) \cap (A + C)$;
3. $A \cap \big(B + (A \cap C)\big) = (A \cap B) + (A \cap C)$.
4. $A \cap B = C \cap D \implies \big(A + (B \cap C)\big) \cap \big(A + (B \cap D)\big) = A$;

Solution :

1. *Considérons* $z \in A \cap B + A \cap C$. *Il existe* $x \in A \cap B$ *et* $y \in A \cap C$ *tels que* $z = x + y$. *Mais comme* $x, y \in A$ *et que* A *est un sous-espace vectoriel,* $z \in A$. *Comme* $x \in B$ *et* $y \in C$, $z = x + y \in A + C$. *En conclusion,* $z \in A \cap (B + C)$. *Réciproquement, si* $z \in A \cap (B + C)$ *alors* $z \in A$ *et il existe* $x \in B$ *et* $y \in C$ *tels que* $z = x + y$.
2. *D'après la question précédente,* $(A+B) \cap (A+C) = A \cap A + A \cap C + B \cap A + B \cap C = A + A \cap B + A \cap C + B \cap C = A + B \cap C$ *car* A *est un sous-espace vectoriel et* $A \cap B, A \cap C \subset A$. *De même,* $A + \big(B \cap (A+C)\big) = A + (A \cap B + B \cap C) = A + B \cap C$. *On en déduit l'égalité.*
3. *Toujours d'après la première question* $A \cap \big(B + (A \cap C)\big) = A \cap B + A \cap A \cap C = A \cap B + A \cap C$ *et* $A \cap \big(B + (A \cap C)\big) = (A \cap B) + (A \cap C)$.
4. *Supposons que* $A \cap B = C \cap D$. *Alors*

$$\big(A + (B \cap C)\big) \cap \big(A + (B \cap D)\big) = A \cap A + \underbrace{A \cap B}_{C \cap D} \cap D + \underbrace{A \cap B}_{C \cap D} \cap C + B \cap \underbrace{C \cap D}_{A \cap B} = A + C \cap D + A \cap B = A + A \cap B = A$$

car A *est un sous-espace vectoriel et que* $A \cap B \subset A$.

Exercice 23.14 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et trois sous-espaces* F, G *et* H *de* E. *On suppose que*

$$\begin{cases} F + G = F + H \\ F \cap G = F \cap H \\ G \subset H \end{cases}$$

A-t-on toujours $G = H$?

Solution : *Montrons que* $G = H$. *On sait déjà que* $G \subset H$. *Il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque. Soit* $h \in H$. *Alors* $h \in F + H = F + G$. *Donc il existe* $f \in F$ *et* $g \in G$ *tels que* $h = f + g$. *Mais comme* $f = h - g$, *que* $h - g \in H$ *(car* $h \in H$, $g \in G \subset H$ *et* H *est un sous-espace vectoriel) alors* $f \in F \cap H = F \cap G$. *Donc* $f \in G$ *et* $h = f + g \in F$. *Ce qui prouve que* $H \subset F$. *En conclusion* $H = G$.

23.7.4 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Exercice 23.15 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$:

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$
3. $F_3 = \{(t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Solution :

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1))$
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\} = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,2))$
3. $F_3 = \{(t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-2))$

Exercice 23.16 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$:

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$
2. $F_2 = \{(2s + t, s - t, s + t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y - z = 0\}$
4. $F_4 = F \cap G$ *avec* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y - z = 0\}$
5. $F_5 = \{(2t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Solution :

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$.
2. $F_2 = \{(2s + t, s - t, s + t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \{s(2,1,1) + t(1,-1,1) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((2,1,1),(1,-1,1))$.
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y - z = 0\} = \{(0, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0,1,1))$.

4. $F_4 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0\right\}\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x-y-z=0\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0 \quad \text{et} \quad 3x-y-z=0\right\}$ $= \left\{(x,5x,-2x)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left((1,5,-2)\right)$.
5. $F_5 = \{(2t,3t,t) \mid t\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((2,3,1)\right)$.

Exercice 23.17 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *:*

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X]$
2. $F_2 = \{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$
3. $F_3 = \left\{P' \mid P\in\mathbb{R}_n[X]\right\}$ *où* $n\in\mathbb{N}$
4. $F_4 = \left\{a\left(X^3-1\right)+b\left(X^2-2\right)+c(X+4) \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$
5. $F_5 = \{P\in\mathbb{R}_4[X] \mid P(1)=P(2)=0\}$
6. $F_6 = \left\{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid P'=0\right\}$
7. $F_7 = \left\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P''=0\right\}$
8. $F_8 = \left\{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$

Solution :

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}\left(X^2,X,1\right)$.
2. $F_2 = \{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\} = \{(X-1)P \mid P\in\mathbb{R}_2[X]\} = \mathrm{Vect}\left((X-1)X^2,(X-1)X,(X-1)1\right)$.
3. $F_3 = \left\{P' \mid P\in\mathbb{R}_n[X]\right\} = R_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}\left(1,X,\dots,X^{n-1}\right)$.
4. $F_4 = \left\{a\left(X^3-1\right)+b\left(X^2-2\right)+c(X+4) \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(X^3-1,X^2-2,X+4\right)$.
5. $F_5 = \{P\in\mathbb{R}_4[X] \mid P(1)=P(2)=0\} = \{(X-1)(X-2)P \mid P\in\mathbb{R}_2[X]\}$ $= \mathrm{Vect}\left(X^2(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2)\right)$.
6. $F_6 = \left\{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid P'=0\right\} = \mathrm{Vect}(1)$.
7. $F_7 = \left\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P''=0\right\} = \{aX+b \mid a,b\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X,1)$.
8. *Soit* $P = aX^2+bX+c\in F_8$ *où* $a,b,c\in\mathbb{R}$. *On a :* $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=0$ *si et seulement si* $2a+3b+6c=0$. *Donc* $F_8 = \left\{aX^2+bX+c \mid a,b,c\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad 2a+3b+6c=0\right\} = \left\{aX^2+bX-\frac{a}{3}-\frac{b}{2} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(X^2-\frac{1}{3},X-\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 23.18 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *:*

1. $F_1 = \left\{f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'-2ty=0\right\}$
2. $F_2 = \left\{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''+\omega^2 f=0\right\}$ *où* $\omega\in\mathbb{R}_+^*$
3. $F_3 = \left\{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''+2f'+f=0\right\}$
4. $F_4 = \left\{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''-4f=0\right\}$

Solution :

1. *Les fonctions solutions de* $y'-ty=0$ *sont les fonctions* $\varphi_\alpha : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \alpha e^{t^2}\end{array}\right.$ *où* $\alpha\in\mathbb{R}$.*Donc* $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\varphi_1\right)$.
2. *Les fonctions solutions de* $f''+\omega^2 f=0$ *sont les fonctions* $\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)\end{array}\right.$ *où* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. *Donc* $F_2 = \mathrm{Vect}\left(t\mapsto\cos(\omega t), t\mapsto\sin(\omega t)\right)$.
3. *Les fonctions solutions de* $f''+2f'+f=0$ *sont les fonctions* $\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \alpha e^{-t}+\beta te^{-t}\end{array}\right.$ *où* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. *Donc* $F_3 = \mathrm{Vect}\left(t\mapsto e^{-t}, t\mapsto te^{-t}\right)$.
4. *On montre de même que* $F_4 = \mathrm{Vect}\left(t\mapsto e^{2t}, t\mapsto e^{-2t}\right)$.

Exercice 23.19 ♡

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *:*

1. *L'ensemble* F_1 *des suites réelles constantes.*
2. *L'ensemble* F_2 *des suites arithmétiques.*
3. *L'ensemble* F_3 *des suites géométriques de raison* 2.
4. *L'ensemble* F_4 *des suites réelles nulles à partir du rang* 3.

Solution :

1. $F_1 = \mathrm{Vect}\left((1)\right)$.
2. $F_2 = \mathrm{Vect}\left((1),(n)\right)$
3. $F_3 = \mathrm{Vect}\left((2^n)\right)$
4. $F_4 = \mathrm{Vect}\left((1,0,0,0,\dots),(0,1,0,0,\dots),(0,0,1,0,\dots)\right)$

Exercice 23.20 ♡

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$*, on considère les vecteurs* $e_1 = (1,1,0)$ *et* $e_2 = (1,2,1)$*. Déterminer* $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$*.*

Solution : *On trouve que*

$$\operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

C'est un plan vectoriel.

Exercice 23.21 ♡

On note $E = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists (a,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x-\varphi)\}$ *Déterminer une partie* A *de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telle que* $E = \operatorname{Vect}(A)$*.*

Solution : *Grâce à la trigonométrie, on a les équivalences :*

$$\begin{aligned}
& f \in E \\
\iff\ & \exists (a,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(x-\varphi) \\
\iff\ & \exists (a,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos\varphi\cos x + a\sin\varphi\sin x \\
\iff\ & \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)}$.

Exercice 23.22 ♡

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions d'une variable réelle. On définit les systèmes de vecteurs*

$$S = (x \mapsto 1, x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos 2x) \qquad T = (x \mapsto 1, x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos^2 x).$$

Montrer que $\operatorname{Vect}(S) = \operatorname{Vect}(T)$*.*

Solution : *Comme pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$*, il est clair que* $x \mapsto \cos 2x \in \operatorname{Vect}(T)$*. Il s'ensuit que* $\operatorname{Vect}(S) \subset \operatorname{Vect}(T)$*. De même, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$ *et donc* $x \mapsto \cos^2 x \in \operatorname{Vect}(S)$*. Donc* $\operatorname{Vect}(T) \subset \operatorname{Vect}(S)$*. En conclusion* $\operatorname{Vect}(S) = \operatorname{Vect}(T)$*.*

Exercice 23.23 ♡♡

Dans $\mathbb{R}^4$*, montrer que les vecteurs* $v_1 = (1,0,0,1)$ *et* $v_2 = (2,1,-1,0)$ *engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs* $v_3 = (3,1,-1,1)$ *et* $v_4 = (5,2,-2,1)$*.*

Solution : *Comme* $v_3 = v_1 + v_2$ *et que* $v_4 = v_1 + 2v_2$*, il est clair que* v_3 *et* v_4 *sont éléments de* $Vect(v_1, v_2)$*. Donc* $Vect(v_3, v_4) \subset Vect(v_1, v_2)$*. On remarque de plus que* $v_1 = 2v_3 - v_4$ *et que* $v_2 = v_4 - v_3$*. Donc de la même façon,* $Vect(v_1, v_2) \subset Vect(v_3, v_4)$*. En conclusion* $Vect(v_1, v_2) = Vect(v_3, v_4)$

Exercice 23.24 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. On pose* $A = E \setminus F$*.*

1. *Montrer que* $\forall x \in F, \forall y \in A,\ x + y \in A$*.*
2. *En déduire que si* $F \neq E$*, alors* $\operatorname{Vect}(A) = E$*.*

Solution :

1. *Soit* $x \in F$ *et* $y \in A$*. Par l'absurde, si* $x + y \notin A$*, alors* $x + y \in F$ *et il existe* $f \in F$ *tel que* $x + y = f$ *mais alors* $y = f - y \in F$ *(car* F *est un sous-espace vectoriel), ce qui n'est pas possible.*
2. *Supposons que* $F \neq E$*. Par conséquent, il existe* $y \in A$*. Montrons alors que* $E \subset \operatorname{Vect}(A)$*. Soit* $x \in E$*. Si* $x \in A$*, alors* $x \in \operatorname{Vect}(A)$*. Supposons donc que* $x \notin A$*. Alors* $x \in F$ *et d'après 1. ,* $x + y \in A$*. On écrit alors*

$$x = (x + y) - y$$

Et donc x *est combinaison linéaire des vecteurs* $(x + y)$ *et* y *qui appartiennent à* A*. Par conséquent,* $x \in \operatorname{Vect}(A)$*.*

Exercice 23.25 ♡

Soient A *et* B *deux parties d'un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* E*.*

1. *Si* $A \subset B$*, montrer que* $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Vect}(B)$*.*
2. *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, montrer que* $\operatorname{Vect}(F) = F$*.*
3. *Montrer que* $\operatorname{Vect}\big(\operatorname{Vect}(A)\big) = \operatorname{Vect}(A)$*.*

Solution :

1. *Comme* $\text{Vect}(A)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* A *et que* $\text{Vect}(B)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *qui contient* B *et donc* A*, on a forcément* $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
2. *De même, comme* F *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* F *donc* $\text{Vect}(F) = F$.
3. *On applique la question précédente avec* $F = \text{Vect}(A)$. *On obtient* $\text{Vect}\big(\text{Vect}(A)\big) = \text{Vect}(A)$.

Exercice 23.26 ♡♡

Soient A *et* B *deux parties d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *Montrer que :*

$$\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$$

Solution :

– $\boxed{\subset}$ $\text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *qui contient* A *et* B. *Il contient donc* $\text{Vect}(A\cup B)$.

– $\boxed{\supset}$ *Soit* $x \in \text{Vect}(A)+\text{Vect}(B)$. *Il existe* $x_A \in \text{Vect}(A)$ *et* $x_B \in \text{Vect}(B)$ *tels que* $x = x_A + x_B$. *Le vecteur* x_A *est combinaison linéaire de vecteurs de* A*,* x_B *est combinaison linéaire de vecteurs de* B. *Par conséquent* x *est combinaison linéaire de vecteurs de* A *et de vecteurs de* B. *Le vecteur* x *est donc bien élément de* $\text{Vect}(A\cup B)$.

23.7.5 Sous-espaces vectoriels supplémentaires - Somme directe

Exercice 23.27 ♡

Soient $F = \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ *et* $G = \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. *Prouver que* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Solution : *Comme* $F = \mathrm{V}ect(1,0)$ *et que* $G = \mathrm{V}ect(0,1)$, F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^2$. *Si* $(x,y) \in F\cap G$ *alors* $y=0$ *car* $(x,y)\in F$ *et* $x=0$ *car* $(x,y)\in G$. *Donc* $F\cap G = \{0\}$. *Si* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, alors* $(x,y) = x(1,0)+y(0,1)$ *et on a bien décomposé* (x,y) *en la somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G. *Donc* $F+G=\mathbb{R}^2$. *En conclusion,* $F\oplus G = \mathbb{R}^2$.

Exercice 23.28 ♡

Soient $F = \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid s+t=0\}$ *et* $G = \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid s-t=0\}$. *Prouver que* $F\oplus G = \mathbb{R}^2$.

Solution : *On vérifie que* $F = \mathrm{V}ect(1,-1)$ *et que* $G = \text{Vect}(1,1)$ *donc ce sont deux sous-espace vectoriels de* $\mathbb{R}^2$. *Si* $(x,y)\in F\cap G$ *alors ce couple vérifie le système* $\begin{cases} s+t &=0\\ s-t &=0\end{cases}$ *dont l'unique solution est* $(0,0)$ *donc* $F\cap G=\{0\}$. *Pour* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, cherchons* $(s,t)\in F$ *et* $(s',t')\in G$ *en sorte que* $(x,y) = (s,t)+(s',t')$. *On doit avoir :*

$$\begin{cases} s+s' &= x\\ t+t' &= y\\ s+t &= 0\\ s'-t' &= 0\end{cases}.$$

On résout ce système et on trouve $(s,t) = \frac{1}{2}(x-y,-x+y)$ et $(s',t') = \frac{1}{2}(x+y,x+y)$. *En conclusion,* $F\oplus G=\mathbb{R}^2$.

Exercice 23.29 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z=0\} \quad \text{et} \quad G = \{(t,-t,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

Solution : *On vérifie facilement que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E. *Pour déterminer* $F\cap G$ *il suffit de résoudre le système* $\begin{cases}2x-y+z=0\\ x=t\\ y=-t\\ z=t\end{cases}$ *ce qui amène* $F\cap G = \{(0,0,0)\}$. F *et* G *sont donc en somme directe. Comme la droite vectorielle n'est pas incluse dans le plan vectoriel* F*, le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* F *et* G *est* E *et donc* $F+G=E$. *On a ainsi montré que* $F\oplus G = E$.

Exercice 23.30 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + y + z = 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \{(3t, 2t, t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Solution : *On vérifie facilement que* F *et* G *sont des sous-espace vectoriels de* E. *Pour déterminer* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *il suffit de résoudre le système* $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x = 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ *ce qui amène* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{(0,0,0)\}$. F *et* G *sont donc en somme directe.* F *et* G *étant des droites vectorielles de l'espace, le plus petit sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *les contenant est un plan vectoriel.* F *et* G *ne sont donc par supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23.31 ♡

Soient $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}$ *et* $\mathrm{G} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$. *Ces deux sous-espaces sont-ils en somme directe dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

Solution :
On montre facilement que $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect\,((1,1,0),(0,1,1))$ *et que* $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect\,((1,0,1),(0,1,1))$. *Ce sont donc deux sous-espace vectoriels de* $\mathbb{R}^3$. F *et* G *sont en fait des plans vectoriels de* $\mathbb{R}^3$. *Leurs équations ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas confondus. Leur intersection est une droite d'équation cartésienne* $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ *et n'est donc par réduite à* $\{0\}$. F *et* G *ne sont donc pas en somme directe dans* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23.32 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$

$$\mathrm{F} = \left\{\mathrm{P} \in \mathrm{R}_2[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}' = 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{V}ect\left(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2\right)$$

Solution : *Comme* $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect\,(1)$ *et* $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect\left(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2\right)$, *ces deux ensembles sont des sous-espace vectoriels de* E. *Il est clair que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ *car si* $\mathrm{P} \in \mathrm{F}$ *alors* P *est un polynôme constant qui ne peut être combinaison linéaire de* X *et* X^2 *que si les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Il est aussi clair que tout polynôme de* E *s'écrit comme la somme d'un polynôme constant et d'une combinaison linéaire de* X *et* X^2. *On a donc bien :* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 23.33 ♡

On considère dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ *les sous-ensembles* $\mathscr{P} = \left\{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P} \text{ est pair}\right\}$ *et* $\mathscr{I} = \left\{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{P} \text{ est impair}\right\}$.

1. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. *Montrer que* $\mathrm{P} \in \mathscr{P}$ *si et seulement si les coefficients de ses termes de degré impair sont nuls.*
2. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. *Montrer que* $\mathrm{P} \in \mathscr{I}$ *si et seulement si les coefficients de ses termes de degré pair sont nuls.*
3. *Montrer que* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{I}$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E.
4. *Montrer que* $\mathrm{E} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Solution :

1. *Supposons que* $\mathrm{P} = a_4\mathrm{X}^4 + a_3\mathrm{X}^3 + a_2\mathrm{X}^2 + a_1\mathrm{X} + a_0$ *avec* $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. *Si* P *est pair alors* $\mathrm{P}(-\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$ *et* $a_4\mathrm{X}^4 + a_3\mathrm{X}^3 + a_2\mathrm{X}^2 + a_1\mathrm{X} + a_0 = a_4\mathrm{X}^4 - a_3\mathrm{X}^3 + a_2\mathrm{X}^2 - a_1\mathrm{X} + a_0$ *donc* $a_3\mathrm{X}^3 + a_1\mathrm{X} = 0$ *ce qui amène* $a_3 = a_1 = 0$ *car un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls. Les coefficients des termes de degré impair de* P *sont donc bien nuls. Réciproquement, on vérifie facilement que si* $a_3 = a_1 = 0$ *alors* P *est pair.*
2. *Même raisonnement que dans la question précédente.*
3. *On tire des deux premières questions que* $\mathscr{P} = \mathrm{V}ect\left(1, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^4\right)$ *et* $\mathscr{I} = \mathrm{V}ect\left(\mathrm{X}, \mathrm{X}^3\right)$. *Ces deux ensembles sont donc des sous-espaces vectoriels de* E.
4. *Soit* $\mathrm{P} \in \mathscr{P} \cap \mathscr{I}$. *Alors les coefficients des termes de degré pair et les coefficients des termes de degré impair de* P *sont nuls. Donc* P *est nul et* $\mathscr{P}$, $\mathscr{I}$ *sont en somme directe. Si* $\mathrm{P} = a_4\mathrm{X}^4 + a_3\mathrm{X}^3 + a_2\mathrm{X}^2 + a_1\mathrm{X} + a_0 \in \mathrm{E}$ *alors*

$$\mathrm{P} = \underbrace{a_4\mathrm{X}^4 + a_2\mathrm{X}^2 + a_0}_{\in \mathscr{P}} + \underbrace{a_3\mathrm{X}^3 + a_1\mathrm{X}}_{\in \mathscr{I}}$$

   donc $\mathrm{E} = \mathscr{P} + \mathscr{I}$. *En conclusion,* $\mathrm{E} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Exercice 23.34 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathrm{E} \mid f(1) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \{ f \in \mathrm{E} \mid \exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = ax \}$$

Solution : *On vérifie facilement que* F *est sous-espace vectoriel de* E. *On remarque que* $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect\left(\mathrm{id}_{\mathrm{R}}\right)$ *et donc* G *est un sous-espace vectoriel de* E. *Si* $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *alors il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f : x \mapsto ax$. *Mais comme* $f(1) = 0$, *il vient que* $a = 0$ *et donc que* $f = 0$. *L' intersection de* F *et* G *est donc réduite à la fonction identiquement nulle sur* $\mathbb{R}$. *Notons* φ *la fonction constante égale à* 1 *sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $f \in \mathrm{E}$. *On a, pour tout* $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x) - f(1).\varphi(x) + f(1).\varphi(x)$. *Il est clair que* $f - f(1)\varphi \in \mathrm{F}$ *et que* $f(0)\varphi \in \mathrm{G}$. *On en déduit que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$. *En conclusion, on a bien* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 23.35 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{V}ect\left(x \mapsto 1, \mathrm{id}_{\mathrm{R}}\right)$$

Solution : *Il est clair que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Il est aussi facile de montrer que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. *En effet, si* $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *alors* f *est une fonction affine qui s'annule en* 0 *et dont la dérivée s'annule aussi en* 0. f *est donc nécessairement identiquement nulle. Par ailleurs, si* $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *alors notant :* $g : x \mapsto h'(0)x + h(0)$, *on a :*$h - g \in \mathrm{F}$ *ce qui montre que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 23.36 ♡

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$

$$\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C}) \mid f \text{ est constante} \right\}$$

Solution : *On montre facilement que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$. *L'intersection* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *est réduite au vecteur nul. En effet, si la fonction* $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *alors* f *est une fonction constante égale à un réel* c *d'intégrale nulle sur* $[-1,1]$ *ce qui amène* $2c = 0$, *c'est-à-dire* $c = 0$. f *est donc identiquement nulle. De plus, si* $h \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$, *en posant* $\alpha = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ *et en désignant par* g *la fonction constante sur* $[-1,1]$ *égale à* α, *on vérifie facilement que* $h - g \in \mathrm{F}$ *et donc* $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$. *En résumé :* F *et* G *sont supplémentaires dans* E.

Exercice 23.37 ♡♡

$\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathrm{E}; f(0) = f(1) = 0 \right\}$. *Montrer que* F *est un s.e.v. de* E *et trouver un supplémentaire de* F *dans* E.
Indication 23.23 : Considérer l'ensemble des fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $f(x) = 0$.

Solution : *On montre que la fonction nulle est dans* F, *et que* F *est stable par combinaison linéaire. Soit*

$$\mathrm{G} = \{ f \in \mathrm{E}; \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 1, f(x) = 0 \}$$

On montre sans problème que G *est un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* $\boxed{\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}}$ *(c'est clair). Montrons ensuite que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$ *: soit* $f \in \mathrm{E}$. *Définissons*

$$f_{\mathrm{F}} = \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad \text{et } f_{\mathrm{G}} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On a bien, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f_{\mathrm{F}}(x) + f_{\mathrm{G}}(x)$ *et* $f_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$, $f_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$. *Finalement,* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 23.38 ♡♡

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ *on considère*

$$\mathrm{H} = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E} \mid x_1 + \cdots + x_n = 0 \}$$

Montrer que H *est un sous-espace vectoriel de* E *et trouver un supplémentaire de* H. *Le supplémentaire trouvé est-il unique ?*
Indication 23.23 : Faire un dessin de H *lorsque* $n = 2$ *et* $n = 3$.

Solution : *On montre sans problème que* H *est un sous-espace vectoriel. Considérons* $a = (1, \ldots, 1) \in \mathrm{R}^n$. *Alors* $a \notin \mathrm{H}$. *Montrons que* $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{H}$.

1. $\boxed{\operatorname{Vect}(a)\cap H=\{0\}}$: *Soit* $x\in\operatorname{Vect}(A)\cap H$ *: il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$*, tel que* $x=\lambda a=(\lambda,\dots,\lambda)$*. Mais comme* $x\in H$*,* $n\lambda=0$ *d'où* $\lambda=0$ *et* $x=0$*.*
2. $\boxed{E=\operatorname{Vect}(a)+H}$: *Soit* $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$*. En supposant le problème résolu, il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$ *et* $h\in H$ *tels que* $x=\lambda a+h$*. Alors il faut que* $x-\lambda a=(x_1-\lambda,\dots,x_n-\lambda)\in H$ *et donc que* $\lambda=\dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$*.*

   Posons donc $\lambda=\dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$ *et* $h=x-\lambda a$*. On vérifie que* $x=\lambda a+h$ *et que* $h\in H$*,* $\lambda a\in\operatorname{Vect}(a)$*.*

Le supplémentaire trouvé n'est pas unique (cf dessin dans $\mathbb{R}^3$*) : il suffit de prendre un vecteur* $a\notin H$ *et alors* $E=\operatorname{Vect}(a)\oplus H$*.*

Exercice 23.39 ♡♡

Soit E *un K-e.v. et* A, B *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Soit* C *un supplémentaire de* $A\cap B$ *dans* B*. Montrer que* $A+B=A\oplus C$*.*

Solution :

1. *Montrons que la somme* $A+C$ *est directe. Soit* $x\in A\cap C$*, puisque* $x\in A$ *et* $x\in B$ *(car* $C\subset B$*),* $x\in A\cap B$ *et* $x\in C$*. Comme* $(A\cap B)\oplus C=B$*, il vient que* $x=0$*.*
2. *Montrons que* $A+C=A+B$*. Comme* $C\subset B$*, il est immédiat que* $A+C\subset A+B$*. Montrons donc que* $A+B\subset A+C$*. Soit* $x\in A+B$*. Il existe* $x_A\in A$ *et* $x_B\in B$ *tel que* $x=x_A+x_B$*. Comme* $B=(A\cap B)+C$*, il existe* $x_{A\cap B}\in A\cap B$ *et* $x_C\in C$ *tel que* $x_B=x_{A\cap B}+x_C$*. Alors*
$$x=(x_A+x_{A\cap B})+x_C$$
   avec $x_A+x_{A\cap B}\in A$ *et* $x_C\in C$*.*

Exercice 23.40 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A, B, C *trois sous-espace vectoriel de* E *vérifiant*
$$E=A\oplus B\text{ et }A\subset C$$
Montrer que $C=A\oplus(B\cap C)$*.*

Solution : *Soit* $x\in A\cap(B\cap C)$ *alors* $x\in A\cap B=\{0\}$ *car* A *et* B *sont en somme directe. Donc* $x=0$ *et les deux sous-espaces vectoriels* A *et* $B\cap C$ *sont bien en somme directe. Montrons que* $C=A+(B\cap C)$*. Soit* $x\in C$*. Comme* $x\in E$ *et que* $E=A\oplus B$*, il existe un unique couple* $(x_A,x_B)\in A\times B$ *tel que* $x=x_A+x_B$*. Comme* $A\subset C$*,* $x_A\in C$ *et comme* C *est un sous-espace vectoriel de* E*,* $x-x_A\in C$*. Il vient donc* $x_B\in C$ *ce qui prouve que* $x_B\in B\cap C$*. On a alors montré que* $x\in A+(B\cap C)$ *et donc* $C=A+(B\cap C)$*. En résumé :* $C=A\oplus(B\cap C)$*.*

Exercice 23.41 ♡♡

On définit dans l'espace E *des suites réelles :*
$$F=\{(x_n)\in E\mid\forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+3}-x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=0\}$$
$$G=\{(x_n)\in E\mid\forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+1}+x_n=0\}$$
$$H=\{(x_n)\in E\mid\forall n\in\mathbb{N},\quad x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0\}$$
Montrer que $F=G\oplus H$*.*

Solution : *On montre d'abord que* $G\subset F$*. Si* $(x_n)\in G$ *et si* $n\in\mathbb{N}$ *alors* $x_{n+1}+x_n=0$ *et* $x_{n+3}+x_{n+2}=0$ *donc* $x_{n+3}-x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=-2(x_{n+2}+x_{n+1})=0$*. On montre aussi que* $H\subset F$*. Soit* $(x_n)\in H$ *et* $n\in\mathbb{N}$*. Alors* $x_{n+3}-x_{n+2}-x_{n+1}+x_n=x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=0$*.*

1. *Montrons que* $G\cap H=\{0_E\}$*. Soit* $(x_n)\in G\cap H$*. Comme* $(x_n)\in G$*, on montre que* $\forall n\in\mathbb{N}$*,* $x_n=(-1)^n x_0$*. En écrivant que* $(x_n)\in H$*, on trouve que* $\forall n\in\mathbb{N}$*,* $(-1)^n x_0[1+2+1]=0$ *ce qui montre que* $x_0=0$ *et par la suite,* $(x_n)=0_E$*.*
2. *Montrons que* $F=G+H$*. On a déjà prouvé que* $G\subset F$ *et* $H\subset F$*. Par conséquent,* $G+H\subset F$*. Il nous faut montrer que* $F\subset G+H$*. Soit* $(x_n)\in F$*. En effectuant une partie recherche, si* $(x_n)=(u_n)+(v_n)$ *avec* $(u_n)\in G$ *et* $(v_n)\in H$*, puisque* $(u_n)\in G$*, il existe* $\lambda\in\mathbb{R}$ *tel que* $(u_n)=\lambda\big((-1)^n\big)$*. En écrivant que* $(v_n)=(x_n)-(u_n)$*, puisque* $(v_n)\in H$*, il faut que* $v_2-2v_1+v_0=0$ *et par conséquent, on trouve que* $\lambda=\dfrac{x_0-2x_1+x_2}{4}$*.*

   Partie rédaction : *Posons* $\forall n\in\mathbb{N}$*,*
$$u_n=\frac{x_0-2x_1+x_2}{4}(-1)^n$$

$$v_n = x_n - \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{4}(-1)^n$$

On a bien $(u_n) + (v_n) = (x_n)$*, et* $(u_n) \in \mathrm{G}$*. Montrons que* $(v_n) \in \mathrm{H}$*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) - (x_0 - 2x_1 + x_2)(-1)^n$$

On montre par récurrence sur n *(car* $(x_n) \in \mathrm{F}$*), que cette quantité est nulle pour tout entier* n*.*

Exercice 23.42 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et deux sous-espaces vectoriels* A *et* B *de* E*. On suppose qu'il existe un supplémentaire* A' *de* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ *dans* A *et un supplémentaire* B' *de* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ *dans* B*. Montrer que*

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \oplus (\mathrm{A}' + \mathrm{B}')$$

Solution :

1. *La somme est directe : montrons que* $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A}' + \mathrm{B}') = \{0_\mathrm{E}\}$*. Soit* $x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A}' + \mathrm{B}')$*. Comme* $x \in \mathrm{A}' + \mathrm{B}'$*, il existe* $(a', b') \in \mathrm{A}' \times \mathrm{B}'$ *tels que* $x = a' + b'$*. Alors* $b' = x - a' \in \mathrm{A}$ *et donc* $b' \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$*. Puisque la somme* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} + \mathrm{B}'$ *est directe, il vient que* $b' = 0_\mathrm{E}$*. On montre de la même manière que* $a' = 0_\mathrm{E}$ *et donc ensuite que* $x = 0_\mathrm{E}$*.*
2. $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + (\mathrm{A}' + \mathrm{B}') \subset \mathrm{A} + \mathrm{B}$ *est claire. Soit* $x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + (\mathrm{A}' + \mathrm{B}')$*. Il existe* $(y, a', b') \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \times \mathrm{A}' \times \mathrm{B}'$ *tels que* $x = (y + a') + b' \in \mathrm{A} + \mathrm{B}$*.*
3. $\mathrm{A} + \mathrm{B} \subset (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + (\mathrm{A}' + \mathrm{B}')$*. Soit* $x \in \mathrm{A} + \mathrm{B}$*. Il existe* $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *tels que* $x = a + b$*. Comme* $\mathrm{A} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{A}'$*,* $\exists (y_1, a') \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \times \mathrm{A}'$ *tels que* $a = y_1 + a'$*. De même,* $\exists (y_2, b') \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \times \mathrm{B}'$ *tels que* $b = y_2 + b'$*. Alors* $x = y_1 + a' + y_2 + b' = \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}} + (\underbrace{a'}_{\in \mathrm{A}'} + \underbrace{b'}_{\in \mathrm{B}'})$ *et donc* $x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + (\mathrm{A}' + \mathrm{B}')$*.*

23.7.6 Applications linéaires

Exercice 23.43 ♡

Vérifier si les applications entre $\mathbb{R}$*-espace vectoriels suivantes sont linéaires ou pas.*

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array} \right.$
2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y + 1 \end{array} \right.$
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array} \right.$
4. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, x + z) \end{array} \right.$
5. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & xyz \end{array} \right.$
6. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array} \right.$
7. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & 2f + f' \end{array} \right.$
8. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$
9. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$
10. $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & (\mathrm{X}^2 + 1)\mathrm{P} \end{array} \right.$

Solution :

1. *Soient* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $u = (x, y), u' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$*. On a :* $f(\alpha u + \alpha' u') = f(\alpha x + \alpha' x', \alpha y + \alpha' y') = (\alpha x + \alpha' x') - (\alpha y + \alpha' y') = \alpha(x - y) + \alpha'(x' - y') = \alpha f(u) + \alpha' f(u')$*.* f *est bien linéaire.*
2. $f(0, 0) = 1$*.* f *n'est donc pas linéaire.*
3. *Soient* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ *et* $u = (x, y), u' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$*. On a :* $f(\alpha u + \alpha' u') = f(\alpha x + \alpha' x', \alpha y + \alpha' y') = ((\alpha x + \alpha' x') + (\alpha y + \alpha' y'), (\alpha x + \alpha' x') - (\alpha y + \alpha' y')) = \alpha(x + y, x - y) + \alpha'(x' + y', x' - y') = \alpha f(u) + \alpha' f(u')$*.* f *est bien linéaire.*
4. *Par un calcul analogue au précédent, on montre que* f *est linéaire.*
5. *Soient* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*. On a :* $f(2(x, y, z)) = f(2x, 2y, 2z) = 2^3 xyz \neq 2f(x, y, z)$*.* f *n'est donc pas linéaire.*
6. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. On a :* $\theta(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha\theta(f) + \beta\theta(g)$*.* θ *est bien linéaire.*
7. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$*. On a, par linéarité de la dérivation :* $\theta(\alpha f + \beta g) = 2(\alpha f + \beta g) + (\alpha f + \beta g)' = \alpha(2f + f') + \beta(2g + g') = \alpha\theta(f) + \beta\theta(g)$*.* θ *est bien linéaire.*

8. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et* $f,g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. *On a, par linéarité de l'intégrale :* $\theta(\alpha f+\beta g)=\int_0^1(\alpha f+\beta g)(t)\,\mathrm{d}t=\alpha\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=\alpha\theta(f)+\beta\theta(g)$. θ *est bien linéaire.*
9. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et* $u,v\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$. *On a :* $\theta(\alpha u+\beta v)=(\alpha u_0+\beta v_0,\alpha u_1+\beta v_1)=\alpha(u_0,u_1)+\beta(v_0,v_1)=\alpha\theta(u)+\beta\theta(v)$. θ *est bien linéaire.*
10. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *et* $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. *On a :* $\theta(\alpha P+\beta Q)=(X^2+1)(\alpha P+\beta Q)=\alpha(X^2+1)P+\beta(X^2+1)Q=\alpha\theta(P)+\beta\theta(Q)$. θ *est bien linéaire.*

Exercice 23.44 ♡

On considère

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt2}{2}(x-y),\frac{\sqrt2}{2}(x+y)\right)\end{array}\right.$$

1. *Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer son automorphisme réciproque.*
3. *Interpréter géométriquement f.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que f est linéaire. Montrons que f est bijective : Soit $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$. Il suffit de montrer qu'il existe un et un seul couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y)=(X,Y)$. Cela revient à résoudre le système :* $\left\{\begin{array}{l}\frac{\sqrt2}{2}(x-y)=X\\ \frac{\sqrt2}{2}(x+y)=Y\end{array}\right.$. *On trouve* $x=\frac{\sqrt2}{2}(X+Y)$ *et* $y=-\frac{\sqrt2}{2}(X-Y)$ *et f est bien bijective. En résumé, f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
2. *En utilisant les calculs de la question précédente, on a :* $f^{-1}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (X,Y) & \longmapsto & \left(\frac{\sqrt2}{2}(X+Y),-\frac{\sqrt2}{2}(X-Y)\right)\end{array}\right.$.
3. *Remarquons que :* $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & \left(\cos\frac{\pi}{4}x-\sin\frac{\pi}{4}y,\cos\frac{\pi}{4}x+\sin\frac{\pi}{4}y\right)\end{array}\right.$. *$f$ est donc la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{4}$. On reconnaît par ailleurs que f^{-1} est celle d'angle $-\frac{\pi}{4}$, ce qui est cohérent.*

23.7.7 Image et noyau d'un endomorphisme

Exercice 23.45 ♡

Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,0,y,0,z,0)\end{array}\right.$

1. *Prouver que f est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau de f.*
3. *Déterminer l'image de f.*

Solution :

1. *Facile.*
2. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a :* $(x,y,z)\in\operatorname{Ker}f\iff f(x,y,z)=0\iff(x,0,y,0,z,0)=(0,0,0,0,0,0)\iff(x,y,z)=(0,0,0)$ *donc* $\operatorname{Ker}f=\{(0,0,0)\}$ *et f est injective.*
3. $\operatorname{Im}f=\left\{f(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{(x,0,y,0,z,0)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}$.

Exercice 23.46 ♡

Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,x+y)\end{array}\right.$

1. *Prouver que f est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de f.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que f est linéaire.*

2. *Montrons que f est bijective. On en déduira que* $\operatorname{Ker} f=\{0\}$ *et que* $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$. *Soit* $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$. *Il suffit de montrer qu'il existe un et seul couple* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x,y)=(X,Y)$. *Pour ce faire, résolvons :* $\begin{cases}2x-y=X\\x+y=Y\end{cases}$. *L'unique solution est* $\left(x=\dfrac{X+Y}{3}, y=\dfrac{2Y-X}{3}\right)$ *et f est donc bien bijective.*

Exercice 23.47 ♡

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$u:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z,x-y+2z)\end{array}\right.$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Solution : *On a* $(x,y,z)\in\operatorname{Ker} u \iff \begin{cases}x+y-z&=0\\x-y+2z&=0\end{cases}\iff\begin{cases}z&=-2x\\y&=-3x\end{cases}$ *donc* $\operatorname{Ker} u=\operatorname{Vect}(1,-3,-2)$. *$u$ n'est donc pas injective. Par ailleurs,* $\operatorname{Im} u=\{(x+y-z,x-y+2z)\mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\{x(1,1)+y(1,-1)+z(-1,2)\mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}=\operatorname{Vect}((1,1),(1,-1),(-1,2))=\mathbb{R}^2$ *car les vecteurs* $(1,1),(1,-1)$ *sont non colinéaires et ils engendrent donc le plan. u est donc surjective.*

Exercice 23.48 ♡♡

Soit $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ P & \longmapsto & (P(0),P(1),P(2))\end{array}\right.$.

1. *Prouver que* $\theta\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}^3\right)$.
2. *Montrer que θ est injective.*
3. *Montrer que θ est surjective.*

Indication 23.23 : Un polynôme de degré $n\geqslant 0$ admet au plus n racines.

Solution :

1. *On vérifie facilement que θ est linéaire.*
2. *Montrons que θ est injective. Soit* $P\in\operatorname{Ker}\theta$. *On a donc à la fois :* $\deg P\leqslant 2$ *et* $P(0)=P(1)=P(2)=0$. *Le polynôme P est donc un polynôme de degré $\leqslant 2$ qui admet au moins 3 racines. Ceci n'est possible que si $P=0$. Donc* $\operatorname{Ker}\theta=\{0\}$ *et θ est injective.*
3. *Avec les outils du chapitre « Dimension d'un espace vectoriel », il sera très facile de montrer que θ est surjective grâce à la formule du rang et à un raisonnement sur les dimensions des espaces ici considérés. En attendant de connaître ces résultats, il faut procéder à la main : soit* $(s,t,u)\in\mathbb{R}^3$. *On cherche un polynôme* $P=aX^2+bX+c$ *tel que* $(P(0),P(1),P(2))=(s,t,u)$. *Ceci amène le système :* $\begin{cases}c=s\\a+b+c=t\\4a+2b+c=u\end{cases}$ *qui admet comme unique solution :* $(s/2-t+u/2,-3/2s+2t-u/2,s)$. *L'application θ est donc surjective. En résumé, θ est un isomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23.49 ♡

Soit $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]\\ P & \longmapsto & \theta(P)=P(X+1)-P(X)\end{array}\right.$.

1. *Prouver que θ est linéaire.*
2. *θ est-elle bijective ?*

Solution :

1. *On vérifie facilement que θ est linéaire.*
2. *L'image d'un polynôme constant par θ est un polynôme nul. Par suite, le noyau de θ ne contient pas que le vecteur nul et donc θ n'est pas injective.*

Exercice 23.50 ♡

Soit $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\\ P & \longmapsto & P'\end{array}\right.$

1. *Prouver que* θ *est linéaire.*
2. *Calculer le noyau de* θ.
3. *Calculer l'image de* θ.

Solution : *On montre facilement que* θ *est linéaire, que* $\operatorname{Ker}\theta$ *est le sous ensemble des polynômes constants de* $\mathbb{R}_n[X]$ *et que* $\operatorname{Im}\theta$ *est donné par* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 23.51 ♡

Soit

$$\theta : \begin{cases} \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}.$$

1. *Prouver que* θ *est une forme linéaire.*
2. θ *est-elle injective ?*
3. *Démontrer que* θ *est surjective.*

Solution :

1. *On montre facilement que* θ *est linéaire. Comme* θ *est à valeur dans* $\mathbb{R}$*, c'est une forme linéaire.*
2. *On a :* $\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$ *donc* $\mathrm{id}_{[-1,1]} \in \operatorname{Ker}\theta$. θ *n'est donc par injective.*
3. *Montrons que* θ *est surjective : soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Montrons qu'il existe* $f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ *telle que* $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha$. *Il suffit de considérer par exemple la fonction constante* $f : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha}{2} \end{cases}$. *On a bien* $\theta(f) = \alpha$. θ *est donc surjective.*

Exercice 23.52 ♡

Soit

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' - 2f' + f \end{cases}$$

1. *Prouver que* φ *est un endomorphisme.*
2. *Calculer* $\operatorname{Ker}\varphi$.
3. φ *est-elle injective ?*

Solution :

1. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Utilisant la linéarité de la dérivation :* $\varphi(\alpha + \beta g) = (\alpha + \beta g)'' - 2(\alpha + \beta g)' + (\alpha + \beta g) = \alpha(f'' - 2f' + f) + \beta(g'' - 2g' + g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$. φ *est bien linéaire.*
2. *Soit* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $f \in \operatorname{Ker} f$ *si et seulement si* $f'' - 2f' + f = 0$. *En appliquant le théorème de résolution des équations différentielles linéaires du second degré à coefficients constants, on obtient :* $\operatorname{Ker} f = \mathrm{V}ect\left(t \mapsto te^t, t \mapsto e^t\right)$.
3. *Il est alors clair que* φ *n'est pas injective.*

Exercice 23.53 ♡

Soient X *un ensemble non vide et* $a \in X$. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et*

$$\theta : \begin{cases} \mathscr{F}(X,E) & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f(a) \end{cases}$$

1. *Prouver que* θ *est une application linéaire.*
2. *Déterminer l'image de* θ_a *et dire si* θ *est surjective.*
3. *Déterminer le noyau de* θ_a *et dire si* θ *est injective.*

Solution :

1. *On montre facilement que* θ *est linéaire.*
2. *Soit* $v \in E$. *On veut montrer qu'il existe une application* $f \in \mathscr{F}(X,E)$ *tel que :* $f(a) = v$. *Il suffit de considérer l'application constante* $f : \begin{cases} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u \end{cases}$. θ *est donc surjective.*
3. *Il est clair que* $\operatorname{Ker}\theta_a = \left\{f \in \mathscr{F}(X,E) \mid f(a) = 0\right\}$. *L'application* θ *n'est donc pas injective.*

Exercice 23.54 ♡♡

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (1+ia)z + (1-ia)\bar{z} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et le représenter dans le plan complexe (on prendra $a = 1$).*
3. *Déterminer $\operatorname{Im} f$ et le représenter dans le plan complexe (lorsque $a = 1$).*
4. *Lorsque $a = 1$, trouver les antécédents de 1 par f et représenter l' ensemble $f^{(-1)}(\{1\})$.*

Solution :

1. *On vérifie sans peine que f est linéaire.*
2. *Soit $z \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(z) = 0$. En notant $u = 1 + ia$ et en remarquant que $f(z) = (uz) + \overline{(uz)} = 2\operatorname{Re}(uz)$, on obtient que $\operatorname{Re}(uz) = 0$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $uz = i\lambda$, et donc $z = \dfrac{i\lambda}{u} = \lambda\left(\dfrac{a}{1+a^2} + \dfrac{i}{1+a^2}\right)$. On vérifie que réciproquement, tout complexe de cette forme est dans $\operatorname{Ker} f$. Par conséquent,*

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(a+i)}$$

3. *Soit $Z \in \mathbb{C}$. Cherchons $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = Z$. Puisque $Z = 2\operatorname{Re}(uz)$, il faut nécessairement que $Z \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si $Z \in \mathbb{R}$, alors $f(Z/(2u)) = \operatorname{Re}(2uZ/(2u)) = Z$. Par conséquent, $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}}$.*
4. *Lorsque $Z = 1$ et $a = 1$, on trouve que $z = \dfrac{1}{2(1+i)} + \dfrac{i\lambda}{2(1+i)} = \dfrac{(1-i)}{4} + \lambda\dfrac{1+i}{4}$. C'est une droite affine passant par le point $\dfrac{1-i}{4}$ et parallèle à la droite vectorielle $\operatorname{Ker} f$.*

Exercice 23.55 ♡♡

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On définit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi(f) \end{array} \right. \quad \text{où } \varphi(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} f(x) & \text{si} x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in L(E)$.*
2. *Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.*

Solution : *En utilisant les équivalents usuels (ou plus simplement en écrivant le taux d'accroissement de sh en 0), on montre que $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. La fonction $\varphi(f)$ est donc continue en 0 et donc $\varphi(f) \in E$.*
Cherchons $\operatorname{Ker}\varphi$: Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\forall x \neq 0$, $\varphi(f)(x) = 0$ et donc $\forall x \neq 0$, $f(x) = 0$ et comme f est continue en 0, il vient également que $f(0) = 0$. Par conséquent, $f = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$.
Montrons que $\operatorname{Im}\varphi = E$. Soit $g \in E$. Définissons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{sh} x} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

On vérifie que f est continue en 0, donc que $f \in E$ et que $\varphi(f) = g$. Par conséquent, $\operatorname{Im}\varphi = E$.
Donc $\boxed{\varphi \in GL(E)}$.

Exercice 23.56 ♡

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$. Montrer que :

1. $\operatorname{Ker}(gof) = f^{(-1)}(\operatorname{Ker} g)$
2. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$
3. $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$

Solution :

1. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$ *alors comme* $g\left(f(x)\right) = 0$, $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ *et donc* $x \in f^{-1}\left(\operatorname{Ker} g\right)$. *Réciproquement, si* $x \in f^{-1}\left(\operatorname{Ker} g\right)$ *alors* $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ *et* $g\left(f(x)\right) = 0$ *ce qui s'écrit aussi* $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$.
2. *Si* $x \in \operatorname{Ker} f$ *alors* $f(x) = 0$ *et donc* $g\left(f(x)\right) = g(0) = 0$. *Alors* $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$.
3. *Si* $y \in \operatorname{Im} g \circ f$ *alors il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $g\left(f(x)\right) = y$. *Il est alors clair que* $y \in \operatorname{Im} g$ *(un antécédent de* y *par* g *est* $f(x)$*).*

Exercice 23.57 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathrm{L(E)}$ *un endomorphisme. On pose*

$$\mathrm{P} = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = x\}$$

1. *Montrer que* P *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Montrer que la somme* $\operatorname{Ker} u + \mathrm{P}$ *est directe.*

Solution :

1. *Il suffit de remarquer que* $\mathrm{P} = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$ *et on obtient immédiatement que* P *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Montrons que* $\mathrm{P} \cap \operatorname{Ker} u = \{0_\mathrm{E}\}$. *Soit* $x \in \mathrm{P} \cap \operatorname{Ker} u$, *on a* $u(x) = x$ *et* $u(x) = 0$ *d'où* $x = 0$.

Exercice 23.58 ♡

Soient f *et* g *deux endomorphismes d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E.

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \iff gof = 0$.
2. *Montrer que* $fog = gof \implies \operatorname{Ker} g$ est stable par f.
3. *Montrer que* $gof = \mathrm{id} \implies f$ *injective.*

Solution :

1. *Si* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ *alors pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ *donc* $g\left(f(x)\right) = 0$. *Donc* $gof = 0$. *Réciproquement, si* $g \circ f = 0$ *et si* $y \in \operatorname{Im} f$ *alors il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = f(x)$ *et* $g\left(y\right) = g\left(f(x)\right) = 0$ *donc* $y \in \operatorname{Ker} f$. *On a alors bien* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
2. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} g$. *Alors* $g\left(f(x)\right) = f\left(g(x)\right) = f(0) = 0$ *donc* $f(x) \in \operatorname{Ker} g$ *et* $\operatorname{Ker} g$ est stable par f.
3. *Si* $gof = \mathrm{id}$ *et si* $x \in \operatorname{Ker} f$ *alors* $0 = g(0) = g \circ f(x) = \mathrm{id}(x) = x$. *Donc* $x = 0$ *et* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. *On en déduit que* f *est injective.*

Exercice 23.59 ♡♡

Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. *Montrer que pour toute partie* A *de* E, $f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A})) = \operatorname{Vect}\left(f(\mathrm{A})\right)$.

Solution : *Effectuons un raisonnement par double inclusion :*

– $\boxed{\supset}$ $\operatorname{Vect}(\mathrm{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* E *qui contient* A. $f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A}))$ *est donc un sous-espace vectoriel de* F *qui contient* $f(\mathrm{A})$ *car l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. Comme* $\operatorname{Vect}\left(f(\mathrm{A})\right)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* F *contenant* $f(\mathrm{A})$, *on a nécessairement* $f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A})) \supset \operatorname{Vect}\left(f(\mathrm{A})\right)$

– $\boxed{\subset}$ *Soit* $y \in f(\operatorname{Vect}(\mathrm{A}))$. *Il existe* $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ *une famille de vecteurs de* A *et* $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ *une famille de scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que* $y = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$. *Par linéarité, on a :* $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$. *Donc* y *est élément de* $\operatorname{Vect}\left(f(\mathrm{A})\right)$.

Exercice 23.60 ♡♡

On considère trois K*-espaces vectoriels* E,F,G *et deux applications* $\mathrm{E} \xrightarrow{u} \mathrm{F} \xrightarrow{v} \mathrm{G}$ *telles que :*

1. *l'application* u *est linéaire et surjective ;*
2. *l'application* vou *est linéaire de* E *vers* G.

Montrer que l'application v *est linéaire.*

Solution : *Montrons que* v *est linéaire. Soit* $(y_1, y_2) \in \mathrm{F}^2$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathrm{K}^2$. *Puisque* u *est surjective, il existe* $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2$ *tels que* $y_1 = u(x_1)$ *et* $y_2 = u(x_2)$. *Alors* $v\left(\lambda y_1 + \mu y_2\right) = v\left(\lambda u(x_1) + \mu u(x_2)\right) = v\left(u(\lambda x_1 + \mu x_2)\right)$ *(car* u *est linéaire)* $= \lambda v \circ u(x_1) + \mu v \circ u(x_2)$ *(car* $v \circ u$ *est linéaire)* $= \lambda v(y_1) + \mu v(y_2)$.

Exercice 23.61 ♡♡

Soient trois $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* E, F, G *et deux applications linéaires* $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$. *Montrer que :*

1. $\operatorname{Ker}(gof) = \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$;
2. $\operatorname{Im}(gof) = \operatorname{Im} g \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

Solution :

1. (a) $(i) \implies (ii)$: *Soit* $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$. *Comme* $y \in \operatorname{Ker} g$, $g \circ f(x) = 0$ *et donc* $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. *Donc* $x \in \operatorname{Ker} f$ *et par conséquent,* $f(x) = y = 0$;

   (b) $(ii) \implies (i)$: *On a toujours* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f$ *(le vérifier !). Montrons ici que* $\operatorname{Ker} g \circ f \subset \operatorname{Ker} f$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$. *Alors* $g\big(f(x)\big) = 0$. *Mais en posant* $y = f(x)$, $y \in \operatorname{Im} f$ *et* $y \in \operatorname{Ker} g$ *et d'après* (ii), $y = 0$. *Donc* $f(x) = 0$ *ce qui montre que* $x \in \operatorname{Ker} f$.

2. (a) $(i) \implies (ii)$: *Soit* $y \in F$. *Posons* $z = g(y) \in \operatorname{Im} g$. *Comme* $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g \circ f$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $z = g \circ f(x)$. *On écrit alors*

   $$y = \big(y - f(x)\big) + f(x)$$

   avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$ *et puisque* $g\big(y - f(x)\big) = g(y) - g \circ f(x) = 0$, $\big(y - f(x)\big) \in \operatorname{Ker} g$;

   (b) $(ii) \implies (i)$: *On a toujours* $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ *(le vérifier !). Montrons donc que* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} g \circ f$. *Soit* $z \in \operatorname{Im} g$. *Il existe* $y \in F$ *tel que* $z = g(y)$. *Mais puisque* $F = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$, *il existe* $(y_1, y_2) \in \operatorname{Ker} g \times \operatorname{Im} f$ *tels que* $y = y_1 + y_2$. *Comme* $y_2 \in \operatorname{Im} f$, *il existe* $x_2 \in E$ *tel que* $y_2 = f(x_2)$. *Alors* $z = g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2) = g \circ f(x_2) \in \operatorname{Im} g \circ f$.

Exercice 23.62 ♡♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* u *un endomorphisme de* E.

1. *On suppose dans cette question que* $u^2 = 0$.
   (a) *Montrer que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
   (b) *Montrer que* $\operatorname{id}_E + u$ *est un automorphisme de* E.
2. (a) *Montrer que :* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.
   (b) *Montrer que :* $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. (a) *Soit* $y \in \operatorname{Im} u \cdot$ *Il existe donc* $x \in U$ *tel que* $u(x) = y$. *Par conséquent :*$u\big(y\big) = u \circ u(x) = 0$. *Donc* $y \in \operatorname{Ker} u$.

   (b) *On a* $(\operatorname{id} + u) \circ (\operatorname{id} - u) = (\operatorname{id} - u) \circ (\operatorname{id} + u) = \operatorname{id}$ *donc* $\operatorname{id} + u$ *est bijective d'inverse* $\operatorname{id} - u$. $\operatorname{id} + u$ *est donc un automorphisme de* E.

2. (a) – $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$. *Si* $x \in \operatorname{Ker} u$ *alors naturellement* $x \in \operatorname{Ker} u^2$. *Réciproquement, si* $x \in \operatorname{Ker} u^2$ *alors* $u(x) \in \operatorname{Im} u$ *et* $u(u(x)) = 0$. *Donc, par application de l'hypothèse* $u(x) = 0$, *donc* $x \in \operatorname{Ker} u$.
   – $\boxed{\Leftarrow}$ *Si on a :* $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ *et si* $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = u(x)$ *et* $u\big(y\big) = u(u(x)) = 0$. *Donc* $x \in \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ *et* $y = \imath(x) = 0$.

   (b) – $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E$. *Soit* $y \in \operatorname{Im} u$. *Alors il existe* $x \in E$ *tel que* $u(x) = y$. *Appliquant l'hypothèse, il existe* $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Im} u$ *tel que* $x = x_1 + x_2$. *On a alors* $y = u(x) = u(x_2)$. *Comme* $x_2 \in \operatorname{Im} u$, *on a :* $y \in \operatorname{Im} u^2$. *Réciproquement, si* $y \in \operatorname{Im} u^2$ *alors évidemment,* $y \in \operatorname{Im} u$.
   – $\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons maintenant que :* $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$. *Si* $y \in E$ *il existe* $x \in E$ *tel que* $u\big(y\big) = u(u(x))$. *Comme* $u\big(y - u(x)\big) = u\big(y\big) - u^2(x) = u\big(y\big) - u\big(y\big) = 0$, $y - u(x) \in \operatorname{Ker} u$ *et on peut décomposer* y *en la somme d'un vecteur de* $\operatorname{Ker} u$ *et d'un vecteur de* $\operatorname{Im} u$ *:* $y = y - u(x) + u(x)$. *Donc* $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E$.

Exercice 23.63 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$ *espace vectoriel* E *et deux endomorphismes* $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ *qui commutent :*

$$u \circ v = v \circ u$$

1. *Montrer que* $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker} u$ *sont stables par* v, *c'est à dire*

   $$v(\operatorname{Ker} u) \subset \operatorname{Ker} u \text{ et } v(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u$$

2. *Si l'on suppose de plus que* $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v$, *montrer que*

   $$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v \text{ et } \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

Solution :

1. *Montrons que* $\operatorname{Ker} u$ *est stable par* v*. Soit* $x \in \operatorname{Ker} u$*, montrons que* $v(x) \in \operatorname{Ker} u$*. Pour cela, on calcule*

$$u\big(v(x)\big) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v\big(u(x)\big) = v(0_E) = 0_E$$

Donc on a bien $v(x) \in \operatorname{Ker} u$*.*
Montrons que $\operatorname{Im} u$ *est stable par* v*. Soit* $y \in \operatorname{Im} u$*. Montrons que* $v(y) \in \operatorname{Im} u$*.*
Comme $y \in \operatorname{Im} u$*,* $\exists x \in E$ *tel que* $y = u(x)$*. Alors*

$$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$$

2. *Montrons que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$ *: Soit* $y \in \operatorname{Im} u$ *;* $\exists x \in E$ *tel que* $y = u(x)$*. Comme* $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$*,* $\exists (x_u, x_v) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker} v$ *tel que*

$$x = x_u + x_v$$

Mais alors

$$v(y) = v\big(u(x_u + x_v)\big) = v\big(u(x_v)\big) = v \circ u(x_v) = u \circ v(x_v) = u(0_E) = 0_E$$

et donc $y \in \operatorname{Ker} v$*.*
L'autre inclusion se prouve de la même façon.

Exercice 23.64 ♡♡♡

Soit un K-espace vectoriel E *et un endomorphisme* $u \in L(E)$ *tel que* $\forall x \in E$*, le système de vecteurs* $(x, u(x))$ *est lié. Montrer que l'application* u *est une homothétie.*

Solution : *Par hypothèse, pour tout* $x \in E$*, il existe* $\lambda(x) \in K$ *tel que* $u(x) = \lambda(x).x$*. Il faut montrer que l'application* $\lambda : E \longrightarrow K$ *est constante. Soient deux vecteurs non nuls* $(x, y) \in E^2$*. Nous allons montrer que* $\lambda(x) = \lambda(y)$*. Comme l'application* u *est linéaire, on a* $u(x+y) = u(x) + u(y)$ *et donc* $\lambda(x+y).(x+y) = \lambda(x).x + \lambda(y).y$*. Donc*

$$\big(\lambda(x+y) - \lambda(x)\big).x + \big(\lambda(x+y) - \lambda(y)\big).y = 0_E \tag{23.1}$$

Étudions deux cas :

– *Si le système* (x, y) *est libre, on tire de la relation (23.1), que* $\lambda(x) = \lambda(x+y) = \lambda(y)$*.*
– *Si le système* (x, y) *est lié, l'un des vecteurs est combinaison linéaire de l'autre. Si par exemple, il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ *tel que* $y = \alpha.x$*, comme que* u *est linéaire,* $u(y) = u(\alpha.x) = \alpha.u(x)$ *et donc*

$$\lambda(y).y = \big(\alpha \times \lambda(x)\big).x$$

d'où puisque $y = \alpha.x$*,*

$$\big(\alpha \times (\lambda(y) - \lambda(x))\big).x = 0_E$$

et comme $x \neq 0_E$*, et* $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$*, on obtient également dans ce cas que* $\lambda(x) = \lambda(y)$*.*

On a donc montré que la fonction λ *était constante sur* $E \setminus \{0_E\}$ *: il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$*,* $\lambda(x) = \lambda$*. On peut poser* $\lambda(0_E) = \lambda$ *également et donc* $u = \lambda.\mathrm{id}_E$*. Par conséquent, l'endomorphisme* u *est une homothétie vectorielle.*

Exercice 23.65 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $f \in L(E)$ *un endomorphisme. On définit*

$$\varphi_f : \begin{cases} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longrightarrow & f \circ u - u \circ f \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\varphi_f \in L(L(E))$*.*
2. *Montrer que si* f *est nilpotent, alors* φ_f *est aussi nilpotent.*

Solution :

1. *Soient* $u, v \in L(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. $\varphi_f\big(\alpha u + \beta v\big) = f \circ \big(\alpha u + \beta v\big) - \big(\alpha u + \beta v\big) \circ f = \alpha\big(f \circ u - u \circ f\big) + \beta\big(f \circ v - v \circ f\big) = \alpha \varphi_f(u) + \beta \varphi_f(v)$ *par linéarité de* f*. Donc* φ_f *est linéaire.*
2. *Soit* $u \in L(E)$*. On a* $\varphi_f^2(u) = \varphi_f\big(f \circ u - u \circ f\big) = f^2 \circ u - 2f \circ u \circ f + u \circ f^2$*, puis* $\varphi_f^3(u) = f^3 \circ u - 2f^2 \circ u \circ f + f \circ u \circ f^2 - f^2 \circ u \circ f + 2f \circ u \circ f^2 - u \circ f^3 = f^3 \circ u - 3f^2 \circ u \circ f + 3f \circ u \circ f^2 - u \circ f^3$*. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Supposons que*

$\varphi_f^n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^k$. Montrons que la formule est encore valable au rang $n+1$. On a (pour simplifier les calculs, on n'écrit pas les symboles de composition $\circ$) :

$$\begin{aligned}
\varphi_f^{n+1}(u) &= \varphi_f\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(f^{n-k+1} u f^k - f^{n-k} u f^{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k+1} u f^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k+1} u f^k - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{k-1} f^{n-k+1} u f^k \\
&= f^{n+1} u + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{n+1-k} u f^k + (-1)^{n+1} u f^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k f^{n+1-k} u f^k
\end{aligned}$$

d'après la relation de Pascal. La formule est donc vraie au rang $n+1$. On termine en appliquant le théorème de récurrence.
Si p est l'indice de nilpotence de f, alors en posant $n = 2p$, et en considérant $k \in [\![0, n]\!]$, soit $k \geqslant p$ soit $n - k \geqslant p$. Donc dans tous les cas, $f^{n-k} u f^k = 0$ et comme $\varphi_f^n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{n-k} u f^k$, il vient, pour tout $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ que $\varphi_f^n(u) = 0$ et φ_f est bien nilpotent..

Exercice 23.66 ♡♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. On définit :

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{L}(\mathrm{E}) \\ f & \longmapsto & g o f \end{cases}$$

On admettra que dans un espace vectoriel, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

1. *Montrer que φ est linéaire*
2. *Montrer que φ est injective si et seulement si g est injective*
3. *Montrer que φ est bijective si et seulement si g est bijective.*

Solution :

1. Facile.
2. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que φ soit injective. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $g(x_0) = 0$. Par l'absurde, supposons que $x_0 \neq 0$. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(x_0)$ et considérons un supplémentaire G de F dans E. Considérons aussi l'application linéaire $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ donnée par
$$f : \begin{cases} \mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = \alpha x_0 + x_\mathrm{G} & \longmapsto & \alpha x_0 \end{cases}.$$
Alors $\varphi(f) = g \circ f = 0 = \varphi(0)$. Comme φ est injective, il vient que $f = 0$ ce qui n'est pas possible. Donc $x_0 = 0$ et g est injective.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si g est injective et s'il existe $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ telle que $\varphi(f) = 0$ alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, $g \circ f(x) = 0$ et donc pour tout $x \in \mathrm{E}$, $f(x) \in \operatorname{Ker} g = \{0\}$. Il vient alors que $\forall x \in \mathrm{E}$, $f(x) = 0$ autrement dit que $f = 0$. En conclusion φ est injective..
3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que φ est surjective. Soit $y \in \mathrm{E}$. Il existe $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ tel que $\varphi(f) = \mathrm{id}$. Donc $g(f(y)) = y$ et $y \in \operatorname{Im} g$. On a prouvé que g est surjective.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si g est bijective, montrons qu'il en est de même de φ. On sait déjà que φ est injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Soit $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. Comme g est bijective, pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un unique $x_f \in \mathrm{E}$ tel que $g(x_f) = f(x)$. On définit ainsi une application $f_0 : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x_f \end{cases}$. Cette application est linéaire. En effet, si

$x, x' \in E$ *et* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ *alors* $f_0(\alpha x + \alpha' x') = (\alpha x + \alpha' x')_f$ *avec* $(\alpha x + \alpha' x')_f$ *tel que*

$$\begin{aligned} g\left((\alpha x+\alpha' x')_f\right) &= f(\alpha x+\alpha' x') \text{ par définition de } (\alpha x+\alpha' x')_f \\ &= \alpha f(x)+\alpha' f(x') \text{ par linéarité de } f \\ &= \alpha g(x_f)+\alpha' g(x') \text{ par définition de } x_f \text{ et } x'_f \\ &= g\left(\alpha x_f+\alpha' x'_f\right) \text{ par linéarité de } g \end{aligned}$$

donc par injectivité de g, $(\alpha x + \alpha' x')_f = \alpha x_f + \alpha' x'_f$ *et* $f_0(\alpha x + \alpha' x') = \alpha f_0(x) + \beta f_0(x')$. *On en déduit que* $f_0 \in L(E)$. *De plus, par construction,* $g \circ f_0 = f$ *et* φ *est bien surjective.*

Exercice 23.67 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *On pose* $G = E \setminus F$. *Soit* $f \in L(E)$ *tel que*

$$\forall x \in G, f(x) = 2x$$

Montrer que $f = 2\,\text{id}$.

Solution : *Soient* $x \in F$ *et* $x' \in G$. *Alors* $x + x' \in G$ *car sinon,* $x + x' \in F$ *et comme* $x \in F$ *et que* F *est un sous-espace vectoriel de* E, $x' \in F$ *ce qui n'est pas possible.*
Par linéarité de f, $f(x+x') = f(x) + f(x')$ *et donc* $2(x+x') = f(x) + 2x'$. *On en déduit que* $f(x) = 2x$ *et donc que* $f_{|F} = 2\,\text{id}$. *En conclusion,* $f = 2\,\text{id}$.

Exercice 23.68 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f \in L(E)$. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^p \implies \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^n$ *pour* $n \in [\![1, p]\!]$.
2. *Montrer que* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^p \implies \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^n$ *pour* $n \in [\![1, p]\!]$.

Solution :

1. *On vérifie facilement que* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} f^p$. *Donc si* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^p$ *les inclusions précédentes deviennent des égalités.*
2. *De même, il est clair que* $\operatorname{Im} f^p \subset \operatorname{Im} f^{p-1} \subset \ldots \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ *donc si* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^p$, *ces inclusions deviennent là aussi des égalités.*

Exercice 23.69 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in L(E)$.

1. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \implies \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^n$ *pour* $n \geqslant 2$.
2. *Montrer que* $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1} \implies \operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$ *pour* $n \geqslant p$.

Solution :

1. *On effectue un raisonnement par récurrence. La propriété est, par hypothèse, vraie au rang* 2. *Supposons qu'elle est vraie au rang* n *pour* $n \geqslant 2$ *et prouvons là au rang* $n+1$. *On sait déjà que* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$. *Si* $x \in \operatorname{Ker} f^{n+1}$ *alors* $f^n(f(x)) = 0$ *et donc* $f(x) \in \operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f$. *Donc* $f^2(x) = 0$ *et* $x \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. *La propriété est alors aussi vraie au rang* $n+1$. *On termine en appliquant le théorème de récurrence.*
2. *Montrons par une récurrence sur* $n \geqslant p+1$ *que* $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$. *La propriété est vraie par hypothèse au rang* $p+1$. *Soit* $n \geqslant p+1$. *Supposons que* $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^p$ *et montrons que* $\operatorname{Im} f^{n+1} = \operatorname{Im} f^p$. *On a toujours* $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^p$. *Si* $y \in \operatorname{Im} f^p$ *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f^p(x)$. *Comme* $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$, *il existe* $x' \in E$ *tel que* $y = f^p(x) = f^{p+1}(x')$. *Mais d'après l'hypothèse de récurrence , il existe* $x'' \in E$ *tel que* $f^n(x'') = f^p(x'')$. *Donc* $y = f(f^n(x)) = f^{n+1}(x'')$ *et donc* $\operatorname{Im} f^p \subset \operatorname{Im} f^{n+1}$. *On termine en appliquant le théorème de récurrence.*

Exercice 23.70 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f \in L(E)$. *On pose*

$$N = \cup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} f^i$$

1. *Montrer que* $N = \operatorname{Ker} f \implies \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ *est directe.*
2. *Etudier la réciproque.*

Solution :

1. *Supposons que* $N = \operatorname{Ker} f$. *Alors pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker} f^i \subset \operatorname{Ker} f$. *Comme par ailleurs, on a toujours* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^i$, *il vient que pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker} f^i = \operatorname{Ker} f$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. *Alors il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $x = f(x_0)$ *et par ailleurs* $f(x) = 0$. *Comme* $f\left(f(x_0)\right) = 0$ *et que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$, *il vient que* $x_0 \in \operatorname{Ker} f$ *et donc* $x = 0$. *La somme est bien directe.*
2. *Supposons que* $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ *soit directe. Remarquons qu'on a toujours* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} f^2$. *Alors* $f\left(f(x)\right) = 0$. *Mais* $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ *donc* $f(x) = 0$. *Alors* $x \in \operatorname{Ker} f$. *On a montré que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. *On en déduit que* $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f^3$, *... et donc que* $N = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 23.71 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f, g \in L(E)$. *On suppose que*

$$fogof = f, \quad \text{et} \quad gofog = g$$

Montrer que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$$

Solution : *Soit* $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$. *Alors* $f(x) = 0$ *et il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $x = g(x_0)$. *Donc* $g \circ f \circ g(x_0) = x$ *mais on a aussi* $g \circ f \circ g(x_0) = g \circ f(x) = 0$ *donc* $x = 0$ *et* $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ *sont en somme directe.*
Soit $x \in E$. *On peut écrire* $x = x - g \circ f(x) + g \circ f(x)$ *et comme* $f\left(x - g \circ f(x)\right) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$, *il vient que* $x - g \circ f(x) \in \operatorname{Ker} f$. *Par ailleurs, il est clair que* $g \circ f(x) \in \operatorname{Im} g$ *donc* $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.
En conclusion, $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont bien supplémentaires dans* E.

Exercice 23.72 ♡♡

Soit $f \in L(E)$. *On note*

$$A(f) = \{g \in L(E) \mid f \circ g \circ f = 0_{L(E)}\}$$

1. *Montrer que* $A(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* $L(E)$.
2. *Montrer que si* f *est injective, alors*
$$A(f) = \{g \in L(E) \mid \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g\}$$
3. *Montrer que si* f *est surjective, alors*
$$A(f) = \{g \in L(E) \mid \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f\}$$

Solution :

1. *L'endomorphisme nul est clairement dans* $A\left(f\right)$ *donc* $A\left(f\right)$ *n'est pas vide. Soient* $g, g' \in A\left(f\right)$ *et* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. *Alors par linéarité de* f *:*
$$f \circ \left(\alpha g + \alpha' g'\right) \circ f = \alpha f \circ g \circ f + \alpha' f \circ g \circ f = 0$$
car $g, g' \in A\left(f\right)$. *Donc* $A\left(f\right)$ *est stable par combinaison linéaire. C'est bien un sous-espace vectoriel de* $L(E)$.
2. *Supposons que* f *soit injective. Si* $g \in L(E)$ *est tel que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ *alors pour tout* $x \in E$, $f \circ g \circ f(x) = 0$ *(car* $f(x) \in \operatorname{Ker} g$*) donc* $g \in A\left(f\right)$. *Réciproquement, si* $g \in A\left(f\right)$ *alors pour tout* $x \in E$, $g\left(f(x)\right) \in \operatorname{Ker} f$. *Mais comme* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, *il vient que* $g\left(f(x)\right) = 0$ *et donc que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
3. *Supposons maintenant que* f *est surjective. Si* $g \in L(E)$ *est tel que* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ *alors pour tout* $x \in E$, $f \circ g \circ f(x) = 0$ *car* $g\left(f(x)\right) \in \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$. *Donc* $g \in A\left(f\right)$. *Réciproquement, si* $g \in A\left(f\right)$ *et si* $y \in \operatorname{Im} g$ *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $g(x) = y$ *et comme* f *est surjective, il existe* $x' \in E$ *tel que* $x = f\left(x'\right)$. *Alors* $g \circ f\left(x'\right) = y$. *Mais* $f\left(y\right) = f \circ g \circ f\left(x'\right) = 0$ *car* $f \circ g \circ f = 0$. *Donc* $y \in \operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.

23.7.8 Endomorphismes inversibles

Exercice 23.73 ♡

Soient un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et deux endomorphismes* $u, v \in L(E)$.

1. *Développer* $(u + v)^2$.
2. *Développer* $(\mathrm{id} - u) \circ (\mathrm{id} + u)$.
3. *Si* $u^2 = 0$, *montrer que* $(\mathrm{id} - u)$ *est bijective.*

Solution :

1. On utilise la linéarité de u et v et on trouve : $(u+v)^2 = u^2 + u\circ v + v\circ u + v^2$. Attention, en général, $u\circ v \neq v\circ u$.
2. De même $(\mathrm{id}-u)\circ(\mathrm{id}+u) = \mathrm{id}-u^2$
3. Si $u^2 = 0$, alors $(\mathrm{id}-u)\circ(\mathrm{id}+u) = (\mathrm{id}+u)\circ(\mathrm{id}-u) = \mathrm{id}$ et $(\mathrm{id}-u)$ est bijective d'inverse $\mathrm{id}+u$.

Exercice 23.74 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $(f-\mathrm{id})o(f+2\,\mathrm{id}) = 0$. Montrer que f est inversible.

Solution : Comme $(f-\mathrm{id})o(f+2\,\mathrm{id}) = 0$ et que f est linéaire, il vient que $f^2+f-2\,\mathrm{id} = 0$ ce qui s'écrit aussi $f\circ\left(\frac{\mathrm{id}+f}{2}\right) = \mathrm{id}$ ou encore $\left(\frac{\mathrm{id}+f}{2}\right)\circ f = \mathrm{id}$. Donc f est inversible d'inverse $\boxed{f^{-1} = \frac{\mathrm{id}+f}{2}}$.

Exercice 23.75 ♡

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe des scalaires $a_0,\dots,a_n$ tels que $a_0\,\mathrm{id}+a_1u+\dots+a_nu^n = 0$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. Montrer que u est un automorphisme de E.

Solution : Comme $a_0\,\mathrm{id}+a_1u+\dots+a_nu^n = 0$, on a $-(a_nu^n+\ldots+a_1u) = a_0\,\mathrm{id}$ et $u\left(-\frac{a_n}{a_0}u^{n-1}-\ldots-\frac{a_1}{a_0}\mathrm{id}\right) = \left(-\frac{a_n}{a_0}u^{n-1}-\ldots-\frac{a_1}{a_0}\mathrm{id}\right)u = \mathrm{id}$ donc u est inversible et $\boxed{u^{-1} = -\left(\frac{a_n}{a_0}u^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{a_0}\mathrm{id}\right)}$.

Exercice 23.76 ♡

On considère les deux endomorphismes de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ suivants :

$$u : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array}\right. \quad \text{et } v : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array}\right.$$

1. *Calculer $u\circ v$, $v\circ u$, u^2 et v^2. Conclusion ?*
2. *Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id}-u)$ est inversible et déterminer son inverse.*

Solution :

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on calcule

   – $u\circ v(x,y) = u(0,x) = (x,0)$.
   – $v\circ u(x,y) = v(y,0) = (0,y)$.
   – $u^2(x,y) = u(y,0) = (0,0)$.
   – $v^2(x,y) = v(0,x) = (0,0)$.

   donc $u\circ v$ est la projection sur les abscisses, $v\circ u$ est la projection sur les ordonnées et $u^2 = v^2 = 0$.
2. On utilise l'exercice 23.73. Comme $u^2 = 0$, $\mathrm{id}-u$ est inversible et d'inverse $\mathrm{id}+u$.

Exercice 23.77 ♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $k \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. On considère l'application

$$\varphi_k : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{L}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{L}(\mathrm{E}) \\ u & \longmapsto & k\circ u \end{array}\right.$$

Montrer que $\varphi_k \in \mathrm{GL}(\mathrm{L}(\mathrm{E}))$ puis que l'application

$$\psi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathrm{L}(\mathrm{E})) \\ k & \longmapsto & \varphi_k \end{array}\right.$$

est un morphisme de groupes injectif.

Solution : On vérifie que φ_k est linéaire. Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ et $u,v \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. On a $\varphi_k(\alpha u+\beta v) = k\circ(\alpha u+\beta v) = \alpha k\circ u + \beta k\circ v = \alpha\varphi_k(u)+\beta\varphi_k(v)$ par linéarité de k.
L'application φ_k est bien à valeurs dans $\mathrm{L}(\mathrm{E})$ car la composée de deux applications linéaires est encore linéaire.
Enfin, φ_k est bijective. En effet, comme k est inversible, on a $\varphi_k\circ\varphi_{k^{-1}} = \varphi_{k^{-1}}\circ\varphi_k = \mathrm{id}_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}$.
Soient $k,k' \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. On a $\psi(k\circ k') = \varphi_{k\circ k'} = \varphi_k\circ\varphi_{k'}$ donc ψ est un morphisme de groupes. De plus, si $k \in \operatorname{Ker}\psi$ alors $\psi(k) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ donc $\varphi_k = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ce qui n'est possible que si $k = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ donc $\operatorname{Ker}\psi = \{\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\}$ et ψ est injectif.

Exercice 23.78 ♡

Soient E *un* K*-espace vectoriel et f un endomorphisme de* E *nilpotent. Prouver que* $\mathrm{id}-f$ *est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.*

Solution : *Supposons que f est nilpotent d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Alors par linéarité de f il vient que :*

$$\left(\mathrm{id}-f\right)\circ\left(\mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{n-1}\right) = \left(\mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{n-1}\right)-\left(f+f^2+\ldots+f^{n-1}+f^n\right) = \mathrm{id}$$

par télescopage et car $f^n = 0$. De même $\left(\mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{n-1}\right)\circ\left(\mathrm{id}-f\right) = \mathrm{id}$ donc $\mathrm{id}-f$ est inversible et $\boxed{\left(\mathrm{id}-f\right)^{-1} = \mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{n-1}}$.

Exercice 23.79 ♡♡

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $p \in \mathbb{C}$. On définit $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ par $f(z) = z + p\overline{z}$. Vérifier que $f \in \mathrm{L}(\mathbb{C})$ puis déterminer $\mathrm{Ker}\, f$. A quelle condition f est-il un automorphisme ?

Solution : *f est linéaire (vérification immédiate). Cherchons son noyau : soit $z \in \mathbb{C}$:*

$$f(z) = 0 \implies z = -p\overline{z}$$

En prenant le conjugué, $\overline{z} = -\overline{p}z$ et donc $z = |p|^2 z$ d'où $(1-|p|^2)z = 0$.

1. *Si $|p| \neq 1$, alors $z = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.*
2. *Si $|p| = 1$ alors $\exists \alpha \in [0, 2\pi[$ tel que $p = e^{i\alpha}$. Par ailleurs $\exists r \geqslant 0$, $\exists \theta \in [0, 2\pi[$, tels que $z = re^{i\theta}$. Alors*

   $$z = -p\overline{z} \implies e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \iff \theta = \frac{\alpha+\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

   Donc $\mathrm{Ker}\, f$ est une droite vectorielle :

   $$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(u), \quad u = e^{i(\frac{\alpha+\pi}{2})}$$

On peut déjà conclure que si $|p| = 1$, alors f n'est pas un automorphisme.
Lorsque $|p| = 1$, on a vu que f était injective. Vérifions qu'elle est surjective. Soit $u \in \mathbb{C}$. Cherchons $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + p\overline{z} = u$. En prenant le conjugué et en multipliant par p, on trouve que $p\overline{z} + |p|^2 z = p\overline{u}$. En éliminant $\overline{z}$, on trouve que $z = \dfrac{u - p\overline{u}}{1-|p|^2}$ qui réciproquement vérifie bien $f(z) = u$.
En conclusion, $\boxed{f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \iff |p| \neq 1}$.

Exercice 23.80 ♡♡

Soit E *un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = \mathrm{id}$. Soit $b \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1, -1\}$. Montrer que l'équation $x + \lambda f(x) = b$ possède une unique solution.*

Solution : *Supposons que $x \in \mathrm{E}$ est solution de l'équation : $x + \lambda f(x) = b$ et en appliquant f, on a $\lambda x + f(x) = f(b)$. En multipliant la seconde relation par λ, et en éliminant $f(x)$, on trouve que $x = \dfrac{1}{1-\lambda^2}(b - f(b))$ $(1-\lambda^2 \neq 0)$. Donc si l'équation possède une solution, elle est forcément unique. Vérifions que le vecteur x précédemment trouvé est bien solution :*

$$\frac{1}{1-\lambda^2}(b - f(b)) + \lambda\left(\frac{1}{1-\lambda^2}(f(b) - f^2(b))\right) = \frac{1}{1-\lambda^2}(1-\lambda^2)b = b$$

Exercice 23.81 ♡♡

Soient deux endomorphismes $(f, g) \in \mathrm{L}(\mathrm{E})^2$ tels que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$. Montrer que $(f+g) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

Solution :

1. *Montrons que $\mathrm{Ker}(f+g) = \{0_\mathrm{E}\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$. Comme $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$, il existe $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Ker}(g)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $f(x) = f(x_2)$ et $g(x) = g(x_1)$. Comme $(f+g)(x) = 0$, on en déduit que $f(x_2) + g(x_1) = 0$, c'est-à-dire $z = f(x_2) = -g(x_1) \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$. Mais puisque la somme $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ est directe, $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_\mathrm{E}\}$ et donc $f(x_2) = g(x_1) = 0_\mathrm{E}$ ce qui montre que $f(x) = g(x) = 0_\mathrm{E}$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. Mais puisque la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$ est directe, finalement $x = 0_\mathrm{E}$.*
2. *Montrons que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f+g)$. Soit $y \in \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, il existe $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2$ tel que $y = x_1 + x_2$. Mais comme $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$, il existe $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Ker}(g) \times \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Ker}(g)$ tels que $x_1 = x_{11} + x_{12}$*

et $x_2 = x_{21} + x_{22}$. Alors $f(x_1) = f(x_{12})$ et $g(x_2) = g(x_{21})$. Posons $x = x_{12} + x_{21}$. On calcule $(f+g)(x) = f(x_{12}) + g(x_{12}) + f(x_{21}) + g(x_{21}) = f(x_{12}) + g(x_{21}) = y$.

Exercice 23.82 ♡♡♡

Soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soient deux réels distincts $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(u - a\,\mathrm{id}) \circ (u - b\,\mathrm{id}) = 0$$

1. *Montrer que* $E = \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$.
2. *Déterminer la restriction de u à* $\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$ *et à* $\mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$.

Solution :

1. *Remarquons tout d'abord que $\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$ sont bien des sous-espaces vectoriels de E car ce sont des noyaux d'applications linéaires. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$. Alors $u(x) = ax$ et $u(x) = bx$. Comme $a \neq b$ on a forcément $x = 0$ et les deux sous-espaces sont en somme directe. Remarquons que $1/(b-a)(X-a) + 1/(a-b)(X-b) = 1$ donc $1/(b-a)(u - a\,\mathrm{id}_E) + 1/(a-b)(u - b\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$. De plus, en vertu du fait que $(u - a\,\mathrm{id}) \circ (u - b\,\mathrm{id}) = 0$, $\mathrm{Im}\,1/(b-a)(u - a\,\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}\,1/(a-b)(u - b\,\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$. De plus, pour tout $x \in E$ on a :*
$$x = \underbrace{\frac{1}{b-a}(u(x) - ax)}_{\in \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})} + \underbrace{\frac{1}{a-b}(u(x) - bx)}_{\in \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})}$$
donc $E = \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) + \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$. En conclusion, on a bien $E = \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$.
2. *Déterminons la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$. Si $x \in \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$ alors $u(x) = ax$ donc $u_{|\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})}$ est une homothétie de rapport a. De même $u_{|\mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})}$ est une homothétie de rapport b.*

23.7.9 Transformations vectorielles

Exercice 23.83 ♡

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces $E_1 = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Déterminer l'expression analytique du projecteur p sur E_2 parallèlement à E_1.

Solution : *On vérifie facilement que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$. On note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base de E formée de $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On remarque que $E_1 = \mathrm{Vect}(f_1)$ avec $f_1 = (1,1,1)$ et que $E_2 = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$ avec $f_2 = (1,0,-1)$ et $f_3 = (0,1,-1)$. En utilisant les outils du chapitre 3, on montre que f_1, f_2, f_3 ne sont pas coplanaires et qu'ils forment donc une base f de E. Soit $v \in E$. On note (x,y,z) les coordonnées de v dans e et (α, β, γ) ses coordonnées dans f. De l'égalité $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ on tire le système* $\begin{cases} x &= \beta + \alpha \\ y &= \gamma + \alpha \\ z &= -\beta - \gamma + \alpha \end{cases}$

qui est équivalent à $\begin{cases} \beta &= \frac{1}{3}(2x - y - z) \\ \gamma &= \frac{1}{3}(-x + 2y + z) \\ \alpha &= \frac{1}{3}(x + y + z) \end{cases}$. *Comme $f_1 \in E_1$ et que $f_2, f_3 \in E_2$ on doit avoir*

$$p(v) = \beta f_2 + \gamma f_3 = \frac{1}{3}\big((2x - y - z)(1,0,-1) + (-x + 2y + z)(0,1,-1)\big) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y + z, -x - y)$$

et donc $\boxed{p(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y + z, -x - y)}$.

Exercice 23.84 ♡

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport au sous-espace E_1 parallèlement au sous-espace E_2 où :

$$E_1 = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(1,1,1)\big) \text{ et } E_2 = \mathrm{Vect}(1,2,0)$$

Solution : *Soit s cette symétrie et soient $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (1,2,0)$. Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ les vecteurs de la base naturelle de $\mathbb{R}^3$.*
On a $s(u) = u$ et $s(v) = v$. $s(w) = -w$. On a $e_1 = u$, $e_2 = \frac{1}{2}(w - u)$ et $e_3 = v - \frac{1}{2}(w + u)$.

On en déduit $s(e_1) = e_1 = (1,0,0)$, $s(e_2) = -\frac{1}{2}(w+u) = (-1,-1,0)$ *et* $s(e_3) = v+\frac{1}{2}(w-u) = (1,2,1)$. *Finalement,* $s(x,y,z) = (x-y+z,-y+2z,z)$ *et l'expression analytique de* s *s'écrit :* $\begin{cases} x' = x+y+z \\ y' = y+2z \\ z' = z \end{cases}$.

Exercice 23.85 ♡

Soit :

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \theta(P) \end{cases}$$

où $\theta(P)$ *est le polynôme donné par :*

$$(\theta(P))(X) = \frac{P(X)+P(-X)}{2}.$$

1. *Prouver que* θ *est linéaire.*
2. *Prouver sur l'ensemble des polynômes pairs est stable par* θ.
3. *Montrer que* $\theta\circ\theta = \theta$. *Que peut-on en déduire pour* θ.
4. *Déterminer* $\operatorname{Ker}\theta$ *et* $\operatorname{Im}\theta$. *En déduire les éléments caractéristiques de* θ.

Solution :

1. *Facile.*
2. *On montre aussi facilement que si* P *est pair, il en est de même de* $\theta(P)$.
3. *Soit* P *un polynôme à coefficients réels, on a :*

$$\theta\circ\theta(P)(X) = \theta\left(\frac{P(X)+P(-X)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{P(X)+P(-X)}{2} + \frac{P(-X)+P(X)}{2}\right) = \theta(P)(X)$$

   donc θ *est un projecteur.*
4. *Si* $\theta(P) = 0$ *alors* $\forall X \in \mathbb{R}, \quad P(X) = -P(-X)$ *donc* P *est impair. Réciproquement si* P *est impair alors* $\theta(P)$. $\operatorname{Ker}\theta = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \text{ a tous ses termes de degré pair nuls}\}$. *On a par ailleurs* $\theta(P)$ *est pair pour tout* $P \in \mathbb{R}[X]$. *Réciproquement, si* P *est pair, alors* $\theta(P) = P$ *donc* $\operatorname{Im}\theta = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \text{ a tous ses termes de degré impair nuls}\}$.

Exercice 23.86 ♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $p \in \mathscr{L}(E)$.

1. *Montrer que* p *est un projecteur si et seulement si* $\mathrm{id}-p$ *l'est.*
2. *On suppose que* p *est un projecteur. Exprimer alors* $\operatorname{Im}(\mathrm{id}-p)$ *et* $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}-p)$ *en fonction de* $\operatorname{Im} p$ *et* $\operatorname{Ker} p$.

Solution :

1. *Comme* $(\mathrm{id}-p)^2 = \mathrm{id}-2p+p^2$, p *est un projecteur si et seulement si* $\mathrm{id}-p$ *est un projecteur.*
2. *On a* $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(\mathrm{id}-p)$. *En effet, si* $x \in \operatorname{Ker} p$ *alors* $p(x) = 0$ *et* $(\mathrm{id}-p)(x) = x$. *Donc* $x \in \operatorname{Im}(\mathrm{id}-p)$. *Réciproquement, si* $x \in \operatorname{Im}(\mathrm{id}-p)$ *alors il existe* x_0 *tel que* $x = (\mathrm{id}-p)(x_0)$ *Donc* $p(x) = p(x_0) - p^2(x_0) = 0$.

Exercice 23.87 ♡♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $p, q \in \mathscr{L}(E)$. *Montrer l'équivalence entre :*

1. $p\circ q = p$ *et* $q\circ p = q$.
2. p *et* q *sont des projecteurs et* $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ *Comme*

$$p^2 = p\circ \underbrace{q\circ p}_{=q}\circ q = p\circ q\circ q = p\circ q = p,$$

p *est un projecteur. On montre de même que* q *est un projecteur. Si* $x \in \operatorname{Ker} p$ *alors* $q(x) = q\circ p(x) = 0$ *donc* $x \in \operatorname{Ker} q$ *et* $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$. *On montre de même que* $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$. *Donc* $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Comme* q *est un projecteur,* $\operatorname{Ker} p$ *et* $\operatorname{Im} p$ *sont supplémentaires dans* E . *Soit* $x \in E$. *Il existe un unique couple* $(x', x'') \in \operatorname{Ker} q \times \operatorname{Im} q$ *tel que* $x = x' + x''$. *Alors*

$$p\circ q(x) = p\circ q(x'') = p(x'') \quad \text{et} \quad p(x) = p(x'+x'') = p(x'')$$

car $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$ *et que* $q(x'') = x''$. *Donc* $p\circ q(x) = p(x)$ *et* $p\circ q = p$. *On montre de même que* $q\circ p = q$.

Exercice 23.88 ♡♡

Soit un projecteur p d'un K-e.v. E. Montrer que

$$\forall \lambda \in K \setminus \{0,1\}, \quad p - \lambda\,\mathrm{id} \in GL(E)$$

Indication 23.23 : On fera deux démonstrations. Pour la première, utiliser la relation polynomiale $p \circ p = p$. Pour la deuxième, écrire que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$*, et résoudre l'équation* $(p - \lambda\,\mathrm{id})(x) = y$*, en décomposant sur* $\operatorname{Ker} p$ *et* $\operatorname{Im} p$ *les vecteurs x et y.*

Solution : **Première démonstration.** *On a $p \circ p = p$, donc $p^2 - p = 0$, et alors* $(p - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (p + (\lambda - 1)\,\mathrm{id}) + \lambda(\lambda - 1)\,\mathrm{id} = 0$ *donc si $\lambda \notin \{0,1\}$, on peut écrire*

$$(p - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \left[\frac{-1}{\lambda(\lambda-1)}\big(p + (\lambda - 1)\,\mathrm{id}\big)\right] = \mathrm{id}$$

ce qui montre que $(p - \lambda\,\mathrm{id})$ est inversible.
Deuxième démonstration. *Soit $y \in E$. On décompose $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \operatorname{Ker} p$ et $y_2 \in \operatorname{Im} p$. Soit $x = x_1 + x_2 \in E$. Alors $(p - \lambda\,\mathrm{id})(x) = y \iff x_2 - \lambda(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \iff -\lambda x_1 = y_1$ et $(1 - \lambda)x_2 = y_2$ (on a utilisé le fait que la somme est directe et donc que la décomposition est unique). On trouve une unique solution $x_1 = -\frac{1}{\lambda} y_1$ et $x_2 = \frac{1}{1-\lambda} y_2$, c'est-à-dire qu'il existe un unique antécédant à y par l'application $(p - \lambda\,\mathrm{id})$. Cette application est donc bijective.*

Exercice 23.89 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux projecteurs p, q de E vérifiant :

$$p \circ q = q \circ p$$

1. *Montrer que $p \circ q$ est un projecteur :*
2. *Montrer que* $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ *;*
3. *Montrer que* $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

Solution :

1. *Calculons*
$$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$$
Donc $p \circ q$ est un projecteur.
2. $\operatorname{Im}(p \circ q) \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ *: soit $y \in \operatorname{Im}(p \circ q)$. $\exists x \in E$ tel que $y = p \circ q(x)$. Comme $y = p\big(q(x)\big)$, $y \in \operatorname{Im} p$. Mais puisque $p \circ q = q \circ p$, on a également $y = q\big(p(x)\big) \in \operatorname{Im} q$. Donc $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.*
$\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im}(p \circ q)$. *Utilisons la caractérisation de l'image d'un projecteur : Soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Alors $p(x) = q(x) = x$. Alors $p \circ q(x) = p\big(q(x)\big) = p(x) = x$ et par conséquent, $x \in \operatorname{Im} p \circ q$.*
3. *Montrons* $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p \circ q)$ *: Soit $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$; $\exists (x_p, x_q) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Ker} q$ tels que*
$$x = x_p + x_q$$
Alors
$$p \circ q(x) = p\big(q(x_p) + q(x_q)\big) = p\big(q(x_p)\big) = q\big(p(x_p)\big) = q(0) = 0$$
donc $x \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$.
Montrons que $\operatorname{Ker}(p \circ q) \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$. Posons $x_p = q(x)$ et $x_q = x - q(x)$. On a bien $x = x_p + x_q$ et
$$p(x_p) = p \circ q(x) = 0 \implies x_p \in \operatorname{Ker} p$$
$$q\big(x - q(x)\big) = q(x) - q^2(x) = q(x) - q(x) = 0 \implies x_q \in \operatorname{Ker} q$$

Exercice 23.90 ♡♡

Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et deux projecteurs p, q de E vérifiant $poq = 0$. On pose $r = p + q - qop$.

1. *Montrer que r est un projecteur ;*
2. *Montrer que* $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ *;*
3. *Montrer que* $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Indication 23.23 : Interpréter la relation $p \circ q = 0$ en fonction des images et noyaux de p, q. Dans les démonstrations, on pourra utiliser le fait que si r est un projecteur, et $x \in E$, $x \in \operatorname{Im} r \iff r(x) = x$.

Solution :

1. Calculons

$$r^2 = p^2 + pq - pqp + qp + q^2 - q^2p - qp^2 - qpq + qpqp = p + qp + q - qp - qp = p + q - qp = r$$

(on a utilisé que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $pq = 0$). Donc r est un projecteur (r est linéaire).

2. $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$: soit $x \in \operatorname{Ker} r$, alors $p(x) + q(x) - qp(x) = 0$, et en appliquant p, on trouve que $p^2(x) + pq(x) - pqp(x) = 0$, d'où $p(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} p$. De même, en appliquant q, on montre que $x \in \operatorname{Ker} q$.
$\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$, c'est évident.

3. $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$: soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $pq(x) = 0 \implies p(x) = 0$ (car $x \in \operatorname{Im} q$) et alors $x = 0$ ($p(x) = x$, car $x \in \operatorname{Im} p$). La somme est donc directe.
$\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$: soit $x \in \operatorname{Im} r$, puisque r est un projecteur, $r(x) = x$ et donc

$$x = p(x) + q(x) - qp(x) = p(x) + q\left[x - p(x)\right]$$

et $p(x) \in \operatorname{Im} p$, $q\big(x - p(x)\big) \in \operatorname{Im} q$.
$\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$: soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, $\exists x_1 \in \operatorname{Im} p, \exists x_2 \in \operatorname{Im} q$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors, $r(x) = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2) - qp(x_1) - qp(x_2) = x_1 + x_2 + p(x_2) + q(x_1) - qp(x_1) - qp(x_2)$. Mais $p \circ q = 0 \implies \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$, donc $p(x_2) = 0$. Alors $r(x) = x + q\big(x_1 - p(x_1)\big)$, mais puisque $x_1 \in \operatorname{Im} p$, on sait que $p(x_1) = x_1$, et donc $r(x) = x$. Comme r est un projecteur, $r(x) = x \implies x \in \operatorname{Im} r$.

Exercice 23.91 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Résoudre l'équation $p(x) + 3x = y$ où $y \in \mathrm{E}$.

Solution : Comme p est un projecteur, les sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E. Donc il existe un unique couple $(x', x'') \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x' + x''$ et il existe un unique couple $(y', y'') \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $y = y' + y''$. Il vient :

$$p(x) + 3x = y \iff x'' + 3x' + 3x'' = y' + y'' \iff \underbrace{3x'}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{4x''}_{\in \operatorname{Im} p} = \underbrace{y'}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{y''}_{\in \operatorname{Im} p} \iff \begin{cases} 3x' & = y' \\ 4x'' & = y'' \end{cases} \iff x = \frac{y'}{3} + \frac{y''}{4}$$

par unicité de la décomposition des vecteurs dans $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. En conclusion, $\boxed{x = \dfrac{y - p(y)}{3} + \dfrac{p(y)}{4}}$.

Exercice 23.92 ♡♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Calculer $(\mathrm{id} + p)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Comme id et p commutent, on peut appliquer la formule du binôme et

$$(\mathrm{id} + p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k = \mathrm{id} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right) p = \boxed{\mathrm{id} + (2^n - 1)\, p}$$

car $p^2 = p$.

Exercice 23.93 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. Soit p un projecteur de E.
Montrer que u et p commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.

Solution :
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que u et p commutent. Soit $y \in \operatorname{Im} p$. Mais $p\big(u(y)\big) = u\big(p(y)\big) = u(y)$ car $y \in \operatorname{Im} p$. Donc $u(y) \in \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p$ est stable par u. Si $x \in \operatorname{Ker} p$ alors $p(u(x)) = u\big(p(x)\big) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} p$ est aussi stable par u.
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u. Comme p est un projecteur, $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe un unique couple $(x', x'') \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = x' + x''$. Il vient que $u \circ p(x) = u(x'')$ et que $p \circ u(x) = p\big(u(x'')\big) = u(x'')$. On a montré que $u \circ p(x) = p \circ u(x)$ donc u et v commutent.

Exercice 23.94 ♡♡♡

[Décomposition du noyau] Soient un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et un endomorphisme $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. On note

$$\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = ix\} \text{ et } \mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = -ix\}$$

Montrer que $E = F \oplus G$ *et exprimer le projecteur sur* F *parallèlement à* G.

Solution : *Pour tout* $x \in E$, *on a* $x = -\frac{i}{2}\left(f(x) + ix\right) + \frac{i}{2}\left(f(x) - ix\right)$ *et on vérifie que* $f(x) + ix \in F$, $f(x) - ix \in G$. *En effet :*

$$f\left(f(x) + ix\right) = f^2(x) + if(x) = -ix + if(x) = i\left(f(x) + ix\right)$$

$$f\left(f(x) - ix\right) = f^2(x) - if(x) = -if(x) - if(x) = -i\left(f(x) - ix\right)$$

Donc $E = F + G$. *Si* $x \in F \cap G$ *alors on a en même temps* $f(x) = ix$ *et* $f(x) = -ix$ *ce qui n'est possible que si* $x = 0$. *Donc* F *et* G *sont en somme directe. En conclusion,* $E = F \oplus G$.
Montrons que $p = -\frac{i}{2}\left(f + i\,\mathrm{id}\right)$ *est le projecteur sur* F *parallèlement à* G. *Soit* $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G$. *Alors* $p(x) = -\frac{i}{2}\left(f(x_1) + f(x_2) + i(x_1 + x_2)\right) = -\frac{i}{2}(ix_1 - ix_2 + ix_1 + ix_2) = x_1$, *ce qu'il fallait montrer.*
Cet exercice est un cas particulier du théorème de décomposition du noyau que vous verrez en deuxième année.

Exercice 23.95 ♡♡♡

Soient deux projecteurs p *et* q *d'un espace vectoriel* E. *Montrer que l'endomorphisme* $(p+q)$ *est un projecteur de* E *si et seulement si l'on a* $p \circ q = q \circ p = 0$. *Si c'est le cas, montrer qu'alors* $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ *et que* $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

Solution :

- *On suppose que* $p+q$ *est un projecteur. Alors* $\left(p+q\right)^2 = p+q$ *et en développant, on obtient* $p^2 + q^2 + p\circ q + q \circ p = p + q$. p, q *étant des projecteurs, on a :* $p^2 = p$ *et* $q^2 = q$ *et donc* $p\circ q + q\circ p = 0$. *On va montrer que* $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$ *ce qui amènera* $p \circ q = 0$ *et donc* $q \circ p = 0$. *Soit* $y \in \mathrm{Im}\, q$. *Alors* $p\left(y\right) + q\left(p\left(y\right)\right) = 0$. *Comme* $E = \mathrm{Ker}\, q \oplus \mathrm{Im}\, q$, *il existe* $X \in \mathrm{Ker}\, q$ *et* $Y \in \mathrm{I}mq$ *tel que* $p\left(y\right) = X + Y$. *Alors* $X + Y + q(X+Y) = 0$ *soit* $X + 2Y = 0$. *Par unicité de la décomposition d'un vecteur sur une somme directe, il vient* $X = Y = 0$ *et donc* $p\left(y\right) = 0$. *On a prouvé que* $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, q$ *et la première implication est démontrée.*
- *Pour la seconde, supposons que* $p\circ q = q \circ p = 0$ *alors* $\left(p+q\right)^2 = p^2 + q^2 + p\circ q + q \circ p = p + q$ *car* p *et* q *sont des projecteurs.*
- *On suppose dans la suite que* $(p+q)$ *est un projecteur de* E.
  - *Montrons que* $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$. *Soit* $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. *Alors* $p(x) = q(x) = x$ *et il vient* $q\left(p(x)\right) = x$. *Mais* $q \circ p = 0$ *donc* $x = 0$. *Donc* $\mathrm{Im}\, p$ *et* $\mathrm{Im}\, q$ *sont en somme directe. Si* $x \in \mathrm{Im}\, p + q$ *alors* $x = \left(p+q\right)(x) = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ *et* $\mathrm{Im}\, p + q \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. *Si* $x \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ *alors il existe* $x_1 \in \mathrm{Im}\, p$ *et* $x_2 \in \mathrm{Im}\, q$ *tel que* $x = x_1 + x_2$. *Mais* $\left(p+q\right)(x) = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2) = x_1 + x_2$ *car* $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$ *et* $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$ *en vertu de* $p \circ q = q \circ p = 0$. *Donc* $x \in \mathrm{Im}\, p + q$ *et on prouve ainsi par double inclusion que* $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.
  - *Montrons maintenant que* $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$. *On montre facilement que* $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$. *Soit* $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$. *Alors* $p(x) + q(x) = 0$ *et* $p(x) = -q(x)$. *Posons* $y = p(x)$. *On sait alors que* $y \in \mathrm{Im}\, p$ *et que* $y \in \mathrm{Im}\, q$. *Mais* $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$ *et* $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$ *donc* $y \in \mathrm{Ker}\, q$ *et* $y \in \mathrm{Ker}\, p$. *Comme* $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$ *et* $E = \mathrm{Ker}\, q \oplus \mathrm{Im}\, q$, *ceci n'est possible que si* $y = 0$. *Donc* $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ *et l'égalité est prouvée par double inclusion.*

23.7.10 Formes linéaires

Exercice 23.96 ♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f, g \in E^*$ *deux formes linéaires telles que* $\forall x \in E$, $f(x)g(x) = 0_{\mathbb{K}}$. *Montrer que* $f = 0$ *ou* $g = 0$.

Solution : *Si il existe* $a \in E$ *tel que* $f(a) \neq 0$ *et* $b \in E$ *tel que* $g(b) \neq 0$, *alors*

$$0 = f(a+b)g(a+b) = f(a)g(a) + f(a)g(b) + f(b)g(a) + f(b)g(b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Donc $f(a)g(b) = -f(b)g(a)$ *et comme* $f(a) \neq 0$, $g(b) \neq 0$, *nécessairement* $f(b) \neq 0$ *et* $g(a) \neq 0$. *Il vient alors que* $f(a)g(a) \neq 0$ *ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Donc* $f = 0$ *ou* $g = 0$.

Exercice 23.97 ♡

Soient E *un espace vectoriel et* a *un vecteur de* E. *Soit* φ *une forme linéaire sur* E. *On définit* $u(x) = x + \varphi(x)a$. *Vérifier que* u *est un endomorphisme de* E, *puis calculer* u^2. *A quelle condition* u *est-elle injective ?*

Solution : *Soient* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$ *et* $x, x' \in E$. *Par linéarité de* φ

$$u\left(\alpha x + \alpha' x'\right) = \alpha x + \alpha' x' + \varphi\left(\alpha x + \alpha' x'\right)a = \alpha\left(x + \varphi(x)a\right) + \alpha'\left(x' + \varphi(x')a\right) = \alpha u(x) + \alpha' u\left(x'\right)$$

donc u *est linéaire.*

Soit $x \in \mathrm{E}$.

$$u^2(x) = u\big(x + \varphi(x)a\big) = u(x) + \varphi(x)u(a) = x + \varphi(x)a + \varphi(x)\big(a + \varphi(a)a\big) = x + \big(2 + \varphi(a)\big)\varphi(x)a$$

L'application u est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul de E. Mais $u(x) = 0 \iff x + \varphi(x)a = 0 \iff x = -\varphi(x)a$. Donc un vecteur x est élément du noyau de u si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha a$ et $\varphi(x) = -\alpha$. On a alors $\alpha a = -\alpha\varphi(a)a$ ce qui s'écrit aussi $\alpha\big(1 - \varphi(a)\big)a = 0$. Pour que le noyau de u ne soit pas trivial, il faut donc que $\varphi(a) = -1$, dans quel cas, u n'est pas injective. Sinon, si $\varphi(a) \neq -1$, φ est injective.

Exercice 23.98 ♡

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables sur $[0,1]$ et $\delta : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & f'(0) \end{cases}$.

1. *Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *On pose $\mathrm{H} = \operatorname{Ker}\delta$. Trouver un supplémentaire de H dans E.*

Solution :

1. *On montre facilement que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel en prouvant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$.*
2. *Montrons que l'ensemble des fonctions affines sur $[0,1]$, noté I, est un supplémentaire de H dans E. Soit $f \in \mathrm{E}$. Alors $f = \big(f - f'(0)x\big) + f'(0)x$. Il est clair que $x \mapsto f - f'(0)x \in \mathrm{H}$ et que $x \mapsto f'(0)x \in \mathrm{I}$. Donc $\mathrm{E} = \mathrm{H} + \mathrm{I}$. Si $f \in \mathrm{H} \cap \mathrm{I}$ alors $f'(0) = 0$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto ax$. Alors $a = 0$ et $f = 0$. Donc H et I sont en somme directe. En conclusion, $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{I}$.*

Exercice 23.99 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$, on définit

$${}^t u : \begin{cases} \mathrm{E}^\star & \longrightarrow & \mathrm{E}^\star \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{cases}$$

1. *Montrer que ${}^t u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}^\star)$.*
2. *Si $(u,v) \in \mathrm{L}(\mathrm{E})^2$, calculer ${}^t(u \circ v)$.*
3. *Montrer que l'application*
$$\theta : \begin{cases} \mathrm{GL}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathrm{E}^\star) \\ u & \longmapsto & {}^t u^{-1} \end{cases}$$
est un morphisme de groupes.
4. *Lorsque $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, montrer que θ est injectif.*

Solution :

1. *Soit $\varphi,\psi \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. Alors ${}^t u\big(\alpha\varphi + \beta\psi\big) = \big(\alpha\varphi + \beta\psi\big) \circ u = \alpha\varphi \circ u + \beta\psi \circ u = \alpha\,{}^t u(\varphi) + \beta\,{}^t u(\psi)$. Donc ${}^t u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}^\star)$.*
2. *Soit $\varphi \in \mathrm{E}^\star$. Calculons*
$${}^t v \circ {}^t u(\varphi) = {}^t v(\varphi \circ u) = \varphi \circ (u \circ v) = {}^t(u \circ v)(\varphi)$$
Par conséquent, ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$.
3. *θ est bien définie. Soit $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$. Comme f est inversible, il existe $f^{-1} \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Mais en transposant, ${}^t f^{-1} \circ {}^t f = {}^t\mathrm{id}_\mathrm{E} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}^\star}$. On montre de même que ${}^t f \circ {}^t f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}^\star}$. Ce qui montre que ${}^t f^{-1}$ est inversible dans $\mathrm{L}(\mathrm{E}^\star)$. On vérifie sans problème que θ est un morphisme de groupes en utilisant 2.*
4. *Soit $f \in \operatorname{Ker}\theta$. Alors $\forall \varphi \in \mathrm{E}^\star$, ${}^t f^{-1}(\varphi) = \varphi$ et donc*
$$\forall \varphi \in \mathrm{E}^\star,\ \varphi \circ f^{-1} = \varphi$$
En considérant φ_1 et φ_2 les deux projections sur $\operatorname{Vect}(e_1)$ et $\operatorname{Vect}(e_2)$, on montre que $f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Chapitre 24

Dimension des espaces vectoriels

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.
John von Neumann.

Pour bien aborder ce chapitre

Après avoir mis en place les bases d'algèbre linéaire nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la notion de dimension. La dimension d'un espace vectoriel est liée au nombre de paramètres (ou parle aussi de degrés de liberté) qu'il faut considérer pour pouvoir le décrire. Ainsi pour choisir un couple de $\mathbb{R}^2$ il faut choisir une abscisse et une ordonnée. Il y a deux paramètres (ou deux degrés de liberté). On verra que $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. De même, pour choisir un polynôme aX^2+bX+c de $\mathbb{R}_2[X]$, il faut choisir a, b et c. On verra là aussi que $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. Dans certains cas, il faut une infinité de paramètres pour décrire les vecteurs de l'espace considéré. Par exemple, pour choisir une suite $(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, il faut choisir chaque terme $u_0, u_1, \ldots$. Ou encore pour choisir une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il faut choisir l'image de chaque point de $\mathbb{R}$ par f. Ces deux espaces sont de dimension infinie.
Même s'il sera utile de se souvenir de ces considérations, la définition précise de la notion de dimension demande quelques efforts qui nous en éloignent un moment. On peut remarquer que toute base du plan compte exactement deux vecteurs. De même toute base de l'espace en compte trois. Le plan est de dimension 2 et l'espace de dimension 3. Si on arrive à définir, pour un espace vectoriel quelconque ce qu'est une base (quand il en a) et qu'on parvient à montrer que deux bases sont toujours de même cardinal alors on tiendra notre définition. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs que contient une base donnée (quand ce nombre est fini).
Ceci est cohérent avec notre intuition initiale. Si $(v_1,\ldots,v_n)$ est une base de l'espace vectoriel considéré E, alors choisir un vecteur dans E revient à choisir ses n composantes sur la base, il y a bien n degrés de liberté.
Nous traiterons les notions de base et de dimension dans les premières sections de ce chapitre. Nous nous occuperons ensuite à étudier les conséquences de ces notions en algèbre linéaire. En particulier, nous démontrerons deux formules fondamentales :
- la formule de Grassmann
- la formule du rang

qui permettront de beaucoup simplifier les démonstrations de supplémentarité et celles de bijectivité (elles permettront de diviser par deux le travail à faire quand on n'en dispose pas).

24.1 Familles de vecteurs

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

24.1.1 Combinaisons linéaires

DÉFINITION 24.1 ♡ **Combinaison linéaire**
Soit $(v_1,\ldots,v_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$. On appelle **combinaison linéaire de ces n vecteurs** tout vecteur $v \in E$ de la forme :

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot v_k$$

où $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

PROPOSITION 24.1 ♡ **Image d'une combinaison linéaire par une application linéaire**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient $(v_1,\dots,v_n)$ une famille de n-vecteurs de E et $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ alors

$$f(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n).$$

Démonstration *Par une récurrence immédiate.*

24.1.2 Familles libres

DÉFINITION 24.2 ♡♡♡ **Famille liée**
On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_p)$ de vecteurs de E est *liée*, ou que les vecteurs $v_1,\dots,v_p$ sont *linéairement dépendants* si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres ou autrement dit si et seulement si il existe un p-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ de scalaires non tous nuls vérifiant $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_p \cdot v_p = 0$.

Exemple 24.1
- Trois vecteurs du plan sont toujours liés. De même, 4 vecteurs de l'espace sont toujours liés. On comprend bien intuitivement ces deux affirmations. On les démontrera dans l'exemple 24.7 page 903.
- Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $u_1 = (1,0,1,-1)$, $u_2 = (3,-2,2,-3)$ et $u_3 = (-1,2,0,1)$ forment une famille liée. En effet, $u_2 = 2u_1 - u_3$.
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions $f_1 : x \mapsto \cos^2 x$, $f_2 : x \mapsto \sin^2 x$ et $f_3 : x \mapsto \cos 2x$ sont liées. En effet, $f_3 = f_1 - f_2$.

Pour définir une famille de vecteurs linéairement dépendants, il suffit de prendre la négation de la définition précédente : $v = (v_1,\dots,v_p)$ est une famille liée de vecteurs de E si et seulement si pour toute famille de scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, si $\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_p \cdot x_p = 0$ alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$. On a alors la définition suivante :

DÉFINITION 24.3 ♡♡♡ **Famille libre**
On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_p)$ de vecteurs de E est **libre**, ou que les vecteurs $v_1,\dots,v_p$ sont **linéairement indépendants** si et seulement si la famille n'est pas liée ou autrement dit si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_p \cdot v_p = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$$

PLAN 24.1 : Pour montrer qu'une famille est libre

1. *Soit* $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ *tel que* $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0$.
2. *... alors* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$
3. *Donc la famille est libre.*

PLAN 24.2 : Pour montrer qu'une famille est liée

1. *Posons* $\lambda_1 = \ldots, \ldots, \lambda_p = \ldots$
2. *Un des* λ_i *pour* $i \in [\![1,p]\!]$ *au moins est non nul*
3. *On a bien par ailleurs :* $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0$.
4. *Donc la famille est liée.*

Exemple 24.2
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,0),(0,1))$ est libre. En effet, soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,0)+\beta(0,1) = (0,0)$. Alors $(\alpha,\beta) = (0,0)$ et donc $\alpha = \beta = 0$.
- On démontre de même que dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est libre.
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la famille $(\sin,\cos,\exp)$ est libre. Soient $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\sin+\beta\cos+\gamma\exp = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma\exp x = 0$ ce qui s'écrit aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha\frac{\sin x}{\exp x} + \beta\frac{\cos x}{\exp x} + \gamma = 0$. On montre facilement en utilisant le théorème des gendarmes que $\lim_{+\infty} \frac{\sin x}{\exp x} = \lim_{+\infty} \frac{\cos x}{\exp x} = 0$. On en déduit que $\gamma = 0$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha\sin x + \beta\cos x = 0$. Si on fait $x = 0$ on obtient $\beta = 0$ et si on fait $x = \pi/2$, il vient que $\alpha = 0$. On a alors bien montré que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Remarque 24.1 Soit $(v_1,\dots,v_p)$ une famille de p vecteurs de E.
- Si l'un des vecteurs est nul, la famille est liée.
- Si l'un des vecteurs de la famille apparaît plus d'une fois dans la famille alors la famille est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre

24.1.3 Familles génératrices

DÉFINITION 24.4 ♡♡♡ **Famille génératrice**
On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_p)$ de p vecteurs de E *engendre* l'espace vectoriel E (ou est *génératrice de* E) si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire de la famille $(v_1,\dots,v_p)$:

$$\forall v \in E, \quad \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p : \quad v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot v_i$$

Autrement dit : $\mathrm{V}ect\left(\{v_1,\dots,v_p\}\right) = E$.

PLAN 24.3 : Pour montrer qu'une famille est génératrice

1. *Soit* $v \in E$.
2. *Posons* $\lambda_1 = \dots, \dots, \lambda_p = \dots$
3. *On a bien :* $v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot v_i$

Exemple 24.3
- Dans $\mathbb{R}^2$, soient $x_1 = (1,0)$ et $x_2 = (1,0)$. La famille (x_1, x_2) est génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, si $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors $v = x(1,0) + y(0,1)$.
- On montre de même que la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{R}^3$.
- La famille $((1,0,1),(0,1,1))$ engendre le plan vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y = z$. En effet $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} = \{(x, y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{V}ect((1,0,1),(0,1,1))$.
- La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = a_n X^n + \dots + a_0$.
- On considère l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ des fonctions en escaliers sur $[0,1]$. On considère les fonctions $f_{a,b}$ définies pour $a \leqslant b$ par $f_{a,b}(x) = 1$ pour $a \leqslant x \leqslant b$ et $f_{a,b}(x) = 0$ sinon. La famille $(f_{a,b})_{1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1}$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}$, mais n'est pas libre : $f_{0,1/2} + f_{1/2,1} - f_{0,1} - f_{1/2,1/2}$.

Remarque 24.2 Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice.

24.1.4 Bases

DÉFINITION 24.5 ♡♡♡ **Base**
On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_p)$ de vecteurs de E est une *base* de E si et seulement si, à la fois :
1. $(v_1,\dots,v_p)$ est une famille libre de E.
2. $(v_1,\dots,v_p)$ est une famille génératrice de E.

Exemple 24.4
- La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En effet, si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a.1 + b.i = 0$ alors $a + ib = 0$ et donc $a = b = 0$. La famille est donc libre. Pour tout nombre complexe, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. La famille est donc aussi génératrice de $\mathbb{C}$. C'est donc une base de $\mathbb{C}$.
- Dans le plan, deux vecteurs non colinéaires forment une base du plan.
- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On a prouvé dans l'exemple 24.2 que cette famille est libre et dans l'exemple 24.3 qu'elle engendre $\mathbb{R}^3$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille formée des vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ est une base. La famille est libre : soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$. Alors $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \end{cases}$ ce qui amène $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$. On obtient alors le système $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = x \\ -\alpha_2 + \alpha_3 & = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = z \end{cases}$ et on trouve $\alpha_1 = 2x + y - z$, $\alpha_2 = -x - y + z$ et $\alpha_3 = -x + z$ donc (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathbb{R}^3$. C'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

De manière plus générale, on a :

PROPOSITION 24.2 ♡ **Base canonique de** $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$. Il existe une base privilégiée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dite canonique et donnée par :

$$\begin{array}{ccc} e_1 & = & (1,0,0,\dots,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,\dots,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & = & (0,0,0,\dots,1) \end{array}$$

Démonstration *La famille $e = (e_1, \dots, e_n)$ est génératrice. En effet, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ alors : $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Elle est de plus libre : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$, alors on a : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ ce qui prouve que $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0$.*

PROPOSITION 24.3 ♡ **Base canonique de** $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il existe une base privilégiée de $\mathbb{K}_n[X]$ dite canonique et donnée par : $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$.

Démonstration *Voir le chapitre sur les polynômes. Nous reviendrons sur cette proposition plus loin dans ce chapitre.*

PROPOSITION 24.4 ♡ **Base de** $\mathbb{C}(X)$

La "réunion" des familles $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{(X-a)^n}\right)_{\substack{a\in\mathbb{C} \\ n\in\mathbb{N}^*}}$ est une base de $\mathbb{C}(X)$.

Démonstration *C'est exactement la traduction du théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ en termes de combinaisons linéaires. On peut aussi trouver une base de $\mathbb{R}(X)$.*

THÉORÈME 24.5 ♡♡♡ **Composantes d'un vecteur relativement à une base**

Une famille $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur $v \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$\boxed{v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n}$$

Le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est alors appelé famille des *composantes* (ou *coordonnées*) de v dans la base e.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

- $\boxed{\text{Existence}}$ *Comme la famille e est une base, elle est génératrice de E et donc pour tout $v \in E$, il existe un n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $v = \sum_{k=1}^p \lambda_i \cdot e_i$*
- $\boxed{\text{Unicité}}$ *Supposons qu'il existe deux n-uplets de scalaires : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\left(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n\right)$ tels que :*

$$v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{k=1}^{p} \lambda'_i \cdot e_i.$$

On a donc : $\sum_{k=1}^p \left(\lambda'_i - \lambda_i\right) \cdot e_i = 0$. Mais e étant une base de E, elle est libre et cette dernière égalité n'est possible que si : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda'_i - \lambda_i = 0$ c'est-à-dire : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda'_i = \lambda_i$ ce qui prouve l'unicité.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons que pour tout $v \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :*

$$v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n$$

et montrons que e est une base de E. Il est clair que e est génératrice. Montrons que e est libre. La seule décomposition de 0_E sur les vecteurs de la famille e est $0_E = 0e_1 + \dots 0e_n$. Par conséquent, si le n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ est tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = 0_E$, on a nécessairement : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \alpha_i = 0$ ce qui prouve que e est libre.

24.2 Dimension d'un espace vectoriel

24.2.1 Espace vectoriel de dimension finie

DÉFINITION 24.6 ♡ **Espace vectoriel de dimension finie**
On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie*. De plus, par convention, on dit que $E = \{0\}$ est un espace de dimension finie.

Exemple 24.5
- K^n est de dimension finie car sa base canonique est une famille génératrice finie de K^n.
- De la même façon, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie.
- Par contre, $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Voir l'exemple 24.9 pour une démonstration.
- De la même façon, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont de dimension infinie. Voir l'exercice 24.32 page 924.

LEMME 24.6 ♡ **Augmentation d'une famille libre**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E \setminus \{0\}$. On suppose que :

(H1) $\mathscr{L} = (l_1, \dots, l_n)$ est une famille libre de vecteurs de E.

(H2) $x \notin Vect(\mathscr{L})$

Alors $(l_1, \dots, l_n, x)$ est encore une famille libre de vecteurs de E.

Démonstration *Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha$ $n+1$ *scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que :* $\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n + \alpha x = 0$. *Supposons que les* $n+1$ *scalaires ne sont pas tous nuls. Il y a alors deux possibilités :*

1. $\alpha = 0$ *et donc* $\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n = 0$ *avec* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *non tous nuls, ce qui n'est pas possible car la famille* $\mathscr{L}$ *est, d'après la première hypothèse, libre dans* E.
2. $\alpha \neq 0$. *Dans ce cas, on peut alors écrire* x *comme une combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathscr{L}$ *ce qui contredit la seconde hypothèse.*

On montre ainsi par l'absurde que la famille $(l_1, \dots, l_n, x)$ *est libre.*

LEMME 24.7 ♡ **Diminution d'une famille liée**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_n, g_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de E. On suppose que :

(H1) $g_{n+1} \in Vect(g_1, \dots, g_n)$ (c'est-à-dire, g_{n+1} est combinaison linéaire des vecteurs $g_1, \dots, g_n$).

Alors :

$$Vect(g_1, \dots, g_n, g_{n+1}) = Vect(g_1, \dots, g_n)$$

C'est-à-dire qu'on peut retirer le vecteur g_{n+1} à $\mathscr{G}$ sans modifier le sous-espace engendré par $\mathscr{G}$.

Démonstration *D'après l'hypothèse, il existe un n-uplet* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *de scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que :* $g_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k$. *Posons* $F = Vect(g_1, \dots, g_n)$ *et montrons que la famille* $(g_1, \dots, g_n)$ *génère aussi* F. *Soit* $x \in F$. *Il existe* $(x_1, \dots, x_{n+1})$ *un* $(n+1)$*-uplet de scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que :*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{n+1} x_i g_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_i g_i + x_{n+1} g_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_i g_i + x_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_i + x_{n+1}\alpha_k) g_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que $Vect(g_1, \dots, g_n, g_{n+1}) \subset Vect(g_1, \dots, g_n)$. *Il est par ailleurs clair que* $Vect(g_1, \dots, g_n) \subset Vect(g_1, \dots, g_n, g_{n+1})$ *et l'égalité est alors établie.*

THÉORÈME 24.8 ♡ **Fondamental : On peut compléter une famille libre en une base en puisant dans une famille génératrice**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q, n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

H1 $\mathscr{L} = (l_1, \dots, l_p)$ est une famille libre de vecteurs de E.

H2 $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_q)$ est une famille génératrice de vecteurs de E.

alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E de la forme

$$\mathscr{B} = (l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_n)$$

où $l_{p+1}, \dots, l_n \in \mathscr{G}$.

Démonstration *On va procéder de manière algorithmique. Si la famille $\mathscr{L}$ est génératrice, le théorème est démontré, sinon on construit une base ainsi. Posons $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}$.*

- $1^{\text{ère}}$ *étape :*
  - *Si $g_1 \in \text{Vect}(\mathscr{L}_0)$, on pose $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_0$. D'après le lemme 24.7, on a $\text{Vect}(\mathscr{L}_1) = \text{Vect}(\mathscr{L}_0 \cup \{g_1\})$*
  - *Si $g_1 \notin \text{Vect}(\mathscr{L}_0)$, on pose $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_0 \cup \{g_1\}$. D'après le lemme 24.6, la famille $\mathscr{L}_1$ est libre et $\text{Vect}(\mathscr{L}_1) = \text{Vect}(\mathscr{L}_0 \cup \{g_1\})$.*

  Dans les deux cas, on a :

$$\boxed{\text{Vect}(\mathscr{L}_1) = \text{Vect}(\mathscr{L}_0 \cup \{g_1\}) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_1 \text{ est libre}}$$

- *Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i + 1 \leqslant q$.*
- $i^{\text{ème}}$ *étape : On suppose que la famille $\mathscr{L}_i$ est construite en sorte que :*

$$\boxed{\text{Vect}(\mathscr{L}_i) = \text{Vect}(\mathscr{L}_{i-1} \cup \{g_i\}) = \text{Vect}(\mathscr{L}_0 \cup \{g_1, \dots, g_i\})} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathscr{L}_i \text{ est libre}}$$

- $i+1^{\text{ème}}$ *étape : On construit maintenant $\mathscr{L}_{i+1}$.*
  - *Si $g_{i+1} \in \text{Vect}(\mathscr{L}_i)$, on pose $\mathscr{L}_{i+1} = \mathscr{L}_i$. D'après le lemme 24.7, on a $\text{Vect}(\mathscr{L}_{i+1}) = \text{Vect}(\mathscr{L}_i)$*
  - *Si $g_{i+1} \notin \text{Vect}(\mathscr{L}_i)$, on pose $\mathscr{L}_{i+1} = \mathscr{L}_i \cup \{g_{i+1}\}$. D'après le lemme 24.6, la famille $\mathscr{L}_{i+1}$ est libre et $\text{Vect}(\mathscr{L}_{i+1}) = \text{Vect}(\mathscr{L}_i \cup \{g_{i+1}\})$.*

  Dans les deux cas, on a :

$$\boxed{\text{Vect}(\mathscr{L}_{i+1}) = \text{Vect}(\mathscr{L}_i \cup \{g_{i+1}\}) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_{i+1} \text{ est libre}}$$

- *On construit ainsi par récurrence les familles $\mathscr{L}_0, \dots, \mathscr{L}_q$.*

La famille $\mathscr{L}_q$ vérifie alors :

$$\boxed{\text{Vect}(\mathscr{L}_q) = \text{Vect}(\mathscr{L} \cup \mathscr{G}) \supset \text{Vect}(\mathscr{G}) = \text{E} \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_q \text{ est libre}}$$

et est donc libre et génératrice de E. $\mathscr{L}_q$ est donc une base de E.

Remarque 24.3 Cette démonstration fournit un algorithme explicite pour fabriquer des bases dans un espace vectoriel de dimension finie.

COROLLAIRE 24.9 ♡ **Existence de base**
Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ possède une base.

Démonstration *Par définition, un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ possède une famille génératrice finie $\mathscr{G}$. Soit $x \neq 0 \in \mathscr{G}$. La famille constituée du singleton $\{x\}$ est libre dans E. Par application de la proposition précédente, on peut la compléter en une base de E en la complétant par des vecteurs de $\mathscr{G}$ bien choisis.*

COROLLAIRE 24.10 ♡ **Théorème de la base incomplète**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors on peut compléter $\mathscr{L}$ en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.

Démonstration *Comme E est de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathscr{G}$. D'après le théorème précédent appliqué à $\mathscr{L}$ et à $\mathscr{G}$, on prouve l'existence d'une base de E construite par complétion de la base $\mathscr{L}$.*

24.2.2 Dimension

LEMME 24.11 **Lemme de Steinitz**
Soient $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathscr{T} = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ deux familles de vecteurs de E. On suppose que :

H1 $\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad y_i \in \text{Vect}(\mathscr{S})$

alors $\mathscr{T}$ est liée.

Démonstration *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété à démontrer. Nous allons effectuer une récurrence sur n.*

- *Si $n=1$ alors $\mathscr{S}=\{x_1\}$ et $\mathscr{T}=\{y_1,y_2\}$. Par hypothèse, $y_1=\alpha_1 x_1$ et $y_2=\alpha_2 x_1$ où $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$. Ces deux scalaires ne sont pas tous deux nuls sinon $\mathscr{T}$ ne compte qu'un élément. On a alors $\alpha_2 y_1-\alpha_1 y_2=0$ et $\mathscr{T}$ est liée. Donc P_1 est vraie.*
- *Soit $n\in\mathbb{N}$.*
- *Supposons que P_{n-1} est vraie et prouvons que c'est alors aussi le cas de P_n. Soient $\mathscr{S}=(x_1,\dots,x_n)$ et $\mathscr{T}=(y_1,\dots,y_n,y_{n+1})$ des familles de vecteurs comme dans l'énoncé du lemme. On a :*

$$\begin{cases} y_1 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^1 x_i \\ \vdots &= \vdots \\ y_{n+1} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^{n+1} x_i \end{cases}$$

où $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n+1]\!],\quad \alpha_i^j\in\mathbb{K}$. Il y a deux cas possibles :

- ■ *Si $\boxed{\forall k\in[\![1,n+1]\!],\quad \alpha_n^k=0}$ alors $(y_1,\dots,y_n)$ est une famille de vecteurs qui sont tous combinaisons linéaires de la famille $(x_1,\dots,x_{n-1})$. Par application de l'hypothèse de récurrence, on peut affirmer que $(y_1,\dots,y_n)$ est une famille liée. Il en est alors de même de $(y_1,\dots,y_{n+1})$.*
- ■ *Sinon $\boxed{\exists k\in[\![1,n+1]\!],\quad \alpha_n^k\neq 0}$. Quitte à ré-indicer les vecteurs de $\mathscr{T}$, on peut supposer que $\alpha_n^{n+1}\neq 0$. Posons alors : $\forall k\in[\![1,n]\!],\quad z_k=y_k-\dfrac{\alpha_k}{\alpha_n^{n+1}}y_{n+1}$. Chacun des vecteurs de la famille $(z_1,\dots,z_n)$ est alors élément de $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n-1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(z_1,\dots,z_n)$ est donc liée. Il existe donc des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^n\lambda_k z_k=0$, ce qui s'écrit aussi $\sum_{k=1}^n\lambda_k\left(y_k-\dfrac{\alpha_k}{\alpha_n^{n+1}}y_{n+1}\right)=0$ ou encore : $\sum_{k=1}^n\lambda_k y_k-\dfrac{\sum_{i=1}^n\alpha_i\lambda_i}{\alpha_n^{n+1}}y_{n+1}=0$ et prouve que la famille $(y_1,\dots,y_{n+1})$ est bien liée.*
- *Le théorème est alors prouvé par application du théorème de récurrence.*

THÉORÈME 24.12 ♡ **Le cardinal d'une famille libre est toujours plus petit que celui d'une famille génératrice.**
Soient :
– $\mathscr{S}$ une famille libre de E.
– $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E.
alors : $\boxed{\mathrm{Card}\mathscr{L}\leqslant\mathrm{Card}\mathscr{G}}$.

Démonstration *Supposons que ce ne soit pas le cas : $\mathrm{Card}\mathscr{L}>\mathrm{Card}\mathscr{G}$. Posons $m=\mathrm{Card}\mathscr{G}$ et supposons que $\mathscr{G}=(x_1,\dots,x_m)$ et que $(y_1,\dots,y_{m+1})$ soient $m+1$ vecteurs de $\mathscr{L}$. Comme $\mathscr{G}$ est génératrice, on a : $\forall i\in[\![1,n+1]\!],\quad y_i\in\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. Par application du lemme de Steinitz 24.11, cela implique que $(y_1,\dots,y_{m+1})$ est une famille liée de E, ce qui contredit le fait que $\mathscr{L}$ est une famille libre de E. Le théorème est alors prouvé par l'absurde.*

THÉORÈME 24.13 ♡ **Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal**
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Démonstration *Comme E est de dimension finie, E possède au moins une base. Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E. Comme $\mathscr{B}_1$ est libre et $\mathscr{B}_2$ est génératrice, on a $\mathrm{Card}\mathscr{B}_1\leqslant\mathrm{Card}\mathscr{B}_2$. De même, $\mathscr{B}_2$ est libre et $\mathscr{B}_1$ est génératrice, donc $\mathrm{Card}\mathscr{B}_2\leqslant\mathrm{Card}\mathscr{B}_1$. Par conséquent : $\mathrm{Card}\mathscr{B}_1=\mathrm{Card}\mathscr{B}_2$.*

Ce théorème, associé au théorème 24.9, permet de donner un sens à la définition suivante :

DÉFINITION 24.7 ♡ **Dimension d'un espace vectoriel**
– Si $\mathrm{E}=\{0\}$, on dit que E est de **dimension** 0 et on note $\dim\mathrm{E}=0$.
– Sinon, si E est un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, on appelle **dimension** de E le cardinal d'une base de E et on le note $\dim\mathrm{E}$.

Exemple 24.6
– $\dim\mathbb{K}^n=n$.
– $\dim\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]=n+1$.

Application 24.7

Une famille f d'au moins $n+1$ vecteurs dans un espace E de dimension n est toujours liée. En effet, si elle était libre alors on aurait une famille libre f de cardinal plus grand que celui de n'importe quelle base e de E. Or e est une famille génératrice de E et le cardinal d'une famille libre est toujours plus petit que celui d'une famille génératrice.

THÉORÈME 24.14 ♡ **Caractérisation des bases**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}$. Soit $\mathscr{S}$ une famille de vecteurs de E de cardinal p.

1. Si $\mathscr{S}$ est libre alors $p\leqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathscr{S}$ est une base de E.
2. Si $\mathscr{S}$ est génératrice alors $p\geqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathscr{S}$ est une base de E.

Démonstration *Comme* E *est de dimension* n*, il possède une base* $\mathscr{B}$ *de cardinal* n.

- *Si* $\mathscr{S}$ *est libre alors appliquant la proposition 24.12, on a :* $\mathrm{Card}\mathscr{S} \leqslant \mathrm{Card}\mathscr{B}$.
  - $\Rightarrow$ *Supposons de plus que* $p = n$ *et montrons que* $\mathscr{S}$ *est génératrice. Si ce n'était pas le cas, il existerait un vecteur* $x_0 \in \mathrm{E}$ *tel que* $x_0 \not\in \mathrm{Vect}(\mathscr{S})$*. La famille* $\mathscr{S} \cup \{x_0\}$ *est, d'après le lemme d'augmentation d'une famille libre 24.6, encore libre. On doit donc encore avoir, en vertu de la proposition 24.12,* $\mathrm{Card}\mathscr{S} \cup \{x_0\} \leqslant \mathrm{Card}\mathscr{B}$*. Mais cette dernière égalité est équivalente à* $n+1 \leqslant n$*. On a ainsi montré par l'absurde que* $\mathscr{S}$ *est génératrice.*
  - $\Leftarrow$ *Réciproquement, si* $\mathscr{S}$ *est génératrice, alors on a, par application de la proposition 24.12,* $\mathrm{Card}\mathscr{S} \geqslant \mathrm{Card}\mathscr{B}$ *et donc* $p = n$
- *Si* $\mathscr{S}$ *est génératrice, alors en appliquant la proposition 24.12, on a :* $\mathrm{Card}\mathscr{S} \geqslant \mathrm{Card}\mathscr{B}$ *et donc* $p = n$.
  - $\Rightarrow$ *Supposons de plus que* $p = n$ *et montrons que* $\mathscr{S}$ *est libre. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe* $x_0 \in \mathscr{S}$ *tel que* $x_0 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{S} \setminus \{x_0\})$*. Par application du lemme de réduction d'une famille liée 24.7,* $\mathscr{S} \setminus \{x_0\}$ *est encore génératrice mais on a alors* $n-1 = \mathrm{Card}\mathscr{S} \setminus \{x_0\} \geqslant n$ *ce qui contredit la proposition 24.12.*
  - $\Leftarrow$ *Réciproquement, si* $\mathscr{S}$ *est une base alors elle est libre et on a* $\mathrm{Card}\mathscr{S} \leqslant n$ *et donc* $p = n$.

Remarque 24.4 Comme on va le voir dans les exemples suivants, ce théorème permet de diviser par deux le travail à entreprendre pour montrer qu'une famille est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel donné.

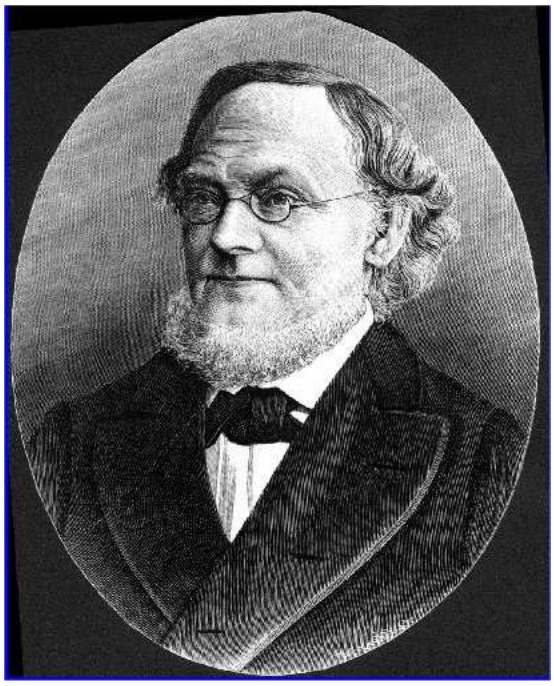
Exemple 24.8

- Reprenons le quatrième point de l'exemple 24.4. Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ et montrons que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On montre comme dans l'exemple 24.4 que cette famille est libre. On conclut en remarquant que $\mathrm{Card}(e) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc e est une base de $\mathbb{R}^3$. On n'a pas besoin de montrer que e est génératrice de $\mathbb{R}^3$! C'est automatique.
- Montrons que la famille $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ avec $\mathrm{P}_1 = 5$, $\mathrm{P}_2 = 2\mathrm{X} - 1$ et $\mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 1$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On commence par montrer que la famille est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 \mathrm{P}_1 + \alpha_2 \mathrm{P}_2 + \alpha_3 \mathrm{P}_3 = 0$. Alors $\alpha_3 \mathrm{X}^2 + (2\alpha_2 - 4\alpha_3)\mathrm{X} + (5\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = 0$. Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls et on obtient le système : $\begin{cases} 5\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_3 & = 0 \end{cases}$ dont l'unique solution est $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est bien libre. De plus $\mathrm{Card}(\mathrm{P}) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ donc P est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Exemple 24.9

Montrons que $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est de dimension infinie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathrm{E}_n = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est libre et $\mathrm{Card}(\mathrm{E}_n) = n+1$. Supposons que $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ contient une famille libre, E_{n+1} qui est de cardinal $n+1$, ce qui est impossible. Donc $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est de dimension infinie.

BIO 21 | Hermann Günther Grassmann, né le 15 avril 1809 à Stettin et mort le 26 septembre 1877 à Stettin (Allemagne).



Hermann Grassmann est le troisième enfant d'une famille de douze. Son père enseigne les mathématiques. Devant les piètres qualités intellectuelles de son fils (mémoire peu fiable, trouble de la concentration, ...), il pense faire de lui un jardinier ou un bijoutier. Hermann Grassmann se rend néanmoins à Berlin en 1927 pour étudier la théologie. Peu à peu, il se passionne pour les mathématiques qu'il découvre au travers des ouvrages écrit par son père. En 1830, il retourne dans sa ville natale en tant que professeur de mathématiques. Ayant raté son examen, il ne peut enseigner que dans les premières classes du secondaire. Il commence en même temps ses recherches en mathématiques. En 1840 il reçoit l'habilitation à enseigner dans les différentes classes de lycée et en 1844, il publie son ouvrage majeur ``*Die lineale Ausdenungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*´´. Grassmann y donne les fondements de l'algèbre linéaire. Son idée est de mettre l'algèbre au service de la géométrie. Il articule les choses autour de la notion de vecteurs. Cette citation est éclairante sur ses motivations : « La première impulsion est venue de considération sur la signification des nombres négatifs en géométrie. Habitué à voir AB comme une longueur, j'étais néanmoins convaincu que $AB = AC + CB$, quelle que soit la position de A, B, C sur une droite ». Il introduit les notions d'indépendance linéaire, de sous-espace vectoriel, de base et de dimension. Ses écrits sont confus et difficiles à suivre, aussi le livre n'aura que peu de lecteurs. Grassmann est très frustré de ce fait car il pense que son travail est révolutionnaire et qu'il mérite un poste à l'université. Il écrit une seconde version de son livre qu'il publie en 1862. Mais malgré ses efforts de présentation, elle ne connaît pas plus de succès que la première. Aigri, Grassmann se tourne alors vers la linguistique et apprend le Sanscrit et le Gothique. Grâce à d'importants travaux de traduction, il entre enfin à l'université. Il faut attendre 1888 pour que le mathématicien Giuseppe Peano reprenne le travail de Grassmann et en précise toute la portée.

24.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

On va maintenant étudier ce que la notion de dimension apporte dans l'étude des sous-espaces vectoriels.

24.3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

THÉORÈME 24.15 ♡ **Dimension d'un sous-espace vectoriel**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. On a :

1. F est de dimension finie et $\boxed{\dim F \leqslant \dim E}$.
2. $\boxed{(\dim F = \dim E) \Longleftrightarrow F = E}$

Démonstration

1. *Si* $F = \{0\}$*, le résultat est immédiat. Sinon, notons* L *l'ensemble des familles libres de* F. L *est non vide car* F *est non trivial et un vecteur de* F *à lui seul constitue une famille libre de* F. *Toute famille libre de* F *est une famille libre de* E *donc possède au plus* n *éléments. Notons* $p = \max\{\operatorname{Card}\mathscr{L} \mid \mathscr{L} \in L\}$. *On a donc* $p \leqslant n$ *et si une famille libre* $\mathscr{L}$ *de* E *vérifie à la fois :* $\operatorname{Card}\mathscr{L} = p$ et $\mathscr{L} \in L$ *alors nécessairement* $\mathscr{L}$ *est une base de* F. *En effet :*
   - $\mathscr{L}$ *est libre.*
   - $\mathscr{L}$ *est génératrice de* F. *Si ce n'était pas le cas, alors d'après le lemme d'augmentation d'une famille libre 24.6, il existerait un vecteur* $x \in F$ *tel que* $\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup \{x\}$ *soit encore libre. Mais* $\tilde{\mathscr{L}} \in L$ *et* $\operatorname{Card}\tilde{\mathscr{L}} = p + 1 > p$ *ce qui constituerait une contradiction. La famille* $\mathscr{L}$ *est donc nécessairement génératrice et est donc une base de* F.
2. *Le sens indirect est trivial. Réciproquement, si* $\dim F = \dim E$ *alors* F *possède une base* $\mathscr{B}$ *de cardinal* n. *Mais* $\mathscr{B}$ *est, par application de la proposition 24.14, aussi une base de* E *et donc :* $F = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = E$.

On utilise très souvent cette propriété...Elle permet de diviser par deux le travail à effectuer pour montrer que deux sous-espaces vectoriels E et F sont égaux. D'habitude on montre que $F \subset G$ puis que $G \subset F$. Il suffira donc de montrer la première inclusion puis que les deux sous-espaces ont même dimension.

PLAN 24.4 : ...pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux

1. *On montre que* $F \subset G$
2. *On montre que* $\dim F = \dim G$
3. *Alors* $F = G$

Exemple 24.10 Soit $E = \mathbb{R}^4$ et

$$F = \text{Vect}((1,1,\lambda,3),(0,1,1,2)) \qquad G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x - y + z = 0, x + 2y - t = 0\}$$

Cherchons à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $F = G$?

– Supposons tout d'abord que $F = G$. Alors $(1,1,\lambda,3) \in G$ et doit satisfaire en particulier l'équation $x - y + z = 0$. On trouve alors que $\lambda = 0$.
– Montrons que si $\lambda = 0$ alors $F = G$. On sait que $F = \text{Vect}((1,1,0,3),(0,1,1,2))$. Les vecteurs $(1,1,0,3),(0,1,1,2)$ engendrent F et ils sont non colinéaires donc ils forment une famille libre. Par suite, c'est une base de F et $\dim F = 2$. Par ailleurs $G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x - y + z = 0, x + 2y - t = 0\} = \{(x,y,y-x,x+2y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,0,-1,1),(0,1,1,2))$, on montre alors de la même façon qu'avant que $\dim G = 2$. De plus $(1,1,0,3)$ et $(0,1,1,2)$ vérifient le système $\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + 2y - t &= 0 \end{cases}$ donc $(1,1,0,3),(0,1,1,2) \in G$ et comme G est un sous-espace vectoriel, $F = \text{Vect}((1,1,\lambda,3),(0,1,1,2)) \subset G$. Enfin, comme $\dim F = \dim G$ on obtient $F = G$.

24.3.2 Somme directe

Le théorème suivant sera souvent bien commode pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.

THÉORÈME 24.16 ♡ **Un caractérisation de la supplémentarité en termes de bases**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E munis d'une base $(e_1,\dots,e_p)$ pour F et d'une base $(f_1,\dots,f_q)$ pour G. On a équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.
2. $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_q)$ est une base de E.

Démonstration

– *Prouvons le sens direct. On suppose que* $E = F \oplus G$.
  • *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre : soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_p,\alpha_{p+1},\dots,\alpha_n$ *des scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_p e_p+\alpha_{p+1} f_1+\dots+\alpha_n f_q = 0$. *On a alors :* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p = -(\alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q)$. *Comme* e *est une base de* F, *on a* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p \in F$ *et comme* f *est une base de* G, *on a :* $x = -(\alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q) \in G$. *Mais* F *et* G *étant en somme directe, on a :* $F \cap G = \{0\}$ *et donc* $x = 0$. *Comme* e *est une base de* F *et* f *une base de* G, *ceci implique que* $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \dots = \alpha_n = 0$ *et donc que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
  • *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est génératrice de* E. *Soit* $x \in E$. *Comme* $E = F \oplus G$, *il existe un vecteur* $x_1 \in F$ *et un vecteur* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *De plus :*
    – *Comme* e *est une base de* F *et que* $x_1 \in F$, *il existe* $\alpha_1,\dots\alpha_p \in \mathbb{K}$ *tels que* $x_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p$.
    – *Comme* f *est une base de* G *et que* $x_2 \in G$, *il existe* $\beta_1,\dots\beta_q \in \mathbb{K}$ *tels que* $x_2 = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q e_q$.
    Par conséquent : $x = x_1 + x_2 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q e_q \in Vect(\mathscr{B})$ *et* $\mathscr{B}$ *est donc bien génératrice de* E.
  On a ainsi prouvé que $\mathscr{B}$ *est une base de* E.
– *Prouvons la réciproque. On suppose que* $\mathscr{B}$ *est une base de* E.
  • *On a* $F \cap G = \{0\}$. *En effet si* $x \in F \cap G$ *alors il existe* $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{K}$ *et* $y_1,\dots,y_q \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = y_1 f_1 + \dots + y_q f_q$. *Mais alors* $x_1 e_1 + \dots + x_p - y_1 f_1 - \dots - y_q f_q = 0$. *Mais la famille* $\mathscr{B}$ *est libre donc* $x_1 = \dots = xp = y_1 = \dots = y_q = 0$ *et* $x = 0$.
  • *On a* $E = F + G$. *En effet, si* $x \in E$ *alors comme* $\mathscr{B}$ *engendre* E, *il existe* $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{K}$ *et* $y_1,\dots,y_q \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$x = \underbrace{x_1 e_1 + \dots + x_p e_p}_{\in F} + \underbrace{y_1 f_1 + \dots + y_q f_q}_{\in G} \in F + G.$$

  Donc $E = F \oplus G$.

COROLLAIRE 24.17 ♡ **Dimension d'une somme directe**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Si E_1 et E_2 sont supplémentaires : $E = E_1 \oplus E_2$, alors

$$\boxed{\dim E = \dim E_1 + \dim E_2}.$$

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie, il en est de même de ses deux sous-espaces supplémentaires* E_1 *et* E_2. *Posons* $n_1 = \dim E_1$ *et* $n_2 = \dim E_2$. *Il existe donc une base* $(e_1, \dots, e_{n_1})$ *de* E_1 *et une base* $(f_1, \dots, f_{n_2})$ *de* E_2. *D'après la proposition précédente,* $(e_1, \dots, e_{n_1}, f_1, \dots, f_{n_2})$ *est une base de* E *et est donc de cardinal* $n = \dim E$. *Par suite :* $\dim E_1 + \dim E_2 = n_1 + n_2 = n = \dim E$.

COROLLAIRE 24.18 ♡ **Existence d'un supplémentaire en dimension finie**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F possède des supplémentaires dans E.

Démonstration *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Comme* E *est de dimension finie il en est de même de* F *et* F *possède donc une base* $(e_1, \dots, e_p)$ *où* $p = \dim F$. *D'après le théorème 24.10, on peut compléter cette base en une base* $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ *de* E *où* q *est un entier tel que* $p + q = \dim E$. *Posons* $G = \mathrm{Vect}(\{f_1, \dots, f_q\})$. *Montrons que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E. *La famille* $(f_1, \dots, f_q)$ *est libre comme sous-famille d'une famille libre et elle engendre* G *par construction. Donc c'est une base de* G. *Donc d'après le théorème 24.16, on sait que* $E = F \oplus G$.

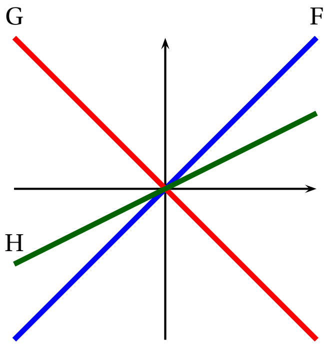


FIGURE 24.1 – Deux supplémentaires G et H d'un s.e.v F

⚠ *Attention 24.11* Il ne faut pas parler **du** supplémentaire d'un sous-espace vectoriel. Il en existe en général une **infinité**. Voir l'exercice 24.58 page 930.

THÉORÈME 24.19 ♡♡♡ **Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, formule de Grassmann**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Démonstration
Comme que $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* E *et que* E *est de dimension finie,* $F \cap G$ *possède, par application de la proposition précédente, un supplémentaire* F' *dans* F. *Montrons que* F' *est un supplémentaire de* G *dans* $F + G$, *c'est-à-dire que* $F' \oplus G = F + G$.

- *Soit* $x \in F' \cap G$. *Comme* $F' \subset F$, $x \in F \cap G$ *et comme* F' *et* $F \cap G$ *sont supplémentaires,* $x = 0$. *Donc* $F' \cap G = \{0\}$.
- *Soit* $x \in F + G$. *Il existe donc* $x_1 \in F$ *et* $x_2 \in G$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *Comme* $x_1 \in F$, *il existe* $x_1' \in F'$ *et* $x_1'' \in F \cap G$ *tels que* $x_1 = x_1' + x_1''$. *Par conséquent :*

$$x = \underbrace{x_1'}_{\in F'} + \underbrace{\underbrace{x_1''}_{\in F \cap G} + \underbrace{x_2}_{\in G}}_{\in G}$$

et donc $x \in F' + G$. *Ce qui prouve que* $F' + G = F + G$.

On a prouvé que $F' \oplus G = F + G$. *D'après le théorème 24.17, on a :* $\dim(F + G) = \dim(F' \oplus G) = \dim F' + \dim G$. *Mais comme* $F' \oplus F \cap G = F$, *on a aussi :* $\dim F' + \dim F \cap G = \dim F$ *et donc :* $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

COROLLAIRE 24.20 ♡ **Caractérisation des supplémentaires**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E.
2. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Démonstration

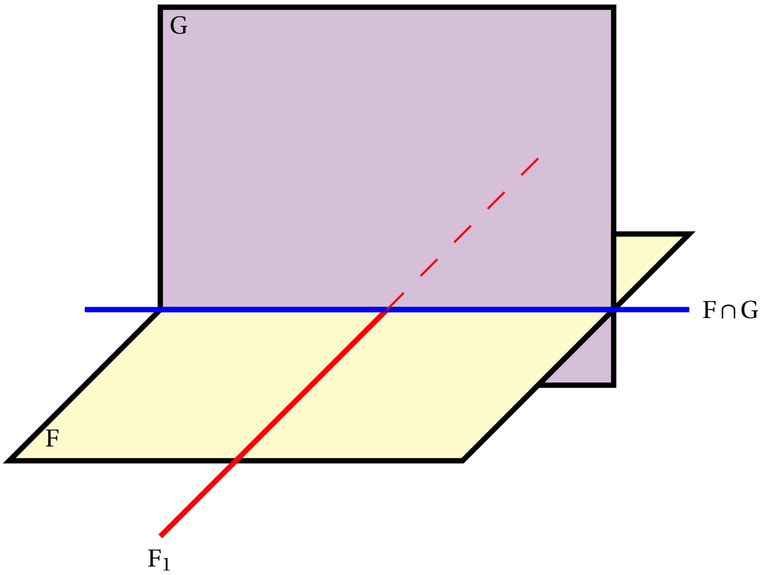


FIGURE 24.2 – Dimension de $F+G$: $F=F_1\oplus(F\cap G)$ et $F+G=G\oplus F_1$

- **1** $\Longrightarrow$ **2** *Si* F *et* G *sont supplémentaires dans* E*, il est clair que* $F\cap G=\{0\}$ *et, d'après la proposition 24.17, que :* $\dim F+\dim G=\dim E$.
- **2** $\Longrightarrow$ **3** *Il suffit de montrer que* $F+G=E$*. Mais d'après la proposition 24.19, on a :* $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G=n=\dim E$ *car* $F\cap G=\{0\}$*. Par conséquent, d'après la proposition 24.15, on a :* $F+G=E$.
- **3** $\Longrightarrow$ **1** *Il suffit de prouver que* $F\cap G=\{0\}$ *ce qui provient de :* $\dim F\cap G=\dim E-\dim F-\dim G=0$.

Remarque 24.5 La formule de Grassmann permet de diviser par deux le travail à effectuer pour prouver une supplémentarité.

Exemple 24.12 Reprenons le second point de l'exemple 23.15 page 856. Dans l'espace $E=\mathbb{R}^3$, on considère la droite F donnée par le système $\begin{cases} x+y-z &=0\\ 2x-y+z &=0\end{cases}$ et le plan G d'équation $z=0$. Montrons que $E=F\oplus G$. On a déjà vu que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E. Le vecteur $(x,y,z)\in F\cap G$ si et seulement si $\begin{cases} x+y-z &=0\\ 2x-y+z &=0\\ z &=0\end{cases}$ qui admet comme unique solution $(0,0,0)$. Donc $\dim(F\cap G)=0$. De plus $\dim F+\dim G=2+1=\dim E$. On en déduit, d'après le corollaire précédent, que $E=F\oplus G$.

24.4 Applications linéaires en dimension finie

Dans cette section, on s'intéresse aux implications de la notion de dimension en ce qui concerne les applications linéaires.

24.4.1 Bases et applications linéaires

La proposition suivante permet de comprendre qu'une application linéaire entre un espace vectoriel de dimension n et un autre de dimension m est entièrement déterminée par une famille de mn scalaires. Cette famille de scalaires, rangée convenablement dans un tableau, forme ce qu'on appellera dans le prochain chapitre une matrice.

THÉORÈME 24.21 ♡ **Une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que :

(H1) $e=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

(H2) $f=(f_1,\dots,f_n)$ est une famille de vecteurs de F.

alors il existe une et une seule application linéaire $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ telle que :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad u(e_i)=f_i \quad (\star)$$

Démonstration

- Unicité *Soit $v:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ une autre application linéaire vérifiant $(\star)$. Prouvons que $u=v$. Soit $x\in\mathrm{E}$. Comme e est une base de E, il existe des scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathrm{K}$ tels que $x=\sum_{k=1}^n\alpha_ke_k$. Par linéarité, on a :*

$$u(x)=u\left(\sum_{k=1}^n\alpha_ke_k\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_ku(e_k)=\sum_{k=1}^n\alpha_kf_k$$

et

$$v(x)=v\left(\sum_{k=1}^n\alpha_ke_k\right)=\sum_{k=1}^n\alpha_kv(e_k)=\sum_{k=1}^n\alpha_kf_k.$$

Par conséquent, $u(x)=v(x)$ et $u=v$.

- Existence *On construit une application $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ satisfaisant $(\star)$ de la façon suivante. Soit $x\in\mathrm{E}$. Il existe un unique $n-$uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum_{k=1}^n\alpha_ke_k$. Posons alors $u(x)=\sum_{k=1}^n\lambda_if_i$. u est bien définie car le $n-$uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ associé à x est unique. u est de plus linéaire. Soit $x'=\sum_{k=1}^n\lambda'_ke_k$ et soient $\alpha,\alpha'\in\mathbb{K}$. On a $\alpha x+\alpha'x'=\sum_{k=1}^n\left(\alpha\lambda_k+\alpha'\lambda'_k\right)e_k$ et par définition de u :*

$$\begin{aligned}u\left(\alpha x+\alpha'x'\right)&=\sum_{k=1}^n\left(\alpha\lambda_k+\alpha'\lambda'_k\right)f_k\\&=\sum_{k=1}^n\alpha\lambda_kf_k+\sum_{k=1}^n\alpha'\lambda'_kf_k\\&=\alpha u(x)+\alpha'u\left(x'\right).\end{aligned}$$

On a de plus bien : $\forall k\in[\![1,n]\!],\quad u\left(e_k\right)=f_k$.

Remarque 24.6 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $x\in\mathrm{E}$ et $y=f(x)$. On suppose que :

(H1) $e=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

(H2) $f=(f_1,\dots,f_m)$ est une base de F.

(H3) Il existe une famille de scalaires $\left(\alpha_{ij}\right)_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,m]\!]}$ de $\mathbb{K}$ telle que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad u(e_i)=\sum_{j=1}^m\alpha_{ij}f_j$.

(H4) Dans la base e, $x=\sum_{i=1}^n x_i\cdot e_i$ et dans la base f, $y=\sum_{j=1}^m y_i\cdot f_j$

alors : $\forall j\in[\![1,m]\!],\quad y_j=\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}\cdot xi$. D'après la proposition, la famille de scalaire $\left(\alpha_{i,j}\right)_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,m]\!]}$ caractérise complètement l'application linéaire u. Cette remarque est à la base de la théorie des matrices qu'on développera dans le prochain chapitre.

PROPOSITION 24.22 **Caractérisation vectorielle de l'injectivité ou la surjectivité d'une application linéaire**
Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $f=\left(f_1,\dots,f_n\right)$ une famille de n vecteurs de E. Soit $u:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ l'application linéaire tel que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad u(e_i)=f_i$. On a :

1. u est injective si et seulement si f est libre.
2. u est surjective si et seulement si f est génératrice.

Démonstration ♡♡♡

1. *On a :*

$$\begin{aligned}u\text{ est injective}&\iff(\forall x\in\mathrm{E},\quad u(x)=0\implies x=0)\\&\iff\left(\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad u\left(\sum_{k=1}^n\lambda_ke_k\right)=0\implies\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0\right)\\&\iff\left(\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad\sum_{k=1}^n\lambda_ku\left(e_k\right)=0\implies\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0\right)\\&\iff\left(\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad\sum_{k=1}^n\lambda_kf_k=0\implies\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0\right)\\&\iff f\text{ est libre}\end{aligned}$$

2 *On a :*

$$\begin{aligned} u \text{ est surjective} &\iff \left(\forall y\in F,\quad \exists x\in E:\quad f(x)=y\right)\\ &\iff \left(\forall y\in F,\quad \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad u\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right)=y\right)\\ &\iff \left(\forall y\in F,\quad \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad \sum_{k=1}^n \lambda_k u(e_k)=y\right)\\ &\iff \left(\forall y\in F,\quad \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k=y\right)\\ &\iff f \text{ est génératrice}\end{aligned}$$

Remarque 24.7 C'est un excellent exercice que de refaire seul cette preuve.

24.4.2 Dimension et isomorphisme

PROPOSITION 24.23 ♡ **Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si $\dim F = \dim E = n$.

Démonstration

- $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* E *et* F *sont isomorphes. Alors il existe* $u\in\mathscr{L}(E,F)$ *bijective. Soit* $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E. *Alors* $\mathscr{C}=(u(e_1),\dots,u(e_n))$ *est, d'après la proposition précédente :*
  - *libre car* u *est injective.*
  - *génératrice car* u *est surjective.*

  $\mathscr{C}$ *forme donc une base de* F *et* $\dim F = \operatorname{Card}\mathscr{C} = n = \dim E$.
- $\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* $\dim F=\dim E = n$, *considérons* $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E *et* $\mathscr{C}=(f_1,\dots,f_n)$ *une base de* F. *On définit une application linéaire* u *entre* E *et* F *en posant :* $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad u(e_i)=f_i$. *Par application de la proposition précédente,* u *est :*
  - *injective car* $\mathscr{C}$ *est libre.*
  - *surjective car* $\mathscr{C}$ *est génératrice.*

  Par conséquent u *est un isomorphisme de* E *dans* F.

COROLLAIRE 24.24 ♡
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.

Démonstration *En effet, ces deux espaces vectoriels sont de même dimension.*

COROLLAIRE 24.25 ♡
Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie alors $E_1\times E_2$ est de dimension finie et :

$$\boxed{\dim(E_1\times E_2)=\dim E_1+\dim E_2}$$

Démonstration *Supposons que* $\dim E_1 = n_1\in\mathbb{N}$ *et* $\dim E_2 = n_2\in\mathbb{N}$. *Appliquant le corollaire précédent, on a :* $E_1\simeq\mathbb{K}^{n_1}=$ *et* $E_2\simeq\mathbb{K}^{n_2}$. *On montre facilement qu'alors :* $E_1\times E_2\simeq K^{n_1}\times\mathbb{K}^{n_2}=\mathbb{K}^{n_1+n_2}$. *Mais* $\dim\mathbb{K}^{n_1+n_2}=n_1+n_2$. *Par conséquent :* $\dim(E_1\times E_2)=n_1+n_2$.

24.4.3 Rang

DÉFINITION 24.8 ♡♡♡ **Rang d'une famille de vecteurs**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **rang** de la famille de vecteurs $\mathscr{F}=(e_1,\dots,e_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$. On notera : $\operatorname{rg}\mathscr{F}=\dim \mathrm{V}ect(\mathscr{F})$.

DÉFINITION 24.9 ♡♡♡ **Rang d'une application linéaire**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On appelle **rang de l'application linéaire** $u\in\mathscr{L}(E,F)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$: $\operatorname{rg} u=\dim \mathrm{V}ect(\operatorname{Im} u)$.

PROPOSITION 24.26 ♡♡♡
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u\in\mathscr{L}(E,F)$. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E alors $\operatorname{rg} u=\operatorname{rg}(u(e_1),\dots,u(e_n))$.

Démonstration *Soit* $(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E*. On a* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n))$*. En effet :*

$$\begin{aligned} y\in\operatorname{Im} u &\iff \exists x\in E:\quad y=u(x)\\ &\iff \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad y=u\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right)\\ &\iff \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}:\quad y=\sum_{k=1}^n \lambda_k u(e_k)\\ &\iff y\in\operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n)) \end{aligned}$$

et $\operatorname{rg} u = \dim\operatorname{Im} u = \dim\operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n)) = \operatorname{rg}(u(e_1),\dots,u(e_n))$*.*

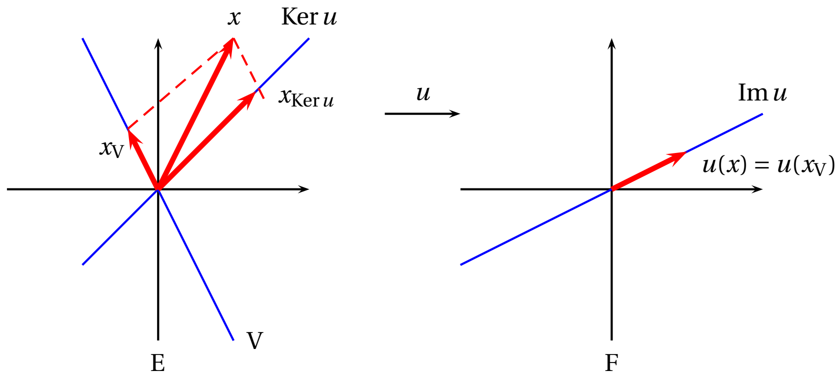


FIGURE 24.3 – Formule du rang : $E = \operatorname{Ker} u \oplus V$ et $V \approx \operatorname{Im} u$

THÉORÈME 24.27 ♡♡♡ **Formule du rang**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que :

(H1) E est de dimension finie.

Alors on a la **formule du rang** :

$$\boxed{\dim E = \dim\operatorname{Ker} u + \dim\operatorname{Im} u = \dim\operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u}$$

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie, d'après la proposition 24.18,* Ker u *possède un supplémentaire* G*. Montrons que* G *et* Im u *sont isomorphes. Pour ce faire, montrons que* $u_{|G} : G \to \operatorname{Im} u$ *est un isomorphisme.*

- $u_{|G}$ *est surjective : Soit* $y \in \operatorname{Im} u$*. Il existe* $x\in E$ *tel que* $u(x)=y$*. Comme* $E=\operatorname{Ker} u\oplus G$*, il existe* $x_1\in\operatorname{Ker} u$ *et* $x_2\in G$ *tels que :* $x=x_1+x_2$*. Comme* $u(x_1)=0$*, on a :* $y=u(x)=u(x_1+x_2)=u(x_1)+u(x_2)=u(x_2)$*. Par conséquent,* y *possède un antécédent pour* $u_{|G}$ *dans* G*. et* $u_{|G}$ *est surjective.*
- $u_{|G}$ *est injective : Soit* $x\in G$ *tel que* $u_{|G}(x)=0$*. Alors* $x\in\operatorname{Ker} u$ *et donc* $x\in G\cap\operatorname{Ker} u$*. Comme* $E=\operatorname{Ker} u\oplus G$*,* $x=0$ *et donc* $u_{|G}$ *est injective.*

Par conséquent, G *et* Im u *sont isomorphes et, d'après la proposition 24.17, on a :* $\dim\operatorname{Im} u = \dim G = \dim E - \dim\operatorname{Ker} f$ *.*

Remarque 24.8

- On montre dans cette preuve que Im u est isomorphe à tout supplémentaire de Ker u. Il faut bien prendre garde qu'en général, si u est un endomorphisme, Ker u et Im u ne sont pas supplémentaires. Essayez par exemple de trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.
- La formule du rang permet de connaître la dimension du noyau (resp. de l'image) de u dés qu'on connaît la dimension de son image (resp. de son noyau). Là encore, on dispose d'un outil puissant qui va permettre de beaucoup simplifier les démonstrations.

⚠ *Attention 24.13* Il y a deux erreurs classiques à commettre en appliquant cette formule. La première, grossière, est de prendre pour E l'espace d'arrivée de u plutôt que son espace de départ. La seconde est d'oublier de vérifier que E est de dimension finie. En dimension infinie, la formule du rang n'a tout simplement pas de sens...En effet, Ker u et Im u peuvent être de dimension infinie.

Exemple 24.14 On considère l'application linéaire $u : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x-z)\end{array}\right.$. Déterminons son image et son noyau.

– On sait que $\operatorname{Im} u = \left\{\left(x-y+z, x-z\right) \mid \left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{x(1,1)+y(-1,0)+z(1,-1) \mid \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\right\} = \operatorname{Vect}\left(f_1, f_2, f_3\right)$ avec $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (-1,0)$ et $f_3 = (1,-1)$. Trois vecteurs dans le plan sont nécessairement liés. Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. D'après le lemme de réduction d'une famille liée, on a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\left(f_1, f_2\right)$. On vérifie que les vecteurs f_1 et f_2 forment une famille libre. On a donc montré que $\left(f_1, f_2\right)$ est une base de $\operatorname{Im} u$ et que $\operatorname{Im} u$ est de dimension 2. On remarque que comme $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}^2$ et que $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}^2$ alors $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$ et u est surjective.
– On applique la formule du rang et on trouve que $\dim \operatorname{Ker} u = 1$. Le noyau de u est alors une droite vectorielle et une base de cette droite est formée d'un seul vecteur. On vérifie que $(1,2,1) \in \operatorname{Ker} u$. Donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(1,2,1)$.

COROLLAIRE 24.28 ♡ **Caractérisation des isomorphismes**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a équivalence entre :

1. u est injective.
2. u est surjective.
3. u est un isomorphisme.

Démonstration *On a :*
– *u est injective* $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ $\Longrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} u = 0$ $\Longrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} u = \dim E = n$ $\Longrightarrow$ *u est surjective* $\Longrightarrow$ *u est un isomorphisme.*
– *u est surjective* $\Longrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} u = \dim E = n$ $\Longrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} u = 0$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ $\Longrightarrow$ *u est injective* $\Longrightarrow$ *u est un isomorphisme.*

COROLLAIRE 24.29 ♡ **Caractérisation des automorphismes**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ On a équivalence entre :

1. u est injective.
2. u est surjective.
3. u est un automorphisme.

Démonstration *C'est une conséquence directe de la dernière proposition.*

THÉORÈME 24.30 ♡ **Inverses à gauche et à droite**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$. On dit que

1. u est inversible à gauche si et seulement si il existe $v \in L(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}$;
2. u est inversible à droite si et seulement si il existe $w \in L(E)$ tel que $u \circ w = \mathrm{id}$;
3. u est inversible si et seulement si il existe $u^{-1} \in L(E)$ tel que $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{id}$.

On a la caractérisation :

$$(u \text{ inversible à gauche}) \Longleftrightarrow (u \text{ inversible à droite}) \Longleftrightarrow (u \text{ inversible})$$

Démonstration *Supposons que u est inversible à gauche et montrons que u est bijective. Il existe donc $v \in L(E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Alors $v \circ u$ est bijective (c'est l'application identique !) et d'après le théorème 1.1 page 1141, on sait alors que u est injective. Mais d'après la proposition de caractérisation des automorphismes, u est bijective. On fait de même si u est inversible à droite.*

Remarque 24.9
– Là encore, on divise par deux le travail à réaliser pour montrer qu'une application linéaire $u \in L(E)$ est bijective. Dans le cas général, il faut exhiber une application $v \in L(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{id}_E$. Si E est de dimension finie, il suffit de montrer que $u \circ v = \mathrm{id}_E$ ou que $v \circ u = \mathrm{id}_E$.
– Ce résultat est faux en dimension infinie comme le montre le contre-exemple suivant. Soit $\mathscr{S}$ l'espace des suites réelles. On définit deux endomorphismes (le « shift »à gauche et à droite) :

$$s_g : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots)$$

$$s_d : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots)$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité de s_g, s_d. Calculer $s_g \circ s_d$ et $s_d \circ s_g$.

24.5 Récurrences linéaires

On considère les suites de nombres réels ou complexes vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Des liens avec la résolution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ vont apparaître. Il est donc bon de revoir le théorème 5.13 p. 211.

24.5.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. On considère l'espace vectoriel E des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 24.31
Soit $a, b,$ et $c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$.
L'ensemble F des suites de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration *Pour cela on considère* $\Phi : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow \mathrm{E} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$ *avec* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$.
On vérifie simplement que Φ *est un endomorphisme de* E. *On en déduit que* F*, en tant que noyau de* Φ*, est un sous-espace vectoriel de* E.

PROPOSITION 24.32
F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\leqslant 2$.

Démonstration *Soit* $\Psi : \begin{cases} \mathrm{F} & \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$.
On vérifie simplement que Ψ *est linéaire. Maintenant,* Ψ *est injectif. En effet, soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Ker}\Psi$*, on vérifie par une récurrence double (Théorème 8.3 p. 306)* $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{H}_n : u_n = 0$.
On a H_0 *et* H_1 *puisque* $u \in \operatorname{Ker}\Psi$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{H}_n \text{ et } \mathrm{H}_{n+1}) \Longrightarrow \mathrm{H}_{n+2})$ *puisque* $a \neq 0$.
On en déduit que F *est de dimension finie. Toute famille libre de* F *a pour image une famille libre de* $\mathbb{K}^2$ *puisque* Ψ *est injectif. Donc toutes les familles libres de* F *ont moins de deux éléments. C'est bien dire que* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $\leqslant 2$.

24.5.2 Suites géométriques solutions

Comme pour les équations différentielles où l'on cherchait des solutions de la forme $x \longmapsto e^{rx}$, on va chercher des solutions sous la forme de suites géométriques. Là encore on va travailler dans $\mathbb{C}$ dans un premier temps.
On considère l'équation caractéristique

$$a\ r^2 + b\ r + c = 0.$$

Si r est une racine, alors la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F.

PROPOSITION 24.33
Soit $a, b,$ et $c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$.
- ▸ Si r_1 et r_2 sont des racines distinctes de $a\ r^2 + b\ r + c = 0$, alors les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.
- ▸ Si r est une racines double de $a\ r^2 + b\ r + c = 0$, alors les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

Dans les deux cas, F est un espace de dimension 2.

Démonstration ▸ *Dans le cas des racines distinctes, les deux suites géométriques ont pour image par* Ψ *respectivement* $(1, r_1)$ *et* $(1, r_2)$ *qui forment une famille libre de* $\mathbb{C}^2$*. Donc les deux suites géométriques forment une famille libre d'un espace de dimension au plus deux, donc c'est une base.*
▸ *Dans le cas d'une racine double, les deux suites ont pour image par* Ψ *respectivement* $(1, r)$ *et* $(0, r)$ *qui forment à nouveau une famille libre de* $\mathbb{C}^2$.

Exemple 24.15 On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0,\ \ u_1 = 1,\ \ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$, elle admet deux racines distinctes

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \text{ et } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Donc il existe deux complexes a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = ar_1^n + br_2^n$. Les conditions initiales nous donnent $u_0 = 0 = a+b$ et $u_1 = 1 = ar_1 + br_2$. On résout ce système en (a, b) pour trouver

$$a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

soit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \text{Formule de Binet .}$$

24.6 Polynômes

Comme promis, nous revenons sur les polynômes en nous attachant plus à l'aspect espace vectoriel qu'à l'aspect anneau. Pour commencer, un rappel.

PROPOSITION 24.34 ♡ **Structure de $\mathbb{K}[X]$**
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

THÉORÈME 24.35 ♡ **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$**
Soit $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors :

- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- La famille $\boxed{(1, X, X^2, \ldots, X^n)}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

- *Montrons que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.Comme $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\alpha P + \beta Q$ est encore un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Reste à montrer que ce polynôme est de degré $\leqslant n$. On a clairement : $\deg(\alpha P) \leqslant \deg P \leqslant n$ et $\deg(\beta Q) \leqslant \deg Q \leqslant n$ et appliquant le théorème 21.4, on a aussi $\deg(\alpha P + \beta Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.*
- *Montrons que la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est libre : soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_0.1 + \alpha_1.X + \ldots + \alpha_n.X^n = 0$. Transcrivant cette égalité avec la notation initiale des polynômes, on a donc : $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots) = (0, \ldots, 0, 0, \ldots)$ et par identification : $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ ce qui prouve que la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est libre.*
- *Montrons que la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$: Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$. La famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ engendre donc $\mathbb{K}_n[X]$.*

Remarque 24.10 Nous avons démontré au passage que $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

PROPOSITION 24.36 ♡ **Famille échelonnée en degré**
Soit $\mathscr{S} = (P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \deg(P_i) = i$$

alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration *Soit $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0$ une combinaison linéaire nulle de (P_k). Supposons les λ_k non tous nuls et considérons p le plus grand indice i pour lequel $\lambda_k \neq 0$. On aurait alors $P_p = -\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_p} P_i$. Le membre de gauche est un polynôme de degré p et celui de droite un polynôme de degré $\leqslant p-1$. Contradiction. Donc la famille $\mathscr{S}$ est libre. Comme elle admet $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, elle est aussi génératrice. C'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Remarque 24.11 La famille $\left(1, (X-a), \ldots, \frac{(X-a)^n}{n!}\right)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\left(P(a), P'(a), \ldots, P^{(n)}(a)\right)$ représente les composantes de P dans cette base.
C'est la formule de Taylor.

On démontre de même :

PROPOSITION 24.37 **Famille échelonnée en valuation**

- Soit $\mathscr{S} = (P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \operatorname{val}(P_i) = i$$

alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- Soit $\mathscr{S} = (\mathrm{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{val}(\mathrm{P}_i) = i$$

  alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

En résumé

Ce chapitre doit être parfaitement maîtrisé, il contient différentes notions fondamentales en algèbre linéaire :

1. Familles libres, liées, génératrices.
2. Bases.
3. Théorème de la base incomplète.
4. Dimension.
5. Formule de Grassmann.
6. Formule du rang.
7. Image d'une base par une application linéaire.

Les démonstrations vous sembleront sans doute difficiles dans un premier abord mais là encore, petit à petit, vous allez vous les approprier et vous comprendrez au final qu'elles sont pour la plupart très naturelles. Il est important de bien les assimiler et de savoir les refaire car les techniques utilisées re-serviront.

24.7 Exercices

24.7.1 Famille libre, Famille liée, Famille génératrice

Exercice 24.1 ♡

Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ *sont linéairement dépendants :*

1. $u = (1,0,1)$, $v = (1,-2,3)$, $w = (1,2,-1)$.
2. $u = (1,2,-2)$, $v = (2,0,-1)$, $w = (1,-2,1)$.

Solution :

1. $w = 2u - v$.
2. $v = u + w$

Exercice 24.2 ♡

Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, montrer que la famille* (f,g,h) *est liée où* $f : x \mapsto 1$*,* $g : x \mapsto \cos^2 x$*,* $h : x \mapsto \cos 2x$*.*

Solution : *D'après la trigonométrie, on a* $h = 2g - f$*.*

Exercice 24.3 ♡

Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liées ou libres :

1. $u = (1,2)$, $v = (3,1)$, $w = (5,1)$.
2. $u = (-1,0,2)$, $v = (1,2,1)$, $w = (0,1,1)$.
3. $u = (10,-1,-4,10)$, $v = (1,0,1,-2)$.

Solution :

1. u *et* v *ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre.* $\mathbb{R}^2$ *étant de dimension* 2*, cette famille est une base de* $\mathbb{R}^2$ *et nécessairement la famille* (u,v,w) *est liée.*
2. *On vérifie facilement que la famille* (u,v,w) *est libre.*
3. *Les vecteurs* u *et* v *ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre.*

Exercice 24.4 ♡

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*. A quelle condition les trois vecteurs* $(1,a,b), (0,1,c), (0,0,1)$ *forment-ils une famille libre dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

Solution : *Soit* $(\lambda,\mu,\delta) \in \mathbb{R}^3$ *tels que*

$$\lambda(1,a,b) + \mu(0,1,c) + \delta(0,0,1) = (0,0,0)$$

On en tire $\lambda = 0$*,* $a\lambda + \mu = 0$ *et* $b\lambda + c\mu + \delta = 0$*, ce qui donne* $\lambda = \mu = \delta = 0$*. Par conséquent,* $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*, la famille est libre.*

Exercice 24.5 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et soient* e_1*,* e_2*,* e_3 *des vecteurs de* E *tels que la famille* (e_1,e_2,e_3) *est libre. Posons :* $f_1 = e_1 - e_2$*,* $f_2 = e_2 + e_3$*,* $f_3 = e_1 - e_3$*. Montrer que la famille* (f_1,f_2,f_3) *est libre.*

Solution : *Soient* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{K}$ *tel que* $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i f_i = 0$*. On a alors :* $\alpha_1(e_1 - e_2) + \alpha_2(e_2 + e_3) + \alpha_3(e_1 - e_3) = 0$ *ce qui s'écrit aussi :* $(\alpha_1 + \alpha_3)e_1 + (-\alpha_1 + \alpha_2)e_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)e_3 = 0$*. La famille* (e_1,e_2,e_3) *étant libre, cette égalité n'est possible que si* $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$*. L'unique solution de ce système est le triplet* $(0,0,0)$*. La famille* (f_1,f_2,f_3) *est donc libre.*

Exercice 24.6 ♡

Prouver que la famille $(\sin,\cos)$ *est libre dans le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*.*

Solution : *Soient* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha\sin + \beta\cos = 0$*. On a donc :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha\sin x + \beta\cos x = 0$*. En particulier, si* $x = 0$*, on obtient :* $\beta = 0$ *et si* $x = \frac{\pi}{2}$*, on obtient* $\alpha = 0$*. Il vient alors que* $\alpha = \beta = 0$*. La famille* $(\sin,\cos)$ *est donc libre et elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension* 2 *dans* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, c'est-à-dire un plan vectoriel.*

Exercice 24.7 ♡

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E = \mathscr{F}([0,2\pi],\mathbb{R})$*, on considère les quatre fonctions :*

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \right. \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos x \end{array} \right.$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right. \qquad f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin x \end{array} \right.$$

Prouver que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) *est libre.*

Solution :
Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ *tel que* $\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \alpha_3 \cdot f_3 + \alpha_4 \cdot f_4 = 0$*. On a donc :*

$$\forall x \in [0,2\pi], \quad \alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \alpha_3 \cdot f_3(x) + \alpha_4 \cdot f_4(x) = 0,$$

en particulier, remplaçant x *par* $x = 0$ *puis* $x = \pi$*, on obtient le système* $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2\pi = 0 \end{cases}$ *puis remplaçant* x *par* $x = \frac{\pi}{2}$ *puis* $x = \frac{3\pi}{2}$*, on obtient le système* $\begin{cases} \alpha_3 + \frac{\pi}{2}\alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \frac{3\pi}{2}\alpha_4 = 0 \end{cases}$ *d'où* $\forall i \in [\![1,4]\!], \quad \alpha_i = 0.$

Exercice 24.8 ♡

Soient $r, \omega \in \mathbb{R}$ *tels que* $\omega \neq 0$*. Dans le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, on considère les deux vecteurs* f_1 *et* f_2 *définis par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^{rx}\sin\omega x \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{rx}\cos\omega x.$$

Démontrer que la famille (f_1, f_2) *est libre.*

Solution : *Soient* $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 = 0$*. Cette égalité s'écrit aussi :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 e^{rx}\cos\omega x + \mu_2 e^{rx}\sin\omega x = 0$*. Pour* $x = 0$*, on obtient :* $\mu_1 = 0$ *et pour* $x = \frac{\pi}{2\omega}$*, on a :* $\mu_2 = 0$*. Le couple* (μ_1, μ_2) *est donc nul et la famille* (f_1, f_2) *est bien libre.*

Exercice 24.9 ♡

Pour tout $a \in \mathbb{R}$*, considérons l'application*

$$f_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-a| \end{array} \right. .$$

Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) *est une famille libre dans* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*.*

Solution : *Soient* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\sum_{k=0}^{2} \alpha_i f_i = 0$*. On a donc :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0|x| + \alpha_1|x-1| + \alpha_2|x-2| = 0$*. En prenant successivement* $x = 0, 1$ *et* 2 *dans cette égalité, on aboutit au système :* $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_0 + \alpha_1 = 0 \end{cases}$ *dont l'unique solution est* $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (0,0,0)$*. La famille* (f_0, f_1, f_2) *est bien libre.*
Autre solution : On suppose $\alpha_0 \neq 0$ *et on a* $|x| = -\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_1|x-1| + \alpha_2|x-2|)$*. Or cette égalité est impossible car le membre de droite est dérivable en zéro et le membre de gauche ne l'est pas. Donc* $\alpha_0 = 0$*. On démontre de même que* $\alpha_1 = 0$ *et* $\alpha_2 = 0$*.*

Exercice 24.10 ♡

Les familles de fonctions suivantes sont-ils libres dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *?*

1. $(f_1, \dots, f_n)$ *où* $n \geqslant 2$ *et* $\forall k \in [1, n]$*,*
$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x+k} \end{array} \right.$$
2. (f_1, f_2, f_3) *où* $\forall k \in [1, 3]$*,*
$$f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-k)^2 \end{array} \right.$$
3. (f_1, f_2, f_3, f_4) *où* $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $f_1(x) = 1$*,* $f_2(x) = x$*,* $f_3(x) = x^2$ *et* $f_4(x) = e^x$*.*

Solution :

1. Puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ e.e^{x+1} - e^{x+2} = 0$, on en déduit que (e^{x+1}, e^{x+2}) est lié, donc la famille est lié.
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x-1)^2 + b(x-2)^2 + c(x-3)^2 = 0$$
alors puisque ce polynôme est nul, les coefficients de $x^2, x, 1$ du polynôme et de ses dérivées doivent être nuls. On en tire
$$a+b+c = a+2b+3c = a+4b+9c = 0 \implies a=b=c=0$$
Par conséquent, la famille est libre.
3. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, a+bx+cx^2+de^x = 0$$
On doit avoir $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$d + (a+bx+cx^2)e^{-x} = 0$$
et en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, on obtient que $d = 0$. En factorisant ensuite par x^2 et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve que $c = 0$. Ensuite de même $b = 0$ et enfin $a = 0$. La famille est libre.

Exercice 24.11 ♡

On considère l'espace des suites complexes $\mathrm{E} = \mathscr{S}(\mathbb{C})$, et deux complexes $(k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$ distincts. On note u la suite géométrique de raison k_1 et v la suite géométrique de raison k_2. Montrer que la famille $\mathrm{S} = (u, v)$ est libre dans E.

Solution : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\lambda u + \mu v = 0_{\mathrm{E}}$. En examinant les deux premiers termes de cette suite, on trouve que :
$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda k_1 + \mu k_2 &= 0 \end{cases}$$
et en résolvant ce système, que $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 24.12 ♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une famille de vecteurs $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{E}^n$ libre. On définit les vecteurs
$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_n = a_1 + \dots + a_n$$
Montrer que la famille $(b_1, \dots, b_n)$ est libre.

Solution : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0_{\mathrm{E}}$$
Alors
$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)a_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n)a_2 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)a_{n-1} + \lambda_n a_n = 0$$
Comme $(a_1, \dots, a_n)$ est libre, on tire que
$$\lambda_n = \lambda_n + \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_n + \dots + \lambda_1 = 0_{\mathbb{K}}$$
et par conséquent que tous les λ_k sont nuls.

Exercice 24.13 ♡♡

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On considère ensuite l'application
$$\varphi_k : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f^{(k)}(0) \end{cases} \qquad (k \in [\![1, n]\!])$$
Montrer que l'application φ_k est linéaire, puis que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre dans l'espace $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$.

Solution : On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il est aussi facile de montrer que les applications φ_k sont linéaires. Montrons ensuite que la famille est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n = 0_{\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})}$$
En appliquant cette application linéaire à la fonction $\theta_k : x \mapsto x^k \in \mathrm{E}$, on trouve que
$$\lambda_k k! = 0$$
(car $[x^k]^{(p)}(0) = k!$ si $p = k$ et $[x^k]^{(p)}(0) = 0$ si $p \neq k$. On en déduit donc que $\forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0$.

Exercice 24.14 ♡♡

Soit $f_k(t) = e^{kt}$. Montrer que $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une famille libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Solution : *Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^x + \cdots + \lambda_n e^{nx} = 0.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n e^{(n-1)x} = 0 \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

et $\lambda_1 = 0$. On recommence avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_2 e^x + \cdots + \lambda_{n-1} e^{(n-1)x} = 0$$

ce qui donne $\lambda_2 = 0$ et ainsi de suite, on montre que tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls. La famille est donc libre.

Exercice 24.15 ♡♡

Dans l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que la famille $\mathrm{S} = (x \to 1, x \to \operatorname{ch} x, x \to \operatorname{ch} 2x, \dots, x \to \operatorname{ch} nx)$ est libre.

Solution : *Au voisinage de $+\infty$, on a l'équivalent $\operatorname{ch} nx = \dfrac{e^{nx}+e^{-nx}}{2} = \dfrac{e^{nx}}{2}\left(1+e^{-2nx}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{nx}}{2}$ car $1+e^{-2nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{ch} x + \ldots + \alpha_n \operatorname{ch} nx = 0$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 e^{-nx} + \alpha_1 \operatorname{ch}(x)\, e^{-nx} + \ldots + \alpha_n \operatorname{ch}(nx)\, e^{-nx} = 0.$$

En vertu de l'équivalent, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\operatorname{ch}(kx)\, e^{-nx} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{(k-n)x}/2$ et

$$\operatorname{ch}(kx)\, e^{-nx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } k<n \\ 1/2 & \text{si } k=n \end{cases}.$$

Donc la somme précédente ne tend vers 0 que si $\alpha_n = 0$. On répète n fois ce raisonnement et on montre que $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$. La famille S est bien libre.

Exercice 24.16 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre. Les familles

$$\mathrm{S} = (u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots, u_{n-1} - u_n, u_n - u_1)$$

$$\mathrm{T} = (u_1 + u_2, \dots, u_{n-1} + u_n, u_n + u_1)$$

sont-ils libres ?

Solution : *La famille S est liée car*

$$(u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) + (u_n - u_1) = 0_{\mathrm{E}}$$

Pour la famille T : Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\lambda_1(u_1 + u_2) + \cdots + \lambda_n(u_n + u_1) = 0_{\mathrm{E}}$$

Comme $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, il vient que

$$\lambda_1 + \lambda_n = 0_{\mathrm{K}}, \quad \lambda_2 + \lambda_1 = 0_{\mathrm{K}}, \dots, \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0_{\mathrm{K}}$$

Par conséquent,

$$\lambda_1 = (-1)^{i-1}\lambda_i = (-1)^n \lambda_1.$$

Si n est impair, $2\lambda_1 = 0_{\mathrm{K}}$ et donc $\lambda_1 = 0$, puis alors tous les coefficients sont nuls. Si n est impair, T est une famille libre. Si par contre n est pair, on vérifie que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1}(u_i + u_{i+1}) + (-1)^{n-1}(u_n + u_1) = 0_{\mathrm{E}}$$

et donc T est lié.

Exercice 24.17 ♡♡

Dans l'espace $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, on considère les fonctions définies par* $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$*, la famille* $S = (f_1, \dots, f_n)$ *est libre. On calculera d'abord pour* $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$*, l'intégrale :*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_{pq},$$

où $\delta_{pq} = 1$ *si* $p = q$ *et est nul sinon.*

Solution : *Soit* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$*. On utilise la trigonométrie. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\sin(px)\sin(qx) = \frac{1}{2}\left(\cos\left((p-q)x\right) - \cos\left((p+q)x\right)\right)$$

donc si $p \neq q$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{p-q}\sin\left((p-q)x\right) - \frac{1}{p+q}\sin\left((p+q)x\right)\right]_0^{2\pi} = 0$$

et si $p = q$ *alors*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos\left((p+q)x\right)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{1}{p+q}\sin\left((p+q)x\right)\right]_0^{2\pi} = 1.$$

Montrons que S *est libre. Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$*. Soit* $k \in [\![1,n]\!]$*. Par linéarité de l'intégrale, on a :*

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\pi}\int_0^{2\pi} f_k(x) f_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ki} = \alpha_k.$$

et ce pour tout $k \in [\![1,n]\!]$*. On en déduit que* S *est libre.*

24.7.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie

Exercice 24.18 ♡

Vérifier si les vecteurs suivants forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ *:*

$$u_1 = (0,1,1), \quad u_2 = (1,-1,0), \quad u_3 = (1,0,2) \quad \text{et} \quad u_4 = (1,-1,2)$$

Solution : *La famille* (u_1,u_2,u_3) *est libre. En effet, si* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ *sont tels que* $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ *alors on a :* $\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$ *ce qui amène* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$*. Comme* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$*, cette famille engendre* $\mathbb{R}^3$ *et il en est donc de même de la famille* (u_1,u_2,u_3,u_4)

Exercice 24.19 ♡

Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *engendré par les familles de vecteurs* (u_1,u_2,u_3,u_4) *avec :*

1. $u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (0,1,0,1)$, $u_4 = (1,0,0,1)$
2. $u_1 = (1,1,1,0)$, $u_2 = (1,1,2,0)$, $u_3 = (0,1,1,1)$, $u_4 = (0,1,0,1)$
3. $u_1 = (1,-1,1,-1)$, $u_2 = (1,1,2,-2)$, $u_3 = (3,-1,4,-4)$, $u_4 = (0,-2,-1,1)$.

Solution :

1. *Soient* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$ *tels que* $\sum_{i=1}^4 \alpha_i u_i = 0$*. les scalaires* α_i *vérifient alors le système :* $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$.
   On a une solution non nulle : $(1,1,-1,-1)$*. La famille est donc liée et engendre un espace de dimension au plus* 3*. On vérifie que* (u_1,u_2,u_3) *est libre. Dans le système précédent on fait* $\alpha_4 = 0$*. On trouve alors* $\alpha_1 = 0$ *puis* $\alpha_3 = 0$ *et* $\alpha_2 = 0$*. Donc la famille* (u_1,u_2,u_3,u_4) *engendre un espace de dimension* 3.
2. *On vérifie que* $u_4 = u_1 - u_2 + u_3$*. On montre de la même façon que précédemment que la famille* (u_1,u_2,u_3) *est libre. Donc* $\dim \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) = 3$.
3. *On a :* $u_3 = 2u_1 + u_2$ *et* $u_4 = u_1 - u_2$*. Les vecteurs* u_1 *et* u_2 *ne sont pas colinéaires et forment donc une famille libre. Par suite* $\dim \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \dim \mathrm{Vect}(u_1,u_2) = 2$.

24.7.3 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Exercice 24.20 ♡

Posons $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (0,1,1)$. Montrer que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution : *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$. Alors $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est solution du système $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ et on trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est donc libre. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = \#e$, la famille e est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 24.21 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose :

$$f_1 = e_2 + 2e_3, \quad f_2 = e_3 - e_1, \quad f_3 = e_1 + 2e_2$$

Montrer que $f = (f_1, f_2, f_3)$ est aussi une base de E

Solution : *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$. Alors $\alpha_1 (e_2 + 2e_3) + \alpha_2 (e_3 - e_1) + \alpha_3 (e_1 + 2e_2) = 0$ et $(\alpha_3 - \alpha_2) e_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_3) e_2 + (2\alpha_1 + \alpha_2) e_3 = 0$. Comme la famille e est libre, le triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est solution du système $\begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$ et on trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est donc libre. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = \#e$, la famille e est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 24.22 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On pose :

$$f_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad f_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que (f_1, f_2) est libre et compléter cette famille en une base de E.

Solution : *Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. Ils forment une famille libre. On vérifie en procédant comme dans l'exercice précédent que la famille (e_2, f_1, f_2) est libre et forme donc une base de E.*

Exercice 24.23 ♡

1. *Montrer que les vecteurs $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (-1,2)$ et $f_3 = (-3,5)$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Exprimer un vecteur quelconque u de coordonnées (x, y) dans la base canonique comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Cette décomposition est-elle unique ?*

Solution :

1. *Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ la famille $f = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Elle engendre donc $\mathbb{R}^2$ et il en est alors de même de la famille (f_1, f_2, f_3).*
2. *Introduisons les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. D'après ce qui précède, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u = xe_1 + ye_2 = af_1 + bf_2 + cf_3$. Le triplet (a, b, c) est solution du système $\begin{cases} a - b - 3c = x \\ 2a + 2b + 5c = y \end{cases}$. Ce système admet une infinité de solutions et la décomposition recherchée n'est pas unique. Une d'entre elles est donnée par exemple par $a = x/2 + y/4$, $b = -x/2 + y/4$ et $c = 0$.*

Exercice 24.24 ♡

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un vecteur u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer les coordonnées (y_1, y_2, y_3) de ce même vecteur dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs :

$$\varepsilon_1 = (1,1,0), \quad \varepsilon_2 = (1,0,1), \quad \varepsilon_3 = (0,1,1).$$

Solution : *On vérifie facilement que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il existe donc des scalaires y_1, y_2, y_3 tels que : $u = (x_1, x_2, x_3) = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_3$. En remplaçant les vecteurs ε_i par leurs expressions, on obtient le système : $\begin{cases} y_1 + y_2 = x_1 \\ y_1 + y_3 = x_2 \\ y_2 + y_3 = x_3 \end{cases}$ qui amène : $y1 = \dfrac{x_2 - x_3 + x_1}{2}$, $y2 = \dfrac{-x_2 + x_3 + x_1}{2}$, $y_3 = \dfrac{x2 + x3 - x1}{2}$*

Exercice 24.25 ♡

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *:*

$$u=(-1,1,1)\,,\quad v=(1,-1,1)\,,\quad w=(1,1,-1)\quad \text{et}\quad x=(2,-3,1)\,.$$

1. *Prouver que la famille* (u,v,w) *forme une base* $\mathbb{R}^3$.
2. *Quelles sont les coordonnées de* x *dans cette base ?*

Solution :

1. *Soient* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 u+\alpha_2 v+\alpha_3 w=0$. *Le triplet* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *est solution du système :* $\begin{cases}-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}$ *et donc* $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. *La famille* (u,v,w) *est bien libre. Comme* $\dim\mathbb{R}^3=3$, *c'est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *La famille* (u,v,w) *étant une base de* E, *il existe* $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ *tel que :* $x=x_1u+x_2v+x_3w$. *Le triplet* (x_1,x_2,x_3) *est donc solution du système* $\begin{cases}-x_1+x_2+x_3&=2\\ x_1-x_2+x_3&=-3\\ x_1+x_2-x_3&=1\end{cases}$. *En le résolvant, on trouve* $x_1=-1$, $x_2=3/2$ *et* $x_3=-1/2$. *Les coordonnées de* x *dans la base* (u,v,w) *sont donc :* $\boxed{(-1,3/2,-1/2)}$

Exercice 24.26 ♡

Soit E *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs* $e_1=(1,1,0,0)$, $e_2=(1,1,0,1)$ *et* $e_3=(0,0,0,1)$.

1. *Quelle est la dimension de* E *?*
2. *Compléter cette famille en sorte d'avoir une base de* $\mathbb{R}^4$.

Solution :

1. *Comme* $e_3=e_2-e_1$, *la famille* e *n'est pas libre. Par contre, comme les vecteurs* e_1 *et* e_2 *ne sont pas colinéaires,* (e_1,e_2) *forme une famille libre qui engendre encore* E *par le lemme de diminution d'une famille liée. On complète la base par des vecteurs de la base canonique.*
2. *Une solution peut être de compléter la famille* (e_1,e_2) *avec les vecteurs* $f_1=(1,0,0,0)$ *et* $f_2=(0,0,1,0)$ *de la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *. On montre facilement que la famille* (e_1,e_2,f_1,f_2) *est libre. Comme* $\dim\mathbb{R}^4=4$, *elle forme une base de* $\mathbb{R}^4$.

Exercice 24.27 ♡

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, *on considère les deux vecteurs* $f_1=(0,1,2,1)$ *et* $f_2=(3,0,1,1)$. *Trouver deux vecteurs* f_3,f_4 *tels que la famille* (f_1,f_2,f_3,f_4) *forme une base de* $\mathbb{R}^4$.

Solution : *Les vecteurs* f_1 *et* f_2 *ne sont pas colinéaires donc la famille* $\mathrm{S}_1=(f_1,f_2)$ *est libre. On considère la base canonique* $e=(e_1,\dots,e_4)$ *de* $\mathbb{R}^4$. *On vérifie facilement que* $\mathrm{S}_2=(f_1,f_2,e_1,e_2)$ *est libre. Finalement, puisque* $\dim\mathbb{R}^4=4$, *et que l'on a trouvé une famille libre de cardinal* 4, S_2 *est une base.*

Exercice 24.28 ♡

1. *Prouver que* $(1,i)$ *est une base du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.
2. *De même, prouver que* $(1,j)$ *est une base de* $\mathbb{C}$ *où* $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3. *Donner une base du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

Solution :

1. *Pour tout nombre complexe* z, *il existe* $a,b\in\mathbb{R}$ *tels que* $z=a\times 1+b\times i$. *La famille* $(1,i)$ *est donc génératrice de* $\mathbb{C}$. *Soient* $a,b\in\mathbb{R}$ *tels que* $a\times 1+b\times i=0$. *On a alors forcement* $a=b=0$. *La famille* $(1,i)$ *est donc libre. La famille forme une base de* $\mathbb{C}$. *On en déduit que* $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 2.
2. *Soient* $a,b\in\mathbb{R}$ *tels que* $a.1+b.j=0$. *On a alors :* $a\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}\right)+ib\sin\frac{2\pi}{3}$ *ce qui amène* $a=b=0$. *La famille* $(1,j)$ *est donc libre dans* $\mathbb{C}$. *Comme* $\mathbb{C}$ *est de dimension* 2, $(1,j)$ *engendre* $\mathbb{C}$. $(1,j)$ *est donc une base de* $\mathbb{C}$.
3. *La famille* (1) *forme une base du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$. *Cette famille est trivialement libre. Si* $z\in\mathbb{C}$ *alors* $z=z.1$ *! Et donc la famille* (1) *est génératrice de* $\mathbb{C}$. *C'est donc une base de* $\mathbb{C}$ *et* C *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* 1.

Exercice 24.29 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e = (e_1, \dots, e_n)$*. Pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*, on pose* $\varepsilon_i = e_1 + \dots + e_i$*.*

1. *Montrer que* $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ *forme une base de* E*.*
2. *Exprimer les composantes d'un vecteur de* E *dans* ε *en fonction de ses composantes dans* e*.*

Solution :

1. *Soit* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i = 0$*. On a alors*

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\, e_1 + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\, e_2 + \dots + +\alpha_n e_n = 0$$

   qui conduit, de part la liberté de e*, à :*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

   et donc $\alpha_n = \dots = \alpha_1 = 0$*.*

2. *Soit* $x \in \mathrm{E}$*. On a* $x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n = \alpha'_1 \varepsilon_1 + \dots \alpha'_n \varepsilon_n$*. On a donc :*

$$\begin{cases} \alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_n = \alpha_1 \\ \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_n = \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n = \alpha_n \end{cases}$$

   ce qui amène :

$$\begin{cases} \alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ \alpha'_n = \alpha_n \end{cases}$$

   et $\boxed{x = (\alpha_1 - \alpha_2)\, e_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)\, e_2 + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\, e_{n-1} + \alpha_n e_n}$*.*

Exercice 24.30 ♡♡

1. *Vérifier que* $\mathbb{R}$ *muni de l'addition et de la multiplication par un rationnel est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel.*
2. *Montrer que*

$$\mathrm{E} = \left\{ a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \right\}$$

   est un $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel.*
3. *Trouver une base de* E*.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* $\mathbb{R}$ *muni de l'addition et de la multiplication par un rationnel vérifie les axiomes définissant un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel*
2. *Pour répondre à la question, il suffit de montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}$*.* E *est clairement non vide et si* $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}$*,* $u = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \in \mathrm{E}$ *et* $u' = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} \in \mathrm{E}$ *alors* $\alpha u + \alpha' u' = \alpha\left(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right) + \alpha'\left(a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3}\right) = \left(\alpha a + \alpha' a'\right) + \left(\alpha b + \alpha' b'\right)\sqrt{2} + \left(\alpha c + \alpha' c'\right)\sqrt{3} \in \mathrm{E}$*. L'ensemble* E *est bien un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}$*. On peut aussi remarquer que* $\mathrm{E} = \mathrm{V}ect\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$*.*
3. *Montrons que la famille* $e = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ *est une base de* E*. Elle engendre clairement* E*. Soient* $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *tels que* $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$*. Alors* $c\sqrt{3} = -\left(a + b\sqrt{2}\right)$ *et en élevant au carré* $3c^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$*.*
   (a) *Si* a *et* b *sont nuls, on a forcément* $c = 0$*.*
   (b) *Si* $a = 0$ *et* $b \neq 0$ *alors* $3c^2 = 2b^2$ *et* $c/b = \pm\sqrt{2/3}$ *ce qui n'est pas possible car* $c/b \in \mathbb{Q}$*.*
   (c) *Si* $a \neq 0$ *et* $b = 0$ *alors* $3c^2 = a^2$ *et* $c/a = \sqrt{3}/3$ *ce qui n'est pas possible pour la même raison que précédemment.*
   (d) *Si* $a, b \neq 0$ *alors* $\sqrt{2} = \left(3c^2 - a^2 - 2b^2\right)/2ab$ *ce qui n'est pas possible car* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$*.*

   En conclusion, $a = b = c = 0$ *et la famille est libre. On a ainsi trouvé une base de* E *qui est de dimension* 3*.*

Exercice 24.31 ♡♡

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes de degré* $\leqslant n$. *Soit* $\mathscr{F} = (P_0, \dots, P_n)$ *une famille de* $n+1$ *polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *telle que :*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \deg P_i = i.$$

Prouver que $\mathscr{F}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, *supposons que* $P_k = \lambda_k X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{i,k} X^i$. *Comme* $\deg P_k = k$, *on a nécessairement* $\lambda_k \neq 0$. *Soient* $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = 0$. *Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on aboutit au système :*

$$\begin{cases} \lambda_0\alpha_0 + \lambda_{0,1}\alpha_1 + \lambda_{0,2}\alpha_2 + \dots + \lambda_{0,n}\alpha_n = 0 \\ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_{1,2}\alpha_2 + \dots + \lambda_{1,n}\alpha_n = 0 \\ \dots \\ \lambda_{n-1}\alpha_{n-1} + \lambda_{n-1,n}\alpha_n = 0 \\ \lambda_n\alpha_n = 0 \end{cases}$$

qui est triangulaire, et comme $\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \lambda_k \neq 0$, *son unique solution est le* $n+1$*-uplet nul. Il vient :* $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ *et la famille* $\mathscr{F}$ *est libre. Comme elle est de cardinal égal à la dimension de* $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{F}$ *est de plus génératrice de* $\mathbb{R}_n[X]$. *On en déduit qu'elle forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 24.32 ♡♡

Montrer $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *et* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *sont de dimension infinie.*

Solution : *Pour le premier cas, on considère pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la suite* $e(n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *qui s'annule à tous les rangs sauf au rang* n *où elle vaut* 1. *On considère aussi pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *la famille de suites* $E_m = (e(0), \dots, e(m))$. *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$, *cette famille est libre. En effet, si* $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *sont tels que* $\alpha_0 e(0) + \dots + \alpha_m e(m) = 0$ *alors on obtient* $(\alpha_0, \dots, \alpha_m, 0, \dots) = (0, \dots)$ *et donc que* $\alpha_0 = \dots = \alpha_m = 0$. *Supposons que* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *soit de dimension finie* $n \in \mathbb{N}$. *La famille* E_n *est libre et de cardinal* $n+1$ *ce qui n'est pas possible. Donc* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *est de dimension infinie.*
Pour le second cas, on procède de même en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}$ *les fonctions* f_n *définies sur* $\mathbb{R}$ *qui valent* 0 *si* $x \neq n$ *et qui valent* 1 *si* $x = n$.

24.7.4 Sous-espace vectoriel de dimension finie

Exercice 24.33 ♡

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. *Prouver que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$, *en déterminer une base et calculer sa dimension.*

Solution : *Comme* $F = \{(y-2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$, F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$. *La famille* $((1,1,0),(-2,0,1))$ *engendre* F *et les deux vecteurs la constituant n'étant pas colinéaire, elle est libre. Cette famille forme donc une base de* F *et* $\dim F = 2$.

Exercice 24.34 ♡

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad -x - y + z = 0\}$.

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Trouver une base de* F. *En déduire* $\dim F$.

Solution : *On a :* $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ *donc* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad -x - y + z = 0\} = \{(0,y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(0,1,1)$. F *est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et la famille constituée du vecteur* $(0,1,1)$ *en forme une base. On en déduit que* $\dim F = 1$. *Le sous-espace* F *est la droite vectorielle de* $\mathbb{R}^3$ *dirigée par* $(0,1,1)$.

Exercice 24.35 ♡

Montrer que le sous-ensemble

$$F = \{(\alpha+\beta, \beta, 2\alpha-\beta, -\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *dont on déterminera la dimension et une base.*

Solution : *Comme* $F = \{(\alpha+\beta, \beta, 2\alpha-\beta, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,0,2,-1) + \beta(1,1,-1,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ *où* $e_1 = (1,0,2,-1)$ *et* $e_2 = (1,1,-1,0)$. *On en déduit que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$. *De plus, les vecteurs* e_1 *et* e_2 *ne sont pas colinéaires et ils engendrent* F. *Ils forment donc une base de* F *et* $\dim F = 2$.

Exercice 24.36 ♡

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-ensemble

$$F := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z + t = 0\}$$

Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et en déterminer une base.*

Solution : *Comme* $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; \mid 2x - y + 3z + t = 0\} = \{(x, 2x+3z+t, z, t) \mid x,z,t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,2,0,0),(0,3,1,0),(0,1,0,1))$. *Donc* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$. *La famille* (e_1,e_2,e_3) *où* $e_1 = (1,2,0,0)$, $e_2 = (0,3,1,0)$ *et* $e_3 = (0,1,0,1)$ *engendre* F. *Montrons qu'elle est libre. Soient* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$. *Le triplet* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *vérifie* $\begin{cases} \alpha_1 & = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_3 & = 0 \end{cases}$ *et donc* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. *La famille est bien libre. Alors* (e_1,e_2,e_3) *est une base de* F *et* $\dim F = 3$.

Exercice 24.37 ♡

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z - t = 0\}$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Trouver une famille génératrice de* F.
3. *En déduire une base de* F *puis la dimension de* F.

Solution :

1. *On a :* $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z - t = 0\} = \{(x,y,z,2x-y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0,2) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ *où* $e_1 = (1,0,0,2)$, $e_2 = (0,1,0,-1)$ *et* $e_3 = (0,0,1,1)$. *On en déduit à la fois que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *ainsi qu'une famille génératrice de* F.
2. *On vérifie facilement que la famille* (e_1,e_2,e_3) *est libre. On en déduit que cette famille forme une base de* F *et donc que* $\dim F = 3$.

Exercice 24.38 ♡

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, *on considère le sous-espace vectoriel* $F = \mathrm{Vect}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ *où* $v_1 = (1,2,3,1)$, $v_2 = (0,1,1,1)$, $v_3 = (0,0,1,2)$, $v_4 = (2,5,6,1)$ *Trouver une base du sous-espace vectoriel* F.

Solution : *On remarque que* $v_4 = 2v_1 + v_2 - v_3$. *Donc la famille est liée et d'après le lemme de réduction d'une famille liée,* $F = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$. *On montre facilement que la famille* (v_1,v_2,v_3) *est libre et forme donc une base de* F. *Il s'ensuit que* $\dim F = 3$.

Exercice 24.39 ♡

On note E *l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit un réel* $a \in \mathbb{R}$. *On note* F *l'ensemble des fonctions* f *vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = af(x)$$

Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* E *et déterminer une base de* F.

Solution : *On applique le théorème de résolution des équations différentielles homogène du premier degré sans second membre et les fonctions* f *solutions de* $y' - ay = 0$ *sont celles de la forme* $f : x \mapsto \alpha e^{ax}$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On en déduit que* $F = \mathrm{Vect}(x \mapsto \exp(ax))$ *et que c'est un sous-espace vectoriel de* E. *Il est alors clair que la famille* $(x \mapsto \exp(ax))$ *forme une base de* F *et que* $\dim F = 1$.

Exercice 24.40 ♡

Montrer que $F = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' - 2f' + 2f = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ *et en déterminer une base. En déduire la dimension de* F.

Solution : *En appliquant le théorème de résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, on trouve que* $F = \{x \mapsto (\alpha\cos x + \beta\sin x)e^{-x} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. *Autrement dit :* $F = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ *où* $f_1 : x \mapsto \cos x e^{-x}$ *et* $f_2 : x \mapsto \sin x e^{-x}$. *La famille* (f_1,f_2) *engendre* F. *On vérifie facilement qu'elle est libre. Elle forme donc une base de* F *et* $\dim F = 2$.

Exercice 24.41 ♡

Montrer $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_4[X]$ *et en déterminer une base ainsi que la dimension.*

Solution : *Les polynômes de* F *sont de degré* $\leqslant 4$ *et s'annulent en* 1 *et* 2*. Par conséquent, ils sont de la forme* $\left(a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c\right)(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$*. Il s'ensuit que* $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)$ *où* $\mathrm{P}_1=\mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2), \mathrm{P}_2=\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2), \mathrm{P}_3=(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$*. On en déduit que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$*. On vérifie facilement que la famille* $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)$ *est libre. Si* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ *sont trois réels tels que* $\alpha_1\mathrm{P}_1+\alpha_2\mathrm{P}_2+\alpha_3\mathrm{P}_3=0$ *alors par intégrité de l'anneau des polynômes,* $\alpha_1\mathrm{X}^2+\alpha_2\mathrm{X}+\alpha_3=0$ *ce qui n'est possible que si* $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$*. La famille* $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3)$ *forme donc une base de* F*.*

Exercice 24.42 ♡

Soit F *l'ensemble des fonctions* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *telles qu'il existe* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *pour lesquels :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sin x$$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*.*
2. *Déterminer une base de* F *ainsi que sa dimension.*

Solution :

1. F *est engendré par la famille* $\left(x\mapsto x^2\sin x, x\mapsto x\sin x, x\mapsto \sin x\right)$*. C'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*.*
2. *Une base de* E *est donnée par la famille précédente : Soient* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *tels que :* $\forall x\in\mathbb{R}, \alpha x^2\sin x+\beta x\sin x+\gamma\sin x=0$*, alors* $\forall x\not\equiv 0\,[\pi],\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$*. Un polynôme du second degré est soit identiquement nul, soit ne s'annule au plus que deux fois. Donc* $\alpha=\beta=\gamma=0$*. La famille est donc libre. Elle est, par définition génératrice et forme donc une base de* F *qui est alors un sous-espace vectoriel de dimension* 3 *de* E*.*

Exercice 24.43 ♡

Déterminer une base du sous-espace vectoriel F *de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *donné par :* $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2,f_3,f_4\right)$ *où*

$$f_1:x\mapsto e^x,\quad f_2:x\mapsto e^{-x},\quad f_3:x\mapsto \operatorname{ch}x,\quad f_4:x\mapsto\operatorname{sh}x.$$

Solution : *On vérifie facilement que la famille* $\left(f_1,f_2\right)$ *est libre. De plus :* $f_3=\dfrac12\left(f_1+f_2\right)$ *et* $f_4=\dfrac12\left(f_1-f_2\right)$*. Donc par application du lemme de réduction d'une famille liée :* $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2,f_3,f_4\right)=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2\right)$*. On en déduit qu'une base de* F *est* $\left(f_1,f_2\right)$*.*

Exercice 24.44 ♡

On pose :

$$f_1:x\mapsto x,\quad f_2:x\mapsto x^2,\quad f_3:x\mapsto x\ln x,\quad f_4:x\mapsto x^2\ln x$$

On pose aussi : $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2,f_3,f_4\right)$*. Prouver que* F *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

Solution : *L'ensemble* F *s'écrit comme un* Vect*, c'est donc un sous-espace de* $\mathscr{F}\left(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\right)$ *et donc un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Soient* $\alpha_i\in\mathbb{R}$*,* $i\in[\![1,4]\!]$ *tels que* $f=\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3+\alpha_4f_4=0$*. La fonction* f *ainsi que toutes ses dérivées sont identiquement nulles sur* $\mathbb{R}_+^*$*. L'égalité* $f(1)=0$ *amène* $\alpha_1+\alpha_2=0$*. L'égalité* $f'(1)=0$ *amène* $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$ *et* $f''(1)=0$ *amène* $2\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4=0$*. Enfin,* $f'''(1)=0$ *amène* $-\alpha_3+2\alpha_4=0$*. Le quadruplet* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ *est donc solution du système formé par ces* 4 *équations. On vérifie en le résolvant que sa seule solution est* $(0,0,0,0)$*. Il vient donc que* $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$*. La famille* $\left(f_1,f_2,f_3,f_4\right)$ *est libre et* $\dim\mathrm{F}=4$*.*

Exercice 24.45 ♡

Posons $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(f_1,f_2,f_3\right)$ *où*

$$f_1:x\mapsto e^x,\quad f_2:x\mapsto e^{2x}\quad\text{et}\quad f_3:x\mapsto e^{x^2}.$$

Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et en donner la dimension et une base.*

Solution :
L'ensemble F *étant donné comme un* Vect*, c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*. Soient* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3=0$*. On a donc :* $\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha_1e^x+\alpha_2e^{2x}+\alpha_3e^{x^2}=0$*. En particulier, pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, en divisant par* e^{x^2} *:*

$$0=\left(\alpha_1e^{x-x^2}+\alpha_2e^{2x-x^2}+\alpha_3\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}\alpha_3$$

donc $\alpha_3=0$*. On a donc en revenant à la première égalité :* $\forall x\in\mathbb{R},\quad \alpha_1e^x+\alpha_2e^{2x}=0$*. De même, on divise cette égalité par* e^x *et on trouve*

$$0=\left(\alpha_1+\alpha_2e^x\right)\xrightarrow[x\to-\infty]{}\alpha_1$$

et nécessairement $\alpha_1=0$ *ce qui amène aussi* $\alpha_2=0$ *car la fonction exponentielle est strictement positive. La famille* $\left(f_1,f_2,f_3\right)$ *est bien libre et* $\dim\mathrm{F}=3$*.*

Exercice 24.46 ♡♡

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère le sous-ensemble $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des suites p-périodiques :

$$\mathscr{S}_p(\mathbb{R}) = \left\{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n\right\}$$

Montrer que $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Solution : *$\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons « $n \bmod p$ »le reste de la division euclidienne de n par p. Introduisons la famille $\left(\left(u_n^i\right)\right)_{i \in [\![1,p]\!]}$ de suites données par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^i = \begin{cases} 1 \text{ si } n \bmod p = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Cette famille forme une base de $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ sont tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i \left(u_n^i\right) = 0$ alors il vient que la suite $\left(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_1, \dots\right)$ est nulle et donc que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Donc la famille est libre. Considérons une suite p-périodique $a = \left(a_1, \dots, a_p, a_1, \dots, a_p, a_1, \dots\right) \in \mathscr{S}_p(\mathbb{R})$. On peut écrire que $a = a_1\left(u_n^1\right) + \dots + a_p\left(u_n^p\right)$ et donc la famille engendre $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. En conclusion, c'est bien une base de $\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$ et $\dim \mathscr{S}_p(\mathbb{R}) = p$. On aurait aussi facilement pu résoudre cet exercice en montrant que

$$\theta : \begin{cases} \mathscr{S}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ (u_n) & \longmapsto & \left(u_0, \dots, u_{p-1}\right) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

24.7.5 Hyperplan

Exercice 24.47 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, H un hyperplan de E, et H' un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\mathrm{H} \subset \mathrm{H}' \implies \mathrm{H}' = \mathrm{H} \text{ ou } \mathrm{H}' = \mathrm{E}$$

Solution : *Supposons que $\mathrm{H}' \neq \mathrm{H}$. Alors il existe $a \in \mathrm{H}' \setminus \mathrm{H}$. On sait alors, puisque H est un hyperplan que $\mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a) = \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{H}' = \mathrm{E}$. Soit $x \in \mathrm{E}$, il existe $(x_\mathrm{H}, \lambda) \in \mathrm{H} \times \mathbb{K}$ tels que $x = x_\mathrm{H} + \lambda a \in \mathrm{H}'$ car H' est un sous-espace vectoriel de E.*

Exercice 24.48 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ tel que $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Solution : *Comme H est un hyperplan et que E est de dimension finie, H admet un supplémentaire D dans E et $\dim \mathrm{D} = 1$. Soit v un vecteur formant une base de D. Tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_0 + \alpha v$ où $x_0 \in \mathrm{H}$ et $\alpha \in \mathrm{R}$. On considère alors la forme linéaire donnée par $\varphi(x) = 0$ si $x \in \mathrm{H}$ et $\varphi(v) = 1$. L'application φ est bien définie sur E et vérifie par construction $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{H}$.*

Exercice 24.49 ♡♡

Soit D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $\mathrm{D} \not\subset \mathrm{H}$ alors D et H sont supplémentaires dans E.

Solution :
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{D} + \mathrm{H}$ contient H et D et est contenu dans E donc $\dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) = n$ ou $\dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) = n-1$. Si $\dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) = n-1$ alors comme $\dim \mathrm{H} = \dim(\mathrm{D}+\mathrm{H})$, il vient que $\mathrm{D}+\mathrm{H} = \mathrm{H}$ et donc que $\mathrm{D} \subset (\mathrm{D}+\mathrm{H}) = \mathrm{H}$ ce qui contredit l'hypothèse formulée au sujet de D. Donc $\dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) = n$, ce qui prouve que $\mathrm{D}+\mathrm{H} = \mathrm{E}$. De plus $\dim(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}) = \dim(\mathrm{D}+\mathrm{H}) - \dim \mathrm{H} - \dim \mathrm{D} = 0$, donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{H} = \{0\}$ d'où le résultat.

Exercice 24.50 ♡♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, H_1 et H_2 deux hyperplans de E avec $\mathrm{H}_1 \neq \mathrm{H}_2$. Calculer $\dim(\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2)$.

Solution :
Calculons tout d'abord $\dim(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2)$. Remarquons que $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient H_1. On a donc $\dim(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2) = n$ ou $\dim(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2) = n-1$. Si $\dim(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2) = n-1$ alors, comme $\dim \mathrm{H}_1 = \dim \mathrm{H}_2 = n-1$ et que $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$, $\mathrm{H}_2 \subset \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$ alors $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 = \mathrm{H}_2$ ce qui contredit le fait que H_1 et H_2 sont distincts. Donc

$\dim(H_1+H_2)=\dim E=n$. *La formule de Grassmann amène* $\dim H_1+\dim H_2=\dim(H_1+H_2)+\dim(H_1\cap H_2)$ *et donc* $\dim(H_1\cap H_2)=2n-2-n=n-2$. *On peut aussi raisonner avec des formes linéaires. Comme* H_2 *est un hyperplan de* E*, il existe une forme linéaire sur* E*,* $\varphi\in E^\star$ *non-nulle telle que* $H_2=\operatorname{Ker}\varphi$*. Considérons la restriction* $\widetilde{\varphi}$ *de la forme linéaire* φ *au sous espace* H_1*. Il est clair que* $\widetilde{\varphi}$ *est une forme linéaire de* H_1 *:* $\widetilde{\varphi}\in H_1^\star$*.*

1. $\widetilde{\varphi}\neq 0_{H_1^\star}$ *: par l'absurde, si* $\widetilde{\varphi}=0$*, on aurait* $\forall x\in H_1$*,* $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)=0_K$ *et donc on aurait* $H_1\subset H_2$*. Mais puisque* $\dim H_1=\dim H_2=n-1$*, on aurait* $H_1=H_2$ *ce qui est faux d'après l'énoncé ;*
2. $H_1\cap H_2=\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$ *:*
   - *Soit* $x\in H_1\cap H_2$*,* $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)=0_K$*,*
   - *Soit* $x\in\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$*,* $x\in H_1$ *et* $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)=0_K$ *et donc* $x\in H_1\cap H_2$ *;*

Nous avons donc montré que $H_1\cap H_2$ *est un hyperplan de l'espace* H_1 *et puisque* $\dim H_1=n-1$*, en utilisant le résultat du cours, il vient que* $\dim(H_1\cap H_2)=n-2$*.*

Exercice 24.51 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soient* H *un hyperplan et* F *un sous-espace vectoriel de* E *non inclus dans* H*. Montrer que* $\dim F\cap H=\dim F-1$*.*

Solution : *Comme* $\dim H=n-1$*, le sous-espace vectoriel* $F+H$ *de* E *est de dimension égal à* n *ou* $n-1$*. Mais* F *n'est pas inclus dans* H*, donc* $\dim(F+H)=n$*. Par ailleurs, d'après la formule de Grassmann* $\dim F+\dim H=\dim(H+F)+\dim(F\cap H)$ *donc :* $\dim F+n-1=n+\dim(F\cap H)$ *ce qui prouve le résultat.*

24.7.6 Sous-espaces supplémentaires

Exercice 24.52 ♡

Déterminer un supplémentaire de $F=\mathrm{V}ect(u,v)$ *où* $u=(1,0,1)$ *et* $\overrightarrow{v}=(1,1,0)$ *dans* $\mathbb{R}^3$

Solution : *Posons* $w=(0,0,1)$*. On vérifie facilement que la famille* (u,v,w) *forme une base de* $\mathbb{R}^3$*. Donc, d'après le cours les deux sous-espaces* $F=\mathrm{V}ect(u,v)$ *et* $G=\mathrm{V}ect(w)$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 24.53 ♡

On considère le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E=\mathbb{R}^3$ *et* $u=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$ *; Posons :*

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y-z=0\right\}\quad\text{et}\quad G=\mathrm{V}ect(u)$$

Prouver que F *et* G *sont des sous-espaces supplémentaires de* E*.*

Solution : *On a* $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=0\right\}=\left\{(x,y,x+y)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{V}ect(v,w)$ *avec* $v=(1,0,1)$ *et* $w=(0,1,1)$*. On vérifie facilement que la famille* (u,v,w) *forme une base de* $\mathbb{R}^3$ *donc* $F\oplus G=\mathbb{R}^3$*.*

Exercice 24.54 ♡

Dans $E=\mathbb{R}^4$*, on considère l'ensemble*

$$F=\{(x,y,z,t)\in E\mid x=y\ \text{et}\ x-y+t=0\}$$

1. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, et déterminer une base de* F*.*
2. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* E*.*
3. *Le supplémentaire trouvé est-il unique ?*

Solution :

1. *On a* $F=\{(x,y,z,t)\in E; x=y\ \text{et}\ x-y+t=0\}=\{(x,x,z,0)\mid x,z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{V}ect(u,v)$ *avec* $u=(1,1,0,0)$ *et* $v=(0,0,1,0)$*. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. En conclusion,* (u,v) *est une base de* F *et* $\dim F=2$*.*
2. *Introduisons les vecteurs* $w=(1,0,0,0)$ *et* $W=(0,0,0,1)$*. On montre facilement que la famille* (u,v,w,W) *est libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de* $\mathbb{R}^4$*, c'est une base de* $\mathbb{R}^4$ *et si* $G=\mathrm{V}ect(w,W)$ *alors* F *et* G *sont en somme directe.*
3. *Ce supplémentaire n'est bien entendu pas unique. On montre de la même façon que précédemment que, par exemple,* $G'=\mathrm{V}ect((1,0,1,0),(0,0,0,1))$ *est un autre supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}^4$*.*

Exercice 24.55 ♡

Soit l'espace vectoriel E *des polynômes à coefficients réels de degré* $\leqslant 4$*. On considère l'ensemble*

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$$

1. *Montrer que* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, déterminer une base de* F *et préciser sa dimension.*
2. *Montrer que le sous-espace vectoriel* $G = \mathrm{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ *est un supplémentaire de* F *dans* E.

Solution :

1. *Déterminons* F*. Soit* $P \in F$*. Puisque* $P(0) = P'(0) = 0$*,* 0 *est racine double (au moins) de* P*. Donc* $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P = X^2Q$*. En examinant les degrés, on obtient que* $\deg Q \leqslant 2$*. Donc* $Q = aX^2 + bX + c$*. Alors* $Q' = 2aX + b$*. Comme* $P' = 2XQ + X^2Q'$*, et* $P'(1) = 0$*, on trouve que* $4a + 3b + 2c = 0$*. Donc* $P = X^2(aX^2 + bX - 2a - \frac{3}{2}b)$ *On vérifie réciproquement qu'un polynôme de cette forme est dans* F*. Donc*

$$F = \{aX^4 + bX^3 - (2a + \frac{3}{2}b)X^2 ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(X^4 - 2X^2) + b(X^3 - \frac{3}{2}X^2) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$$

   où $P_1 = X^4 - 2X^2$ *et* $P_2 = X^3 - \frac{3}{2}X^2$*. On vérifie que* (P_1, P_2) *est une famille libre (degrés distincts). C'est donc une base de* F *et alors* $\dim F = 2$*.*
2. *On vérifie que* $(1, X, 1 + X + X^2)$ *est une famille libre (degrés étagés). C'est donc une base de* G *et alors* $\dim G = 3$*. On montre ensuite que* $F \cap G = \{0\}$*. Soit* $P \in F \cap G$*. Alors comme* $P \in G$*, il existe* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que* $P = a + bX + c\left(1 + X + X^2\right)$*. Mais comme* $P \in F$*, on a aussi* $P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$ *et on abouti au système* $\begin{cases} a + c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ b + 3c &= 0 \end{cases}$ *donc l'unique solution est le triplet nul. Donc* $P = 0$ *et* F *et* G *sont bien en somme directe. Puisque* $\dim E = 5 = \dim F + \dim G$*, d'après le cours,* $E = F \oplus G$*.*

Exercice 24.56 ♡

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$*, on considère les sous-espaces vectoriels*

$$F = \mathrm{V}ect((1, 2, 1, 3), (2, 0, 0, 1)) \text{ et } G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, x = y\right\}$$

1. *Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels* F *et* G.
2. *Montrer que* $F \cap G = \{0\}$.
3. *En déduire que* $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Solution :

1. *Par définition,* $S_1 = (f_1, f_2)$ *est générateur de* F*. On vérifie que cette famille est libre. C'est une base de* F *et donc* $\dim F = 2$*. Il faut déterminer une famille génératrice de* G *:*

$$G = \{x(1, 1, -3, 0) + t(0, 0, 0, 1) \mid (x, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

   Donc $g_1 = (1, 1, -3, 0)$ *et* $g_2 = (0, 0, 0, 1)$ *forment une famille génératrice de* G*. On vérifie qu'il est libre. C'est donc une base de* G *et* $\dim G = 2$*.*
2. *On vérifie facilement que les vecteurs* $(1, 2, 1, 3)$ *et* $(2, 0, 0, 1)$ *ne sont pas solutions du système* $\begin{cases} 2x + y + z &= 0 \\ x &= y \end{cases}$ *donc* $F \cap G = \{0\}$*.*
3. *D'après la formule de Grassmann, puisque* $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4$ *et que* $F \cap G = \{0\}$*, il vient que* $\dim(F + G) = \dim E$ *et donc que* $F + G = E$*. On peut alors écrire que* $E = F \oplus G$*.*

Exercice 24.57 ♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n*. Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *vérifiant* $\dim F + \dim G > n$*. Montrer que* $F \cap G \neq \{0_E\}$*.*

Solution : *Utilisons la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels :*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

On obtient que $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) > n - \dim(F + G)$*. Mais comme* $F + G$ *est un sous-espace vectoriel de* E*,* $\dim(F + G) \leqslant n$ *et donc* $\dim(F \cap G) > 0$*. On obtient finalement que* $F \cap G \neq \{0\}$*.*

Exercice 24.58 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *différent de* $\{0\}$ *et différent de l'espace* E*. Montrer que* F *admet une infinité de supplémentaires dans* E*.*

Indication 24.15 : Faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$ *lorsque* F *est une droite vectorielle.*

Solution : *Considérons une base de* F*,* $(e_1,\dots,e_p)$ *(où* $p=\dim F$*) et complétons là en une base de* E *par des vecteurs* $e_{p+1},\dots e_n\in E$*. Pour tout* $t\in\mathbb{R}$*, posons* $G_t=\mathrm{Vect}(te_1+e_{p+1},e_{p+2},\dots,e_n)$*. Soit* $t\in\mathbb{R}$*, montrons que* G_t *est un supplémentaire de* F *dans* E*. Il suffit pour ce faire de montrer que* $\left(e_1,\dots,e_p,te_1+e_{p+1},e_{p+2},\dots,e_n\right)$ *est une base de* E*. Soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1e_1+\dots+\alpha_pe_p+\alpha_{p+1}\left(te_1+e_{p+1}\right)+\alpha_{p+2}e_{p+2}++\dots\alpha_ne_n=0$ *alors* $\left(\alpha_1+t\alpha_{p+1}\right)e_1+\dots+\alpha_pe_p+\alpha_{p+1}e_{p+1}+\alpha_{p+2}e_{p+2}+\dots+\alpha_ne_n=0$ *et comme* $(e_1,\dots,e_n)$ *est libre, il vient que* $\alpha_1+t\alpha_{p+1}=\alpha_2=\dots=\alpha_p=\alpha_{p+1}=\alpha_{p+2}=\dots=\alpha_n=0$ *et donc que* $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$*. La famille* $\left(e_1,\dots,e_p,te_1+e_{p+1},e_{p+2},\dots,e_n\right)$ *est donc bien libre et comme son cardinal est égal à la dimension de* E*, il s'agit bien d'une base de* E*. En conclusion,* $E=F\oplus G_t$*.*
Si $t\neq t'$ *sont deux réels, alors* $G_t\neq G_{t'}$*. En effet le vecteur* e_p+te_1 *n'est pas élément de* $G_{t'}$*. Si c'était le cas, alors il existerait* $\alpha_{p+1},\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ *tels que* $e_{p+1}+te_1=\alpha_{p+1}\left(e_{p+1}+t'e_1\right)+\alpha_{p+2}e_{p+2}+\dots+\alpha_ne_n$*. Alors* $\left(\alpha_{p+1}t'-t\right)e_1+\left(\alpha_{p+1}-1\right)e_{p+1}+\alpha_{p+2}e_{p+2}+\dots+\alpha_ne_n=0$*. La famille* $\left(e_1,e_{p+1},\dots,e_n\right)$ *est libre comme sous-famille d'une famille libre donc en particulier* $\alpha_{p+1}t'-t=\alpha_{p+1}-1=0$ *et* $t=t'$*, ce qui est contraire à notre hypothèse de départ.*

Exercice 24.59 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. On considère* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *de même dimension. Le but de cet exercice est de montrer que* F *et* G *admettent un supplémentaire commun.*

1. *Montrer que* $F\cap G$ *admet un supplémentaire* F' *(resp.* G'*) dans* F *(resp. dans* G*).*
2. *Montrer que* F' *et* G' *sont de même dimension.*
3. *Montrer* F' *et* G' *sont en somme directe.*
4. *En considérant une base de* F' *et une base de* G'*, construire un supplémentaire commun à* F *et* G *dans* $F+G$*.*
5. *Répondre alors au problème initial.*

Solution :

1. $F\cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* F *qui est de dimension finie car c'est le cas de* E*. Donc* $F\cap G$ *admet un supplémentaire* F' *dans* F*. On fait de même pour* G'*.*
2. *Comme* $F=F\cap G\oplus F'$*, il vient que* $\dim F'=\dim F-\dim F\cap G$*. De même,* $\dim G'=\dim G-\dim F\cap G$*. Le résultat s'ensuit alors du fait que* F *et* G *ont même dimension. On notera* $p=\dim F'=\dim G'$*.*
3. *Soit* $x\in F'\cap G'$*. Comme* $F'\subset F$ *et que* $G'\subset G$*, on a* $x\in F\cap G$*. Mais* F' *et* $F\cap G$ *sont supplémentaires donc* $x=0$*.*
4. *Comme* F' *et* G' *sont de même dimension* p*, ces deux sous-espaces admettent des bases* $f=\left(f_1,\dots,f_p\right)$ *pour* F' *et* $\left(g_1,\dots,g_p\right)$ *pour* G'*. Considérons la famille* $h=\left(h_1,\dots,h_p\right)$ *où pour tout* $i\in[\![1,p]\!]$*,* $h_i=f_i+g_i$*. Aucun des vecteurs de cette famille n'est dans* $F\cup G$*. En effet, s'il existe* $i\in[\![1,p]\!]$ *tel que* $h_i\in F\cup G$ *alors* $h_i\in F$ *ou* $h_i\in G$*. Si* $h_i=f_i+g_i\in F$ *alors* $g_i=f_i-h_i\in F$*. Donc* $g_i\in F\cap G$*. Mais* $g_i\in G'$ *et les deux sous-espaces* G' *et* $G\cap F$ *sont en somme directe, donc* $g_i=0$*, ce qui n'est pas possible car la famille* g *ne serait pas libre. On fait de même si* $h_i\in G$*. Montrons maintenant que la famille* h *est libre. Soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_1h_1+\dots+\alpha_ph_p=0$*. Alors le vecteur* $v=\alpha_1f_1+\dots+\alpha_pf_p=-\left(\alpha_1g_1+\dots+\alpha_pg_p\right)$ *est élément de* $F'\cap G'$*. D'après la question précédente,* $v=0$ *et* $\alpha_1f_1+\dots+\alpha_pf_p=\alpha_1g_1+\dots+\alpha_pg_p=0$*. Les familles* f *et* g *étant libres, on en déduit que* $\alpha_1=\dots=\alpha_p=0$ *et donc que* h *est libre. Posons* $H=\mathrm{Vect}\left(h_1,\dots,h_p\right)$*. Il est clair que* $\dim H=p$*. Montrons que* $F\cap H=\{0\}$*. Soit* $x\in F\cap H$*. Alors il existe* $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{K}$ *tels que* $x=\sum_{i=1}^p\alpha_ih_i$*. Mais* $\sum_{i=1}^p\alpha_ig_i=x-\sum_{i=1}^p\alpha_if_i$ *et donc le vecteur* $\sum_{i=1}^p\alpha_ig_i\in F\cap G$ *ce qui prouve que* $\sum_{i=1}^p\alpha_ig_i=0$ *car ce vecteur est aussi élément de* G'*. Comme la famille* g *est libre, il vient que* $\alpha_1=\dots=\alpha_p=0$ *et donc* $x=0$*.* F *et* H *sont bien en somme directe. Enfin, puisque* F' *est supplémentaire de* F *dans* $F+G$*, donc* $\dim(F+G)=\dim F+\dim F'=\dim F+p=\dim F+\dim H$*. Donc* H *est un supplémentaire de* F *dans* $F+G$*. De même* H *est un supplémentaire de* G *dans* $F+G$*.*
5. *On considère un supplémentaire* $\tilde{H}$ *à* $F+G$ *dans* E*. Il existe car* E *est de dimension finie. Montrons que* $H\oplus\tilde{H}$ *(vérifier que cette somme est bien directe) est un supplémentaire commun à* F *et* G *dans* E*. Soit* $x\in F\cap(H\oplus\tilde{H})$*. Alors* $x\in F$ *et* $x=a+\tilde{a}$ *ou* $a\in H$ *et* $\tilde{a}\in\tilde{H}$*. Mais* $\tilde{a}=x-a\in F+H=F+G$ *donc* $\tilde{a}\in(F+G)\cap\tilde{H}$ *ce qui amène* $\tilde{a}=0$ *et* $x=a$*. Mais comme* $F\cap H=\{0\}$*, il s'ensuit que* $x=0$ *et donc* F *et* $H\oplus\tilde{H}$ *sont en somme directe. De plus* $\dim\left(H\oplus\tilde{H}\right)=\dim(F+G)-\dim F+\dim E-\dim(F+G)=\dim E-\dim F$*. Donc* $F+\left(H\oplus\tilde{H}\right)=E$ *et* $E=F\oplus\left(H\oplus\tilde{H}\right)$*. On montre de même que* $E=G\oplus\left(H\oplus\tilde{H}\right)$

24.7.7 Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 24.60 ♡

Déterminer le rang des familles (v_1, v_2, v_3, v_4) *de vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *donnés par :*

1. $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1,0)$, $v_3 = (1,0,0,1)$, $v_4 = (0,0,1,1)$.
2. $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1,0)$, $v_3 = (1,0,0,1)$, $v_4 = (1,1,1,-1)$.

Solution :

1. *La famille est libre donc son rang est* 4.
2. *Comme* $v_4 = v_1 + v_2 - v_3$, *d'après le lemme de réduction d'une famille liée,* $\dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \dim \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. *La famille* (v_1, v_2, v_3) *est une sous-famille de celle étudiée dans la première question et qui était libre. Elle est donc libre. On en déduit que le rang de la famille est* 3.

Exercice 24.61 ♡

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathscr{F}([0,1[,\mathbb{R})$, *on considère :*

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) *?*

Solution :

Pour tout $x \in [0,1[$, $f_1(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) + f_4(x)$ *et* $f_2(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x)$ *donc* $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{rg}(f_3, f_4) = 2$ *car cette dernière famille est libre*

24.7.8 Applications linéaires en dimension finie

Exercice 24.62 ♡

On considère $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x+y, t-x) \end{array} \right.$

1. *Montrer que* u *est une application linéaire et déterminer* $\mathrm{Ker}\, u$ *et* $\mathrm{Im}\, u$.
2. *La famille* $\{(u(1,0,0,0), u(1,1,1,1)\}$ *est-il libre dans* $\mathbb{R}^2$ *?*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* u *est linéaire. On a*

$$\mathrm{Ker}\, u = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{lll} 2x+y & & =0 \\ -x & +t & =0 \end{array} \right. \right\} = \{(x,-2x,z,x) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$

avec $e_1 = (1,-2,0,1)$ *et* $e_2 = (0,0,1,0)$. *Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de* $\mathrm{Ker}\, u$. *Alors* $\dim \mathrm{Ker}\, u = 2$ *et d'après la formule du rang* $\dim \mathrm{Im}\, u = 2$. *Comme* $\mathrm{Im}\, u \subset \mathbb{R}^2$ *et que* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, *il vient que* $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^2$ *et donc que* u *est surjective.*

2. *Comme* $u(1,0,0,0) = (2,-1)$ *et que* $u(1,1,1,1) = (3,0)$ *et que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24.63 ♡

Soit $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' - 2P \end{array} \right.$.

1. *Montrer que* θ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Déterminer* $\mathrm{Im}\, \theta$ *et en déduire le rang de* θ.
3. *Donner la dimension de* $\mathrm{Ker}\, \theta$ *et déterminer* $\mathrm{Ker}\, \theta$.

Solution :

1. *Si* $P \in \mathbb{R}_3[X]$, *il est clair que* $\deg\left(XP' - 2P\right) \leqslant 3$ *et donc que* $\theta(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ *alors*

$$\theta\left(\alpha P + \beta Q\right) = X\left(\alpha P + \beta Q\right)' - 2\left(\alpha P + \beta Q\right) = \alpha\left(XP' - 2P\right) + \beta\left(XQ' - 2Q\right) = \alpha\theta(P) + \beta\theta(Q)$$

   donc θ *est linéaire.*
2. *Soit* $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. *On calcule que* $\theta(P) = aX^3 - cX - 2d$. *Donc* $\operatorname{Im}\theta = \operatorname{Vect}\left(1, X, X^3\right)$. *La famille* $\left(1, X, X^3\right)$ *étant libre, il vient que* $\operatorname{rg}\theta = 3$.
3. *D'après la formule du rang,* $\dim \operatorname{Ker}\theta = 1$. *Comme* $\theta\left(X^2\right) = 0$, $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Vect}\left(X^2\right)$.

Exercice 24.64 ♡

Soient $a \in \mathbb{R}$ *et* $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(a) = 0\}$.

1. *Prouver que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_n[X]$. *Déterminer sa dimension.*
2. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1. *Posons* $\theta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}\right.$. *On vérifie facilement que* θ *est linéaire et surjective. De plus* $F = \operatorname{Ker}\theta$. *Donc* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_n[X]$. *D'après la formule du rang,* $\dim F = \dim \operatorname{Ker}\theta = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathbb{R} = n$.
2. *Notons* $G = \mathbb{R}_0[X]$. G *est clairement un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_n[X]$ *de dimension* 1. *On vérifie facilement que* G *est en somme directe avec* F. *Comme de plus* $\dim(F + G) = \dim F + \dim G = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, *on a* $\mathbb{R}_n[X] = F + G$. *En conclusion,* $\mathbb{R}_n[X] = F \oplus G$.

Exercice 24.65 ♡♡

On considère l'application linéaire

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + P' + P'' \end{array}\right.$$

1. *Montrer que l'endomorphisme* φ *est injectif.*
2. *Montrer que l'endomorphisme* φ *est surjectif.*

Indication 24.15 : Pour montrer la surjectivité, étudier la restriction de φ *à* $\mathbb{R}_n[X]$ *qui est un espace de dimension finie.*

Solution :

1. *Soit un polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P + P' + P'' = 0$, *soit* $P = -(P' + P'')$. *Si l'on suppose que* $P \neq 0$, *on a* $\deg P \leqslant \deg P - 1$ *, une absurdité. Donc* φ *est injective.*
2. *Soit un entier* $n \in \mathbb{N}$. *Notons* φ_n *la restriction de* φ *à* $\mathbb{R}_n[X]$. *Alors, si* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) = P + P' + P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ *car* $\deg(\varphi_n(P)) \leqslant \max(\deg P, \deg P', \deg P'') \leqslant n$. *Donc* φ_n *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *injectif, donc surjectif, car* $\mathbb{R}_n[X]$ *est un espace de dimension finie* $n+1$.

   Soit alors $P \in \mathbb{R}[X]$. *Notons* $n = \deg P$. *Alors* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *et donc* $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X]$ *tel que* $\varphi_n(Q) = P$. *Mais alors* $\varphi(Q) = P$ *et on a donc montré que* φ *est surjective !*

Exercice 24.66 ♡♡

On définit l'application

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(1), P''(1), P''(2)) \end{array}\right.$$

1. *Montrer que* φ *est un isomorphisme.*
2. *En déduire qu'il existe un et un seul polynôme* $P \in \mathbb{R}_3[X]$ *vérifiant* $P(0) = 1, P'(1) = 2, P''(1) = -1$ *et* $P''(2) = 1$.

Solution :

1. *Il est clair que* φ *est linéaire. Montrons que* $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. *Soit* $P \in \mathbb{R}_3[X]$ *tel que* $\varphi(P) = 0$. *Considérons* $H = P - P(1)$. *Comme* $H(1) = H'(1) = H''(1) = 0$, *il vient que* 1 *est racine d'ordre* 3 *de* H, *donc* $H = (X-1)^3 Q$ *et donc* $P = Q(X-1)^3 + P(1)$. *Mais en examinant les degrés, il faut que* $Q = \lambda \in \mathbb{R}$ *d'où* $P = \lambda(X-1)^3 + a$ *(avec* $a = P(1) \in \mathbb{R}$*). Comme* $P(0) = 0$, $a = -\lambda$ *et donc* $P = \lambda((X-1)^3 - 1)$. *Mais alors* $P'' = \lambda(6(X-1))$ *et comme* $P''(2) = 1$, *il vient que* $\lambda = 0$ *et donc que* $P = 0$.

   Comme φ *est injective, et que* $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, φ *est donc bijective.*
2. *Comme* φ *est bijective, l'élément* $(1, 2, -1, 1)$ *possède un unique antécédent* $P \in \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 24.67 ♡♡

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et un endomorphisme* $u \in L(E)$. *Soit un sous-espace vectoriel* F *de* E. *On suppose que* $F \subset u(F)$.

1. *On suppose que* E *est de dimension finie. Montrer que* $u(F) = F$.
2. *Trouver un contre-exemple lorsque* E *est de dimension infinie.*

Indication 24.15 : Pour la deuxième question, on pourra étudier $u : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$ *avec* $F = \{XP \ ; \ P \in E\}$.

Solution :

1. *Considérons la restriction de* u *à* F : $u_{|F} : F \to E$. *Alors d'après la formule du rang,* $\dim u(F) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim V$. *Comme* $F \subset u(F)$, *on a aussi que* $\dim F \leqslant \dim u(F)$. *Donc* $\dim F = \dim u(F)$ *et* $F = u(F)$.
2. *En considérant* $E = \mathbb{R}[X]$ *et* $F = \{XP \ ; \ P \in E\}$, *l'application* $u : P \mapsto P'$ *fournit un contre-exemple puisque* $u(F) = E \neq F$.

Exercice 24.68 ♡♡

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *avec* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels tels que* $\dim E = n$ *et* $\dim F = p$. *Dire, pour chacune des phrases suivantes, si elle caractérise l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité de* f :

1. *L'image de toute famille libre de* E *par* f *est libre*
2. $\operatorname{Im} f = F$
3. *L'image d'une base de* E *par* f *est génératrice de* F.
4. $\operatorname{rg} f = n$.
5. *L'image d'une base de* E *par* f *est libre.*
6. $\operatorname{rg} f = p$.
7. *L'image d'une base de* E *par* f *est une base de* F.
8. *L'image de toute famille génératrice de* E *par* f *est génératrice de* F.
9. $\exists g \in \mathscr{L}(F, E), \quad g \circ f = \mathrm{id}_E$
10. $\exists g \in \mathscr{L}(F, E), \quad f \circ g = \mathrm{id}_F$

Solution :

1. *Supposons que l'image de toute famille libre est libre. Montrons que* f *est injective. Considérons une base* e *de* E *et un vecteur* $x \in E$ *tel que* $f(x) = 0$. *Notons* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *les coordonnées de* x *dans la base* e. *On a donc :* $0 = f(x) = \sum_{k=0}^{n} x_i f(e_i)$. *Mais la famille* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *étant libre, il en est de même de la famille* $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$. *L'égalité précédente n'est donc vraie que si* $x_1 = \dots = x_n = 0$ *et alors* $x = 0$. *On a ainsi montré que* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ *et que* f *est injective.*
2. *Si* $\operatorname{Im} f = F$ *alors* f *est surjective.*
3. *Si l'image d'une base* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *de* E *par* f *est génératrice de* F *alors montrons que* f *est surjective. Soit* $y \in F$. *La famille* $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ *est donc génératrice de* f *et il existe des scalaires* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $y = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n)$. *Par conséquent,* $y = f(x)$ *avec* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ *et* f *est bien surjective.*
4. *Si* $\operatorname{rg} f = n$ *alors* f *est injective. En effet, d'après la formule du rang, on a :* $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ *et il vient que* $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ *c'est à dire que* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$
5. *Si l'image d'une base* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *de* E *par* f *est libre dans* F *alors montrons que* f *est injective. Soit* $x \in E$ *tel que* $f(x) = 0$ *et soit* $(x_1, \dots, x_n)$ *les coordonnées de* x *dans la base* E. *Alors* $0 = f(x) = \sum_{k=0}^{n} x_i f(e_i)$. *On termine alors comme dans la première question et on montre que* $x = 0$ *c'est-à-dire que* f *est injective.*
6. *Si* $\operatorname{rg} f = p$ *alors par définition du rang d'une application linéaire,* $\dim \operatorname{Im} f = p = \dim F$ *et donc* $\operatorname{Im} f = F$. *On prouve ainsi que* f *est surjective.*
7. *Si l'image d'une base de* E *par* f *est une base de* F *alors en appliquant les résultats des questions* 3) *et* 5), *il vient que* f *est bijective.*
8. *Si l'image de toute famille de* E *par* f *est génératrice de* F *alors en particulier l'image d'une base de* e *est génératrice de* F *et appliquant la question* 3, f *est surjective.*
9. *Si il existe* $g \in \mathscr{L}(F, E)$ *tel que* $g \circ f = \mathrm{id}_E$ *alors* g *est surjective et* f *injective. Pour que* f *soit surjective, il faudrait supposer de plus que* $\dim F = \dim E$.
10. *Si il existe* $g \in \mathscr{L}(F, E)$ *tel que* $f \circ g = \mathrm{id}_F$ *alors* f *est surjective et* g *injective. Pour que* f *soit injective, il faudrait supposer de plus que* $\dim F = \dim E$.

Exercice 24.69 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n, *un vecteur* x_0 *de* E *et un endomorphisme* $f \in L(E)$ *tel que* $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ *soit libre.*

1. *Montrer que la famille* $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ *est une base de* E.
2. *Montrer que* f *est inversible.*

Solution :

1. *Soit* $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ *tels que* $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0$. *Alors* $f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0)\right) = 0$ *ce qui s'écrit aussi* $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{i+1}(x_0)$. *Mais la famille* $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ *est libre donc* $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ *ce qui prouve que la famille* $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ *est libre*
2. *Comme* $\dim E = n$, *les familles* $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ *et* $(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ *sont des bases de* E. *Comme l'image de la première base par* f *est la seconde base,* f *est forcément inversible.*

Exercice 24.70 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n *et deux endomorphismes* $(u, v) \in L(E)$. *Montrer que*

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) + n$$

Indication 24.15 : On pourra étudier la restriction $\tilde{u}$ *de* u *à* $\operatorname{Im} v$ *et montrer que* $\operatorname{Im} \tilde{u} = \operatorname{Im}(u \circ v)$ *et* $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$, *puis appliquer le théorème du rang à* $\tilde{u}$.

Solution : *Considérons la restriction de* u *à* $\operatorname{Im} v$: $\tilde{u} = u_{|\operatorname{Im} v}$. *On vérifie facilement que* $\operatorname{Im} u \circ v = \operatorname{Im} \tilde{u}$ *et que* $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$. *En appliquant le théorème du rang à* $\tilde{u}$, *on trouve que*

$$\dim(\operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) + \operatorname{rg}(u \circ v)$$

Mais $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u)$ *et donc, en appliquant le théorème du rang pour* u, *on trouve que*

$$\operatorname{rg} v \leqslant (n - \operatorname{rg} u) + \operatorname{rg}(u \circ v)$$

Exercice 24.71 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *et deux sous-espace vectoriel* E_1, E_2 *de* E. *Montrer que :*

$$(\exists u \in L(E) \mid \operatorname{Ker} u = E_1 \text{ et } \operatorname{Im} u = E_2) \Longleftrightarrow (\dim E = \dim E_1 + \dim E_2)$$

Indication 24.15 : Pour la réciproque,construire une base de E *en complétant une base de* E_1. *Définir alors* u *en se donnant l'image de cette base.*

Solution :

- $\boxed{(i) \implies (ii)}$ *: Le sens direct est une conséquence directe de la formule du rang :* $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u = \dim E_1 + \dim E_2$.
- $\boxed{(ii) \implies (i)}$ *: si* $E_1 = \{0\}$, *alors* $\dim E_2 = \dim E$ *donc* $E_2 = E$. *En posant* $u = \mathrm{id}$, *on vérifie que* u *convient. De même si* $E_2 = \{0\}$, $u = 0$ *convient. Supposons maintenant que* $E_1 \neq \{0\}$ *et* $E_2 \neq \{0\}$. *Alors, il existe une base* $(e_1, \dots, e_p)$ *de* E_1 *(où* $p = \dim E_1$*). Complétons cette base en une base de* E : $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. *Comme* $\dim E_2 = n - p$, *il existe une base* f *de* E_2 *de la forme* $(f_{p+1}, \dots, f_n)$. *Définissons alors* u *en se donnant l'image de la base* e *:*

  $$\forall i \in [\![1, p]\!], u(e_i) = 0, \quad \forall i \in [\![p+1, n]\!], u(e_i) = f_{i+1}$$

  Alors, $\forall x \in E_1$, $u(x) = 0$ *donc* $E_1 \subset \operatorname{Ker} u$. *Soit* $x \in \operatorname{Ker} u$, *décomposons* x *dans* e.

  $$x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p + x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n$$

  $u(x) = x_{p+1} f_{p+1} + \dots + x_n f_n = 0$. *Mais comme* f *est libre, il vient que* $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$ *et donc que* $x \in E_1$. *D'autre part,* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \operatorname{Vect}(f_{p+1}, \dots f_n) = E_2$.

Exercice 24.72 ♡♡

Soit un K-espace vectoriel E *de dimension finie* n *et deux endomorphismes* f, g *de* E *vérifiant* $f \circ g = 0$ *et* $f + g \in GL(E)$. *Montrer que* $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$.

Solution :

- *Comme* $f \circ g = 0$ *alors* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ *et d'après la formule du rang* $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$.
- *D'autre part, comme* $f + g \in GL(E)$ *alors* $n = \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$ *car* $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

L'égalité est ainsi prouvée

Exercice 24.73 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On considère l'ensemble $A = \{(u,v) \in L(E)^2 \mid u \circ v = 0\}$. Déterminer $\sup\{\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \mid (u,v) \in A\}$.

Solution : *L'égalité $u \circ v = 0$ amène $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ et donc d'après la formule du rang $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = n$. Pour $u = \mathrm{id}$ et $v = 0$, il y a égalité. Donc* $\boxed{\sup\{\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \mid (u,v) \in A\} = n}$

Exercice 24.74 ♡♡♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. *Démontrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes f de E tels que :*
$$\forall x \in E, \quad \big(x, f(x)\big) \text{ est une famille liée.}$$
2. *En déduire que les homothéties sont les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tout autre endomorphisme.*

Indication 24.15 : Pour tout $x \in E$, on pourra considérer une projection sur $\mathrm{Vect}(x)$).

Solution :

1. *Les homothéties vérifient clairement la propriété indiquée. Réciproquement, on sait par hypothèse que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} \mid f(x) = \lambda_x x$. Il s'agit donc de démontrer que l'on peut choisir le même λ pour tous les x. Autrement dit, si l'on choisit deux vecteurs x et y, on peut prendre $\lambda_x = \lambda_y$.*
   - *Si (x,y) est libre, alors, comme : $\big(\lambda_{x+y} - \lambda_x\big)x + \big(\lambda_{x+y} - \lambda_y\big)y = 0$ il vient que $\lambda_{x+y} = \lambda_y = \lambda_x$.*
   - *Sinon x et y sont colinéaires et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$ et*
   $$f\big(y\big) = f(\alpha x) = \lambda_{\alpha x}\alpha x = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x$$
   et on peut prendre $\lambda_{\alpha x} = \lambda$. On a ainsi montré que pour tout vecteur $y \in E$, $f\big(y\big) = \lambda y$. Donc f est une homothétie de rapport λ.
2. *Considérons f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes de E. Soit x un vecteur non nul de E et soit Π la projection de E sur $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire donné de $\mathrm{Vect}(x)$ dans E (qui existe car E est de dimension finie). Comme f et Π commute, on a : $\Pi\big(f(x)\big) = f(\Pi(x)) = f(x)$. Donc comme $\Pi\big(f(x)\big) \in \mathrm{Vect}(x)$, $f(x)$ et x sont liés. x étant quelconque non nul, ce résultat est vrai pour tout $x \in E \setminus \{x\}$. Ce résultat est aussi clairement vérifié par le vecteur nul. D'après la première question, on peut affirmer que f est une homothétie. Réciproquement, une homothétie commute avec tous les endomorphismes de E.*

Exercice 24.75 ♡♡♡

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :
$$K_p = \operatorname{Ker} f^p \quad \text{et} \quad I_p = \operatorname{Im} f^p.$$

1. *Montrer que :*
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1} \quad \text{et} \quad I_{p+1} \subset I_p.$$
2. *Prouver qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que : $\forall i \geqslant r, \quad K_i = K_{i+1}$.*
3. *Montrer de même que :*
$$\forall i \geqslant r, \quad I_i = I_{i+1}.$$
4. *Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.*

Solution :

1. *Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $x \in K_p$. Alors $f^{p+1}(x) = f\big(f^p(x)\big) = 0$ car $f^p(x) = 0$. Donc $x \in K^{p+1}$ et $K_p \subset K_{p+1}$. Considérons maintenant $y \in I_{p+1}$. Alors il existe $x \in E$ tel que : $y = f^{p+1}(x) = f^p\big(f(x)\big)$ et donc $y \in I_p$ et $I_{p+1} \subset I_p$*
2. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $K_p \subset K_{p+1}$ donc : $\dim K_p \leqslant \dim K_{p+1}$ et la suite $\big(\dim K_p\big)$ est croissante. Comme $K_p \subset E$, on a aussi : $\dim K_p \leqslant n$. La suite $\big(\dim K_p\big)$ est donc majorée. Appliquant le théorème de la limite monotone elle est convergente mais, ses valeurs étant entières, cela équivaut au fait qu'elle est constante à partir d'un certain rang $r \in \mathbb{N}$. r est le plus petit entier naturel tel que $\forall i \geqslant r, \quad K_i = K_{i+1}$.*
3. *D'après la formule du rang et le résultat précédent, on montre que $\forall i \geqslant r, \quad I_i = I_{i+1}$.*
4. *Soit $y \in K_r \cap I_r$. Effectuons un raisonnement par l'absurde en supposant que $y \neq 0$. Alors $f^r\big(y\big) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$. Il vient donc : $f^{2r}(x) = 0$. Mais comme $y = f^r(x) \neq 0$, il existe $r' \in [\![r+1, 2r]\!]$ tel que $f^{r'}(x) = 0$. On a donc $x \in K_{r'}$ et $x \notin K_r$ ce qui contredit le fait que la suite (K_r) est constante à partir du rang r. On en déduit que $y = 0$ et que $K_r \cap I_r = \{0\}$. Il vient alors que : $\dim(K_r + I_r) = \dim K_r + \dim I_r = \dim \operatorname{Ker} f^r + \dim \operatorname{Im} f^r = n$ par application de la formule du rang et de ce fait : $K_r + I_r = E$. En résumé : $E = K_r \oplus I_r$.*

Exercice 24.76 ♡♡♡

Soit un espace vectoriel E *de dimension 3 et un endomorphisme* u *de* E *tel que* u^2*=0. Montrer que*

$$\exists a \in \mathrm{E} : \quad \exists f \in \mathrm{E}^\star : \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad u(x) = f(x) \cdot a$$

Indication 24.15 : Traduire en terme d'image et de noyau la relation $u^2 = 0$*. Introduire ensuite une base de* $\operatorname{Ker} u$ *et la compléter. Définir* f *à l'aide de cette base.*

Solution : *La relation* $u^2 = 0$ *donne que* $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ *(le montrer). D'après le théorème du rang,*

$$3 = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} u)$$

ce qui implique que $\dim(\operatorname{Ker} u) \geqslant 2$*. Si* $\dim(\operatorname{Ker} u) = 3$*, alors* $u = 0$ *et le résultat est évident avec* $f = 0$ *et* a *quelconque. Supposons donc que* $\dim(\operatorname{Ker} u) = 2$*. Alors d'après le théorème du rang,* $\dim(\operatorname{Im} u) = 1$*. C'est une droite vectorielle :* $\exists a \in \mathrm{E}$*,* $a \neq 0$ *tel que* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a)$*. Considérons une base* (e_1, e_2) *de* $\operatorname{Ker} u$ *et complétons-la en une base* (e_1, e_2, e_3) *de* E*. Puisque* $u \neq 0$*,* $u(e_3) \neq 0$ *et donc* $\exists c \in \mathbb{R}$ *tq* $u(e_3) = ca$*. Définissons la forme linéaire* f *en se donnant l'image de la base* e *par* f *:* $f(e_1) = 0$*,* $f(e_2) = 0$ *et* $f(e_3) = c$*. Soit alors* $x \in \mathrm{E}$*. Décomposons* x *dans la base* e *:* $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$*. Alors* $u(x) = x_3 ca = x_3 f(e_3) a = f(x) a$*.*

Exercice 24.77 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et soit* $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de rang 1.*

1. *Montrer qu'il existe un scalaire* $\lambda \in \mathrm{K}$ *tel que* $f^2 = \lambda f$*.*
2. *A quelle condition sur le scalaire* λ*,* $(\mathrm{id} - f)$ *est-il inversible ? Calculer alors* $(\mathrm{id} - f)^{-1}$*.*

Solution :

1. *Comme* $\operatorname{rg} f = 1$*, il existe un vecteur* $e_1 \in \mathrm{E}$ *tel que* $\operatorname{Im} f = \mathrm{V}ect(e_1)$*. On complète le vecteur* e_1 *en une base* $(e_1, \dots, e_n)$ *de* E*. Comme* $\operatorname{Im} f = \mathrm{V}ect(e_1)$*, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*, il existe* $\lambda_i \in \mathbb{K}$ *tel que* $f(e_i) = \lambda_i e_1$*. Donc* $f^2(e_i) = f(\lambda_i e_1) = \lambda_i \lambda_1 e_1 = \lambda_1 f(e_i)$*. Si* $x \in \mathrm{E}$ *alors il existe* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ *et*

$$f^2(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f^2(e_i) = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \lambda_1 f(x).$$

   Posons alors $\lambda = \lambda_1$*. On a bien* $f^2(x) = \lambda f(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$*.*

2. *Remarquons que* $(f - \mathrm{id})(f + (1-\lambda)\mathrm{id}) = (\lambda - 1)\mathrm{id}$*. On en tire une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathrm{id} - f$ *soit inversible : il faut et il suffit que* $\lambda \neq 1$*. On calcule alors* $\boxed{(\mathrm{id} - f)^{-1} = \dfrac{1}{1-\lambda}(f + (1-\lambda)\mathrm{id})}$*.*

Exercice 24.78 ♡♡♡

Soit un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n *et deux endomorphismes* (f, g) *de* E *vérifiant :*

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

1. *Montrer que* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$*.*
2. *Montrer que* $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f \circ g)$*.*

Solution :

1. *Soit* $y \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$*. Il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = g(x) = g \circ f \circ g(x) = g \circ f(y) = 0$ *car* $y \in \operatorname{Ker} f$*. Donc* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} g$ *sont en somme directe. Soit* $x \in \mathrm{E}$*, on écrit* $x = [x - g \circ f(x)] + g \circ f(x)$*. On a* $f\big(x - g \circ f(x)\big) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$ *donc* $x - gof(x) \in \operatorname{Ker} f$*. Il est clair que* $g \circ f(x) \in \operatorname{Im} g$*. Donc* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$*. En conclusion, on a bien* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$*.*
2. *D'après le théorème du rang,* $\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ *et d'après la question précédente,* $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} g$ *d'où* $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$*. Comme* $g \circ f \circ g = g$*, on a que* $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$ *ce qui implique que* $\operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} g \circ f$*. De même, comme* $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$ *alors* $\operatorname{rg} g \circ f \leqslant \operatorname{rg} g$ *et on on obtient que* $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} g \circ f$*. On fait de même pour la seconde égalité.*

Exercice 24.79 ♡♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $u, v \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$*. On suppose que* $\mathrm{E} = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$*. Montrer que ces deux sommes sont directes.*

Solution : *On a :*

$$\begin{aligned}
n &= \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \text{ car } E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\\
&= \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \text{ d'après la formule de Grassmann}\\
&= n - \dim \operatorname{Ker} u + n - \dim \operatorname{Ker} v - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \text{ d'après la formule du rang}\\
&= 2n - (\dim(\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v)) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \text{ à nouveau d'après la formule de Grassmann}\\
&= 2n - n - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \text{ car } E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v
\end{aligned}$$

donc $0 = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$ *et ceci n'est possible que si* $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) = 0$. *On en déduit que les deux sommes sont directes.*

Exercice 24.80 ♡♡♡

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme* $u \in L(E)$. *Montrer qu'il existe un automorphisme* $v \in GL(E)$ *et un projecteur* $p \in L(E)$ *tels que* $u = v \circ p$.

Solution : *Si* u *est inversible, il suffit de prendre* $v = u$ *et* $p = \mathrm{id}_E$. *Sinon, notons* $r = \dim \operatorname{Ker} u$. *D'après la formule du rang, on a* $n - r = \dim(\operatorname{Im} u)$. *Considérons une base* $(e_1, \dots, e_r)$ *de* $\operatorname{Ker} u$ *et complétons-la en une base* $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ *de* E. *Posons* $f_{r+1} = u(e_{r+1}), \dots, f_n = u(e_n)$. *On vérifie que cette famille est libre. Soient* $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_{r+1} f_{r+1} + \dots + \alpha_n f_n = 0$ *alors* $u(\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0$ *et* $\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n) \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$. *Donc* $\alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n = 0$ *mais comme* $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ *est libre,* $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$. *On complète alors cette famille en une base* $f = (f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ *de* E. *Définissons alors* p *le projecteur sur* $\operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ *donné par* $p(e_i) = 0$ *si* $i \in [\![1, r]\!]$ *et* $p(e_i) = e_i$ *si* $i \in [\![r+1, n]\!]$. *Définissons aussi l'application linéaire* v *par* $v(e_i) = f_i$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$. *Comme* v *envoie une base de* E *sur une base de* E, v *est inversible. On vérifie facilement en calculant l'image des vecteurs de la base* e *que* $v \circ p = u$.

Exercice 24.81 ♡♡♡

Soit un K-espace vectoriel E *de dimension finie* n *et un endomorphisme* $f \in L(E)$. *Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$
2. $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$
3. $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$
4. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
5. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Solution :

1. $\boxed{1) \implies 2)}$ *Comme* $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$, *en appliquant la formule de Grassmann puis la formule du rang,* $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f - \dim E = 0$ *et* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. *Donc* $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
2. $\boxed{2) \implies 3)}$ *Par définition.*
3. $\boxed{3) \implies 2)}$ *Par la formule du rang.*
4. $\boxed{2) \implies 4)}$ *Il est clair que* $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. *Soit* $y \in \operatorname{Im} f$ *alors il existe* $x = x_1 + x_2 \in \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ *tel que* $y = f(x)$. *Alors* $y = f(x_1) \in \operatorname{Im} f^2$ *car* $x_1 \in \operatorname{Im} f$. *Donc* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ *et on a bien* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
5. $\boxed{4) \implies 5)}$ *Il est clair que* $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. *On utilise la formule du rang :* $n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2$. *Comme* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, *il vient que* $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. *Finalement,* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
6. $\boxed{5) \implies 4)}$ *se prouve de la même façon.*
7. $\boxed{5) \implies 3)}$ *Soit* $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ *alors* $f(x) = 0$ *et il existe* $x_0 \in E$ *tel que* $x = f(x_0)$. *Donc* $f^2(x_0) = 0$ *et* $x_0 \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. *Alors* $x = f(x_0) = 0$ *et* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
8. $\boxed{3) \implies 1)}$ *C'est une conséquence directe de la formule de Grassmann.*

On vérifie que la chaine d'implications est bien fermée.

Exercice 24.82 ♡♡

On note E *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_n[X]$ *des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à* n. *On définit l'application*

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & Q \end{cases}$$

où Q *est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\, dt$$

Montrez que f est un automorphisme de E.

Solution : *On vérifie d'abord que f est bien définie. Si $P\in E$, en utilisant la formule du binôme, on obtient que $\forall x\in E$,*

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\int_0^1 t^{n-k}P(t)\,dt\right]x^k$$

ce qui montre que $f(P)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur à n.
Il est immédiat que f est linéaire. Montrons l'injectivité de f en vérifiant que $\operatorname{Ker} f=\{0\}$. Soit $P\in E$ tel que $f(P)=0$. D'après le calcul précédent,

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad \int_0^1 t^kP(t)\,dt=0$$

Comme $P(t)=\sum_{k=0}^n a_kt^k$, on obtient alors que

$$\int_0^1 P^2(t)\,dt=\sum_{k=0}^n a_k\int_0^1 t^kP(t)\,dt=0$$

Donc $\forall t\in[0,1]$, $P(t)=0$, ce qui montre que le polynôme P a une infinité de racines et est donc nul.
Un endomorphisme injectif en dimension finie étant bijectif, f est un automorphisme de E.

Exercice 24.83 ♡♡♡
Suite de l'exercice 19.55 p. 742.
Soit un anneau $(A,+,\times)$. On dit qu'il est régulier lorsque

$$\forall u\in A,\ \exists x\in A\ :u=uxu.$$

Montrer que si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, l'anneau $L(E)$ est régulier.

Solution : *On choisit une base de E : $(e_1,\dots,e_n)$. Les $u(e_k)$ appartiennent à l'image de u. On considère une base $(f_1,\dots,f_r)$ de $\operatorname{Im} f$ que l'on complète avec $f_{r+1},\dots,f_n)$ de E. On a $f_k=u(x_k)$ pour $1\leqslant k\leqslant r$. On pose $x(f_k)=x_k$ pour $1\leqslant k\leqslant r$ et $x(f_k)=0$ par exemple pour $k>r$. On a alors $u(x(f_k))=u(x_k)=f_k$ pour $1\leqslant k\leqslant r$. Donc pour tout $v\in\operatorname{Im} f$, $u(x(v))=v$. A fortiori pour $v=u(e_k),1\leqslant k\leqslant n$ et donc $uxu=u$.*

24.7.9 Rang d'une application linéaire

Exercice 24.84
Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f:\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (y-z,z-x,x-y)\end{cases}$
2. $f:\begin{cases}\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (2x+y+z,x+y+t,x+z-t)\end{cases}$
3. $f:\begin{cases}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & z+i\bar z\end{cases}$ *($\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel)*

Solution :

1. *On calcule $\operatorname{Ker} f$. On sait que $(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $\begin{cases}y-z&=0\\ z-x&=0\\ x-y=0\end{cases}$. On montre alors que $x=y=z$ et donc $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}((1,1,1))$. Le vecteur $(1,1,1)$ forme une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim\operatorname{Ker} f=1$. D'après la formule du rang, $\dim\operatorname{Im} f=2$. Une base de $\operatorname{Im} f$ est donc formée de deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$ non colinéaires. Il suffit de prendre par exemple $f(1,0,0)=(0,-1,1)$ et $f(0,1,0)=(1,0,-1)$.*
2. *De même, on commence par déterminer $\operatorname{Ker} f$. Pour ce faire, on résout $\begin{cases}2x+y+z&=0\\ x+y+t&=0\\ x+z-t&=0\end{cases}$. On trouve $y=-2x-z$ et $t=x+z$ donc $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$ avec $u_1=(1,-2,0,1)$ et $u_2=(0,-1,1,1)$ qui sont non colinéaires. Une base de $\operatorname{Ker} f$ est formée de ces deux vecteurs. D'après la formule du rang, $\dim\operatorname{Im} f=2$ et il suffit de trouver deux vecteurs de $\operatorname{Im} f$ non colinéaires pour avoir une base de $\operatorname{Im} f$. On peut prendre $f(1,0,0,0)=(2,1,1)$ et $f(0,1,0,0)=(1,1,0)$.*
3. *On calcule le noyau de f. On trouve $z=a+ib\in\operatorname{Ker} f\iff z+i\bar z=0\iff(a+b)(1+i)=0\iff a+b=0$. Donc $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(1-i)$ et le vecteur $1-i$ forme une base de $\operatorname{Ker} f$. De même, $\operatorname{Im} f=\{z+i\bar z\mid z\in\mathbb{C}\}=\{(a+b)(1+i)\mid a,b\in\mathbb{R}\}=\operatorname{Vect}(1+i)$ et une base de $\operatorname{Im} f$ est $1+i$.*

Exercice 24.85 ♡

Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Solution : *Soit $f \in L(\mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. Posons $a = f(1)$. Alors $f : x \mapsto ax$. Réciproquement, si f est de cette forme alors $f \in L(\mathbb{R})$. On montre ainsi que $L(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_R)$.*

Exercice 24.86 ♡

Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Solution : *Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Alors pour tout $v = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2$, on a : $u(v) = xu(e_1) + yu(e_2)$. Réciproquement, si on se donne deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ et si on considère l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & xv_1 + yv_2 \end{array} \right.$ on montre facilement qu'elle est linéaire. On en déduit que $L(\mathbb{R}^2) = \{(x,y) \mapsto xv_1 + yv_2 \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2\}$.*

Exercice 24.87 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et $u \in L(E,F)$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(n,p)$.

Solution : *Comme $\mathrm{Im}\, u \subset F$, $\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}\, u \leqslant \dim F = p$. De plus, par la formule du rang, $\mathrm{rg}(u) = n - \dim \mathrm{Ker}\, u \leqslant n$ d'où $\mathrm{rg}(u) \leqslant \min(n,p)$.*

Exercice 24.88 ♡

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in Ł(E)$. Montrer que

$$(\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u) \Longleftrightarrow (u^2 = 0 \text{ et } n = 2\,\mathrm{rg}(u))$$

Solution : *Soit $u \in Ł(E)$ tel que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$. Soit $x \in E$ alors $u(x) \in \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$ donc $u^2(x) = 0$ et $u^2 = 0$. De plus d'après la formule du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u = 2\dim \mathrm{Im}\, u = 2\,\mathrm{rg}(u)$.*
Réciproquement, si $u^2 = 0$ et si $n = 2\,\mathrm{rg}(u)$ alors $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$. En effet, comme $u^2 = 0$, il est clair que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$. La formule du rang amène $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u$ et comme $n = 2\,\mathrm{rg}(u)$, $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u$. On en déduit le résultat.

Exercice 24.89 ♡

On considère $(n+1)$ réels distincts $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ est un isomorphisme.*
2. *En déduire que si $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [0,n]$, $P(x_i) = y_i$ (polynôme interpolateur de Lagrange).*
3. *Soient deux réels distincts $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et quatre réels $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant*
$$P(a) = \alpha,\ P'(a) = \beta,\ P(b) = \delta,\ P'(b) = \gamma$$

Solution :

1. *On montre facilement que φ est linéaire. Si $P \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ alors $P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0$. Donc P est de degré au plus n et admet $n+1$ racines. Ceci n'est possible que si $P = 0$. Donc φ est injective. Comme $\dim \mathbb{R}^{n+1} = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, on en déduit, grâce à la formule du rang que $\dim \mathrm{Im}\, \varphi = n+1$ et donc φ est surjective. On prouve ainsi que φ est un isomorphisme.*
2. *Le résultat annoncé dans cette question découle directement de la définition d'une bijection.*
3. *On procède de même qu'avant. On considère l'application $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & \big(P(a), P'(a), P(b), P'(b)\big) \end{array} \right.$. On montre facilement qu'elle est linéaire. Soit $P \in \mathrm{Ker}\, \theta$. Alors a et b sont des racines doubles de P. Mais a et b sont distincts et P de degré au plus 3. Ceci n'est possible que si $P = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\, \theta = \{0\}$ et $\theta = 0$. On montre comme avant, en utilisant la formule du rang, que θ est surjective. Donc θ est un isomorphisme. En conséquence de quoi il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(a) = \alpha,\ P'(a) = \beta,\ P(b) = \delta,\ P'(b) = \gamma$.*

Exercice 24.90 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $u, v \in L(E)$*. Montrer que*

$$u^2 \circ v - u \circ v \circ u + \mathrm{id} = 0 \implies u \in GL(E)$$

Solution : *On a* $u \circ (v \circ u - u \circ v) = \mathrm{id}$ *donc* u *admet un inverse à droite donné par* $v \circ u - u \circ v$*. Comme* E *est de dimension finie, on en déduit que* u *est inversible.*

Exercice 24.91 ♡

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* $Q \in E$*. Montrer qu'il existe un unique polynôme* $P \in E$ *vérifiant* $P' + P = Q$*.*

Solution : *Soit* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' + P \end{array} \right.$*. On vérifie facilement que* $\varphi \in L(\mathbb{R}_n[X])$*. De plus* φ *est injective. En effet, si* $P \in \operatorname{Ker}\varphi$ *alors* $P + P' = 0$ *et* $\deg P = \deg P'$*. Ceci n'est possible que si* $P = 0$ *et montre que* $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$*. Comme* $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$*, on peut affirmer que* φ *est un automorphisme. On sait en effet d'après le cours qu'un endomorphisme injectif dans un espace de dimension finie est bijectif. Si* $Q \in \mathbb{R}_n[X]$*, il existe alors un unique polynôme* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *tel que* $\varphi(P) = Q$*, c'est-à-dire tel que* $P + P' = Q$*.*

Exercice 24.92 ♡♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $f, g \in \mathscr{L}(E)$*. Montrer que :*

1. $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$
2. $|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f-g)$.

Solution :

1. *On a*
$$\operatorname{rg}(f+g) = \dim \operatorname{Im}(f+g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g$$
car $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
2. *Par ailleurs*
$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f - g + g) \leqslant \operatorname{rg}(f-g) + \operatorname{rg} g$$
d'où $\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg}(f-g)$*. On montre de même que* $\operatorname{rg} g - \operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg}(g-f)$*. Comme* $\operatorname{rg}(f-g) = \operatorname{rg}(g-f)$*, on en déduit l'inégalité.*

Exercice 24.93 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel réel de dimension* n*. Soit* f *un endomorphisme nilpotent de* E*, c'est-à-dire qu'il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f^p = 0$*.*

1. f *peut-il être bijectif ?*
2. *Prouver que* $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ *et que* $\operatorname{rg} f \leqslant n-1$*.*
3. *Soit* q *le plus petit entier non nul tel que* $f^q = 0$
   (a) *Montrer que :* $\forall k \geqslant q, \quad f^k = 0$*.*
   (b) *Justifier l'existence de* $x_0 \in E$ *tel que* $f^{q-1}(x_0) \neq 0$*.*
   (c) *Montrer que :* $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0)\right)$ *est libre.*
   (d) *En déduire que* $q \leqslant n$ *puis que* $f^n = 0$*.*
4. *On suppose dans cette question que* $q = n$*. Trouver tous les endomorphismes* $g \in L(E)$ *qui commutent avec* f*.*
   Indication 24.15 : On montrera que $g \circ f = f \circ g$ *si et seulement si il existe* $(a_0, \dots a_{n-1}) \in K^n$ *tels que* $g = a_0 \mathrm{id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$*.*

Solution :

1. *Si* f *était bijective alors il en serait de même de* f^p *car ce serait une composée de fonctions bijectives. Or* $f^p = 0$ *qui n'est pas bijective donc* f *n'est pas bijective.*
2. *On a vu dans le cours que pour un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*−espace vectoriel de dimension finie, on a équivalence entre le fait que cet endomorphisme est bijectif, surjectif ou injectif. Comme* f *n'est pas bijective, elle n'est à la fois ni injective et ni surjective. Il vient alors :* $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ *et* $\operatorname{rg} f \leqslant n-1$*.*
3. (a) *La composée de l'application nulle par une application quelconque est une application nulle !*
   (b) *Comme* q *est le plus petit entier non nul tel que* $f^q = 0$*,* f^{q-1} *n'est pas identiquement nul sur* E *: il existe donc* $x_0 \in E$ *tel que* $f^{q-1}(x_0) \neq 0$*.*

(c) *Soit* $\alpha_0,\dots,\alpha_{q-1}\in\mathbb{R}$ *tels que*

$$\alpha_0 x_0+\alpha_1 f(x_0)+\dots+\alpha_{q-1}f^{q-1}(x_0)=0 \quad (\star).$$

Alors, par linéarité : $f^{q-1}\left(\alpha_0 x_0+\alpha_1 f(x_0)+\dots+\alpha_{q-1}f^{q-1}(x_0)\right)=0$ *et :* $\alpha_0 f^{q-1}(x_0)+\alpha_1 f^q(x_0)+\dots+\alpha_{q-1}f^{2q-2}(x_0)=0$ *mais comme :* $\forall k\geqslant q,\quad f^k=0.$*, il vient* $\alpha_0x_0=0$ *et donc :* $\alpha_0=0$. *L'égalité* $(\star)$ *devient alors :* $\alpha_1 f(x_0)+\dots+\alpha_{q-1}f^{q-1}(x_0)=0$. *En appliquant* f^{q-2} *à cette égalité, on montre de la même façon que* $\alpha_1=0$. *On répète encore* $n-2$ *fois ce procédé et on montre aussi que :* $\alpha_2=\dots=\alpha_q=0$. *La famille* $\left(x_0,f(x_0),\dots,f^{q-1}(x_0)\right)$ *est bien libre.*

(d) *Une famille libre de* E *est de cardinal au maximum la dimension de* E. *Donc* $q\leqslant n$. *D'après la question* 3(a)*, il est alors clair que* $f^n=0$.

4. *On suppose que* g *est un endomorphisme de* E *qui commute avec* f. *Comme* $\left(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0)\right)$ *est une base de* E*, il existe* $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{K}$ *tels que* $g(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k f^k(x_0)$. *On calcule alors l'image par* g *des vecteurs de la base* $\left(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0)\right)$ *:*

$$g\left(f^i(x_0)\right)=f^i\left(g(x_0)\right)=f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k f^k(x_0)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k f^{i+k}(x_0)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k f^k\right)\left(f^i(x_0)\right)$$

et on peut alors affirmer que $g=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k f^k$. *Réciproquement, si* g *est de cette forme, on vérifie facilement qu'elle commute avec* f.

Exercice 24.94 ♡

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :*

1. *Il existe* $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} f$.
2. *La dimension de* E *est paire.*

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ *Soit* $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} f$. *D'après la formule du rang :* $\dim\mathrm{E}=\dim\operatorname{Ker} f+\dim\operatorname{Im} f=2\dim\operatorname{Ker} f$ *et* $\dim\mathrm{E}$ *est bien pair.*

$\boxed{\Rightarrow}$ *Réciproquement, si* $\dim\mathrm{E}=2n$ *où* $n\in\mathbb{N}^*$ *alors considérons une base* $\left(e_1,\dots,e_n,e'_1,\dots,e'_n\right)$ *de* E *ainsi que l'endomorphisme* $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *donné par :* $\forall i\in[\![1,n]\!]\ f(e_i)=e'_i\quad\text{et}\quad f\left(e'_i\right)=0$. *On vérifie facilement que* f *est linéaire, que* $\operatorname{Ker} f=\mathrm{Vect}\left(e'_1,\dots,e'_n\right)$ *et que* $\operatorname{Im} f=\mathrm{Vect}\left(e'_1,\dots,e'_n\right)$.

24.7.10 Formes linéaires en dimension finie

Exercice 24.95 ♡♡

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* φ *une forme linéaire non nulle sur* E. *Montrer que pour tout* $x\in\mathrm{E}\setminus\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi$ *et* $\mathrm{Vect}(x)$ *sont supplémentaires dans* E.

Solution : *Posons* $\mathrm{F}=\operatorname{Ker}\varphi+\mathrm{Vect}(x)$. *Comme* $\dim\operatorname{Ker}\varphi=n-1$*, on a la disjonction :* $\dim\mathrm{F}=n-1\quad\text{ou}\quad\dim\mathrm{F}=n$. *Si* $\dim\mathrm{F}=n-1$ *alors* $\mathrm{F}=\operatorname{Ker}\varphi$ *et forcément* $x=0$ *ce qui n'est pas possible par hypothèse. Donc* $\dim\mathrm{F}=n$ *et* $\operatorname{Ker}\varphi+\mathrm{Vect}(x)=\mathrm{E}$. *Si* $u\in\operatorname{Ker}\varphi\cap\mathrm{Vect}(x)$ *alors il existe* $\alpha\in\mathbb{K}$ *tel que* $u=\alpha\cdot x$ *et* $0=\varphi(u)=\alpha\varphi(x)$. *Comme* $x\in\mathrm{E}\setminus\operatorname{Ker}\varphi$, $\varphi(x)\neq0$ *et* $\alpha=0$ *ce qui prouve que* $u=0$ *et donc que* $\operatorname{Ker}\varphi\cap\mathrm{Vect}(x)=\{0\}$. $\operatorname{Ker}\varphi$ *et* $\mathrm{Vect}(x)$ *sont bien supplémentaires dans* E.

Exercice 24.96 ♡♡

Soient f *et* g *des formes linéaires sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie telles que* $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} g$. *Montrer qu'il existe* $\alpha\in\mathbb{K}$ *tel que* $f=\alpha\cdot g$.

Solution :

Si $f\equiv0$*, le résultat est clair. Sinon, il existe* $x\in\mathrm{E}$ *tel que* $f(x)\neq0$. *Par conséquent* $\mathrm{Vect}(x)$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont supplémentaires. Puisque* $g(x)\neq0$*, on peut trouver* $\alpha\in\mathbb{K}$ *tel que* $f(x)=\alpha g(x)$. *On pose* $h=f-\alpha g$. *L'application* h *est nulle sur* $\operatorname{Ker} f$ *et* $h(x)=0$ *donc* $h\equiv0$ *d'où le résultat.*

Exercice 24.97 ♡♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $u\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme. On suppose que* $\forall\varphi\in\mathrm{E}^\star$, $\varphi\circ u=0_{\mathrm{E}^\star}$. *Montrer que* $u=0_{\mathrm{L}(\mathrm{E})}$.

Solution : *Supposons que u ne soit pas nulle. Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $y_0 = u(x_0) \neq 0$. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(y_0)$ et considérons un supplémentaire G à F dans E. Ce dernier existe car E est de dimension finie. On sait que tout $x \in \mathrm{E}$ se décompose de manière unique sous la forme $x = \alpha y_0 + x_\mathrm{G}$ où $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On introduit l'application φ sur E définie par $\varphi(x) = \alpha$. On vérifie que φ est linéaire. Si $x = \alpha y_0 + x_\mathrm{G}$ et si $x' = \alpha' y_0 + x'_\mathrm{G}$ sont deux vecteurs de E alors par unicité de la décomposition d'un vecteur sur $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, pour $a, a' \in \mathbb{K}$, le vecteur $ax + a'x'$ se décompose sous la forme $ax + a'x' = (a\alpha + a'\alpha')y_0 + (ax_\mathrm{G} + a'x'_\mathrm{G})$ et $\varphi(ax + a'x') = a\alpha + a'\alpha' = a\varphi(x) + a'\varphi(x')$. De plus, $\varphi(y_0) = 1$ donc φ n'est pas nulle et $\varphi(u(x_0))$ non plus. On aboutit alors à une contradiction et u est nulle.*

Exercice 24.98 ♡♡♡

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ n formes linéaires sur E. Montrer que la famille $f = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ si et seulement si l'application $\theta : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Solution :

⇒ *Supposons que f est libre. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,\theta$. Alors $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$. Par l'absurde, supposons que $x \neq 0$. Considérons un supplémentaire H à $\mathrm{Vect}(x)$ dans E et considérons la forme linéaire φ donnée par $\varphi_{|\mathrm{H}} = 0$ et $\varphi(x) = 1$. Comme f est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$. Mais alors $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ et on aboutit à une absurdité. Donc $x = 0$ et $\mathrm{Ker}\,\theta = \{0\}$. Donc θ est injective. Comme $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^n = n$, θ est un isomorphisme.*

⇐ *Prouvons la réciproque par contraposée. Supposons que f est liée et montrons que θ n'est pas injective. Un des vecteurs de f peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Supposons, quitte à renuméroter les vecteurs de f, que ce soit le dernier. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_i f_i$. Si $x \in \mathrm{E}$ alors*

$$\theta(x) = \left(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x), \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_i f_i(x) \right) \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$$

où

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \varepsilon_i = \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-ème place}}, 0, \dots, \lambda_i \right).$$

On montre sans difficulté que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est libre donc $\dim \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) = n-1$. Alors $\dim \mathrm{Im}\,\theta \leqslant n-1$ et θ n'est pas surjective donc n'est pas un isomorphisme.

24.7.11 Récurrences linéaires

Exercice 24.99

Programmer la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. *Que valent u_{20}, u_{50}, u_{100} ?*
2. *Trouvez-vous les mêmes résultats que votre voisin ?*
3. *Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_1^n$.*
4. *Les résultats sont ils en accord avec ceux des questions précédentes ? Pourquoi ?*

Solution :

1. *On trouve par exemple comme valeurs approchées $u_{20} = -10^{-7}$, $u_{50} = -4 \times 10^{-7}$ et $u_{100} = -11892$.*
2. *Pour des raisons qui apparaitront plus tard, il n'y a pas de raison de trouver la même chose pour u_{100}, sauf à travailler avec le même logiciel sur le même type de matériel.*
3. *Les deux suites (u_n) et (u_1^n) vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 et coïncident sur les deux premiers termes. Elles sont donc égales.*
4. *On a $u_{100} = 10^{-27}$ environ, à comparer avec -11892 trouvé précédemment. Nous sommes ici en présence d'un cas où les accumulations d'erreurs d'arrondis provoquent à coup sûr ce phénomène.*
   Les suites solutions de $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ sont de la forme $ar_1^n + br_2^n$, où a et b sont déterminés par les conditions initiales u_0 et u_1. Une petite erreur sur u_0 et u_1 entraîne une petite erreur sur a et b. Mais cette erreur sur b fait que b se retrouve non nul, ici en l'occurrence strictement négatif, au lieu d'être nul, et de ce fait, la suite programmée tend vers $-\infty$. De fait dès que l'on trouve deux termes consécutifs de la suite qui sont de même signe, la suite va tendre vers $-\infty$ (ou $+\infty$)

24.7.12 L'espace vectoriel des polynômes

Exercice 24.100 ♡

Soient

$$P_1 = 2X^2 - X - 1, \quad P_2 = X^2 + 2X, \quad P_3 = X^2 - 1$$

Montrer que la famille $\mathscr{P} = (P_1, P_2, P_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution : *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$ *alors avec* $X = 1$, *on obtient que* $2\alpha_2 = 0$, *c'est-à-dire* $\alpha_2 = 0$. *On a donc* $\alpha_1 P_1 + \alpha_3 P_3 = 0$. *Mais ces deux polynômes ne sont pas proportionnels donc* $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. *La famille* $\mathscr{P}$ *est donc libre. Comme* $\operatorname{Card}(\mathscr{P}) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, *c'est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 24.101 ♡♡

1. *Pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, *on pose* $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. *Montrer que la famille* $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *En étudiant la preuve de la question précédente, déterminer une condition suffisante pour qu'une famille* $(Q_0, \dots, Q_n)$ *de polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
3. *En utilisant ce critère, montrer que la famille* $\mathscr{R} = (R_0, \dots, R_n)$ *où, pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $R_k = (X-a)^k + (X+a)^k$, $a \in \mathbb{R}$ *forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1. *En utilisant la formule du binôme, on calcule facilement que, pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} X^i$. *On a en particulier* $\deg P_k = k$ *et on reconnaît une famille de* $\mathbb{R}_n[X]$ *étagée en degré. Donc elle est libre et comme son cardinal est égal à la dimension de* $\mathbb{R}_n[X]$, *elle forme une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *L'argument clé dans la démonstration précédente est que :* $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_k = k$. *Une famille de* $n+1$ *polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant cette propriété forme toujours une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
3. *Il est clair que pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg R_k = k$. *La famille* $\mathscr{R}$ *forme donc une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 24.102 ♡♡

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ *et* $a \in \mathbb{C}^*$, *on pose* $P_k = X^k (a - X)^{n-k}$. *Montrer que la famille* $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.

Solution :

1. *Soient* $\alpha, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (a - X)^{n-k} = 0$.
   - *En remplaçant* X *par* 0 *dans cette égalité, on trouve :* $\alpha_0 = 0$ *et celle-ci devient :* $\sum_{i=k}^{n} \alpha_k X^k (a-X)^{n-k} = 0$.
   - *Le terme de gauche de cette dernière égalité est un polynôme divisible par* X.
     On a alors : $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X^{k-1} (a - X)^{n-k} = 0$. *On recommence comme en 1., on montre que* $\alpha_1 = 0$.
   - *On répète* $n-2$ *fois ces opérations et on montre que* $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

   On a ainsi montré que $\mathscr{P}$ *est libre. Comme cette famille est de cardinal égal à la dimension de* $\mathbb{C}_n[X]$, *on en déduit que c'est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.
2. *À partir de* $P_k(X) = X^{k-1} (a - X)^{n-k}$, *on définit* $\tilde{P}_k(X) = X^n P_k(\frac{1}{X}) = (aX - 1)^{n-k}$. *Les* $(\tilde{P}_k(X))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *forment une famille échelonnée en degrés, donc une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.
3. *C'est du cours : Proposition* **??** *p.* **??**.

Exercice 24.103 ♡♡

On pose $P_0 = 1$ *et pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, *on pose*

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

1. *Montrer que* $\mathscr{P} = (P_0, \dots, P_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Montrer que :* $\forall l \in_{Z}, \quad \forall k \in]0, n[, \quad P_k(l) \in \mathbb{Z}$.
3. *Déterminer l'ensemble des polynômes* P *de* $\mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant :* $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad P(i) \in \mathbb{Z}$.

Solution :

1. *Pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$. *On reconnaît une famille étagée en degré, on en déduit que* $\mathscr{P}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

2. *Si* $k=1$*, le résultat est évident. Supposons* $k>1$*. Si* $l \geqslant k$ *alors :* $P_k(l) = \dfrac{l(l-1)\dots(l-k+1)}{k!} = \boxed{\dbinom{l}{k}}$*. Si* $l \in [\![0,k-1]\!]$ *on a* $P_k(l) = \boxed{0}$ *et enfin si* $l<0$*, on a :*

$$\begin{aligned} P_k(l) &= \frac{-|l|(-|l|-1)\dots(-|l|-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{|l|(|l|+1)\dots(|l|+k-1)}{k!} \\ &= \boxed{(-1)^k \dbinom{|l|+k-1}{k}} \end{aligned}$$

Dans chacun des trois cas, $P_k(l) \in \mathbb{Z}$*.*

3. *Soit* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant :* $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad P(i) \in \mathbb{Z}$*. Dans la base* $\mathscr{P}$*,* P *s'écrit :* $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$ *avec* $a_k \in \mathbb{R}$*. Mais,* $P(0) = a_0$ *donc* $a_0 \in \mathbb{Z}$*. De même* $P(1) = a_0 + a_1$ *donc* $a_1 \in \mathbb{Z}$*. Supposons que* $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ *pour* $k \in [\![1, n-1]\!]$ *et montrons qu'il en est de même de* a_{k+1}*. On a :*

$$\begin{aligned} P(k+1) &= P_0(k+1) + a_1 P_1(k+1) + \dots + a_k P_k(k+1) + a_{k+1} P_{k+1}(k+1) \\ &= \underbrace{P_0(k+1) + a_1 P_1(k+1) + \dots + a_k P_k(k+1)}_{\in \mathbb{Z}} + a_{k+1} \end{aligned}$$

et comme $P(k+1) \in \mathbb{Z}$*, il en est de même de* a_{k+1}*. On montre ainsi que tous les coefficients de* P *sont entiers. Réciproquement, un polynôme dont les coordonnées dans la base* $\mathscr{P}$ *sont entières est à valeurs entières sur les entiers. En résumé, l'ensemble recherché est* $\boxed{\mathbb{Z}_n[X]}$*.*

Exercice 24.104 ♡♡

Considérons le $\mathbb{C}-$*espace vectoriel* $E = \mathbb{C}_5[X]$ *et* $A = X^2+1$*.*

1. *Montrer que*
$$F = \{P \in \mathbb{C}_5[X] \mid A \mid P\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_5[X]$
2. *Déterminer une base et la dimension de* F*.*
3. *Déterminer un supplémentaire de* F *dans* E*.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que :* $F = \left\{\left(aX^3+bX^2+cX+d\right)\left(X^2+1\right) \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4\right\} = \mathrm{Vect}(P_1,P_2,P_3,P_4)$ *avec* $P_1 = X^3\left(X^2+1\right)$*,* $P_2 = X^2\left(X^2+1\right)$*,* $P_1 = X\left(X^2+1\right)$ *et* $P_1 = \left(X^2+1\right)$*.* F *est donc un sous-espace vectoriel de* E*.*
2. *La famille* $\mathscr{P} = (P_1,P_2,P_3,P_4)$ *est génératrice de* F*. De plus si* $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ *est tel que* $aP_1+bP_2+cP_3+dP_4 = 0$ *alors* $aX^3+bX^2+cX+d = 0$ *et* $a=b=c=d=0$*. Cette famille est donc libre et elle forme une base de* F*. On en déduit que* $\dim F = 4$*.*
3. *Posons* $G = \mathrm{Vect}(1,X)$*. Il est clair que* $F \cap G = \{0\}$ *et par application de la formule de Grassmann,* $\dim(F+G) = 6 = \dim E$*. On en déduit que* $F+G=E$ *et donc que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E*.*

Exercice 24.105 ♡

Soit P *un polynôme de* $\mathbb{R}[X]$*, de degré inférieur ou égal à* n*.*
Démontrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

Solution : *Il suffit de le vérifier pour une famille génératrice de* $\mathbb{R}_n[X]$ *:* X^m*. En posant* $\delta_{i,j} = 1$ *si* $i=j$ *et* $\delta_{i,j} = 0$ *sinon, le membre de gauche égale*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{\delta_{k,m}}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \\ &= \int_0^x P(t)\,dt \end{aligned}$$

D'autre part le membre de droite égale

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)x^{n-k}}{(k+1)!}x^{k+1}\\
&= x^{m+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{m!}{(m-k)!(k+1)!}\\
&= x^{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{m!}{(m-k)!(k+1)!}\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{(m+1)!}{(m-k)!(k+1)!}\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m+1}{k+1}\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\binom{m+1}{k}\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(1-\underbrace{\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}}_{=0}\right)\\
&= \frac{x^{m+1}}{m+1}
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité demandée. De plus on a

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{R}[X],\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{P^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1}=\int_0^x P(t)\,dt}.$$

Exercice 24.106

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $E=\mathbb{R}_n[X]$, $E_m(X)=\binom{n}{m}X^m(1-X)^{n-m}$.
Exprimer la base $(1,X,\dots,X^n)$ *dans la base* $(E_0,E_1,\dots,E_n)$.

Solution : *On considère* $\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&E\\X^m&\longmapsto&E_m^*\end{array}\right.$ *avec* $E_m^*=X^m(1-X)^{n-m}=(1-X)^n\left(\dfrac{X}{1-X}\right)^m$. *Donc* $\varphi(P)=(1-X)^nP\left(\dfrac{X}{1-X}\right)=Q(X)$.

En posant $Y=\dfrac{X}{1-X}$, *on a* $X=\dfrac{Y}{1+Y}$ *et donc* $1-X=\dfrac{1}{1+Y}$.

Comme $P\left(\dfrac{X}{1-X}\right)=\dfrac{1}{(1-X)^n}Q(X)$ *on a* $P(Y)=(1+Y)^nQ\left(\dfrac{Y}{1+Y}\right)$.

Les $\left(E_m^*\right)_{0\leqslant m\leqslant n}$ *forment une famille de* E *échelonnée en valuations. C'est donc une base de* E. φ *est une bijection, de bijection réciproque* $\psi\, Q\longmapsto(1+X)^nQ\left(\dfrac{X}{1+X}\right)$.

On peut le vérifier directement : $\psi\left(E_m^*\right)=(1+X)^n\left(\dfrac{X}{1+X}\right)^m\left(1-\dfrac{X}{1+X}\right)^{n-m}=X^m(1+X)^{n-m}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)^{n-m}=X^m$.

Maintenant $\psi(X^k)=(1+X)^n\dfrac{X^k}{(1+X)^k}=X^k(1+X)^{n-k}=X^k\displaystyle\sum_{m=0}^{n-k}\binom{n-k}{m}X^m=\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}X^p=\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}\psi\left(E_p^*\right)$.

Donc puisque ψ *est bijective,* $X^k=\displaystyle\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}E_p^*=\sum_{p=k}^{n}\frac{\binom{n-k}{p-k}}{\binom{n}{p}}E_p=\sum_{p=k}^{n}\frac{\binom{p}{k}}{\binom{n}{k}}E_p$.

On peut le vérifier directement :

$$\sum_{p=k}^{n}\frac{\binom{n-k}{p-k}}{\binom{n}{p}}E_p=\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}X^p(1-X)^{n-p}=\sum_{m=0}^{n-k}\binom{n-k}{m}X^{m+k}(1-X)^{n-m-k}=X^k\sum_{m=0}^{n-k}\binom{n-k}{m}X^m(1-X)^{n-k-m}=X^k.$$

24.7.13 Endomorphismes opérant sur les polynômes

Exercice 24.107 ♡♡

Soit l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array} \right.$$

Montrer que φ *est un endomorphisme. Déterminer son noyau et son image.*

Solution : *On montre facilement que* φ *est linéaire. Soit un polynôme* $P \in \operatorname{Ker}\varphi$*. Si* $P \neq 0$*, on peut écrire* $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ *avec* $a_n \neq 0$*. Alors* $P = XP'$ *d'où* $a_n X^n + \cdots = n a_n X^n + \ldots$*. En identifiant les termes de plus haut degré, on trouve que* $a_n(1-n) = 0$*. Donc, puisque* $a_n \neq 0$*,* $n = 1$*. Mais si* $n = 1$*,* $P = aX + b$ *et alors* $P = XP' \implies b = 0$*. Donc* $P = aX$*. Réciproquement, si* $P = aX$*, (*$a \in \mathbb{R}$*), on a bien* $P = XP'$*. En conclusion,* $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(X)}$*.*
Déterminons $\operatorname{Im}\varphi$*. Soit* $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \operatorname{Im}\varphi$*. Alors il existe* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P - XP' = Q$*. En examinant les degrés, il faut que* $\deg P = n$*. Posons* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$*. On doit donc avoir* $\forall k \in [0,n]$*,* $(1-k)a_k = b_k$*. Une condition nécessaire pour que* $Q \in \operatorname{Im}\varphi$ *est donc que* $b_1 = 0$*. Réciproquement, si* $b_1 = 0$*, en posant* $a_k = \dfrac{b_k}{1-k}$ *pour* $k \neq 1$ *et* $a_1 = 0$*, on a bien* $\varphi(P) = Q$*. En conclusion,* $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \{b_n X^n + \cdots + b_0 ; b_1 = 0\}}$*.*

Exercice 24.108 ♡♡

Soit $A = X^3 + X^2 + X + 1$ *et* $E = \mathbb{R}_n[X]$*. Considérons l'application*

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & r(P) \end{array} \right.$$

où $r(P)$ *désigne le reste de la division euclidienne de* P *par* A*.*

1. *Montrer que* r *est bien définie et que* $r \in \mathscr{L}(E)$*..*
2. *Prouver que* $r^2 = r$*. Qu'en déduisez vous ?*
3. *Déterminer l'image et le noyau de* r*.*

Solution :

1. *Soit* $P \in E$*. Par application du théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple* $(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ *tel que* $P = AQ + R$ *et* $\deg R < 3$*. On a donc* $r(P) = R$ *et* r *est bien définie. Si on considère un autre polynôme* $\tilde{P} \in E$*, il existe un couple* $(\tilde{Q}, \tilde{R}) \in (\mathbb{R}[X])^2$ *tel que* $\tilde{P} = A\tilde{Q} + \tilde{R}$ *et* $\deg \tilde{R} < 3$*. De plus, pour tout* $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ *:*
$$\alpha P + \tilde{\alpha}\tilde{P} = A\left(\alpha Q + \tilde{\alpha}\tilde{Q}\right) + \left(\alpha R + \tilde{\alpha}\tilde{R}\right)$$
et $\deg\left(\alpha R + \tilde{\alpha}\tilde{R}\right) < 3$*. Par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne de deux polynômes, on peut affirmer que le reste de la division euclidienne de* $\alpha P + \tilde{\alpha}\tilde{P}$ *par* A *est* $\alpha R + \tilde{\alpha}\tilde{R}$*. On prouve ainsi que* $r\left(\alpha P + \tilde{\alpha}\tilde{P}\right) = \alpha r(P) + \tilde{\alpha} r\left(\tilde{P}\right)$ *et donc* $r \in \mathscr{L}(E)$*.*
2. *Avec les notations de la question précédente,* $r(P) = R$ *avec* $\deg R < 3$*. Donc* $R = 0A + R$ *et par unicité du couple quotient-reste dans la division euclidienne,* $r(R) = R$*. On prouve ainsi que* $r^2 = r$*.* r *est donc un projecteur.*
3. *Il est clair que le noyau de* r *est l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$ *qui sont divisibles par* A*. Il est aussi clair que* $\operatorname{Im} r \subset \mathbb{R}_2[X]$*. Mais si* $P \in \mathbb{R}_2[X]$ *alors* $r(P) = P$ *donc on a aussi :* $\mathbb{R}_2[X] \subset \operatorname{Im} r$ *et donc* $\operatorname{Im} r = \mathbb{R}_2[X]$*.*

Exercice 24.109 ♡♡♡

1. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et*
$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$
   (a) *Montrer que* Δ *est bien définie puis que c'est une application linéaire.*
   (b) *Déterminer le noyau de* Δ*.*
   (c) *En déduire que* Δ *est surjective.*
2. *On considère maintenant* $E = \mathbb{C}[X]$ *et*
$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$
   (a) *Montrer que* Δ *est un endomorphisme de* E*.*
   (b) *Déterminer* $\operatorname{Im}\Delta$*.*

(c) *Soient* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que :*

$$\Delta^n(\mathrm{P}) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{P}(\mathrm{X}+k)$$

(d) *En déduire que si* $\deg \mathrm{P} < n$ *alors on a :* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{P}(k) = 0$.

Solution :

1. (a) *Soit* $\mathrm{P} = a_{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}]$. *Montrons que* $\Delta(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. *On a :*

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{P}) &= \left(a_{n+1}(\mathrm{X}+1)^{n+1} + a_n(\mathrm{X}+1)^n + \ldots + a_1(\mathrm{X}+1) + a_0\right) - \left(a_{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + a_n\mathrm{X}^n + \ldots + a_1\mathrm{X} + a_0\right) \\ &= \left(a_{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + \underbrace{\ldots}_{\text{termes de degré} \leqslant n}\right) - \left(a_{n+1}\mathrm{X}^{n+1} + \underbrace{\ldots}_{\text{termes de degré} \leqslant n}\right)\end{aligned}$$

donc $\deg \Delta(\mathrm{P}) \leqslant n$ *et* $\Delta(\mathrm{P}) \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. *Par ailleurs, si* $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}]$ *et si* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *alors :*

$$\begin{aligned}\Delta\left(\alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q}\right) &= \left(\alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q}\right)(\mathrm{X}+1) - \left(\alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q}\right)(\mathrm{X}) \\ &= \alpha\left(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})\right) + \beta\left(\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X})\right) \\ &= \alpha\Delta(\mathrm{P}) + \beta\Delta(\mathrm{Q})\end{aligned}$$

donc Δ *est linéaire.*

(b) *Soit* $m \geqslant 1$ *et soit* $\mathrm{P} = a_m\mathrm{X}^m + \ldots + a_0$ *un polynôme de degré* $m \in \mathrm{C}_{n+1}[\mathrm{X}]$ *avec* $m \leqslant n+1$. *On a donc :* $a_m \neq 0$. *Supposons que* $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker}\Delta$. *Alors* P *vérifie* $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$ *ce qui amène :*

$$a_m(\mathrm{X}+1)^m + \ldots + a_0 = a_m\mathrm{X}^m + \ldots + a_0.$$

Le coefficient du terme de degré $m-1$ *de* $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ *est* $ma_m + a_{m-1}$ *et celui de* P *est* a_{m-1}. *Les deux polynômes étant égaux, il en est de même de leurs coefficients, ce qui amène* $m = 0$ *car* $a_m \neq 0$. *On en déduit que* P *est un polynôme constant. Réciproquement, on vérifie que tout polynôme constant est élément du noyau de* Δ *et donc* $\boxed{\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]}$.

(c) *D'après la formule du rang,* $\dim \operatorname{Im}\Delta = n+1$ *et comme* $\dim \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] = n+1$, *il vient* $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Δ *est donc surjective.*

2. (a) *On montre de la même façon que précédemment que* Δ *est un endomorphisme.*

(b) *Montrons que* Δ *est surjective. Soit* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *et* $n = \deg \mathrm{P}$. *Par application de la partie précédente,* $\Delta_{|\mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}]} : \mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ *est surjective. Comme* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ *il existe* $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}_{n+1}[\mathrm{X}]$ *tel que* $\Delta(\mathrm{Q}) = \mathrm{P}$. *On en déduit que* Δ *est surjective et que* $\boxed{\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{C}[\mathrm{X}]}$.

(c) *Introduisons l'application* $\delta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \end{array}\right.$. *On vérifie facilement que* δ *est un endomorphisme de* E *et que* $\Delta = \delta - \mathrm{id}$. *De plus, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta^k(\mathrm{P}(\mathrm{X})) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k)$. *Comme les endomorphismes* δ *et* id *commutent, la formule du binôme donne, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\Delta^n = (\delta - \mathrm{id})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \delta^k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \delta^k$$

donc pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ *:*

$$\Delta^n(\mathrm{P}) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{P}(\mathrm{X}+k).$$

3. *Remarquons que pour tout polynôme non constant de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\deg \Delta(\mathrm{P}) = \deg \Delta(\mathrm{P}) - 1$. *On en déduit que si* $\deg \mathrm{P} < n$ *alors* $\Delta^n(\mathrm{P}) = 0$ *et en utilisant la relation établie dans la question précédente, on obtient :* $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{P}(k) = 0}$

Exercice 24.110 ♡

Déterminer dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *les polynômes* P *satisfaisant à* $\quad n(n-1)\mathrm{P} - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'' = 0. \quad (n \geqslant 2)$.

1. *Montrer que* P *est nécessairement nul ou de degré* n.
2. *Démontrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension* 1.

3. *Démontrer que* P *est un polynôme de même parité que* n*. En déduire la nullité de certains coefficients de* P.
4. *Établir une relation de récurrence entre les coefficients de* P*, déterminer* P *et montrer que :*

$$1+\sum_{2\leqslant 2q\leqslant n}(-1)^q\frac{\binom{n}{2q}\binom{n-1}{q}}{\binom{2n-2}{2q}}=0.$$

Solution :

1. *Supposons que* P *est une solution non nulle et soit* $\lambda \mathrm{X}^k$ *son terme dominant. Comme les termes dominants de* $n(n-1)\mathrm{P}$ *et de* $(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}''$ *sont égaux, on en déduit que* $\lambda n(n-1)=\lambda k(k-1)$ *d'où* $n^2-n=k^2-k$ *soit* $(n-k)(n+k-1)=0$ *d'où* $n=k$ *ce qu'il fallait vérifier.*
2. *L'ensemble des solutions est le noyau de l'endomorphisme* φ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *défini par :* $\varphi(\mathrm{P})=n(n-1)\mathrm{P}-(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}''$*. D'après la question précédente, pour* $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\deg(\varphi(\mathrm{X}^k))=k$*. Donc la famille* $(\varphi(\mathrm{X}^k))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ *est une famille échelonnée en degrés. Elle engendre donc un un espace vectoriel de dimension* $n-1$*. Donc la dimension de l'image de* φ *est supérieure ou égale à* $n-1$*. De plus si* $\deg \mathrm{P}=n$*, alors* $\deg(\varphi(\mathrm{P}))\leqslant n-1$*. Donc* $\mathrm{I}m(\varphi)=\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ *et la dimension du noyau de* φ *est donc égale à* 1.
3. *Il est clair que si* P *est solution non nulle, alors* $\mathrm{Q}=\mathrm{P}(-\mathrm{X})$ *est aussi solution, de même degré* n*.* $\mathrm{Q}-(-1)^n\mathrm{P}$ *appartient donc aussi à* $\operatorname{Ker}\varphi$*. Comme son degré est* $<n$*, c'est le polynôme nul. Ce qu'il fallait vérifier.*
   On en déduit qu'en posant $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{X}^k$ *on a* $a_{n-(2q+1)}=0$.
4. *En posant* $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{X}^k$ *on a* $\mathrm{P}''=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)a_k\mathrm{X}^{k-2}=\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}\mathrm{X}^k$ *et* $\mathrm{XP}''=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)a_k\mathrm{X}^k$*. Pour* $k=0,\dots,n-2$*, le coefficient de degré* k *du polynôme* $n(n-1)\mathrm{P}-(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}''$ *est nul,*
   donc $n(n-1)a_k-k(k-1)a_k+(k+2)(k+1)a_{k+2}=0$*, donc* $a_k=\dfrac{(k+2)(k+1)}{k(k-1)-n(n-1)}a_{k+2}=-\dfrac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(n-k+1)}a_{k+2}$.
   En posant $k=n-2q$*,* $a_{n-2q}=-\dfrac{(n-2q+2)(n-2q+1)}{(2q)(2n-2q-1)}a_{n-2(q-1)}$*,*
   d'où
   $$a_{n-2q}=(-1)^q\underbrace{\frac{(n-2q+2)(n-2q+1)}{(2q)(2n-2q-1)}}_{q}\times\underbrace{\frac{(n-2q+4)(n-2q+3)}{(2q-2)(2n-2q+1)}}_{q-1}\times\dots\times\underbrace{\frac{n(n-1)}{2(2n-3)}}_{q=1}a_n.$$
   Et donc
   $$a_{n-2q}=(-1)^q a_n\frac{n!}{(n-2q)!\times 2\times\dots\times 2q\times(2n-2q-1)\times\dots\times(2n-3)}.$$
   Soit $a_{n-2q}=(-1)^q a_n\dfrac{n!}{(n-2q)!2^q q!\times(2n-2q-1)\times\dots\times(2n-3)}$*. On écrit au numérateur les* q *facteurs pairs qui manquent pour avoir le produit de* $2n-2q-1$ *à* $2n-2$ *au dénominateur :*
   $$a_{n-2q}=(-1)^q a_n\binom{n}{2q}\frac{(2q)!\times(2n-2q)\times(2n-2q+2)\dots\times(2n-4)\times(2n-2)}{2^q q!\times(2n-2q-1)\times(2n-2q)\times\dots\times(2n-3)\times(2n-2)}.$$
   Comme $(2n-2q-1)\times(2n-2q)\times\dots\times(2n-3)\times(2n-2)=\dfrac{(2n-2)!}{(2n-2q-2)!}$*,*
   $$a_{n-2q}=(-1)^q a_n\binom{n}{2q}\frac{(2q)!2^q(n-q)(n-q+1)\times\dots\times(n-1)(2n-2q-2)!}{2^q q!(2n-2)!}$$
   $$=(-1)^q a_n\binom{n}{2q}\frac{(n-1)!}{q!(n-q-1)!}\frac{(2q)!(2n-2q-2)!}{(2n-2)!}=(-1)^q a_n\frac{\binom{n}{2q}\binom{n-1}{q}}{\binom{2n-2}{2q}}.$$
   La dernière égalité traduit le fait que $\mathrm{P}(1)=0$ *pour une solution* P *non nulle.*

Chapitre 25

Calcul matriciel

Pour bien aborder ce chapitre

Tout est dit dans le théorème 24.21 page 908 du chapitre 24...si on se fixe une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $f = (f_1, \dots, f_q)$ de F alors une application linéaire $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est entièrement déterminée par les composantes des vecteurs $u(e_i)$ dans la base f. Ces pq scalaires définissent complètement u. Il est tentant de les représenter dans un tableau. Si on note, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} f_j$ alors on peut écrire :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow f_i \\ \vdots \\ \leftarrow f_q \end{matrix} \end{array}$$

Ce tableau est la matrice de u dans les bases e de E et f de G. Se posent alors des questions naturelles :

1. Si on effectue cette manipulation pour deux applications linéaires u et v, comment se calcule la matrice correspondante à $\alpha u + \beta v$? On verra qu'on peut définir une addition entre les matrices et une multiplication par un scalaire. Avec ces deux lois, l'ensemble des matrices (de même taille) possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Si u et v sont deux endomorphismes de E, quel est le lien entre la matrice de $u \circ v$ et celles de u et v ? Pour l'expliciter, on définira le produit entre les matrices.
3. Peut-on calculer le rang d'une application linéaire facilement à partir de sa matrice dans des bases données ? La réponse est oui et l'outil est le pivot de Gauss.
4. Peut-on par un procédé calculatoire déterminer si un endomorphisme est inversible à partir de sa matrice dans des bases données ? La réponse est là aussi oui et l'outil consistera en le déterminant.
5. Pour un endomorphisme inversible, existe-t'il un procédé permettant de calculer la matrice de son inverse ? Cet outil existe et il est donné par la comatrice.
6. Si on prend d'autres bases e' et f' de E et F, peut-on calculer la matrice de u dans ces nouvelles bases en fonction de sa matrice dans les bases initiales ? La réponse est encore positive et on mettra en place des formules de changement de bases.
7. Enfin, pour un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$, existe-il une base de E dans laquelle la matrice de u prend une forme simple et facile à manipuler ? La réponse sera donnée en spé dans le chapitre sur la réduction des endomorphismes.

Au niveau historique, on peut indiquer qu'au 3e siècle, le mathématicien chinois Liu Hui résolvait les systèmes linéaires ayant jusqu'à 6 inconnues. Il représentait ces systèmes grâce à des tableaux et avait découvert la méthode qu'on appelle maintenant pivot de Gauss pour les résoudre. Au 17e siècle, toujours pour résoudre des systèmes linéaires, Leibniz invente le déterminant. Cette notion est approfondie par Cramer qui découvre soixante ans plus tard la méthode qui porte maintenant son nom. Il faut attendre le 19e siècle, pour que la notation matricielle sous forme de « rectangle (ou carré) de nombres » apparaisse. Gauss découvre le produit matriciel en dimension 3 et indique que la formule se généralise dans les autres dimensions mais sans détailler. Sylvester, le premier, dénomme ces rectangles de nombres du mot « matrix ».

Dans tout ce chapitre, m, n, p, q, r sont des entiers positifs, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

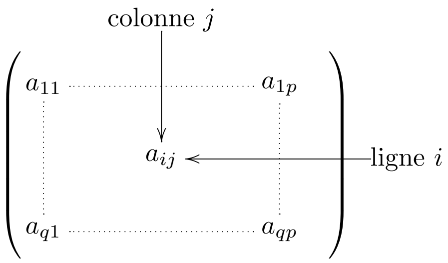
25.1 Matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$

25.1.1 Définitions

DÉFINITION 25.1 ♡ **Matrice**
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $q, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice à q lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute application :

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i, j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$$

que l'on note :



– Le coefficient de A qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$:
  1. i représente l'indice de ligne.
  2. j représente l'indice de colonne.
– On dit aussi que A est une matrice $q \times p$ ou une matrice (q, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
– On note $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notation 25.1 On notera aussi $[A]_{ij}$ le coefficient a_{ij} de A.

DÉFINITION 25.2 **Vecteur ligne, vecteur colonne d'une matrice**
Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{q,1} & \dots & a_{q,p} \end{pmatrix}$$

on appelle, pour $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!]$:
– i-ème *vecteur ligne* de A le p−uplet $L_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,p}) \in \mathbb{K}^p$.
– j-ème *vecteur colonne* de A le q−uplet $C_j\ (a_{1,j}, \dots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q$.

DÉFINITION 25.3 **Matrice ligne, matrice colonne**
– Une *matrice colonne* est une matrice qui ne possède qu'une seule colonne.
– Une *matrice ligne* est une matrice qui ne possède qu'une seule ligne.

DÉFINITION 25.4 ♡ **Matrice nulle**
On dit que $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On la note : $0_{\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})}$ ou 0 lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

DÉFINITION 25.5 ♡ **Matrice carrée**
Une matrice possédant autant de lignes que de colonnes est dite *carrée*. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

DÉFINITION 25.6 ♡ **Matrice identité**
On appelle *matrice identité* et on note I_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

Tous ses coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale et qui valent 1.

Exemple 25.2 $I_1 = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

25.1.2 L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

On munit $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ d'une addition et d'une multiplication par un scalaire. Le triplet $\left(\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, .\right)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension pq.

PROPOSITION 25.1 ♡ **Somme de matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire**

– Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

– Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda \cdot A$ comme étant la matrice $D = (d_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Muni de ces deux lois $\left(\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

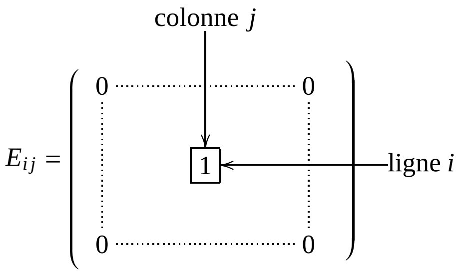
Démonstration : Laissée au lecteur. On vérifie aisément les différents axiomes définissant un espace vectoriel.

Exemple 25.3

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -5 & -2\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

DÉFINITION 25.7 ♡ **Matrices élémentaires**

Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on définit la *matrice élémentaire* $E_{i,j} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ par :



Tous les coefficients de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Exemple 25.4 Les matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ sont

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_{1,3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, E_{2,3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

À titre d'exercice, et pour préparer le théorème suivant, montrer que cette famille de 6 matrices constitue une base de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

THÉORÈME 25.2 ♡ **Base canonique de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$**

La famille formée par les matrices élémentaires $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ appelée *base canonique de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On en déduit que :

$$\boxed{\dim \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) = qp}$$

Démonstration

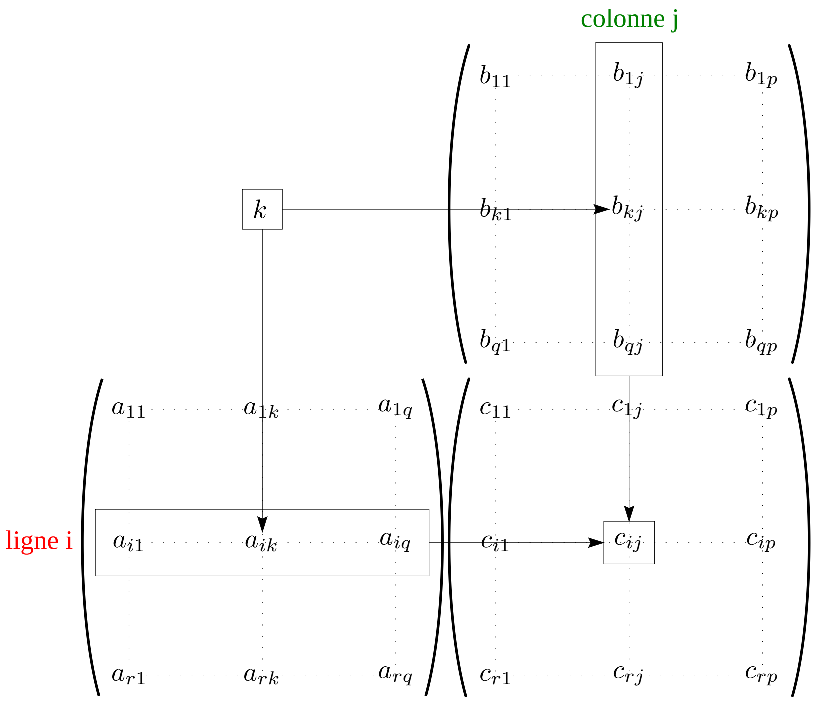
- *Prouvons que cette famille est libre. Soient* $\left(\alpha_{i,j}\right)_{i\in[\![1,q]\!],j\in[\![1,p]\!]}$ *une famille de scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que :* $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}E_{i,j}=0$. *Alors on a l'égalité :*
$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,p}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{q,1} & \dots & \alpha_{q,p}\end{pmatrix}=0.$$
Par identification des coefficients de ces deux matrices, on a : $\forall i\in[\![1,q]\!],\quad \forall j\in[\![1,p]\!],\quad \alpha_{i,j}=0$ *ce qui prouve la liberté de la famille* $\left(E_{i,j}\right)$.
- *Montrons que cette famille est génératrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Soit* $A=\left(a_{i,j}\right)_{i\in[\![1,q]\!],j\in[\![1,p]\!]}\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *On a clairement :* $A=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}E_{i,j}$. *Ce qui prouve que la famille* $\left(E_{i,j}\right)$ *est génératrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

25.1.3 Produit matriciel

On définit maintenant, quand c'est possible, le produit de deux matrices. Le théorème 25.10 page 957 explicite le sens de ce produit, il correspond en fait à la composition des applications linéaires.

DÉFINITION 25.8 ♡ **Produit matriciel**
Soit $A\in\mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit AB comme la matrice C de $\mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i\in[\![1,r]\!]\quad \forall j\in[\![1,p]\!]\quad c_{i,j}=[AB]_{i,j}=\sum_{k=1}^{q}a_{i,k}b_{k,j}$$



⚠ *Attention 25.5* On ne peut effectuer le produit de $A\in\mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathfrak{M}_{q',p}(\mathbb{K})$ que si $q=q'$!

Exemple 25.6 Si $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\1&-3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$ alors $AB=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&4&2\\-1&-5&-3\end{pmatrix}$ et $BA=\begin{pmatrix}-1&3\\1&1\end{pmatrix}$. Remarquons qu'en général, le produit AB peut exister sans que ce ne soit forcément le cas pour le produit BA.

Il est souvent utile dans les exercices de savoir multiplier les matrices élémentaires. Pour ce faire introduisons le symbole de Kronecker.

DÉFINITION 25.9 ♡ **Symbole de Kronecker**
Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le *symbole de Kronecker* $\delta_{i,j}$ par :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

THÉORÈME 25.3 ♡♡♡ **Produit de matrices élémentaires**
Pour deux matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a la formule importante suivante qui donne leur produit :

$$\boxed{E_{kl}E_{pq} = \delta_{lp}E_{kq}}$$

Démonstration *Par un calcul direct.*

PROPOSITION 25.4 **Règles de calculs avec les matrices**
Quant les produit suivants sont possibles, pour des matrices A, B, C et des scalaires α, β :

1. Le produit matriciel est distributif à gauche par rapport à l'addition : $C(\alpha A + \beta B) = \alpha CA + \beta CB$.
2. Le produit matriciel est distributif à droite par rapport à l'addition :$(\alpha A + \beta B)C = \alpha AC + \beta BC$.
3. Le produit matriciel est associatif : $(AB)C = A(BC)$.
4. Le produit matriciel admet la matrice I_n comme élément neutre :$AI_n = I_nA = A$.

Démonstration *Laissée au lecteur.*

25.1.4 Transposition

DÉFINITION 25.10 ♡ **Transposée d'une matrice**
On appelle transposée de $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice noté ${}^tA \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées par les lignes de A. Autrement dit :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \forall j \in [\![1,q]\!], \quad [{}^tA]_{i,j} = a_{j,i}$$

Remarque 25.1 Transposer revient à échanger les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple 25.7 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 25.5 ♡ **La transposition est une symétrie de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$**
L'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, si $A, B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\boxed{{}^t({}^tA) = A} \quad \text{et} \quad \boxed{{}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\,{}^tA + \beta\,{}^tB}.$$

Démonstration : La linéarité ainsi que la relation ${}^t({}^tA) = A$ sont faciles à prouver. Pour la bijectivité, on propose deux méthodes :
- On montre facilement que, si $A \in \operatorname{Ker}\Phi$, on a $({}^tA) = 0$ et donc $A = {}^t({}^tA) = 0$ et $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$, θ est injective. Grâce à la formule du rang, on en déduit qu'elle est aussi surjective et donc bijective.
- On peut aussi remarquer que $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}$ ce qui prouve que Φ est bijective et égale à sa fonction réciproque.

Remarque 25.2 En prenant un peu d'avance sur le paragraphe 25.3.4, L'opération de transposition est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}\Phi - \mathrm{id} = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}\Phi + \mathrm{id} = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.6 ♡ **Transposée d'un produit**
Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$:

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Démonstration *On suppose que* $A = (a_{i,k}) \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, *que* $B = (b_{k,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $C = AB = (c_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ *où* $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$. *On note aussi :*

- $A' = {}^tA = (a'_{i,k}) \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ *avec pour tout* $i \in [\![1,q]\!]$ *et tout* $k \in [\![1,r]\!]$, $a'_{i,k} = a_{k,i}$.
- $B' = {}^tB = (b'_{k,j}) \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *avec pour tout* $k \in [\![1,p]\!]$ *et tout* $j \in [\![1,q]\!]$, $b'_{k,j} = b_{j,k}$.
- $C' = {}^tB\,{}^tA = (c'_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ *et* $j \in [\![1,r]\!]$ *:*

$$c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b'_{i,k} a'_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{j,k} b_{k,i} = c_{j,i}$$

et par conséquent, $C' = {}^tB\,{}^tA = C = {}^tAB$.

⚠ *Attention 25.8* Attention au retournement dans le produit.

25.1.5 Avec Maple

Voici une feuille de calcul Maple sur les matrices. On notera :

– la première ligne qui sert à charger en mémoire les instructions maple pour faire du calcul matriciel.
– la commande pour le produit de deux matrices : &*. Pour l'addition de deux matrices, on utilisera + et pour la multiplication par un scalaire *.
– la commande pour évaluer les matrices : evalm.

MAPLE

```
> with(linalg): #On charge la librairie de calcul matriciel
> A:=matrix([[1,-1],[0,2],[1,-3]]);
                              [1  -1]
                              [     ]
                         A := [0   2]
                              [     ]
                              [1  -3]
> B:=matrix([[2,0],[1,-3],[-1,1]]);
                             [ 2   0]
                             [      ]
                        B := [ 1  -3]
                             [      ]
                             [-1   1]

> C:=matrix([[-1,1,0],[0,2,1]]);
                            [-1  1  0]
                       C := [        ]
                            [ 0  2  1]

> evalm(2*A-B); #on calcule 2A-B
                           [ 0  -2]
                           [      ]
                           [-1   7]
                           [      ]
                           [ 3  -7]

> evalm(A&*C); #on calcule AC
                         [-1  -1  -1]
                         [          ]
                         [ 0   4   2]
                         [          ]
                         [-1  -5  -3]
> transpose(A); #on transpose A
                         [ 1  0   1]
                         [         ]
                         [-1  2  -3]
```

25.2 Matrices d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

25.2.1 Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base

DÉFINITION 25.11 ♡ **Matrice d'un vecteur relativement à une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$ un vecteur qui se décompose sur la base e en :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

On appelle *matrice de x relativement à la base e* et on note $\mathrm{Mat}_e(x)$ la matrice colonne donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Exemple 25.9 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $v = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Alors $\mathrm{Mat}_e(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Remarque 25.3 $\mathrm{Mat}_e(x)$ représente les coordonnées du vecteur x dans la base e. Il y a bien sûr une correspondance biunivoque entre les vecteurs de E et les matrices colonnes de taille n (qui contiennent les composantes de ces vecteurs dans une base fixée). De plus, « effectuer des calculs avec ces vecteurs » correspond à « effectuer des calculs avec ces matrices ». C'est le sens de la proposition suivante.

PROPOSITION 25.7 **Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit e une base de E. L'application $\theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_e(x) \end{cases}$ qui à un vecteur associe la matrice colonne de ses coordonnées dans la base E est un isomorphisme de $\mathbb{K}$−espaces vectoriels.

Démonstration *Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et si $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) e_i$ donc il est clair que $\mathrm{Mat}_e(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathrm{Mat}_e(x) + \beta \mathrm{Mat}_e(y)$ et θ est linéaire. Si $x \in \mathrm{Ker}\,\theta$ alors $\theta(x) = 0$ et les composantes de x dans la base e valent toutes 0. Donc $x = 0$ et θ est injective. De plus, $\dim E = \dim \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc θ est bijective.*

DÉFINITION 25.12 ♡ **Matrice d'une famille de vecteurs relativement à une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $e = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E. On considère $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E qui se décomposent dans la base e sous la forme :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad v_j = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} e_i.$$

On appelle *matrice de la famille $(v_1, \dots, v_p)$ relativement à la base e* et on note $\mathrm{Mat}_e(v_1, \dots, v_p)$ la matrice :

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & \cdots & v_j & \cdots & v_p \end{matrix} \\ \mathrm{Mat}_e(v_1, \dots, v_p) = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_i \\ \vdots \\ \leftarrow e_q \end{matrix} \end{array}$$

La j-ème colonne de cette matrice est constituée des coordonnées du vecteur v_j dans la base e.

Exemple 25.10 On se place à nouveau dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $v_1 = (-1, 3, 0)$, $v_2 = (0, -1, 5)$, $v_3 = (-3, 2, 1)$, $v_4 = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ et soit $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ alors $\mathrm{Mat}_e(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

25.2.2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

DÉFINITION 25.13 ♡ **Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F.
3. $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle *matrice de u relativement aux bases f et e* et on note $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ (ou $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$) la matrice $q \times p$ donnée par :

$$\begin{array}{c} \quad u(e_1) \cdots\cdots u(e_j) \cdots\cdots u(e_p) \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \end{array}$$

$$\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \prec f_1 \\ \vdots \\ \prec f_i \\ \vdots \\ \prec f_q \end{array}$$

où $(a_{1j}, \dots, a_{qj})$ sont les composantes du vecteur $u(e_j)$ dans la base f.
Autrement dit : $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ est la matrice de la famille de vecteurs $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ relativement à la base f :

$$\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{Mat}_f\left(u(e_1), \dots, u(e_p)\right).$$

Remarque 25.4 Les notations utilisées sont un peu lourdes mais elles rendront très simples à retenir les formules de changement de base.

Exemple 25.11 Donnons deux exemples :

– Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e et $F = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique f. Soit $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y - z, 2x - y + 3z) \end{cases}$ alors comme $u(e_1) = (1, 2)$, $u(e_2) = (1, -1)$ et $u(e_3) = (-1, 3)$, $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
– Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique e et $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & 2P - P' \end{cases}$ alors $u(1) = 2$, $u(X) = 2X - 1$, $u(X^2) = 2X^2 - 2X$ et $u(X^3) = 2X^3 - 3X^2$. Il vient alors $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION 25.14 ♡ **Matrice d'une forme linéaire relativement à une base**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si φ est une forme linéaire sur E, on appelle *matrice de φ relativement à la base e* la matrice ligne $1 \times n$ donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(\varphi) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

PROPOSITION 25.8 ♡ **Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F.

l'application :

$$\theta : \begin{cases} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, si $M \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\theta^{-1}(M) = u$. On dit que *u est l'application linéaire de* E *dans* F *représentée par* M *dans les bases e de* E *et f de* F.

Démonstration

- *On vérifie tout d'abord que* θ *est linéaire. Soient* $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ *et soient* $u,v \in \mathscr{L}(E,F)$. *On suppose que* $\theta(u) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$*, que* $\theta(v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(v) = B = \left(b_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *et que* $\theta(\alpha u+\beta v) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(\alpha u+\beta v) = C = \left(c_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Par conséquent :*

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad u\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} f_k \quad \text{et} \quad v\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} b_{k,j} f_k.$$

  Par suite, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ *:*

$$(\alpha u+\beta v)\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} c_{k,j} f_k = \alpha u\left(e_j\right) + \beta v\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} \left(\alpha a_{kj} + \beta b_{kj}\right) f_k.$$

  Par identification, la famille f *formant une base de* F*, on a :*

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad c_{k,j} = \alpha a_{kj} + \beta b_{kj}$$

  ce qui prouve que : $C = \alpha A + \beta B$ *et que* θ *est linéaire.*
- θ *est injective. En effet, si* $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *est telle que* $\theta(u) = 0$ *alors* $\forall j \in [\![1,p]\!], \quad u\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} 0.f_k = 0$. u *s'annulant sur une base de* E *ne peut que s'annuler sur* E *tout entier et donc* $u = 0$. *On en déduit que* $\operatorname{Ker}\theta = \{0\}$ *et que* θ *est injective.*
- θ *est surjective. Soit* $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Considérons l'application linéaire* $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *donnée par :* $\forall j \in [\![1,p]\!], \quad u\left(e_j\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} f_k$ *(Rappelons qu'une application linéaire est complètement déterminées par les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace vectoriel sur lequel elle est définie). On a clairement* $\theta(u) = A$ *ce qui prouve que* θ *est surjective.*

PLAN 25.1 : Autrement dit :

Avec les notations précédentes, se fixant une base e *dans* E *et une base* f *dans* F.
- *Toute matrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *est celle d'une application linéaire* $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *dans les bases* e *et* f.
- *Réciproquement, à toute application linéaire de* $\mathscr{L}(E,F)$ *correspond une et une seule matrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *qui la représente dans les bases* e *et* f.

En utilisant ces deux dernières propositions, on obtient :

COROLLAIRE 25.9 ♡
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soient e et f des bases respectives de E et F. Si on note $p = \dim E$ et $q = \dim F$, on a :

$$\boxed{\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) = qp}$$

Démonstration : En effet, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels isomorphes ont la même dimension.

Le théorème suivant justifie la définition du produit matriciel. Composer des applications linéaires revient à multiplier les matrices correspondantes.

THÉORÈME 25.10 ♡ **Fondamental ! Matrice de la composée de deux applications linéaires**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = \left(e_1,\dots,e_p\right)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = \left(f_1,\dots,f_q\right)$ une base de F.
3. G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r et $g = \left(g_1,\dots,g_r\right)$ une base de G.
4. $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.

alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{g\leftarrow e}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow f}(v) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)}$$

Démonstration *Notons :* $A = \left(a_{i',j'}\right) = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ $\quad B = \left(b_{i'',j''}\right) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow f}(v)$ $\quad$ et $\quad C = \left(c_{i,j}\right) = \mathrm{Mat}_{g\leftarrow e}(v\circ u)$. *Soient* $j \in [\![1,p]\!]$ *et* $i \in [\![1,r]\!]$. *On a :* $(v\circ u)\left(e_j\right) = v\left(u\left(e_j\right)\right) = v\left(\sum_{k=1}^{q} a_{k,j} f_k\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} v\left(f_k\right) = \sum_{k=1}^{q} a_{k,j} \sum_{i=1}^{r} b_{i,k} g_i = \sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{r} b_{i,k} a_{k,j} g_i = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{q} b_{i,k} a_{k,j}\right) g_i$

Et par identification : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b_{j,k} a_{k,i}$ *ce qui prouve le résultat.*

Enfin, on écrit le calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire peut s'effectuer, en dimension finie, au moyen des matrices.

PROPOSITION 25.11 ♡ **Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F.
3. $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_f(u(x)) = \mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u) \times \mathrm{Mat}_e(x)}$$

Autrement dit, si $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_f(u(x))$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u)$ et $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_e(x)$, on a : $\boxed{\mathrm{Y} = \mathrm{AX}}$.

Démonstration *Posons* $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = \left(x_j\right) \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Y} = (y_i) \in \mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$. *On a :* $u(x) = u\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j u\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^q a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j f_i = \sum_{i=1}^q y_i f_i$. *Par identification, on a bien :*

$$\forall i \in [\![1, q]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j$$

ce qui prouve le résultat.

Exemple 25.12
– Soit deux applications linéaires

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y,\ x + y + z) \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y,\ x + 2y,\ x - y) \end{array} \right.$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. On écrit $\mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{e \leftarrow f}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On écrit maintenant $\mathrm{Mat}_{e \leftarrow e}(v \circ u)$ et $\mathrm{Mat}_{f \leftarrow f}(u \circ v)$. On sait que

$$\mathrm{Mat}_{e \leftarrow e}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{e \leftarrow f}(v) \times \mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

   et que

$$\mathrm{Mat}_{f \leftarrow f}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u) \times \mathrm{Mat}_{e \leftarrow f}(v) \times = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Donnons l'expression analytique de $u \circ v$ et $v \circ u$. On utilise le théorème 25.11.
   D'une part $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ 3x + y + 2z \\ -2y - z \end{pmatrix}$ donc $u \circ v(x, y, z) = (2x + z, 3x + y + 2z, -2y - z)$.
   D'autre part $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$ et $v \circ u(x, y) = (-y, 3x + 2y)$.

–

25.3 Matrices carrées

25.3.1 Définitions

Rappelons qu'une matrice est carrée si et seulement si elle possède autant de lignes que de colonnes. L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.12 ♡
– $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ possède une structure d'espace vectoriel de dimension finie n^2.
– $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ possède une structure d'anneau unitaire (non commutatif).

Démonstration *Le premier point est un corollaire immédiat des propositions 25.1 et 25.2. On vérifie facilement les axiomes d'un anneau pour* $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Remarque 25.5 Comme $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, pour deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton (voir le théorème 19.17 page 725) dès que A et B commutent, c'est-à-dire dès que $AB = BA$.

Exemple 25.13 Calculons les puissance de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $A = I_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On remarque aussi que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que $B^3 = 0$. Comme $I_3 B = B I_3 = B$, on peut appliquer la formule du binôme et écrire pour $n \geqslant 2$:

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, on montre que cette égalité reste correcte si $n = 0, 1$ d'où le résultat.

DÉFINITION 25.15 ♡ **Matrice d'un endomorphisme dans une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. On appelle *matrice de l'endomorphisme* u dans la base e la matrice notée $\mathrm{Mat}_e(u)$ et donnée par :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{Mat}_{e \leftarrow e}(u)$$

Remarquons que $\mathrm{Mat}_e(u)$ est une matrice carrée : $\mathrm{Mat}_e(u) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.13 ♡ **Un endomorphisme est entièrement déterminé par sa matrice dans une base**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Alors, l'application

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_e(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels.
En particulier, si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\theta^{-1}(M) = u$. On dit que *u est l'endomorphisme de* E *représenté par* M *dans la base e*.

Démonstration *Le fait que θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels est un cas particulier du théorème 25.8. Par ailleurs, si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ alors $\theta(u \circ v) = \mathrm{Mat}_e(u \circ v) = \mathrm{Mat}_e(u)\,\mathrm{Mat}_e(v) = \theta(u)\,\theta(v)$ ce qui prouve que θ est un morphisme d'anneaux.*

PLAN 25.2 : Autrement dit :

Avec les notations de la proposition précédente, se fixant une base e de E *:*
- *A toute matrice* A *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *correspond un et un seul endomorphisme u de* E *dont la matrice dans la base e est* A.
- *Réciproquement, à tout endomorphisme de* E *correspond une et une seule matrice de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *qui le représente dans la base e.*

25.3.2 Éléments inversibles dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, groupe $GL_n(\mathbb{K})$

DÉFINITION 25.16 ♡ **Matrice inversible**
On dit qu'une matrice *carrée* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* si et seulement si il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

Si tel est le cas B est unique et est appelée *matrice inverse* de la matrice A ; on la note A^{-1}. L'ensemble des matrices de taille n est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : Soit B et B' deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$. On a donc

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B'.$$

Exemple 25.14

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet, cherchons son inverse sous la forme $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Comme $AB = I_2$ on a le système : $\begin{cases} x+z=1 \\ y+t=0 \\ z=0 \\ t=1 \end{cases}$ qu'on résout et on trouve $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $AB = BA = I_3$ donc $B = A^{-1}$.

Remarque 25.6 On comprend grâce à cet exemple qu'il va falloir développer des outils plus sophistiqués si on veut montrer sans trop de calculs qu'une matrice est inversible. Ces outils seront le rang (voir paragraphe 25.5) et le déterminant (voir paragraphe 25.6). On montrera aussi dans ce dernier paragraphe comment, grâce à la notion de comatrice, on pourra calculer l'inverse de matrices inversibles de taille pas trop grande.

La proposition suivante permet de traduire la notion d'inversibilité entre les matrices et les applications linéaires.

PROPOSITION 25.14 ♡ **Une application linéaire est inversible si et seulement si sa matrice est inversible**
Soient e et f des bases respectives des $\mathbb{K}$-espace vectoriels E et F tous deux de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \text{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$. Alors A est inversible si et seulement si u est un isomorphisme.

Démonstration
[⇒] *Supposons que* A *est inversible. Alors il existe* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $AB = BA = I_n$. *Soit* v *élément de* $\mathscr{L}(E,F)$ *tel que* $B = \text{Mat}_{e\leftarrow f}(v)$. *On a :*

$$\text{Mat}_{e\leftarrow e}(\text{I}d_E) = I_n = BA = \text{Mat}_{e\leftarrow f}(v)\,\text{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \text{Mat}_{e\leftarrow e}(v\circ u).$$

Par conséquent : $v\circ u = \text{I}d_F$. *De même, on a :*

$$\text{Mat}_{f\leftarrow f}(\text{I}d_F) = I_n = AB = \text{Mat}_{f\leftarrow e}(u)\,\text{Mat}_{e\leftarrow f}(v) = \text{Mat}_{f\leftarrow f}(u\circ v).$$

Par conséquent : $u\circ v = \text{I}d_E$. *On a ainsi prouvé que* u *est un isomorphisme de* E *dans* F *d'application réciproque* v.
[⇐] *Réciproquement si* u *est un isomorphisme de* E *dans* F *alors notons* $v : F \to E$ *son application réciproque. Posons* $B = \text{Mat}_{e\leftarrow f}(v)$. *On a :*

$$AB = \text{Mat}_{f\leftarrow e}(u)\,\text{Mat}_{e\leftarrow f}(v) = \text{Mat}_{f\leftarrow f}(u\circ v) = \text{Mat}_{f\leftarrow f}(\text{I}d_F) = I_n$$

et

$$BA = \text{Mat}_{e\leftarrow f}(v)\,\text{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \text{Mat}_{e\leftarrow e}(v\circ u) = \text{Mat}_{e\leftarrow e}(\text{I}d_E) = I_n$$

et donc A *est inversible de matrice inverse* B.

PROPOSITION 25.15 ♡ **Si** E **est de dimension** n**,** $GL_n(\mathbb{K})$ **et** $GL(E)$ **sont des groupes isomorphes**

1. $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (en général non abélien).
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et si e est une base de E, l'application

$$\theta : \begin{cases} GL(E) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupe.

Démonstration
- θ *est bien définie car si* u *est un automorphisme de* E *alors* $\text{Mat}_e(u)$ *est inversible.*
- θ *est un morphisme de groupe : si* $(u,v) \in (GL(E))^2$, *alors* $\theta(u\circ v) = \text{Mat}_e(u\circ v) = \text{Mat}_e(u)\,\text{Mat}_e(v) = \theta(u)\,\theta(v)$.
- θ *est injective car si* $\theta(u) = I_n$ *alors* $\text{Mat}_e(u) = I_n$ *et donc* $u = \text{I}d_E$.
- *Enfin,* θ *est surjective car toute matrice de* $GL_n(\mathbb{K})$ *représente un automorphisme de* E.

Remarque 25.7 Les deux démonstrations qui viennent sont typiques de ce chapitre. Pour démontrer une propriété sur les matrices, on la transcrit en terme d'application linéaire. Vous devez vous familiariser avec cette gymnastique.

Exemple 25.15 On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de l'exemple 25.14 p. 959.
A est la matrice, dans la base $(1,X)$, de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_1[X]$ dans lui-même défini par $u(P) = P(X+1)$.
Il est clair que l'endomorphisme v de $\mathbb{K}_1[X]$ dans lui-même défini par $v(P) = P(X-1)$ "défait ce que fait u" et donc que u et v sont inverses l'un de l'autre. Donc A est inversible d'après la proposition 25.14 p. 960. De plus A^{-1} est la matrice de v dans la base $(1,X)$, à savoir $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

THÉORÈME 25.16 ♡♡ Une première caractérisation des matrices inversibles
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que :

(H1) $A \times B = I_n$

alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre : $B = A^{-1}$ et $A = B^{-1}$.

Démonstration *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* n, e *une base de* E *et soit* u *l'endomorphisme de* E *représenté par* A *dans la base* e *et* v *l'endomorphisme de* E *représenté par* B *dans la base* e. *Comme* $AB = I_n$, *on a :* $I_n = AB = \mathrm{Mat}_e(u)\,\mathrm{Mat}_e(v) = \mathrm{Mat}_e(u \circ v) = \mathrm{Mat}_e(\mathrm{I}d_E)$. *Par conséquent :* $u \circ v = \mathrm{I}d_E$. *On en déduit que d'après le théorème 24.30 page 912 que* u *est inversible d'inverse* v *et donc que* A *est inversible d'inverse* B.

PROPOSITION 25.17 Une seconde caractérisation des matrices inversibles

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \left[\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0\right].$$

Démonstration *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* n, e *une base de* E *et soit* u *l'endomorphisme de* E *représenté par* A *dans la base* e : $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. *Soient* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* x *le vecteur de* E *tel que* $\mathrm{Mat}_e(x) = X$. *On a :*

$$AX = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_e(u)\,\mathrm{Mat}_e(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_e(u(x)) = 0.$$

Si A *est inversible alors* u *est un isomorphisme. Donc* $AX = 0$ *n'est possible que si* $u(x) = 0$ *c'est-à-dire si* $x = 0$. *Par conséquent* $X = 0$. *Réciproquement, si* $AX = 0$ *entraîne* $X = 0$, *alors* $u(x) = 0$ *entraîne* $x = 0$ *et donc* $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ *par suite* u *est injectif. Comme* u *est un endomorphisme,* u *est donc aussi surjectif d'après le corollaire 24.29 page 912 et définit bien un isomorphisme. Par conséquent* A *est inversible.*

PROPOSITION 25.18 ♡♡
Si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, il en est de même pour AB et :

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}.$$

Démonstration *Supposons que* A *et* B *soient inversibles. Il existe alors* $A', B' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que :* $AA' = I_n$ *et* $BB' = I_n$. *Montrons que :* $B'A'$ *est la matrice inverse de* AB *ce qui prouvera le résultat. Il suffit pour ce faire de remarquer que :*

$$ABB'A' = A\underbrace{BB'}_{=I_n}A' = AA' = I_n.$$

PROPOSITION 25.19 ♡
Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA$ est inversible si et seulement si A l'est. De plus, si tel est le cas :

$$\boxed{\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)}.$$

Démonstration : On a la série d'équivalences :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : AB = I_n \Longleftrightarrow \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : {}^t(AB) = {}^tI_n \Longleftrightarrow \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : {}^tB\,{}^tA = I_n \Longleftrightarrow {}^tA \in GL_n(\mathbb{K}).$$

Exemple 25.16 On a vu au chapitre 2 que si $\vec{u}$ est un vecteur du plan de coordonnées (x, y) dans une base orthonormale directe $e = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et si R_θ est la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ alors les coordonnées de $R_\theta(\vec{u})$ dans e sont : $(x', y') = (\cos\theta x + \sin\theta y, -\sin\theta x + \cos\theta y)$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_e(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

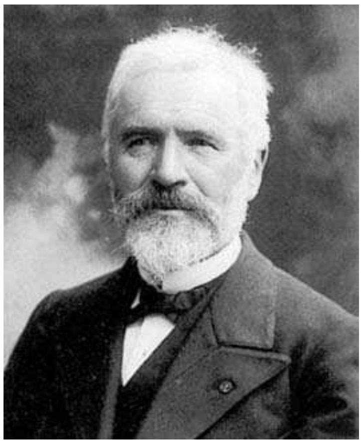
Remarquons que R_θ est un automorphisme du plan, de bijection réciproque : $R_{-\theta}$. On a par ailleurs bien :

$$\mathrm{Mat}_e(R_\theta)\,\mathrm{Mat}_e(R_{-\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I_2.$$

Remarquons que $(\mathrm{Mat}_e(R_\theta))^{-1} = {}^t\mathrm{Mat}_e(R_\theta)$. Les matrices inversibles A dont la matrice inverse est égale à leur transposée : ${}^tA$ sont dites orthogonales.

BIO 22 | Camille Jordan, né le 5 janvier 1838 à Lyon, mort le 22 janvier 1922 à Paris)

Mathématicien Français. Camille Jordan est issu d'un milieu favorisé. Son père était polytechnicien et sa mère était la soeur du peintre Pierre Puvis de Chavannes. Il fait des études brillantes et intègre Polytechnique à la première place. Il devient ingénieur du corps des mines et mène en parallèle des recherches mathématiques. En 1876, il succède à Cauchy comme enseignant à l'école Polytechnique.
Ses travaux mathématiques portent sur la géométrie, (courbes de Jordan), mais également sur l'étude du groupe des permutations, et les séries de Fourier. Il est aussi l'auteur d'un procédé de réduction des endomorphismes tellement utile qu'il est parfois nommé « jordanisation des endomorphismes ». Réduire un endomorphisme consiste à trouver une base dans laquelle sa matrice prend une « forme simple ». Dans le cas de la jordanisation, il s'agit d'une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des matrices de Jordan (voir l'exercice 25.58). Ce procédé est en particulier important pour résoudre certaines équations différentielles. Ajoutons que Jordan était réputé pour l'excentricité de ses notations. Il prend sa retraite en 1912. Celle ci est marquée par le décès de trois de ses huit enfants durant la première guerre mondiale.



25.3.3 Trace d'une matrice

DÉFINITION 25.17 ♡ **Trace d'une matrice carrée**

Soit $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle trace de A et on note Tr (A), le scalaire :

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Remarque 25.8 La trace de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est égale à la somme des éléments diagonaux de A.

PROPOSITION 25.20 ♡ **Propriétés de la trace**

– L'application $\mathrm{Tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}\,(A) \end{array} \right.$ est un forme linéaire. En particulier, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et si $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\boxed{\mathrm{Tr}\,(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}\,(A) + \beta \mathrm{Tr}\,(B)}$.

– $\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\boxed{\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)}$

Démonstration

– *La linéarité de la trace est laissée en exercice.*
– *Soient* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que* $A = \left(a_{i,j}\right)$ *et* $B = \left(b_{i,j}\right)$. *On a :* $\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}\right)$ *et* $\mathrm{Tr}\,(BA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{i,k}\right)$ *et ces deux quantités sont bien égales.*

PLAN 25.3 : En résumé : Opérations sur les matrices

1. *Si* $A, B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *et si* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, alors :*

$${}^t\left({}^tA\right) = A$$
$${}^t\left(\alpha A + \beta B\right) = \alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB$$
$${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$$

2. *Si* $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

3. *Si* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et si* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, alors :*

$$\mathrm{Tr}\,(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}\,(A) + \beta \mathrm{Tr}\,(B)$$

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$$

25.3.4 Matrices carrées remarquables

Matrices scalaires, diagonales, triangulaires

Nous allons nous intéresser à deux types particuliers de matrice dans cette section : les matrices diagonales et les matrices triangulaires. Les premières se multiplient et s'inversent très facilement (quand c'est possible évidemment). Avec les secondes, les calculs sont plus difficiles mais moins que dans le cas de matrices quelconques.

DÉFINITION 25.18 ♡ **Matrices scalaires, diagonales**

– Une matrice $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si et seulement si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i \neq j \implies d_{i,j} = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On notera $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_2)$ ainsi que $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n.

– Les matrices diagonales de la forme $\text{Diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées *matrices scalaires*.

Remarque 25.9 Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est scalaire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

DÉFINITION 25.19 ♡ **Matrice triangulaire supérieure**

On dit que $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* lorsque :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad i > j \implies t_{i,j} = 0$$

T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n.

PROPOSITION 25.21 **Dimension du sous-espace des matrices diagonales et du sous-espace des matrices triangulaires**

1. Le sous-ensemble des matrices scalaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension 1.
2. Le sous-ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n.
3. Le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

- *Le fait que chacun de ces quatre sous-ensembles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est laissé en exercice au lecteur.*

– *La matrice identité engendre clairement le sous-ensemble des matrices scalaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent ce sous-ensemble est de dimension 1.*

– *Les matrices élémentaires $\left(E_{i,i}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ engendrent clairement le sous-ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comme cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre et forme donc une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent :* $\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$.

– *De même les matrices élémentaires $\left(E_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!], j\geq i}$ engendrent le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comme cette famille est une sous-famille d'une famille libre, elle est libre et forme donc une base de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$. Il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ de telles matrices et donc :* $\dim \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

PROPOSITION 25.22 ♡ **Opérations algébriques avec les matrices diagonales et les matrices triangulaires supérieures**

– Si D_1 et D_2 sont deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et $\mu_1,\dots,\mu_n$, D_1D_2 est diagonale et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n$.
– Si T_1 et T_2 sont deux matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et $\mu_1,\dots,\mu_n$, T_1T_2 est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n$.
– Si $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors $N^n = 0$; on dit que N est nilpotente.

Démonstration *Exercice.*

COROLLAIRE 25.23 ♡ **Inverse d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire**

- Une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas :
$$D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1{}^{-1},\dots,\lambda_n{}^{-1}\right)$$
- Une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :
$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & * & \dots & * \\ 0 & t_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$
est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, T^{-1} est de la forme :
$$T = \begin{pmatrix} t_{11}^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & t_{22}^{-1} & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration

- *Soit* $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ *une matrice diagonale. Supposons que :* $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k \neq 0$ *alors clairement la matrice* $\mathrm{Diag}(\lambda_1{}^{-1},\dots,\lambda_n{}^{-1})$ *est la matrice inverse de* D. *Réciproquement, si un des coefficients,* λ_1 *par exemple est nul. Alors, posant* $X = {}^t(1,0,\dots,0) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, on a* $AX = 0$ *et* $X \neq 0$ *donc,appliquant la proposition 25.17,* A *n'est pas inversible.*
- *De même si* T *est une matrice triangulaire supérieure telle que ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors en posant* $X = {}^t(x1,\dots,x_n) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, on a :* $TX = 0$ *si et seulement si :*
$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \lambda_2 x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \quad = \vdots \\ \lambda_n x_n = 0 \end{cases}$$
comme les λ_i*, pour* $i \in [\![1,n]\!]$ *sont non nuls, ce système possède comme unique solution le* n*-uplet nul donc* $X = 0$ *et appliquant à nouveau la proposition 25.17,* A *n'est pas inversible. Réciproquement, si un des coefficient,* λ_1 *par exemple est nul, alors en posant* $X = {}^t(1,0,\dots,0) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*, on a* $AX = 0$ *et* $X \neq 0$ *donc, appliquant la proposition 25.17,* A *n'est pas inversible.*

Matrices symétriques, antisymétriques

DÉFINITION 25.20 ♡ **Matrices symétriques, antisymétriques**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

– On dit que A est *symétrique* si et seulement si ${}^tA = A$ c'est-à-dire si et seulement si :
$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,i} = a_{i,j}$$
L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
– On dit que A est *antisymétrique* si et seulement si ${}^tA = -A$ c'est-à-dire si et seulement si :
$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,i} = -a_{i,j}$$
L'ensemble des matrices antisymétriques de taille n est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ à n lignes et n colonnes.

Remarque 25.10 Par définition, si $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, et si $i \in [\![1,n]\!]$ alors $a_{i,i} = -a_{i,i}$ et donc $a_{i,i} = 0$. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont donc nuls.

PROPOSITION 25.24
$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. De plus :

$$\boxed{\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}}$$

Démonstration *Posons, pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$, $i < j$ posons $F_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$ et $H_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$ où $E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire (i,j). On a :*

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left\{F_{i,j}, E_{i,i} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right\}$$

et

$$\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\left\{H_{i,j} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right\}\right)$$

ce qui prouve que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, on vérifie facilement que les familles $\left(F_{i,j}, E_{i,i} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right)$ et $\left(H_{i,j} \mid i,j \in [\![1,n]\!], i<j\right)$ sont libres de cardinal respectif $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$. Elles constituent donc des bases de, respectivement, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ ce qui donne leur dimension. On vérifie de plus facilement que si une matrice est à la fois symétrique et antisymétrique, elle est nulle et donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$. Comme de plus : $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ on peut affirmer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Matrices de changement de base

Comme leur nom l'indique, les matrices de changement de base vont nous permettre de calculer la matrice d'une application linéaire dans des bases données quand on connaît cette matrice pour d'autres bases.

DÉFINITION 25.21 ♡ **Matrice de changement de base**
Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases du $\mathbb{K}$−espace vectoriel E de dimension n. On appelle *matrice de passage de e à f* (ou *matrice de changement de base*) et on note $P_{e\to f}$ la matrice de la famille $(f_1, \dots, f_n)$ relativement à la base e :

$$P_{e\to f} = \mathrm{Mat}_e(f_1, \dots, f_n)$$

Remarque 25.11 $P_{e\to f} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.25 ♡ **Propriétés des matrices de changement de base**
Soient e, f et g trois bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On a :

1. $$\boxed{P_{e\to f} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(id_E)}$$
2. $$\boxed{P_{e\to g} = P_{e\to f} \times P_{f\to g}}$$
3. $P_{e\to f}$ est inversible et :
$$\boxed{\left[P_{e\to f}\right]^{-1} = P_{f\to e}}$$

Démonstration

1. *La première égalité est laissée en exercice.*
2. *On a, par application du théorème 25.10 :* $P_{e\to f} \times P_{f\to g} = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow f}(id_E) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow g}(id_E) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow g}(id_E \circ id_E) = \mathrm{Mat}_{e\leftarrow g}(id_E) = P_{e\to g}$.
3. *Par application de la proposition précédente, on a :* $P_{e\to f} \times P_{f\to e} = P_{e\to e} = I_n$ *et* $P_{f\to e} \times P_{e\to f} = P_{f\to f} = I_n$ *Par conséquent, $P_{e\to f}$ est inversible et : $\left[P_{e\to f}\right]^{-1} = P_{f\to e}$.*

COROLLAIRE 25.26 ♡♡ **Caractérisation matricielle de la liberté d'une famille de vecteurs**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, e une base de E et x une famille de n vecteurs de E. Alors, la famille x est libre si et seulement si la matrice des n vecteurs de la famille x dans la base e : $\mathrm{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que la famille x soit libre. Comme elle est de cardinal n, elle forme une base de e et donc, appliquant la propriété précédente,* $\mathrm{Mat}_e(x_1,\dots,x_n) = \mathrm{P}_{e\to x}$ *est une matrice de passage de la base e à la base x et est donc inversible.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si* $\mathrm{Mat}_e(x_1,\dots,x_n)$ *est inversible alors cette matrice représente un automorphisme u de E dans la base e et comme l'image d'une base de E par un automorphisme de E est une base de E, on en déduit que x est une base de E. En particulier x est libre.*

PROPOSITION 25.27 ♡ **Toute matrice inversible s'interprète comme une matrice de changement de base**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E. Alors pour toute matrice inversible $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique base e' de E telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}_{e\to e'}$.

Démonstration *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. *Les vecteurs colonnes de A sont les coordonnées d'une famille de vecteurs f dans la base e :* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(f_1,\dots,f_n)$. *Par application de la proposition précédente, la famille f est libre et donc* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(f) = \mathrm{P}_{e\to f}$.

Matrices de transvection et de dilatation, opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

On considère dans tout ce paragraphe une matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

DÉFINITION 25.22 ♡ **Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice**

On appelle **opération élémentaire sur les lignes** (respectivement **sur les colonnes**) de la matrice A une des opérations suivantes :

1. Addition d'une ligne (respectivement d'une colonne) à une autre ligne (respectivement à une autre colonne).
2. Multiplication d'une ligne (respectivement d'une colonne) par un scalaire **non nul**.
3. Échange de deux lignes (respectivement de deux colonnes)

Notation 25.17 On note, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

- $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$ la multiplication de la ligne i par le scalaire λ.
- $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$ l'addition de la ligne $\lambda \mathrm{L}_j$ à la ligne L_i.
- $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ l'échange des lignes i et j.

On a des notations analogues avec les colonnes.

Nous noterons, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in [\![1,p]\!]$, E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne et qui vaut 1.

PROPOSITION 25.28 ♡ **Traduction des oel en termes matriciels**

On a le tableau de correspondance :

k	oel	matrice P	
1	$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$	$\mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{E}_{ij}$	Matrice de transvection
2	$\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$	$\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{ii} + \lambda \mathrm{E}_{ii}$	Matrice de dilatation
3	$\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$	$\mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj} + \mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji}$	

qui se lit ainsi :

Effectuer l'opération élémentaire n°k sur les lignes de A revient à multiplier A $\boxed{\text{à gauche}}$ par la matrice inversible P

Démonstration *Par un calcul direct.*

PROPOSITION 25.29 ♡ **Traduction des oec en termes matriciels**

On a le tableau de correspondance :

k	oec	matrice P	
1	$\mathrm{C}_i \leftarrow \lambda \mathrm{C}_i + \lambda \mathrm{C}_j$	$\mathrm{I}_p + \lambda \mathrm{E}_{ij}$	Matrice de transvection
2	$\mathrm{C}_i \leftarrow \lambda \mathrm{C}_i$	$\mathrm{I}_p - \mathrm{E}_{ii} + \lambda \mathrm{E}_{ii}$	Matrice de dilatation
3	$\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$	$\mathrm{I}_p - \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj} + \mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji}$	

qui se lit ainsi :

Effectuer l'opération élémentaire n°k sur les colonnes de A revient à multiplier A $\boxed{\text{à droite}}$ par la matrice inversible P

Démonstration *Par un calcul direct.*

25.4 Changement de base

25.4.1 Pour un vecteur

PROPOSITION 25.30 ♡ **Formule de changement de base pour un vecteur**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Considérons e et f deux bases de E et $x \in \mathrm{E}$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_f(x) = \mathrm{P}_{f\to e} \times \mathrm{Mat}_e(x)}.$$

Démonstration *Posons* $\mathrm{Mat}_f(x) = \left(\mathrm{X}'_i\right) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Mat}_e(x) = \left(\mathrm{X}_i\right) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{P}_{f\to e} = \left(a_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. *On a :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}'_i f_i = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j e_j \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\mathrm{X}_j\right) f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}'_i f_i \end{aligned}$$

Donc, par identification, on a bien : $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{X}'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\mathrm{X}_j$.

On peut aussi prouver ce résultat de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_f(x) &= \mathrm{Mat}_f(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}(x)) \\ &= \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \times \mathrm{Mat}_e(x) \ \text{ par application de 25.11} \\ &= \mathrm{P}_{f\to e} \times \mathrm{Mat}_e(x) \end{aligned}$$

25.4.2 Pour une application linéaire

PROPOSITION 25.31 ♡ **Formule de changement de base pour une application linéaire**
On considère :
- e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E
- f et f' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel F

et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On a la formule de changement de base :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{P}_{f'\to f} \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{P}_{e\to e'}}$$

Démonstration *Soit* $x \in \mathrm{E}$ *et* $y = u(x)$. *Soit* $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_e(x)$, $\mathrm{Y} = \mathrm{Mat}_f(y)$, $\mathrm{X}' = \mathrm{Mat}_{e'}(x)$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Mat}_{f'}(y)$, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ *et* $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u)$. *On a, par application du théorème 25.11 :* $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$ *et* $\mathrm{Y}' = \mathrm{A}'\mathrm{X}'$. *De plus, par application de la proposition précédente :* $\mathrm{X} = \mathrm{P}_{e\to e'}\mathrm{X}'$ *et* $\mathrm{Y} = \mathrm{P}_{f\to f'}\mathrm{Y}'$. *On a donc :*

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{P}_{f'\to f}\mathrm{Y} = \mathrm{P}_{f'\to f}\mathrm{AX} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}' = \mathrm{A}'\mathrm{X}' = \mathrm{A}'\mathrm{P}_{e'\to e}\mathrm{X}.$$

Par conséquent : $\mathrm{A}'\mathrm{P}_{e'\to e} = \mathrm{P}_{f'\to f}\mathrm{A}$ *ce qui donne bien :* $\mathrm{A}' = \mathrm{P}_{f'\to f} \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{P}_{e\to e'}$.

On peut aussi démontrer cette formule ainsi :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(\mathrm{I}d_{\mathrm{F}} \circ u \circ \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$$
$$= \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow f}(\mathrm{I}d_{\mathrm{F}}) \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{Mat}_{e\leftarrow e'}(\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$$
$$= \mathrm{P}_{f'\to f} \times \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) \times \mathrm{P}_{e\to e'}$$

25.4.3 Pour un endomorphisme

PROPOSITION 25.32 ♡ **Formule de changement de base pour un endomorphisme**
On considère e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $u \in \mathscr{L}(E)$. On a la formule de changement de base :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{e'}(u) = P_{e' \to e} \times \mathrm{Mat}_e(u) \times P_{e \to e'}}$$

qui s'écrit aussi avec $P = P_{e \to e'}, A = \mathrm{Mat}_e(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$:

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Démonstration : C'est un corollaire immédiat de la proposition précédente.

Remarque 25.12 Avec les notations précédentes, si $A' = P^{-1}AP$ alors $A'^n = P^{-1}A^nP$.

25.4.4 Pour une forme linéaire

PROPOSITION 25.33 ♡ **Formule de changement de base pour une forme linéaire**
Soient e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si φ est une forme linéaire sur E, on a :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{e'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_e(\varphi) \times P_{e \to e'}}.$$

Démonstration : C'est encore un corollaire immédiat de la proposition précédente.

25.4.5 Un exemple

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique e et les deux vecteurs $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (1,3)$.

1. Montrons que le système $f = (f_1, f_2)$ est une base de E. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, f est forcément une base de E. On écrit $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. On écrit la matrice de passage $P_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On inverse cette matrice en cherchant une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $P_{e \to f} \times B = I_2$. On obtient un système et on trouve $P_{f \to e} = B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
4. Soit le vecteur $x = (4,1)$. On cherche matriciellement les coordonnées du vecteur x dans la base f. On trouve $\mathrm{Mat}_f(x) = P_{f \to e}\mathrm{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$.
5. Soit l'endomorphisme $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array} \right.$. On écrit les matrices de cet endomorphisme dans les bases e et f : $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_f(u) = P_{f \to e}\mathrm{Mat}_e(u)P_{e \to f} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$.

25.5 Rang d'une matrice

On va développer dans cette section des méthodes pratiques pour :

1. calculer le rang d'une application linéaire à partir de sa matrice dans des bases données.
2. tester si une matrice (et donc si l'endomophisme associé) est inversible.

25.5.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 25.23 ♡♡♡ **Rang d'une matrice**
On appelle *rang* de $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, et on note rgA, le rang de la famille constituée des vecteurs colonnes $C_1,...,C_p$ de A dans $\mathbb{K}^q$.

PROPOSITION 25.34 ♡♡♡ **Le rang d'une matrice est égal au rang de l'application linéaire qu'elle représente**
Soient :

1. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base e.
2. F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q muni d'une base f.
3. $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

On sait qu'il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $A = \operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$ alors on a : $\boxed{\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A}$.

Démonstration *Rappelons que* $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Vect}\left(u(e_1),\dots,u(e_p)\right)$. *Pour tout* $i \in [\![1,p]\!]$, *notons* C_i *le vecteur colonne de* $\mathfrak{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ *donné par :* $C_i = \operatorname{Mat}_f\left(u(e_i)\right)$. *Les vecteurs colonnes de* $A = \left(a_{ij}\right)$ *sont exactement les vecteurs* $C_1,\dots,C_p$. *Notons aussi :*

$$\mathscr{F} = \operatorname{Vect}\left(u(e_1),\dots,u(e_p)\right) \subset F \quad \text{et} \quad \mathscr{G} = \operatorname{Vect}\left(C_1,\dots,C_p\right) \subset \mathbb{K}^q.$$

Utilisant le lemme de réduction d'une famille liée, on peut extraire de la famille $\left(u(e_1),\dots,u(e_p)\right)$ *une sous-famille libre* b *qui engendre encore* $\mathscr{F}$. *Quitte à re-numéroter les vecteurs de la famille* $\left(u(e_1),\dots,u(e_p)\right)$, *supposons que la sous-famille en question est :* $b = \left(u(e_1),\dots,u(e_l)\right)$ *où* $l \in [\![1,p]\!]$. b *est donc une base de* $\mathscr{F}$ *et* $\operatorname{rg} u = l$. *Montrons que* $c = \left(C_1,\dots,C_l\right)$ *est une base de* $\mathscr{G}$. *On aura ainsi bien prouvé que* $\operatorname{rg} A = l = \operatorname{rg} u$. *Supposons que* $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ *sont* l *scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que* $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j C_j = 0$. *Alors :* $\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \sum_{j=1}^{l} \alpha_j a_{ij} = 0$. *Par ailleurs :*

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j u\left(e_j\right) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{l} \alpha_j a_{ij}}_{=0} \right) f_i = 0$$

La famille b *étant libre, ceci n'est possible que si* $\alpha_1 = \dots = \alpha_l = 0$. *Donc* c *est libre. Montrons que* c *est génératrice de* $\mathscr{G}$. *Il suffit de montrer que chacun des vecteurs* C_j *pour* $j \in [\![l+1,p]\!]$ *est combinaison linéaire des vecteurs* $C_1,\dots,C_l$. *Mais ceci est clairement conséquence du fait que chaque vecteur* $u\left(e_j\right)$ *pour* $j \in [\![l+1,p]\!]$ *est combinaison linéaire des vecteurs* $u(e_1),\dots,u\left(e_l\right)$. *La famille* c *est donc bien une base de* $\mathscr{G}$ *et la proposition est alors démontrée.*

THÉORÈME 25.35 ♡♡♡ **Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est égal à sa taille**
$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Démonstration *Soient* e *une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n *et soit* u *l'unique endomorphisme de* E *tel que :* $\operatorname{Mat}_e(u) = A$. *On a :* A *inversible* $\Longleftrightarrow$ u *est un automorphisme de* E $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = n$.

PROPOSITION 25.36 ♡♡♡
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, e une base de E et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\operatorname{Mat}_e(x_1,\dots,x_n)$ est inversible si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E.

Démonstration *Soit* u *l'endomorphisme de* E *défini par :* $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u\left(e_i\right) = x_i$. *Notons* $A = \operatorname{Mat}_e(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{Mat}_e(u)$. *On a :* A *est inversible* $\Longleftrightarrow$ u *est un automorphisme de* E $\Longleftrightarrow$ *l'image d'une base de* E *par* u *est une base de* E.

THÉORÈME 25.37 ♡
Soit $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On a : A est une matrice de rang r si et seulement si il existe $Q \in GL_q(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$ où

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(le coefficient 1 en position (r,r), repérée par les flèches r)

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* p*,* e *une base de* E*,* F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* q *et* f *une base de* F*. Soit* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *l'unique application linéaire de* E *dans* F *telle que* $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{A}$*. On a :* $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg} \mathrm{A} = r$*. Faisant comme dans la démonstration du théorème 24.27, on peut décomposer* E *en la somme :* $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{G}$ *où* G *est un sous-espace de* E *tel que* $u_{|\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{Im}\, u$ *est un isomorphisme. Par conséquent,* $\dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{Im}\, u = \mathrm{rg}\, u = r$*. Soit* $\left(e'_1,\dots,e'_r\right)$ *une base de* G *et* $\left(e'_{r+1},\dots,e'_p\right)$ *une base de* $\mathrm{Ker}\, f$*.* $e' = \left(e'_1,\dots,e'_r,e'_{r+1},\dots,e'_n\right)$ *est donc une base de* E *et l'image d'une base d'un espace vectoriel par un isomorphisme étant une base de l'espace vectoriel d'arrivée,* $\left(u\left(e'_1\right),\dots,u\left(e'_r\right)\right)$ *est une base de* $\mathrm{Im}\, f$ *qu'on peut compléter en une base* $f' = \left(u\left(e'1\right),\dots,u\left(e'_r\right),f'_{r+1},\dots,f'_q\right)$ *de* F*. On a :* $\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{J}_r$ *et utilisant les formule de changement de base, on a :*

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \mathrm{P}_{f\to f'} \times \mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) \times \mathrm{P}_{e'\to e}$$

qui est de la forme voulue.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* p *et* F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* q*. Soit* e *une base de* E*,* f *une base de* F *et :*

- e' *une autre base de* E *telle que* $\mathrm{P}_{e'\to e} = \mathrm{P}$.
- f' *une autre base de* F *telle que* $\mathrm{P}_{f'\to f} = \mathrm{Q}$.

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *tel que :* $\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{J}_r$*. Interprétant la formule* $\mathrm{A} = \mathrm{QJ}_r\mathrm{P}$ *comme une formule de changement de base, on a :* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)$*. Par conséquent :* $\mathrm{rg}\mathrm{A} = \mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\mathrm{J}_r$*.*

COROLLAIRE 25.38 ♡ **Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée**
Pour tout $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}\left({}^t\mathrm{A}\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

Démonstration *Posons* $r = \mathrm{rg}\mathrm{A}$*. En appliquant la proposition précédente, il existe* $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{QJ}_r\mathrm{P}$*. Par conséquent :* ${}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{J}_r\,{}^t\mathrm{Q} = {}^t\mathrm{P}\mathrm{J}_r\,{}^t\mathrm{Q}$ *et* ${}^t\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$*,* ${}^t\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$*. Par conséquent, appliquant à nouveau la proposition précédente :* $\mathrm{rg}\,{}^t\mathrm{A} = r$*.*

DÉFINITION 25.24 **Matrices équivalentes**
Deux matrices $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* si et seulement s'il existe deux matrices inversibles $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{QBP}^{-1}$.

Remarque 25.13 Un corollaire du théorème précédent est que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

DÉFINITION 25.25 **Matrices semblables**
Deux matrices carrées $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$.

Remarque 25.14 Deux matrices semblables sont *a fortiori* équivalentes.

Remarque 25.15 Deux matrices semblables ont même trace.

25.5.2 Calcul pratique du rang d'une matrice

PROPOSITION 25.39 ♡ **Deux matrices déduites l'une de l'autre par une oel ou une oec ont même rang**
Deux matrices obtenues l'une de l'autre par une oel ou une oec sont de même rang.

Démonstration *Soit* $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* P *une matrice correspondant à une oel ou une oec.* P *est donc inversible. Posons* $\mathrm{B} = \mathrm{PA}$*. Soit* $r = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$*. On applique le théorème 25.37. Il existe des matrices* $\mathrm{Q}_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Q}_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{Q}_1\mathrm{I}_r\mathrm{Q}_2$*. On a donc :* $\mathrm{B} = \mathrm{PQ}_1\mathrm{I}_r\mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}_0\mathrm{I}_r\mathrm{Q}_2$ *avec* $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{PQ}_1$ *qui est une matrice inversible de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$*. Par conséquent,* B *étant de la forme* $\mathrm{Q}_0\mathrm{I}_r\mathrm{Q}_2$ *où* Q_0 *et* Q_1 *sont inversibles. On applique à nouveau la proposition 25.37 et on peut affirmer que* B *est de rang* r*.*

LEMME 25.40 ♡
Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$. On a :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha & \star & \dots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{A}' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\mathrm{A}'.$$

Démonstration *Soit*

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Par définition, $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n)$ *où* $L_1, \dots, L_n$ *représentent les vecteurs colonnes de* A*. Posons* $F = \operatorname{Vect}(L_1)$ *et* $G = \operatorname{Vect}(L_2, \dots, L_n)$*. Montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{K}^p$ *sont en somme directe. Soit* $L = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in F \cap G$*. Comme* $L \in F$*, on a :* $L = \lambda L_1$*. Comme* $L \in G$*, on a aussi* $\ell_1 = 0$*. Par conséquent, en regardant la première coordonnée,* $\lambda\alpha = 0$*, d'où* $\lambda = 0$ *et donc* $L = 0$*. Donc* F *et* G *sont en somme directe. On a donc* $\dim \operatorname{Vect}(L_1, \dots, L_n) = \dim F + \dim G$ *ce qui s'écrit aussi* $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$*.*

PLAN 25.4 : **Application au calcul du rang d'une matrice A**

Pour calculer le rang d'une matrice, on applique le plan suivant :

1. *Si* $A = 0$ *alors* $\operatorname{rg} A = 0$*.*
2. *Sinon* A *possède un coefficient* α *non nul. Par des permutations de lignes et de colonnes, on peut supposer que* α *est en position* $(1,1)$*. En retranchant aux* $n-1$ *dernières lignes un multiple judicieusement choisi de la première ligne, on obtient une matrice du type :*

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   et donc $\operatorname{rg} A = 1 + \operatorname{rg} A'$

3. *On se ramène ainsi à une matrice de taille* $(n-1) \times (p-1)$ *sur laquelle il suffit de réitérer le procédé jusqu'à obtenir une matrice de taille nulle.*

Exemple 25.18 Calculons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

PROPOSITION 25.41 ♡ **Méthode du pivot de Gauss**
Par une suite d'oel, on peut transformer une matrice inversible en une matrice triangulaire supérieure (inversible !).

Démonstration *On va démontrer cette proposition en effectuant une récurrence sur la taille* n *de cette matrice.*

1. *Si* $n = 1$ *la proposition est évidente.*
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*,* $n > 1$*.*
3. *Supposons la proposition vraie au rang* $n-1$ *et prouvons la au rang* n*. Soit* $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$*. Quitte à permuter les lignes de* A*, cette matrice étant inversible, on peut supposer que* $a_{11} \neq 0$*. Par des oel, en utilisant comme pivot le coefficient* a_{11}*, on peut alors transformer* A *en une matrice* B *de la forme :*

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   et on a, par application du lemme précédent : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1 + \operatorname{rg} A'$*. On applique l'hypothèse de récurrence à* A'*, on peut transformer* A'*, via une suite finie d'oel, en une matrice triangulaire. On effectue les oel correspondantes sur la matrice* B *et on la transforme en une matrice triangulaire.*

4. *La proposition est alors démontrée par application du principe de récurrence.*

Remarque 25.16 Grâce aux opérations élémentaires sur les lignes et en s'inspirant de l'algorithme précédent, on peut calculer l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ donnée. Il suffit de suivre les étapes suivantes.

1. On juxtapose A et I_n.

2. **Grâce à des oel de type 1 et 3 sur** A **on se ramène à une matrice triangulaire supérieure.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche A par des matrices $P_1, \dots, P_r$ de type 1 ou 3. La matrice triangulaire obtenue est $P_r.\dots.P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $P_r.\dots.P_1$.
3. **On effectue des oel de type 2 sur** $P_r.\dots.P_1.A$ **afin d'obtenir une matrice triangulaire dont la diagonale ne comporte que des 1.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche A par des matrices $Q_1, \dots, Q_s$ de type 2. La matrice triangulaire obtenue est $Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1$.
4. Enfin, à nouveau **grâce à des oel de type 1, on se ramène à la matrice** I_n**.** Ceci correspond à multiplier successivement à gauche $Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1.A$ par des matrices $R_1, \dots, R_t$ de type 1. La matrice triangulaire obtenue est $R_t.\dots.R_1.Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1.A$. On effectue ces mêmes oel sur I_n. La matrice obtenue est $R_t.\dots.R_1.Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1$.
5. Au final, on a donc $R_t.\dots.R_1.Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1.A = I_n$. La matrice $R_t.\dots.R_1.Q_s.\dots.Q_1.P_r.\dots.P_1$ est donc l'inverse de A.

Exemple 25.19 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3 comme on le vérifie en appliquant la méthode 70. Calculons son inverse :

$$\begin{array}{rrr ccc rrr}
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & & & & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & & & & 0 & 0 & 1 \\
\\
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & & & & 0 & 0 & 1 \\
\\
1 & 1 & -1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & & & & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & L_3 & \leftarrow & L_3 + L_2/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\
\\
1 & 1 & 1 & & & & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1/2 & L_2 & \leftarrow & L_2/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & L_3 & \leftarrow & 2L_3 & 1 & 1 & 2 \\
\\
1 & 1 & 0 & L_1 & \leftarrow & L_1 + L_3 & 2 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & L_2 & \leftarrow & L_2 + L_3/2 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & & & & 1 & 1 & 2 \\
\\
1 & 0 & 0 & L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & & & & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & & & & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

et on en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

25.6 Déterminant d'une matrice carrée de taille 2 ou 3

Grâce à la notion de déterminant nous disposerons d'un outil performant pour prouver qu'une matrice est inversible. Cette notion a néanmoins d'autres applications comme le calcul de l'inverse d'une matrice inversible via le calcul de la comatrice, la résolution de certains systèmes linéaires, les problèmes d'orientation du plan ou de l'espace...

Comme stipulé dans les programmes des filières PCSI, PTSI, TSI, nous nous bornerons à travailler en dimension 2 ou 3. Néanmoins, la plupart des démonstrations que nous allons donner sont valables en dimension n quelconque.

Les étudiants de la filière MPSI devront compléter ce chapitre par la lecture du chapitre 26 sur le groupe symétrique.

Dans toute la suite, on pourra considérer que n est un entier égal à 2 ou 3 et que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On commencera par expliquer ce qu'est le déterminant d'une matrice, d'une famille de vecteurs puis d'un endomorphisme. Nous nous intéresserons ensuite à des méthodes pratiques de calcul du déterminant. Enfin, nous donnerons des applications.

25.6.1 Définitions

DÉFINITION 25.26 ♡ Déterminant d'une matrice de taille 2 ou 3

– On appelle *déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ le scalaire de $\mathbb{K}$, noté $\det(A)$ et donné par :

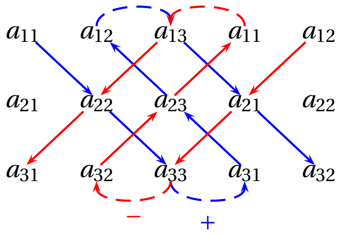
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

– On appelle *déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ le scalaire de $\mathbb{K}$, noté $\det(A)$ et donné par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

qui se calcule avec la *règle de Sarrus*. Voir remarque 3.14 p. 125.



Exemple 25.20
– $\det I_2 = 1$, $\det I_3 = 1$.
– Plus généralement, le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

25.6.2 Propriétés

THÉORÈME 25.42 ♡ Propriétés du déterminant d'une matrice

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

1. $\det\left(0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}\right) = 0$.
2. $\det(I_n) = 1$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
5. Caractérisation des matrices inversibles :
$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Autrement dit : le déterminant d'une matrice inversible est inversible

6. Si A est inversible alors $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
7. $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$

Démonstration *Ces propriétés se démontrent pour la plupart par des calculs directs. Prouvons par exemple les points* 5 *et* 6 *. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors $A \times A^{-1} = I_n$ et d'après les points* 2 *et* 4*, $\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1$ donc $\det(A) \neq 0$ et $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$. La réciproque sera une conséquence du corollaire 25.45. En effet, A peut être vue comme la matrice d'une certaine famille de n vecteurs dans un espace de dimension n dans une base e fixée. Dire que $\det(A) \neq 0$ revient à dire que cette famille est libre et donc que la matrice A qui les représente dans la base e est inversible.*

25.7 Déterminants d'ordre 2 ou 3 d'une famille de vecteurs

25.7.1 Définition

DÉFINITION 25.27 ♡ **Déterminant d'ordre 2 et 3 d'une famille de vecteurs**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$.

– Si $n = 2$, on appelle *déterminant dans la base e des vecteurs* V_1 et V_2 de E et on note $\det_e(V_1, V_2)$, le déterminant de la matrice formée par la famille (V_1, V_2) dans la base e : $\mathrm{Mat}_e(V_1, V_2)$:

$$\det_e(V_1, V_2) = \det \mathrm{Mat}_e(V_1, V_2)$$

En particulier, si : $V_1 = x_{11}e_1 + x_{12}e_2$, $V_2 = x_{21}e_1 + x_{22}e_2$ alors :

$$\det_e(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$$

– Si $n = 3$, on appelle *déterminant dans la base e des vecteurs* V_1, V_2 et V_3 de E et on note $\det_e(V_1, V_2, V_3)$, le déterminant de la matrice formée par la famille (V_1, V_2, V_3) dans la base e : $\mathrm{Mat}_e(V_1, V_2, V_3)$:

$$\det_e(V_1, V_2, V_3) = \det \mathrm{Mat}_e(V_1, V_2, V_3)$$

En particulier, si : $V_1 = x_{11}e_1 + x_{12}e_2 + x_{13}e_3$, $V_2 = x_{21}e_1 + x_{22}e_2 + x_{23}e_3$ et $V_3 = x_{31}e_1 + x_{32}e_2 + x_{33}e_3$ alors :

$$\det_e(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}$$

$$= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}x_{13} - x_{32}x_{23}x_{11} - x_{33}x_{21}x_{12}$$

qui se calcule avec la *règle de Sarrus*.

Remarque 25.17

– Le déterminant introduit dans les chapitres 2 et 3 est celui dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
– Le déterminant d'une matrice carrée définie dans le paragraphe précédent est le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

25.7.2 Propriétés

PROPOSITION 25.43 ♡ **Le déterminant de deux ou trois vecteurs est une forme multilinéaire alternée**
Soit e une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

– Si $n = 2$, le déterminant est une *forme bilinéaire et alternée* : pour tout u, u_1, u_2, v, v_1, $v_2 \in E$ et pour tous scalaires λ_1, λ_2, on a :

1. Le déterminant est une *forme bilinéaire* :

$$\det_e(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \det_e(u, v_1) + \lambda_2 \det_e(u, v_2)$$

$$\det_e(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 \det_e(u_1, v) + \lambda_2 \det_e(u_2, v)$$

2. Le déterminant est *alterné* :

$$\det_e(v, u) = -\det_e(u, v)$$

– Si $n = 3$, Le déterminant est une **forme trilinéaire et alternée** : pour tout u, u_1, u_2, v, v_1, v_2, w, w_1, $w_2 \in E$ et pour tous scalaires λ_1, λ_2, on a :

1. Le déterminant est une *forme trilinéaire* :

$$\det_e(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v, w) = \lambda_1 \det_e(u_1, v, w) + \lambda_2 \det_e(u_2, v, w)$$

$$\det_e(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \det_e(u, v_1, w) + \lambda_2 \det_e(u, v_2, w)$$

$$\det_e(u, v, \lambda_1 v w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \det_e(u, v, w_1) + \lambda_2 \det_e(u, v, w_2)$$

2. Le déterminant est *alterné* :

$$\det_e(u, v, w) = -\det_e(v, u, w) = \det_e(v, w, u) = -\det_e(w, v, u).$$

Démonstration *Par un calcul direct.*

Remarque 25.18
On suppose que $n = 2$ ou 3. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Si deux des vecteurs de cette famille sont égaux alors $\det_e(x_1, \dots, x_n) = 0$.

25.7.3 Formule de changement de base

PROPOSITION 25.44 ♡ **Formule de changement de base**
Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
- $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E.
- $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors :

$$\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_e(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration *On a :*

$$\begin{aligned}
\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) &= \det\left(\operatorname{Mat}_{e'}(x_1, \dots, x_n)\right) \\
&= \det\left(P_{e \leftarrow e'} \times \operatorname{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)\right) \\
&= \det\left(\operatorname{Mat}_{e'}(e) \times \operatorname{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)\right) \\
&= \det\left(\operatorname{Mat}_{e'}(e)\right) \times \det\left(\operatorname{Mat}_e(x_1, \dots, x_n)\right) \\
&= \det_{e'}(e) \times \det_e(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Remarque 25.19 En remplaçant x par e' dans cette dernière formule, on obtient :

$$1 = \det_{e'}(e') = \det_{e'}(e) \times \det_e(e')$$

COROLLAIRE 25.45 ♡♡♡ **Caractérisation des familles libres via le déterminant**
Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
- $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors $\mathscr{S}$ est libre si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Démonstration
- $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que $\mathscr{S}$ soit libre. Alors comme $\mathscr{S}$ est de cardinal $n = \dim E$, $\mathscr{S}$ forme une base de E. Par conséquent, $\operatorname{Mat}_e(\mathscr{S})$ est inversible et $\det_e(\mathscr{S}) = \det \operatorname{Mat}_e(\mathscr{S}) \neq 0$.*
- $\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, supposons que $\mathscr{S}$ soit liée, alors, quitte à re-numéroter les vecteurs de la famille $\mathscr{S}$, on peut supposer que x_1 est combinaison linéaire des vecteurs : $x_2, \dots, x_n$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que : $x_1 = \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. On a donc*

$$\det_e(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_e(\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n, x_2, \dots, x_n) = \alpha_2 \det_e(x_2, x_2 \dots, x_n) + \dots + \alpha_n \det_e(x_n, x_2, \dots, x_n) = 0$$

par application de la remarque 25.18 p.975. Donc $\det_e(\mathscr{S})$ est nul.

PROPOSITION 25.46 ♡♡♡ **Caractérisation des familles liées via le déterminant**
Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
- $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Alors $\mathscr{S}$ est liée si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration *Par contraposée de la proposition précédente.*

25.8 Déterminant d'un endomorphisme

25.8.1 Définition

PROPOSITION 25.47 ♡ **Déterminant d'un endomorphisme**
Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
- u un endomorphisme de E.

Le scalaire $\det_e(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est indépendant de e et est appelé **déterminant de l'endomorphisme** u. On le note $\det(u)$..

Démonstration *Soit f une autre base de* E. *On a :* $\text{Mat}_f(u) = \text{P}_{f\to e} \times \text{Mat}_e(u) \times \text{P}_{e\to f}$. *Par conséquent,*

$$\det_f(u(f_1), \ldots, u(f_n)) = \det\left(\text{Mat}_f(u)\right) = \det\left(\text{P}_{f\to e} \times \text{Mat}_e(u) \times \text{P}_{e\to f}\right)$$

$$= \det\left(\text{P}_{f\to e}\right) \det(\text{Mat}_e(u)) \det\left(\text{P}_{e\to f}\right) = \det(\text{Mat}_e(u))$$

car $\text{P}_{e\to f} = \left[\text{P}_{f\to e}\right]^{-1}$ *et donc* $\det\left(\text{P}_{e\to f}\right) = \left(\det\left(\text{P}_{f\to e}\right)\right)^{-1}$.

Remarque 25.20 Si u est un endomorphisme de E et que e est une base de E, on a : $\det(u) = \det(\text{Mat}_e(u))$.

25.8.2 Propriétés

THÉORÈME 25.48 ♡♡♡ **Propriétés du déterminant d'un endomorphisme**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, u, v des endomorphismes de E. On a :

1. $det\left(0_{\mathscr{L}(E)}\right) = 0_{\mathbb{K}}$.
2. $\det(\text{Id}_E) = 1_{\mathbb{K}}$
3. $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire.
4. $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$.
5. Caractérisation des automorphismes de E :
$$u \in \text{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0$$
6. Si $u \in \text{GL}(E)$ alors $\det\left(u^{-1}\right) = \frac{1}{\det(u)}$.

Démonstration *C'est un corollaire immédiat du théorème 25.42 et de la remarque précédente.*

25.9 Méthodes de calcul du déterminant

On se restreindra dans cette section aux déterminants des matrices carrées, le déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme s'en déduisant.

25.9.1 Opération sur les lignes et les colonnes

Les propriétés qui suivent découlent directement des propriétés des formes n-linéaires alternées :

THÉORÈME 25.49 ♡ **Calcul d'un déterminant par des oel et des oec**

1. Un déterminant qui a deux **colonnes** identiques est nul.
2. Un déterminant qui a une **colonne** combinaison linéaire des autres **colonnes** est nul.
3. Un déterminant dont une **colonne** est formée de 0 est nul.
4. On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une **colonne** une combinaison linéaire des autres **colonnes**.
5. Si on multiplie par λ une **colonne** d'un déterminant, on multiplie par λ la valeur de ce déterminant.
6. Quand on permute deux **colonnes** d'un déterminant, on change son signe.
7. Comme le déterminant d'une matrice est égale à celui de sa transposée, les 6 phrases précédentes restent vraies si on remplace le mot "**colonne**" par le mot "**ligne**".

Démonstration *Démontrons par exemple le point* 4. *On suppose que la matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est composée des vecteurs colonnes* $C_1,\dots,C_n$ *Soient* $i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n$ *des scalaires de* $\mathbb{K}$. *On a :*

$$\begin{aligned}\det(A) = \det(C_1,\dots,C_n) &= \det(C_1,\dots,C_n) + \underbrace{\det\left(C_1,\dots,C_{i-1},\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\alpha_k C_k, C_{i+1},\dots,C_n\right)}_{=0 \text{ en raison du second point}} \\ &= \det\left(C_1,\dots,C_{i-1},C_i+\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\alpha_k C_k, C_{i+1},\dots,C_n\right)\end{aligned}$$

Exemple 25.21 Calculons

– $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

– $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ car la troisième ligne est nulle.

– $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ car $L_3 = L_1 + L_2$.

25.9.2 Développement d'un déterminant suivant une rangée

PROPOSITION 25.50 ♡
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \star & \dots & \star & \alpha \end{array}\right)$$

où $A' \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Alors $\boxed{\det(A) = \alpha \det(A')}$.

Démonstration *Par un calcul immédiat en utilisant la définition d'un matrice de taille* 2 *ou* 3.

DÉFINITION 25.28 ♡ **matrices triangulaires**
On appelle matrice triangulaire inférieure toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall i < j, a_{ij} = 0$.
On appelle matrice triangulaire supérieure toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall i > j, a_{ij} = 0$.

Soit L (resp. U) l'ensemble des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures). L et U sont des sous-espaces-vectoriels de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = L + U$. $L \cap U$ est l'espace vectoriel des matrices diagonales.

COROLLAIRE 25.51 ♡ **Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire : Alors :

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}}$$

Démonstration *Immédiat par un calcul direct (si* $n = 2$ *ou* 3*) ou en utilisant la propriété précédente.*

Exemple 25.22 On va calculer, sous forme factorisée :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

où a, b, c sont trois complexes.

1. On commence par additionner toutes les lignes, disons dans la troisième : $L_3 \longleftarrow L_1+L_2+L_3$ On peut mettre $(a+b+c)$ en facteur.
$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. On effectue $\begin{array}{lcl} C_1 & \longleftarrow & C_1-C_3 \\ C_2 & \longleftarrow & C_2-C_3 \end{array}$:
$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 & 2a \\ 0 & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$
2. En procédant de la même façon :
$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+a+b+c).$
3. Là encore : $L_3 \longleftarrow L_1+L_2+L_3$ On peut mettre $(a+b+c)$ en facteur.
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & bj & cj^2 \\ c & aj & bj^2 \\ 1 & j & j^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a+bj+cj^2 & bj & cj^2 \\ c+aj+bj^2 & aj & bj^2 \\ 0 & j & j^2 \end{vmatrix} =$
$(a+b+c)(a+bj+cj^2)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ j & a & b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+bj+cj^2)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c \\ j & a-b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a-b+$
$cj-bj) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$.
4. On effectue $\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1-L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2-L_3 \end{array}$:
$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-c & a^2-c^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+c \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a).$
5. $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc-ab & ca-ab & ab \\ a-c & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} -b & -a & ab \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(a-b).$

DÉFINITION 25.29 ♡ **Mineur,cofacteur**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
- On appelle *mineur d'indice* (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.
- On appelle *cofacteur d'indice* (i,j) et on note $A_{i,j}$ le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}$.

THÉORÈME 25.52 ♡ **Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} A_{i,j_0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0}\, a_{i,j_0} \Delta_{i,j_0} \end{aligned}$$

- Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} A_{i_0,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j}\, a_{i_0,j} \Delta_{i_0,j} \end{aligned}$$

Démonstration *On peut le vérifier facilement par un calcul immédiat dans les cas $n=2$ et $n=3$.*

25.10 Applications

25.10.1 Colinéarité de deux vecteurs du plan

PROPOSITION 25.53 ♡ **Caractérisation de l'alignement de trois points du plan**

Soit $\mathscr{R}(O, e_1, e_2)$ un repère du plan. $e = (e_1, e_2)$ forme donc une base du plan. Soient $M_0\left(x_0, y_0\right)$, $M_1\left(x_1, y_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2\right)$ trois points distincts du plan. Alors, M_0, M_1, M_2 sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration *On a :*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad &\iff \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \text{ par des opérations sur les colonnes} \\
&\iff \quad \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \text{ par développement suivant la première ligne} \\
&\iff \quad \det_e\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}\right) = 0 \\
&\iff \quad \text{les vecteurs } \overrightarrow{M_0M_1} \text{ et } \overrightarrow{M_0M_2} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \quad \text{les points } M_0, M_1, M_2 \text{ sont alignés}
\end{aligned}$$

25.10.2 Inversion de matrice

DÉFINITION 25.30 ♡ **Comatrice**

Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **comatrice** de A et on note $\operatorname{Com}(A)$ la matrice des cofacteurs de A :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [\operatorname{Com}(A)]_{i,j} = A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

PROPOSITION 25.54 ♡

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \times {}^t(\operatorname{Com} A) = {}^t(\operatorname{Com}(A)) \times A = (\det A)\, I_n$$

En particulier, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t(\operatorname{Com}(A))$$

Démonstration *Notons, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $b_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ et posons $B = \left(b_{ij}\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :*

$$[A^tB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k}\Delta_{j,k} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 25.23

– Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $\det(A) = -1$, $A \in GL_2(\mathbb{R})$. On calcule $\operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t(\operatorname{Com}(A)) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

– Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule $\det(A) = 3$ donc $A \in GL_3(\mathbb{R})$. On calcule alors $\operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t(\operatorname{Com}(A)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 25.21 On comprend après ces quelques calculs les limitations pratiques de cette méthode. En dimension 2 et 3 les calculs restent faisables mais ils deviennent très lourds dés que $n \geqslant 4$ si la matrice ne possède pas beaucoup de 0.

25.10.3 Orientation du plan et de l'espace

DÉFINITION 25.31 ♡ **Bases de même sens, de sens contraire**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 ou 3. Soient e et e' deux bases de E. On dit que :
– e et e' sont de *même sens* (ou ont **même orientation**) si et seulement si $\det_e(e') > 0$.
– Sinon, on dit que e et e' sont de **sens contraires** (ou n'ont **pas la même orientation**).

DÉFINITION 25.32 ♡ **Orientation**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 ou 3. *Orienter* E revient à choisir une base e de E. Si e' une autre base de E, on dit qu'elle est **directe** si elle est de même sens que E et *indirecte* sinon.

Exemple 25.24 On oriente $E = \mathbb{R}^2$ en prenant la base canonique e. La base donnée par $e' = ((1,1),(1,-1))$ est indirecte. En effet :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

25.11 Systèmes linéaires

On termine ce chapitre par une étude des systèmes linéaires.

25.11.1 Définitions

DÉFINITION 25.33 ♡ **Système linéaire à n équations et p inconnues**
Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

On considère le système linéaire à n lignes et p inconnues $(\mathscr{S})$ donné par :

$$(\mathscr{S}) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

1. *Résoudre ce système* consiste à déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ de tous les p-uplets $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant $(\mathscr{S})$.
2. Le vecteur $b = (b_1,\dots,b_n)$ s'appelle le *second membre du système* $(\mathscr{S})$.
3. On appelle *système homogène associé* au système $(\mathscr{S})$, le système obtenu lorsque $b = 0$. On le note $(\mathscr{S}_0)$ et on note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble de ses solutions.
4. A s'appelle la *matrice du système* $(\mathscr{S})$.
5. rgA s'appelle le *rang du système* et est noté $\operatorname{rg}(\mathscr{S})$.
6. On dit que le système est *compatible* si l'ensemble de ses solutions est non vide.

25.11.2 Interprétations

La compréhension des différentes interprétations qu'on peut avoir d'un système linéaire est un bon test de votre compréhension de l'algèbre linéaire.

Interprétation vectorielle

Notons $C_1 = (a_{11},\dots,a_{n1}),\dots,C_p = (a_{1p},\dots,a_{np}) \in \mathbb{K}^n$ les p vecteurs colonnes de A et $b = (b_1,\dots,b_n)$ le second membre de $(\mathscr{S})$. On a :

$$\boxed{(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \Longleftrightarrow x_1C_1 + \dots x_pC_p = b}$$

Donc :
– Le système est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_p)$.
– $\operatorname{rg}(\mathscr{S}) = \operatorname{rg}(\{C_1,\dots,C_p\})$.

Interprétation matricielle

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ On a :

$$\boxed{(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \Longleftrightarrow AX = B}$$

Interprétation en termes de formes linéaires

Notons $E = \mathbb{K}^p$, e la base canonique de E et $L_1 = (a_{11},\dots,a_{1p}),\dots,L_n = (a_{n1},\dots,a_{np}) \in \mathbb{K}^p$ les n vecteurs lignes de A. Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ n formes linéaires sur E telles que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \operatorname{Mat}_e(\varphi_i) = L_i$$

On a :

$$\boxed{\begin{gathered} (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}_0) \\ \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \varphi_i(x_1,\dots,x_p) = 0 \\ \Longleftrightarrow (x_1,\dots,x_p) \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_i \end{gathered}}$$

Interprétation en termes d'applications linéaires

Considérons $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$ munis de leurs bases canoniques respectives e et f. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ l'unique application linéaire de E dans F telle que $\operatorname{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = A$ et x le vecteur de E tel que $\operatorname{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

On a :

$$\boxed{(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (\mathscr{S}) \Longleftrightarrow u(x) = b}$$

Donc :
- Le système $(\mathscr{S})$ est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{Im}(u)$.
- Si u est injective et si le système $(\mathscr{S})$ est compatible alors l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ ne possède qu'un et un seul élément.
- Si u est surjective, le système $(\mathscr{S})$ est compatible.
- Si u est à la fois surjective et injective alors l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ ne possède qu'une et une seule solution.

25.11.3 Structure de l'ensemble des solutions

THÉORÈME 25.55 ♡ **Structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène**
Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire à n équations et p inconnues. L'ensemble des solutions du système homogène $(\mathscr{S}_0)$ associé à $(\mathscr{S})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p - \operatorname{rg}(\mathscr{S})$.

Démonstration *Soit $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire représentée par A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. Soit $x = (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p$. x est solution de $(\mathscr{S}_0)$ si et seulement si $u(x) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x \in \operatorname{Ker} u$. Par conséquent $(\mathscr{S}_0) = \operatorname{Ker} u$. Ceci prouve à la fois que $(\mathscr{S}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ mais aussi que, d'après la formule du rang, $\dim(\mathscr{S}_0) = \dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathbb{K}^p - \operatorname{rg} u = p - \operatorname{rg}\mathscr{S}$.*

THÉORÈME 25.56 ♡ **Structure de l'ensemble des solutions de** $(\mathscr{S})$
Soit S l'ensemble des solutions du système linéaire $(\mathscr{S})$.

1. Si le système $(\mathscr{S})$ n'est pas compatible alors $\mathscr{S} = \varnothing$.
2. Sinon, alors il existe une solution particulière x_0 de $(\mathscr{S})$ et on a alors :

$$\mathscr{S} = x_0 + \mathscr{S}_0 = \left\{x_0 + x \in \mathbb{K}^p \mid x \in S_0\right\}$$

Démonstration *Supposons que le système $(\mathscr{S})$ soit compatible, alors $\mathscr{S} \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in \mathscr{S}$. On a :*

$$x \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow u(x) = b \Longleftrightarrow u(x - x_0) = 0 \Longleftrightarrow x - x_0 \in \operatorname{Ker} u = \mathscr{S}_0 \Longleftrightarrow x = x_0 + \mathscr{S}_0$$

25.11.4 Cas Particulier : Les systèmes de Cramer

DÉFINITION 25.34 ♡ **Système de Cramer**
Un système de n équations à n inconnues de rang n est dit de **Cramer**.

Remarque 25.22 Matriciellement, un système de Cramer s'écrit $AX = B$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 25.57 ♡ **Résolution matricielle d'un système de Cramer**
Un système de Cramer possède une et une seule solution qui s'écrit matriciellement : $X = A^{-1}B$.

Démonstration A *étant inversible, la proposition est immédiate.*

PROPOSITION 25.58 ♡ **Formules de Cramer**
Si $(\mathscr{S})$ est un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$, l'unique solution de $(\mathscr{S})$ est le n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ tel que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \boxed{x_i = \frac{\det A_i}{\det A}}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par B.

Démonstration *Soit $(x_1,\dots,x_n)$ l'unique solution de $(\mathscr{S})$ alors si $C_1,\dots,C_n$ désignent les vecteurs colonnes de A, on a : $\sum_{k=1}^n x_k C_k = B$. Par conséquent, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :*

$$\begin{aligned}\det\left(C_1,\dots,C_{i-1},B,C_{i+1},\dots,C_n\right) &= \sum_{k=1}^n x_k \det\left(C_1,\dots,C_{i-1},C_k,C_{i+1},\dots,C_n\right)\\ &= x_i \det\left(C_1,\dots,C_{i-1},C_i,C_{i+1},\dots,C_n\right) = x_i \det(A)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 25.23 En particulier, si $n = 2$, on a : Soit

$$(\mathscr{S}) = \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}.$$

Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Ce système est de Cramer si et seulement si $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ et dans ce cas, le couple solution de $(\mathscr{S})$ est donné par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{ad-bc} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}}{ad-bc}$$

25.11.5 Méthode du Pivot de Gauss

Remarque 25.24 Si un système à n équations et à n inconnues est sous forme triangulaire (c'est à dire si la matrice A correspondante est triangulaire et sans zéro sur la diagonale) alors il est de Cramer. En effet, la matrice A est inversible.

Méthode : Résolution d'un système de Cramer par la méthode de Gauss

Soit $(\mathscr{S})$ un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$. La méthode du pivot de Gauss consiste, en utilisant des oel à transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure en effectuant les mêmes opérations sur la matrice colonne B. Le système correspondant est alors équivalent au système initial et possède donc le même ensemble solution.

La descente : $\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ -x & -3y & +5z & = & 2 \\ x & +y & +z & = & -1 \end{cases}$

On fait apparaître des zéros : coefficients de x dans les deuxièmes et troisièmes lignes. On ne touche pas à la première.

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 & \\ & -y & +8z & = & 3 & L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ & y & +2z & = & 2 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

Ces opérations sur les lignes se traduisent par des multiplications à gauche par des matrices. Il suffit de voir le résultat sur la matrice I_3. Donc il s'agit de la matrice

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$G_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$G_1 \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On continue de «sculpter» le système (ou la matrice $\tilde{A}$ obtenue en soudant les matrices A et B) pour faire apparaître un zéro : le coefficient de y dans la troisième ligne.

$$\left\{ \begin{array}{rrrcll} x & +2y & +3z & = & 1 & \\ & -y & +8z & = & 3 & \\ & & 10z & = & 5 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

Cette fois

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à remonter : On trouve successivement $z = \frac{1}{2}$, $y = 1$ et $x = -\frac{5}{2}$.
Il est à remarquer que G_1 et G_2 sont inversibles. Pour trouver leurs inverses, il suffit de défaire ce que faisaient ces matrices.

Pour G_1^{-1} : $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$.

Donc

$$G_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{De même } G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

25.12 Exercices

25.12.1 Opérations sur les matrices

Exercice 25.1 ♡

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer :* AB *et* BA.
2. *Calculer :* ${}^t(AB)$ *et* ${}^tB$, ${}^tA$ *et* ${}^tB\,{}^tA$.
3. *Calculer :* $\mathrm{Tr}\,(A)$, $\mathrm{Tr}\,(B)$, $\mathrm{Tr}\,(AB)$ *et* $\mathrm{Tr}\,(BA)$.
4. *Développer :* $(A+B)^2$.

Solution :

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *On remarque que* $AB \neq BA$.
2. ${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* ${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = {}^t(AB)$.
3. $\mathrm{Tr}\,(A) = 1$, $\mathrm{Tr}\,(B) = 3$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = 2$ *et* $\mathrm{Tr}\,(BA) = 2$. *On a bien :* $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$
4. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ *car* $AB \neq BA$. *De manière plus générale, la formule du binôme ne s'applique pour développer* $(A+B)^n$ *que si* A *et* B *commutent.*

Exercice 25.2 ♡

Calculer lorsque cela est possible les produits AB *et* BA *:*

1. $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution :

1. $AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. *Le produit* AB *n'est pas possible. Par contre :* $BA = B$.
3. $AB = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 25.3 ♡♡

1. *Soient* $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$ *et* E_{ij}, E_{kl} *les matrices élémentaires de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *correspondantes. Calculer* $E_{ij} \times E_{kl}$.

2. *Soit une matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On suppose que* A *commute avec toutes les matrices diagonales. Montrer que* A *est une matrice diagonale.*
3. *Trouver les matrices* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *qui commutent avec toutes les matrices symétriques.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* $E_{ij} \times E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}$
2. *Notons* $A = ((a_{ij}))$. *Soit* $k \in [1, n]$. *Comme* A *commute avec la matrice* E_{kk}, *on a*

$$AE_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}$$

et

$$E_{kk}A = a_{ij}E_{ij}E_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{kk}E_{ij}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}E_{kj},$$

Ceci pour tout indice k.

Comme le membre de gauche est une matrice nulle sauf peut-être sur la k*-ième colonne et le membre de droite, une matrice nulle sauf peut-être sur la* k*-ième ligne. On en déduit que pour* $i \neq k$, $a_{ik} = 0$ *et donc que* A *est une matrice diagonale. La réciproque est claire.*

3. *Soit une matrice* $A = ((a_{ij}))$ *qui commute avec toutes les matrices symétriques. Soit* $k \in [\![1, n]\!]$. *La matrice* E_{kk} *est symétrique, et on calcule*

$$AE_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}E_{kk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk}E_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{ik}$$

$$E_{kk}A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{kk}E_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{ki}E_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}E_{kj}$$

Par conséquent, les coefficients de la matrice AE_{kk} *sont nuls, sauf sur la* k*-ième colonne où ce sont les coefficients de la* k*-ième colonne de la matrice* A. *De même, les coefficients de la matrice* $E_{kk}A$ *sont tous nuls sauf sur la* k*-ième ligne, où l'on retrouve les coefficients de la matrice* A. *Puisque* $AE_{kk} = E_{kk}A$, *on en déduit que* $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq k \implies a_{ik} = a_{ki} = 0_{\mathbb{K}}$. *La matrice* A *est donc nécessairement une matrice diagonale :* $A = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii}$.
Considérons ensuite pour $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \neq \ell$, *la matrice symétrique* $S = E_{k\ell} + E_{\ell k}$. *On calcule*

$$AS = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii}E_{k\ell} + \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii}E_{\ell k} = d_k E_{k\ell} + d_\ell E_{\ell k}$$

$$SA = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{k\ell}E_{ii} + \sum_{i=1}^{n} d_i E_{\ell k}E_{ii} = d_\ell E_{k\ell} + d_k E_{\ell k}$$

Puisque le système $(E_{k\ell}, E_{\ell k})$ *est libre, on trouve que* $d_\ell = d_k$. *En définitive, la matrice* A *doit être une matrice scalaire :* $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ *tel que* $A = \alpha I_n$. *Réciproquement, une matrice scalaire commute avec toute matrice, donc avec toute matrice symétrique.*

Exercice 25.4 ♡♡

Soit une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *et deux indices* $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$.

1. *Déterminer les matrices* AE_{kl} *et* $E_{kl}A$.
2. *Trouver toutes les matrices* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant :* $\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA$.

Solution :

1. *On sait que* $A = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}E_{ij}$ *donc*

$$AE_{kl} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\delta_{jk}E_{il} = \sum_{i=1\dots n} a_{ik}E_{il}$$

$$E_{kl}A = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}E_{kl}E_{ij} = \sum_{i,j=1\dots n} a_{ij}\delta_{li}E_{kj} = \sum_{j=1\dots n} a_{lj}E_{kj}$$

2. *Si pour tout* $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, *alors en particulier, pour tout* $k, l \in [\![1, n]\!]$, $E_{kl}A = AE_{lk}$ *et donc* $\sum_{i=1\dots n} a_{ik}E_{il} = \sum_{j=1\dots n} a_{lj}E_{kj}$. *Mais la famille* (E_{ij}) *est libre donc cette égalité n'a lieu que si* $a_{ik} = 0$ *pour* $i \neq k$ *et si* $a_{i,i} = a_{j,j}$ *pour tout* $i, j \in [\![1, n]\!]$, *autrement dit que si* A *est scalaire. Réciproquement, si* A *est scalaire alors elle commute avec toutes les matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 25.5 ♡♡

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

Solution : *Soit* $C = AB$, *où* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ *sont deux matrices carrées symétriques. On a* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{ki} = c'_{ji}$ *avec* $C' = BA$. *Donc* $c_{ij} = c_{ji}$ *si et seulement si* $C = C'$ *c'est-à-dire lorsque* A *et* B *commutent.*
Plus synthétiquement : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = BA$ *car* $A = {}^tA$ *et* $B = {}^tB$. *Donc* ${}^t(AB) = AB$ *si et seulement si* $AB = BA$.

Exercice 25.6 ♡♡

On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 \\ \mathbb{O} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer ${}^tJJ$, *et* $J\,{}^tJ$.

Solution : *On considère* $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *défini par* $u(e_1) = 0$ *et* $u(e_i) = e_{i-1}$ *pour* $i \geqslant 2$. J *est la matrice de* u *dans* $\mathscr{B}$. ${}^tJ$ *est la matrice de* v *dans* $\mathscr{B}$, *avec* $v(e_i) = e_{i+1}$ *pour* $i \leqslant n-1$ *et* $v(e_n) = 0$. ${}^tJJ$ *est la matrice de* $v \circ u$ *dans* $\mathscr{B}$. *On a* $v \circ u(e_1) = 0$ *et* $v \circ u(e_i) = v(e_{i-1}) = e_i$. *Donc*

$${}^tJJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{de même} \quad J\,{}^tJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.7 ♡♡

On définit pour $i \neq j$, *la matrice* $T_{ij}^{\lambda} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *par*

$$T_{ij}^{\lambda} = I + \lambda E_{ij}$$

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer* AT_{ij}^{λ} *et* $T_{ij}^{\lambda}A$. *Interpréter le résultat trouvé.*

Solution : *Soit* e_i *les vecteurs colonnes de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *On a* $T_{ij}^{\lambda}e_k = e_k$ *pour* $k \neq i$ *et* $T_{ij}^{\lambda}e_j = e_j + \lambda e_i$. *On en déduit que la* k*-ième colonne de la matrice de* AT_{ij}^{λ} *est* $AT_{ij}^{\lambda}e_k = Ae_k$ *pour* $k \neq i$ *et* $AT_{ij}^{\lambda}e_j = Ae_j + \lambda Ae_i$. *Moralité : la matrice* AT_{ij}^{λ} *est obtenue en ajoutant* λ *fois la* i*-ème colonne de* A *à sa* j*-ème colonne.*
De même (par exemple en transposant) la matrice $T_{ij}^{\lambda}A$ *est obtenue en ajoutant* λ *fois la* j*-ème ligne de* A *à sa* i*-ème ligne.*
Moralité : *Lorsqu'on multiplie à gauche (par une matrice* T_{ij}^{λ}*) on agit sur les lignes. Quelle action ? Il suffit de le voir sur la matrice* I_n.

Exercice 25.8 ♡♡

Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (X, Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAY = 0.$$

1. *Montrer que* $A = 0$.

2. *Trouver une matrice* 2×2 *non-nulle telle que*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{21}(\mathbb{R}) \quad {}^tXAX = 0.$$

Solution :

1. *Soit* f_j *la* j*-ème matrice de la base naturelle de* $\mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{R})$ *et* e_i *la* i*-ème matrice de la base naturelle de* $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$*. On a* ${}^te_iAf_j = a_{ij}$ *d'où le résultat.*
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.9 ♡♡

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que :*

$$\forall C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad ACB = 0$$

Montrer que $A = 0$ *ou* $B = 0$.

Solution : *On traduit l'énoncé avec des endomorphismes : Soit* $u, v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *tels que* $\forall w \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $u\circ w\circ v = 0$. *Démonter que* $u = 0$ *ou* $v = 0$.
Par contraposée : Supposons $u \neq 0$ *et* $v \neq 0$*. Donc* $\exists x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $z = v(x) \neq 0$ *et* $\exists y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $u(y) \neq 0$*. On construit alors* $w \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $w(z) = y$*. On a alors* $(u\circ w\circ v)(x) = u(y) \neq 0$*. Donc* $u\circ w\circ v \neq 0$.

Exercice 25.10 ♡♡

Soit deux matrices colonnes non nulles $X, Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la matrice* $X{}^tY$ *est de rang* 1.
2. *Montrer que toute matrice carrée* A *de rang* 1 *peut s'écrire sous la forme ci-dessus.*
3. *Soit une matrice* $A \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ *de rang* 1*. Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$A^2 = \lambda A$$

et exprimer λ *en fonction de* X *et* Y.

Solution :

1. *Le rang de* X *et de* ${}^tY$ *égale* 1 *donc le rang du produit est* $\leqslant 1$*. Par exemple parce que toutes les lignes (ou les colonnes) sont proportionnelles, ou bien parce que si* u *et* v *sont deux applications linéaires,* $u\circ v$ *(si elle existe) a un rang inférieur au rang de* u*. Le rang de* $X{}^tY$ *n'est pas* 0 *manifestement.*
2. *Comme* $A \neq 0$*, on choisit un élément* $a_{ij} \neq 0$*. Comme* A *est de rang* 1*, toutes les lignes sont proportionnelles à la* i*-ème ligne :* $L_k = \alpha_k L_i$*. Donc on peut prendre* $X = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ *et* $Y = (a_{i1}, \dots, a_{in})$.
3. *On écrit* $A = X{}^tY$*, d'où* $A^2 = AA = X{}^tYX{}^tY$*. Comme* ${}^tYX$ *est un réel, il commute à* X*. Donc* $AA = ({}^tYX)X{}^tY = ({}^tYX)A$*. On peut donc prendre* $\lambda = {}^tYX$.

Exercice 25.11 ♡♡

Déterminer toutes les formes linéaires φ *sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(AB) = \varphi(B{}^tA)$$

Solution : *Remarque : Si* $n = 1$*, alors toutes les formes linéaires conviennent.*
On prend $n > 1$*. Une forme linéaire est définie par ses images des vecteurs d'une base, donc ici les* $\varphi(E_{ik})$.
Or $E_{ik} = E_{ij}E_{jk}$ *donc en choisissant* $A = E_{ij}$ *et* $B = E_{jk}$ *avec* $k \neq j$ *(c'est possible puisque* $n > 1$*) on a* $B{}^tA = E_{jk}E_{ji} = 0$.
Donc $\varphi(E_{ik}) = 0$ *et* φ *est la forme nulle.*

Exercice 25.12 ♡♡

On considère deux matrices A *et* B *de* $M_2(\mathbb{R})$*, et* $C = AB$.

1. *Calculer le nombre d'additions, puis de multiplications nécessaires au calcul de* C.
2. *On pose :* $S_1 = a_{21} - a_{11}$; $S_2 = a_{11} + a_{12}$; $S_3 = a_{12} - S_1$; $S_4 = a_{22} - S_3$; $S_5 = b_{22} - b_{12}$; $S_6 = b_{12} - b_{11}$; $S_7 = b_{11} + S_5$; $S_8 = b_{21} - S_7$.
   $P_1 = a_{21}b_{11}$; $P_2 = a_{22}b_{21}$; $P_3 = S_1S_5$; $P_4 = S_2S_6$; $P_5 = S_4b_{22}$; $P_6 = a_{12}S_8$; $P_7 = S_3S_7$*. Enfin* $S_9 = P_1 + P_7$; $S_{10} = S_9 + P_3$; $S_{11} = P_4 + P_5$.
   Démontrer que $c_{11} = S_{10} + P_6$; $c_{12} = S_{10} + P_4$; $c_{21} = P_1 + P_2$; $c_{22} = S_9 + S_{11}$.
3. *Calculer le nombre d'additions, puis de multiplications nécessaires au calcul de* C *par cette nouvelle méthode.*

Solution :

1. *Il y a* 4 *coefficients à calculer. Pour chacun d'eux il y a deux multiplications et une addition. Soit* 8 *multiplications et* 4 *additions.*
2. $S_{10}+P_6 = S_9+P_3+a_{12}S_8 = P_1+P_7+S_1S_5+a_{12}(b_{21}-S_7) = a_{21}b_{11}+S_3S_7+(a_{21}-a_{11})(b_{22}-b_{12})+a_{12}b_{21}-a_{12}(b_{11}+S_5) = a_{21}b_{11}+(a_{12}-S_1)(b_{11}+S_5)+a_{21}b_{22}-a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}+a_{11}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{12}b_{11}-a_{12}(b_{22}-b_{12}) = a_{21}b_{11}+a_{12}b_{11}+a_{12}(b_{22}-b_{12})-(a_{21}-a_{11})b_{11}-(a_{21}-a_{11})(b_{22}-b_{12})+a_{21}b_{22}-a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}+a_{11}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{12}b_{11}-a_{12}b_{22}+a_{12}b_{12} = a_{21}b_{11}+a_{12}b_{11}+a_{12}b_{22}-a_{12}b_{12}-a_{21}b_{11}+a_{11}b_{11}-a_{21}b_{22}+a_{21}b_{12}+a_{11}b_{22}-a_{11}b_{12}+a_{21}b_{22}-a_{21}b_{12}-a_{11}b_{22}+a_{11}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{12}b_{11}-a_{12}b_{22}+a_{12}b_{12} = a_{11}b_{11}+a_{11}b_{22}-a_{11}b_{12}-a_{11}b_{22}+a_{11}b_{12}+a_{12}b_{11}+a_{12}b_{22}-a_{12}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{12}b_{11}-a_{12}b_{22}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{11}-a_{21}b_{11}-a_{21}b_{22}+a_{21}b_{12}+a_{21}b_{22}-a_{21}b_{12} = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+0 = c_{11}$. *Les trois autres calculs sont tout aussi jubilatoires.*
3. *Il y a* 7 *multiplications et* 11 *additions. Le deuxième algorithme est plus rapide dès qu'une addition est* 7 *fois plus rapide qu'une addition. Dans ce cas on constate que le gain en rapidité est au détriment de la place mémoire utilisée.*

25.12.2 Trace d'une matrice

Exercice 25.13 ♡

Existe-t-il deux matrices $(A,B)\in M_n(\mathbb{R})^2$ *vérifiant* $AB-BA = I_n$ *?*

Solution : *Si* $AB-BA=I_n$, *en prenant la trace, on obtiendrait* $\text{Tr}(AB)-\text{Tr}(BA)=\text{Tr}(I_n)$ *et alors* $\text{Tr}(I_n)=0$ *ce qui est faux.*

Exercice 25.14 ♡

Soit $(A,B)\in M_n(\mathbb{R})^2$ *vérifiant* $AB-BA=B$.
Démontrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(B^k)=0$.

Solution : *On démontre par récurrence :* $H_k : AB^k - B^kA = kB^k$. *On a* H_1 *par hypothèse. D'autre part*

$$AB^{k+1}-B^{k+1}A = (AB^k-B^kA)B+B^k(AB-BA) = kB^kB+B^kB = (k+1)B^{k+1}.$$

En prenant la trace, on obtient le résultat.

Exercice 25.15 ♡

Soit deux matrices $A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que*

$$\forall X\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\quad \text{Tr}(AX)=\text{Tr}(BX)$$

Montrer que $A=B$.

Solution : *Si* $A=((a_{ij})$ *et* $X=((x_{ij}))$, *on calcule*

$$\text{Tr}(AX)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{ki}$$

En prenant $X=E_{pq}$, *on a* $x_{ki}=\delta_{kp}\delta_{iq}$, $\text{Tr}(AX)=a_{qp}$, *donc* $\forall q,p\in[1,n]$, $a_{qp}=b_{qp}$ *et par suite* $A=B$.

Exercice 25.16 ♡♡

On se donne deux matrices $A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Trouver toutes les matrices* $X\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$X+\text{Tr}(X)A=B.$$

Indication 25.24 : Si X *est une solution, prendre la trace de l'équation puis discuter.*

Solution : *Soit une matrice* $X\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *solution. Alors* $\text{Tr}(X)+\text{Tr}(X)\text{Tr}(A)=\text{Tr}(B)$. *Il faut étudier deux cas :*

1. *Si* $\text{Tr}(A)\neq -1$, *alors* $\text{Tr}(X)=\dfrac{\text{Tr}(B)}{1+\text{Tr}(A)}$ *et alors* $X=B-\dfrac{\text{Tr}(B)}{1+\text{Tr}(A)}A$. *Réciproquement, on vérifie que cette matrice convient.*

2. *Si* $\mathrm{Tr}(A) = -1$, *alors en prenant la trace dans l'égalité* $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$ *on déduit* $\mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ *soit* $\mathrm{Tr}(B) = 0$. *Donc si* $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$, *il n'y a pas de solution.*
   Réciproquement, si on suppose $\mathrm{Tr}(B) = 0$, *alors en posant* $X = B + \lambda A$, *on a bien* $\mathrm{Tr} X = \mathrm{Tr} B + \lambda \mathrm{Tr} A = -\lambda$, *et par conséquent* $X + \mathrm{Tr}(X)A = X - \lambda A = B + \lambda A - \lambda A = B$.
   Dans le cas où $\mathrm{Tr}(A) = -1$ *et* $\mathrm{Tr}(B) = 0$, *l'ensemble des solutions est* $\mathscr{S} = \{B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Conclusion : Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, $\mathscr{S} = \left\{B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)} A\right\}$. *Si* $\mathrm{Tr}(A) = -1$ *et* $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$, $\mathscr{S} = \varnothing$. *Si* $\mathrm{Tr}(A) = -1$ *et* $\mathrm{Tr}(B) = 0$, *alors* $\mathscr{S} = \{B + \lambda A; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 25.17 ♡♡

Trouver toutes les formes linéaires φ *sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant*

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

Solution : *Soit* φ *une telle forme linéaire. Avec des matrices élémentaires, il vient pour tout* $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, $\varphi\left(E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}\right) = 0$ *soit* $\varphi\left(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{\ell i}E_{kj}\right) = 0$. *Si* $j = k$ *et* $i \neq \ell$ *il s'ensuit que* $\varphi(E_{i\ell}) = 0$. *Et si* $j = k$ *et* $i = \ell$ *alors* $\varphi\left(E_{ii} - E_{jj}\right) = 0$. *Donc* φ *est nulle sur tous les vecteurs* $E_{i\ell}$ *de la base canonique tel que* $i \neq \ell$ *et constante sur ceux tels que* $i = \ell$. *On en déduit que pour une matrice* $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *alors* $\varphi(A) = \gamma \sum_{i=1}^n a_{ii} = \gamma \mathrm{Tr}(A)$ *où* $\gamma = \varphi(E_{11})$. *Donc* $\varphi \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Tr})$. *Réciproquement, si* φ *est proportionnelle à la trace, alors* φ *vérifie* $\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$.

Exercice 25.18 ♡♡

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *On note*

$$< A, B >= \mathrm{Tr}(A^t B)$$

1. *Calculer* $< A, B >$ *en fonction des coefficients de* A *et* B.
2. *Vérifier que* $< A, B >=< B, A >$
3. *On note* $\|A\| = \sqrt{< A, A >}$. *Montrer que* $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.
4. *Montrer que* $A \mapsto < A, B >$ *et* $B \mapsto < A, B >$ *sont des formes linéaires sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
5. *Montrer que* $|< A, B >| \leqslant \|A\| \|B\|$.

On a prouvé que $<,>$ *est un produit scalaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *voir le chapitre 27. L'inégalité prouvée dans la dernière question n'est autre que celle de Cauchy-Schwarz.* *Voir le théorème 27.2 page 1063.*

Solution :

1. *On utilise la formule du produit matriciel. Si* $A = \left(a_{ij}\right)$ *et si* $B = \left(b_{ij}\right)$ *Pour tout* $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\left[A^t B\right]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk}$ *donc* $\boxed{< A, B >= \mathrm{Tr}\left(A^t B\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ik}}$.
2. *C'est évident d'après la formule précédente.*
3. *On utilise à nouveau la formule précédente :* $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$. *Le résultat en découle immédiatement.*
4. *On montre facilement la linéarité de* $A \mapsto < A, B >$ *en utilisant la linéarité de* Tr. *D'après la question 2.,* $B \mapsto < A, B >$ *est aussi linéaire.*
5. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$,
   $$0 \leqslant \|A + tB\|^2 =< A + tB, A + tB >= \|B\|^2 t^2 + 2 < A, B > t + \|A\|^2 .$$
   On obtient ainsi un trinôme du second degré en t. *Son discriminant est* $\Delta =< A, B >^2 - \|A\|^2 \|B\|^2$. *Comme ce trinôme est positif, il admet au plus une racine réelle et donc* $\Delta \leqslant 0$. *On en déduit que* $< A, B >^2 - \|A\|^2 \|B\|^2 \leqslant 0$ *et donc que* $|< A, B >| \leqslant \|A\| \|B\|$.

25.12.3 Rang d'une matrice

Exercice 25.19 ♡

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solution :

1.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\xlongequal{C_1\leftrightarrow C_3}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\xlongequal{L_3\leftarrow L_3-L_2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&2\\0&0&-3\end{pmatrix}=\boxed{3}$$

2.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\2&-1&1&-1\\3&2&0&1\\4&3&-1&1\end{pmatrix}\xlongequal{C_1\leftrightarrow C_3}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&-1&1&2\\1&-1&2&-1\\0&2&3&1\\-1&3&4&1\end{pmatrix}\xlongequal{L_1\leftrightarrow L_2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&1&2\\0&2&3&1\\-1&3&4&1\end{pmatrix}\xlongequal{L_4\leftarrow L_4+L_1}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&0&2\\0&2&3&1\\0&2&6&0\end{pmatrix}\xlongequal{L_4\leftarrow L_4/2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&1&2\\0&2&3&1\\0&1&3&0\end{pmatrix}\xlongequal[L_4\to L_4+L_2]{L_3\to L_3+2L_2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&1&2\\0&0&3&5\\0&0&5&2\end{pmatrix}\xlongequal{L_4\leftarrow L_4-\frac{5}{3}L_3}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&-1&1&2\\0&0&3&5\\0&0&0&-\frac{11}{3}\end{pmatrix}=\boxed{4}$$

3.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2&2&1&0&1&1\\1&2&1&0&-1&2\\2&3&1&-1&0&1\\-1&0&1&2&3&1\end{pmatrix}\xlongequal{C_1\leftrightarrow C_4}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&2&1&2&1&1\\0&2&1&1&-1&2\\-1&3&1&2&0&1\\2&0&1&-1&3&1\end{pmatrix}\xlongequal{L_1\leftrightarrow L_3}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2&0&1\\0&2&1&1&-1&2\\0&2&1&2&1&1\\2&0&1&-1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{L_4\leftarrow L_4+2L_1}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2&0&1\\0&2&1&1&-1&2\\0&2&1&2&1&1\\0&6&3&3&3&3\end{pmatrix}\xlongequal{L_4\leftarrow L_4/3}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2&0&1\\0&2&1&1&-1&2\\0&2&1&2&1&1\\0&2&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xlongequal[L_4\leftarrow L_4-L_2]{L_3\leftarrow L_3-L_2}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2&0&1\\0&2&1&1&-1&2\\0&0&0&1&2&-1\\0&0&0&0&2&-1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&3&0&2&1\\0&2&-1&1&2\\0&0&2&1&-1\\0&0&2&0&-1\end{pmatrix}=\boxed{4}$$

On a supprimé la troisième colonne, combinaison linéaire des deux premières.

Exercice 25.20 ♡♡

Déterminer suivant la (ou les) valeur(s) du (des) paramètre(s) le rang des matrices :

1. $A=\begin{pmatrix}1-a&0&0\\-1&2-a&1\\2&0&3-a\end{pmatrix}$
2. $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{pmatrix}$.
3. $C=\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos2\theta\\\cos\theta&\cos2\theta&\cos3\theta\\\cos2\theta&\cos3\theta&\cos4\theta\end{pmatrix}$.
4. $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$.
5. $E=\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\0&a&b&0&0\\0&0&a&b&0\\0&0&0&a&b\\b&0&0&0&a\end{pmatrix}$.

Solution :

1.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-a&0&0\\-1&2-a&1\\2&0&3-a\end{pmatrix}\xlongequal{\text{transpo.}}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-a&-1&2\\0&2-a&0\\0&1&3-a\end{pmatrix}\xlongequal{\text{si } a\neq 1}1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2-a&0\\1&3-a\end{pmatrix}\xlongequal{\text{transpo.}}$$

$$1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2-a&1\\0&3-a\end{pmatrix}\xlongequal{\text{si } a\neq 2}2+\operatorname{rg}(3-a)$$

De plus, on vérifie facilement que si $a=1$ *ou* $a=2$ *alors* $\operatorname{rg}A=2$*.Donc* $\operatorname{rg}A=\begin{cases}2 & \text{si } a=1,2 \quad \text{ou} \quad 3\\ 3 & \text{sinon}\end{cases}$.

2.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\ b+c&c+a&a+b\\ bc&ca&ab\end{pmatrix}\overset{\text{transpo.}}{=\!=\!=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&b+c&bc\\ 1&c+a&ca\\ 1&a+b&ab\end{pmatrix}\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=\!=\!=\!=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&b+c&bc\\ 0&a-b&c(a-b)\\ 0&a-c&b(a-c)\end{pmatrix}=$$

$$1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}a-b&c(a-b)\\ a-c&b(a-c)\end{pmatrix}\overset{\text{si } a\neq b \text{ et } a\neq c}{=\!=\!=\!=}1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&c\\ 1&b\end{pmatrix}=\begin{cases}3&\text{si } b\neq c\\ 2&\text{si } b=c\end{cases}.$$

En utilisant les symétries de la matrice, on en déduit que $\operatorname{rg}B=\begin{cases}1&\text{si } a=b=c\\ 2&\text{si deux parmi les trois nombres } a,\ b \text{ et } c \text{ sont égaux et le troisième différent}\\ 3&\text{si } b\neq c \quad\text{et}\quad a\neq b \quad\text{et}\quad a\neq c\end{cases}$

3. *Si* $\theta\neq 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ \cos\theta&\cos 2\theta&\cos 3\theta\\ \cos 2\theta&\cos 3\theta&\cos 4\theta\end{pmatrix}\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\cos\theta L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\cos 2\theta L_1}}{=\!=\!=\!=\!=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ 0&\cos 2\theta-\cos^2\theta&\cos 3\theta-\cos\theta\cos 2\theta\\ 0&\cos 3\theta-\cos 2\theta\cos\theta&\cos 4\theta-\cos^2 2\theta\end{pmatrix}=$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ 0&-\sin^2\theta&-\sin 2\theta\sin\theta\\ 0&-\sin 2\theta\sin\theta&-\sin^2 2\theta\end{pmatrix}\overset{\substack{L_2\leftarrow \frac{L_2}{-\sin\theta}\\ L_3\to\frac{L_3}{-\sin 2\theta}}}{=\!=\!=\!=\!=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ 0&\sin\theta&\sin 2\theta\\ 0&\sin\theta&\sin 2\theta\end{pmatrix}\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=\!=\!=\!=}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\ 0&\sin\theta&\sin 2\theta\\ 0&0&0\end{pmatrix}=2.$$

Par ailleurs si $\theta=0\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $rg C=2$.

4.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\ a&b&c\\ a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&a&a^2\\ 1&b&b^2\\ 1&c&c^2\end{pmatrix}\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=\!=\!=\!=}\begin{pmatrix}1&a&a^2\\ 0&b-a&b^2-a^2\\ 0&c-a&c^2-a^2\end{pmatrix}=1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}b-a&b^2-a^2\\ c-a&c^2-a^2\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{si } b\neq a \text{ et } c\neq a}{=\!=\!=\!=}1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&b+a\\ 1&c+a\end{pmatrix}\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=\!=\!=}1+\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&b+a\\ 0&c-b\end{pmatrix}=2+\operatorname{rg}(c-b)=\begin{cases}3&\text{si } c\neq b\\ 2&\text{si } c=b\end{cases}$$

En utilisant les symétries de la matrice, on en déduit que $\operatorname{rg}D=\begin{cases}1&\text{si } a=b=c\\ 2&\text{si deux parmi les trois nombres } a,\ b \text{ et } c \text{ sont égaux et le troisième différent}\\ 3&\text{si } b\neq c \quad\text{et}\quad a\neq b \quad\text{et}\quad a\neq c\end{cases}.$

5. *Supposant* $a\neq 0$ *et* $b\neq 0$ *:*

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ b&0&0&0&a\end{pmatrix}\overset{L_5\leftarrow aL_5-bL_1}{=\!=\!=\!=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ 0&-b^2&0&0&a^2\end{pmatrix}\overset{L_5\leftarrow aL_5+b^2L_2}{=\!=\!=\!=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ 0&0&b^3&0&a^3\end{pmatrix}$$

$$\overset{L_5\leftarrow aL_5-b^3L_3}{=\!=\!=\!=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ 0&0&0&-b^4&a^4\end{pmatrix}\overset{L_5\leftarrow aL_5+b^4L_4}{=\!=\!=\!=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}a&b&0&0&0\\ 0&a&b&0&0\\ 0&0&a&b&0\\ 0&0&0&a&b\\ 0&0&0&0&b^5+a^5\end{pmatrix}=\begin{cases}5&\text{si } a^5+b^5\neq 0\\ 4&\text{si } a^5+b^5=0\end{cases}$$

En résumé, (et dans le cas où a *et* b *sont réels) :* $\operatorname{rg}(E)=0$ *si* a *et* b *sont non nuls.* $\operatorname{rg}(E)=5$ *si* a *ou* b *est nul mais pas en même temps.* $\operatorname{rg}E=4$ *si* $a=1$ *et* $b=-1$ *ou si* $a=-1$ *et* $b=1$*. Dans tous les autres cas* $\operatorname{rg}(E)=5$.

Exercice 25.21 ♡

Calculer le rang des familles de vecteurs $v = (v_1, v_2, v_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *suivantes avec :*

1. $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$.
2. $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,2,1)$.
3. $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (1,-1,1)$.

Solution :

1. *On a très clairement une base de* $\mathbb{R}^3$. *Le rang est* 3.
2. v_1 *et* v_2 *forment une famille libre.* $v_3 = v_1 + v_2$. *Le rang est* 2.
3. *Le rang de la famille* v *est le rang de la matrice* $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$. *En opérant sur les lignes, on obtient :*

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&1&0\end{pmatrix}, \text{ puis } L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&2\end{pmatrix}.$$ *Le rang est donc* 3.

Exercice 25.22 ♡

Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x, -z) \end{cases}$.
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \longmapsto & (s+t, 2s-t, t) \end{cases}$.
3. $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$.
4. $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P \end{cases}$.

Solution :

1. *C'est le rang de la matrice* $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ *qui est clairement de rang* 3.
2. *C'est le rang de la matrice* $\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\\0&1\end{pmatrix}$ *qui est clairement de rang* 2 *en regardant les deux dernières lignes.*
3. *L'image de la base* $(1, X, X^2)$ *par* θ *est* $(0, 1, 2X)$ *qui est de rang* 2. *Donc* θ *est de rang* 2.
4. *L'image de la base* $(1, X, X^2, X^3)$ *par* θ *est* $(-1, 0, X^2, 2X^3)$ *qui est de rang* 3. *Donc* θ *est de rang* 3.

Exercice 25.23 ♡♡

Soit $M = \begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$.

1. *Calculer* M^2.
2. *Déterminer le rang de* M.
3. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ *telles que* $AB = M$. *Démontrer que* $BA = 9I_2$.

Solution :

1. $M^2 = \begin{pmatrix}64+4+4 & 16+10-8 & -16+8-10\\ 16+10-8 & 4+25+16 & -4+20+20 \\ -16+8-10 & -4+20+20 & 4+16+25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}72&18&-18\\18&45&36\\-18&36&45\end{pmatrix} = 9M.$
2. M *est de rang 2.* ($4L_2 - L_1 = 4L_3 + L_1$).
3. AB *est de rang 2, donc* $\text{rg}(A) \geqslant 2$, *donc* $\text{rg}(A) = 2$. *De même* $\text{rg}(B) = 2$. *Donc* A *est la matrice d'une application linéaire injective.* $\exists A' \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, *telle que* $A'A = I_2$. *De même* B *est la matrice d'une application linéaire surjective.* $\exists B' \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{C})$, *telle que* $BB' = I_2$. *Comme* $ABAB = 9AB$, *on en déduit que* $A'ABABB' = 9A'ABB' = 9I_2I_2 = 9I_2$.

25.12.4 Calcul de déterminants de taille 2 ou 3

Exercice 25.24 ♡

En variant les techniques utilisées (Règle de Sarrus, développement suivant une ligne, une colonne, en faisant apparaître des zéros,...) Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&6\\2&4&2\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}1&1&1\\5&8&3\\2&-1&2\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}3&4&-2\\2&3&1\\1&2&3\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}-3&2&9\\-1&0&-1\\11&-5&-12\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}1&-1&0\\5&-5&5\\2&1&3\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}1&1&-2\\-1&3&4\\-1&1&8\end{vmatrix}$

Solution :

a) *On peut opérer sur les lignes :* $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$ *et* $\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&6\\2&4&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&6\\0&0&2\end{vmatrix} = 2.$

b) *En développant par rapport à la deuxième ligne :*
$\begin{vmatrix}-3&2&9\\-1&0&-1\\11&-5&-12\end{vmatrix} = -1\times(-1)\times\begin{vmatrix}2&-9\\-5&-12\end{vmatrix} + (-1)\times(-1)\times\begin{vmatrix}-3&2\\11&-5\end{vmatrix} = (-24+45)+(15-22) = 21-7 = 14.$

c) *La présence des trois* 1 *à la première ligne incite à soustraire la première colonne aux deux autres :*
$\begin{vmatrix}1&1&1\\5&8&3\\2&-1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\5&3&-2\\2&-3&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3&-2\\-3&0\end{vmatrix} = -6.$

d) *En additionnant les colonnes :* $C_2 \longleftarrow C_2 + C_1$
$\begin{vmatrix}1&-1&0\\5&-5&5\\2&1&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\5&0&5\\2&3&3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&0&0\\5&5&0\\2&3&3\end{vmatrix} = -15.$

e) *Avec la règle de Sarrus, alors ?* $\begin{vmatrix}3&4&-2\\2&3&1\\1&2&3\end{vmatrix} = 27+4+6-8-24-6 = -1.$

f) $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ *et* $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$ $\begin{vmatrix}1&1&-2\\-1&3&4\\-1&1&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&-2\\0&4&2\\0&2&6\end{vmatrix} = 24-4 = 20.$

Exercice 25.25 ♡

Sans les calculer, expliquer pourquoi les déterminants suivants sont nuls :

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix}0&-1&10\\0&2&5\\0&1&1\end{vmatrix}$
2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix}-1&2&3\\1&-2&5\\1&-2&2\end{vmatrix}$
3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix}2&-1&3\\-1&2&-3\\3&1&2\end{vmatrix}$
4. $\Delta_4 = \begin{vmatrix}1&2&1\\0&0&3\\0&0&1\end{vmatrix}$
5. $\Delta_5 = \begin{vmatrix}1&a&b+c\\1&b&c+a\\1&c&a+b\end{vmatrix}$
6. $\Delta_6 = \begin{vmatrix}1&\cos 2x&2\cos^2 x\\1&-\cos 2x&2\sin^2 x\\\cos x\sin x&\cos x\sin x&\sin 2x\end{vmatrix}$

Solution :

1. *Une colonne de* Δ_1 *est nulle donc* $\Delta_1 = 0$.
2. *Les deux premières colonnes de* Δ_2 *sont proportionnelles, donc* $\Delta_2 = 0$.
3. *La première colonne de* Δ_3 *est somme des deux autres donc* $\Delta_3 = 0$.
4. Δ_4 *étant diagonale, le déterminant* Δ_4 *est égal au produit de ces termes diagonaux. Un de ceux-ci étant nul, il en est de même de* Δ_4.
5. $\Delta_5 \xlongequal{C_3 \to C_2 + C_3} \begin{vmatrix}1&a&a+b+c\\1&b&a+b+c\\1&c&a+b+c\end{vmatrix}$ *et les première et troisième colonnes de* Δ_5 *sont proportionnelles. Il vient* $\Delta_5 = 0$.
6. *La dernière colonne de* Δ_6 *est somme des deux autres donc* $\Delta_6 = 0$.

Exercice 25.26 ♡♡

Calculer, sous forme factorisée :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$
(appelé déterminant de Vandermonde).

6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$

où a, b, c sont trois réels.

Solution :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \underset{}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1 \\ C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=\!=\!=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} =$
$\boxed{(a+b+c)^3}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \boxed{2abc}$ *par application de la règle de Sarrus.*

3. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \overset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} =$

$(1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1 \\ C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=\!=\!=} (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1+a+b+c}$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \overset{C_1\leftarrow C1+C2+C_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=\!=\!=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) = \boxed{\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right)}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$

$\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=\!=\!=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = \boxed{(b-a)(c-a)(c-b)}$

6. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \overset{C_1\leftarrow C_1-C_2-C_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -2c & b+c & c+a \\ -2c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ -2c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} c & b+c & c+a \\ c^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ c^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

$\overset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1 \\ C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=\!=\!=} -2\begin{vmatrix} c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \\ c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} = -2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & b & a \\ c^2 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = \boxed{-2abc(b-a)(c-a)(c-b)}$ *car on reconnaît un déterminant de Vandermonde.*

7. $\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \xlongequal[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \sin b - \sin a & \cos b - \cos a \\ 0 & \sin c - \sin a & \cos c - \cos a \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & 2\cos\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} & -2\sin\frac{b+a}{2}\sin\frac{b-a}{2} \\ 0 & 2\cos\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} & -2\sin\frac{c+a}{2}\sin\frac{c-a}{2} \end{vmatrix} = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \cos\frac{b+a}{2} & \sin\frac{b+a}{2} \\ 0 & \cos\frac{c+a}{2} & \sin\frac{c+a}{2} \end{vmatrix} =$

$-4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\left(\sin\frac{c+a}{2}\cos\frac{b+a}{2} - \sin\frac{b+a}{2}\cos\frac{c+a}{2}\right) = -4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\left(\frac{c+a}{2} - \frac{b+a}{2}\right) =$

$\boxed{-4\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{c-b}{2}}$

Exercice 25.27 ♡

Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 60$$

Solution : *Facile par permutations des colonnes.*

Exercice 25.28 ♡

Les nombres 119, 153 *et* 289 *sont tous divisibles par* 17*. Montrer, sans le développer que le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *est divisible par 17.*

Solution : *Notons* Δ *ce déterminant. On a :* $1000\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 9 \\ 100 & 50 & 3 \\ 200 & 80 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 119 & 10 & 9 \\ 153 & 50 & 3 \\ 289 & 80 & 9 \end{vmatrix} =$ $17\begin{vmatrix} a & 10 & 9 \\ b & 50 & 3 \\ c & 80 & 9 \end{vmatrix}$ *où* a*,* b *et* c *désignent respectivement le quotient de* 119*,* 153 *et* 289 *par* 17*. On obtient* $:\Delta = 17m$ *avec* $m = \begin{vmatrix} a & 10 & 9 \\ b & 50 & 3 \\ c & 80 & 9 \end{vmatrix}$ *qui est un entier. Comme* 17 *est premier avec* 1000*, appliquant le lemme de Gauss,* 17 *divise* Δ*.*

Exercice 25.29 ♡

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*. Considérons les polynômes* $P_a = (X-a)^2, P_b = (X-b)^2, P_c = (X-c)^2$*. Déterminer pour quelles valeurs de* (a,b,c) *la famille* $\mathscr{P} = (P_a, P_b, P_c)$ *forme une base de* $\mathbb{R}_2[X]$ *?*

Solution : *La matrice de la famille* $\mathscr{P}$ *dans la base canonique* $\left(1, X, X^2\right)$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *est* $M = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*.*
Utilisant les déterminants de Vandermonde, on trouve $\det M = -2(b-a)(c-a)(c-b)$*. La famille* $\mathscr{P}$ *forme une base de* $\mathbb{R}_2[X]$ *si et seulement si les scalaires* a*,* b *et* c *sont deux à deux distincts.*

Exercice 25.30 ♡♡♡

Montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$$

Solution : *On développe suivant la première ligne et on reconnaît les formules d'addition :*

$$\Delta = \cos(a-b)\left[\cos(b+c)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(b+c)\right] - \cos(b-c)\left[\cos(a+b)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(a+b)\right] + \cos(c-a)\left[\cos(a+b)\sin(b+c) - \cos(b+c)\sin(a+b)\right] =$$
$$\cos(a-b)\sin(a-b) + \cos(b-c)\sin(b-c) + \cos(c-a)\sin(c-a) = \frac{1}{2}\left(\sin 2(a-b) + \sin 2(b-c) + \sin 2(c-a)\right)$$

puis on utilise les deux formules $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ et $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2}\left(2\sin(a-c)\cos(a+c-2b)+\sin 2(c-a)\right)\\ &= \sin(a-c)\cos(a+c-2b)+\sin(c-a)\cos(c-a) = \sin(a-c)\left(\cos(a+c-2b)-\cos(c-a)\right)\\ &= -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)\end{aligned}$$

Exercice 25.31 ♡

Soient

$$P_1 = 2X^2 - X + 1,\quad P_2 = X^2 + 2X,\quad P_3 = X^2 - 1$$

Montrer que la famille $\mathscr{P} = (P_1, P_2, P_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution : *Notant* $e = (X^2, X, 1)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$, *on a :*

$$\operatorname{Mat}_e(\mathscr{P}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

qui est inversible. La famille $\mathscr{P}$ *est donc une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 25.32 ♡

Á quelle condition sur le réel a *la famille* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *:*

$$e_1 = (a,1,1)\qquad e_2 = (1,a,1)\qquad e_3 = (1,1,a)$$

forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$ *?*

Solution : *La famille* e *forme une base de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si* $\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix} \neq 0$. *Ce déterminant vaut :* $(a-1)^2(a+2)$. *La famille* e *est donc libre si et seulement si* $a \neq 1$ *et* $a \neq -2$.

25.12.5 Inversion de matrice

Exercice 25.33 ♡

Inverser

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

1. *en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.*
2. *en utilisant la comatrice.*

Solution :

1. *On effectue les mêmes opérations sur les lignes de* A *et de* I_3.

$$\begin{array}{rrrcccrrr}
-3 & 1 & 0 & & & & 1 & 0 & 0\\
2 & 0 & 1 & & & & 0 & 1 & 0\\
1 & 2 & -1 & & & & 0 & 0 & 1\\
\\
-3 & 1 & 0 & & & & 1 & 0 & 0\\
0 & 2 & 3 & L_2 & \leftarrow & 3L_2+2L_1 & 2 & 3 & 0\\
0 & 7 & -3 & L_3 & \leftarrow & 3L_3+L_1 & 1 & 0 & 3\\
\\
-6 & 0 & -3 & L_1 & \leftarrow & 2L_1-L_2 & 0 & -3 & 0\\
0 & 2 & 3 & & & & 2 & 3 & 0\\
0 & 0 & -27 & L_3 & \leftarrow & 2L_3-7L_2 & -12 & -21 & 6\\
\\
-54 & 0 & 0 & L_1 & \leftarrow & 9L_1-L_3 & 12 & -6 & -6\\
0 & 18 & 0 & L_2 & \leftarrow & 9L_2+L_3 & 6 & 6 & 6\\
0 & 0 & -27 & & & & -12 & -21 & 6\\
\\
9 & 0 & 0 & L_1 & \leftarrow & L_1/(-6) & -2 & 1 & 1\\
0 & 9 & 0 & L_2 & \leftarrow & L_2/2 & 3 & 3 & 3\\
0 & 0 & 9 & L_3 & \leftarrow & L_3/(-3) & 4 & 7 & -2
\end{array}$$

Chaque opération sur les lignes est la multiplication à gauche par une matrice inversible. Donc A *est inversible et* $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2. *On calcule* $\det(A) = 9$ *et* $\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ *donc* $A^{-1} = \frac{{}^t\operatorname{com}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.34 ♡

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solution :

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$
2. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
3. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
4. $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$
5. $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25.35 ♡

On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ *donnée par* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* $A^2 - 2A - I_2 = 0$. *On dit que* $X^2 - 2X - 1$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Retrouver ce résultat par un calcul direct.*

Solution :

1. *On montre par un calcul direct que* $A^2 - 2A - I_2 = 0$.
2. *L'égalité précédente amène :* $A(A - 2I_2) = I_2$. A *est donc inversible et sa matrice inverse est :* $\begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$
3. *On retrouve ce résultat en utilisant la comatrice ou en passant par un système.*

Exercice 25.36 ♡

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme que* $P = X^3 - 3X + 3$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Retrouver ce résultat par un calcul direct.*

Solution : *Même déroulement que l'exercice précédent. On trouve* $A^{-1} = I_3 - \frac{1}{3}A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.37 ♡

Soient deux matrices carrées $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $AB = 0$. *Montrer que si* A *est inversible, alors* $B = 0$.

Solution : *Si* A *est inversible alors on peut écrire :*

$$AB = 0 \implies A^{-1} \times AB = A^{-1} \times 0 \implies B = 0.$$

Exercice 25.38 ♡♡

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétrique. On pose* $M = I + A$.

1. *Soit une matrice colonne* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *Calculer la matrice* ${}^tXAX$
2. *En déduire que la matrice* M *est inversible.*

Solution :

1. *Si* $A = (a_{ij})$ *alors* ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x i x_j$. *Comme* A *est antisymétrique, pour tout* $i \neq j$ $a_{ji} x i x_j = -a_{ij} x i x_j$ *et* $a_{ii} = 0$. *Alors* $\boxed{{}^tXAX = 0}$.
2. *Soit* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *Alors*

$$MX = 0 \implies {}^tXMX = 0 \implies {}^tX(I + A)X = 0 \implies {}^tXX + {}^tXAX = 0 \implies {}^tXX = 0$$

en vertu de la première question. Mais si $X = (x_i)$, ${}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2$ *et* ${}^tXX = 0$ *implique que* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ *et que* $X = 0$. *On en déduit que* M *est inversible.*

Exercice 25.39 ♡♡

Déterminer l'inverse de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbb{O} \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & a & 1 \end{pmatrix}$

Solution : *Soit* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* $\mathbb{K}^n$ *et* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *la famille de vecteurs de* $\mathbb{K}^n$ *admettant* A *comme matrice dans la base* e. *On a donc :*

$$f_1 = e_1 + ae_2,\ f_2 = e_2 + ae_3,\ \dots,\ f_{n-2} = e_{n-2} + ae_{n-1},\ f_{n-1} = e_{n-1} + ae_n,\ f_n = e_n.$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} e_n & = & f_n \\ e_{n-1} & = & f_{n-1} - af_n \\ e_{n-2} & = & f_{n-2} - af_{n-1} + a^2 f_n \\ \vdots & = & \vdots \\ e_2 & = & f_2 - af_3 + a^2 f_4 - a^3 f_5 + \ldots + (-1)^{n-2} a^{n-2} f_n \\ e_1 & = & f_1 - af_2 + a^2 f_3 - a^3 f_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a^{n-1} f_n \end{array}$$

donc f est une base de $\mathbb{K}^n$, A *est inversible et*

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_f(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^2 & -a & \ddots & & \\ -a^3 & a^2 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ (-1)^{n-2}a^{n-2} & (-1)^{n-3}a^{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ (-1)^{n-1}a^{n-1} & (-1)^{n-2}a^{n-2} & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.40 ♡♡

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $I_n + A$ *est inversible. Soit* $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

1. *Montrer que* $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.
2. *Montrer que* $I_n + B$ *est inversible et exprimer* A *en fonction de* B.

Solution :

1. *On a* $(I_n + A)(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)$*, donc* $I_n - A = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n - A)$ *donc* $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$*, ce qu'il fallait vérifier.*
   Un argument plus savant : $(I_n + A)^{-1}$ *est un polynôme en* A*, et comme tel commute avec n'importe quel polynôme en* A*, par exemple* $I_n - A$*. En effet, soit* $B = I_n + A$*. La famille* $I_n, B, B^2, \dots, B^{n^2}$ *est liée. On peut écrire* $\lambda_0 I_n + \lambda_1 B + \dots \lambda_k B^k = 0$ *où* k *désigne le plus grand indice* $\leqslant n^2$ *pour lequel* $\lambda_k \neq 0$*. On a* $\lambda_0 \neq 0$*, sinon on aurait* $B(\lambda_1 I_n + \dots \lambda_k B^{k-1} = 0$ *et donc* B *ne serait pas inversible. Donc on peut écrire*
   $$I_n = B\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} B - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} B^{k-1}\right).$$
   Donc $B^{-1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} B - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} B^{k-1}$ *est un polynôme en* B *donc un polynôme en* $A = B - I_n$.
2. $B = (2I_n - I_n - A)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - (I_n + A)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$*. D'où* $I_n + B = 2(I_n + A)^{-1}$*, ce qui montre bien que* $I_n + B$ *est inversible. De plus* $(I_n + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + A)$*, d'où* $A = 2(I_n + B)^{-1} - I_n$.

Exercice 25.41 ♡♡

Soit A *une matrice carrée nilpotente de taille* $n \in \mathbb{N}^*$*. Montrer que la matrice* $(I_n - A)$ *est inversible.*

Solution : *On suppose que* A *est nilpotente d'ordre* $p \in \mathbb{N}^*$*. On a donc* $A^k = 0$ *pour tout* $k \geqslant p$ *et* $A^k \neq 0$ *pour tout* $k < p$*. Mais*

$$(I_n - A)\left(I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}\right) = (I_n - A) + \left(A - A^2\right) + \dots + \left(A^{p-1} - A^p\right) = I_n$$

par télescopage et car $A^p = 0$*. Donc* $I_n - A$ *est inversible d'inverse* $I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1}$.

Exercice 25.42 ♡♡

Soit une matrice U *triangulaire supérieure telle que tous les éléments de la diagonale soient non-nuls. Montrer que la matrice* U *est inversible. (On montrera que* $UX = 0 \Longrightarrow X = 0$ *)*

Solution : *Soit une matrice colonne* $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ *telle que* $UX = 0$*. On obtient un système d'équations triangulaire sur les coordonnées de* X *qui se résout de proche en proche en partant de la dernière équation et on obtient finalement que* $X = 0$*. Par conséquent,* U *est inversible.*
Une autre façon de voir est de considérer que la matrice est celle d'un endomorphisme u *de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ *dans la base* (X^k)*. L'hypothèse « U triangulaire supérieure avec tous les éléments de la diagonale non-nuls » se traduit par :* $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \deg(u(X^k)) = k$*. Donc* u *transforme la base* (X^k) *en une famille échelonnée en degrés, donc une base de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$*. Donc* u *est bijectif, donc* U *est inversible.*

Exercice 25.43 ♡♡

On considère la matrice $M = ((m_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $m_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{j} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$*. Calculer* M^2 *et* M^{-1}.

Solution : Faire d'abord le calcul pour $n=3$. En notant $M^2 = ((a_{ij}))$, on tire que $a_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik}m_{kj} = \sum_{k\notin\{i,j\}} \dfrac{i}{j}$

$$a_{ij} = \begin{cases} (n-2)\dfrac{i}{j} & \text{si } i\neq j \\ (n-1) & \text{si } i=j \end{cases}$$

On remarque que $M^2 = (n-2)M + (n-1)I_n$ d'où l'on tire que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{n-1}.(M-(n-2)I_n)$.

Exercice 25.44 ♡♡♡

Inverser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : Avec la forme de la matrice A, on peut faire le pari que la matrice inverse peut s'écrire, si elle existe,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z & t & u & v \\ v & x & y & z & t & u \\ u & v & x & y & z & t \\ t & u & v & x & y & z \\ z & t & u & v & x & y \\ y & z & t & u & v & x \end{pmatrix}.$$

L'égalité $AA^{-1} = I_6$ se traduit, pour la première colonne de AA^{-1}, par

$$\begin{cases} x + 6v + 5u + 4t + 3z + 2y = 1 \\ 2x + v + 6u + 5t + 4z + 3y = 0 \\ 3x + 2v + u + 6t + 5z + 4y = 0 \\ 4x + 3v + 2u + t + 6z + 5y = 0 \\ 5x + 4v + 3u + 2t + z + 6y = 0 \\ 6x + 5v + 4u + 3t + 2z + y = 0 \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que la (les ?) solutions de ce système fournit une solution pour les autres colonnes.
Maintenant, en additionnant les lignes, en posant $S = x+v+u+t+z+y$, on obtient $21S = 1$.
Ensuite on multiplie la $2^{\text{ème}}$ la $4^{\text{ème}}$ et la $6^{\text{ème}}$ ligne par -1 et on additionne les six lignes pour obtenir $-3x+3v-3u+3t-3z+3y = 1$ soit $3S_1 - 3S_2 = -1$ en posant $S_1 = x+u+z$ et $S_2 = v+t+y$. Ce qui donne $S_1 = -\dfrac{1}{7}$ et $S_2 = \dfrac{4}{21}$.
Si on continue dans la même idée, pourquoi ne pas multiplier la $2^{\text{ème}}$ et la $5^{\text{ème}}$ ligne par j et la $3^{\text{ème}}$ et la $6^{\text{ème}}$ ligne par j^2 avant d'additionner le tout : $(5+7j+9j^2)(x+t)+(9+5j+7j^2)(v+z)+(7+9j+5j^2)(u+y) = 1$. En utilisant $7(1+j+j^2)=0$, on a $(-2+2j^2)(x+t)+(2-2j)(v+z)+(2j-2j^2)(u+y) = 1$. En factorisant par $(2-2j)$, on a $j^2(x+t)+(v+z)+j(u+y) = \dfrac{1}{2(1-j)} = \dfrac{1-j^2}{2(1-j)(1-j^2)} = \dfrac{1}{6}(1-j^2)$. En conjuguant, on obtient $j(x+t)+(v+z)+j^2(u+y) = \dfrac{1}{6}(1-j)$. En posant $T_1 = x+t$, $T_2 = v+z$, $T_3 = u+y$ on a
$\begin{cases} T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{1}{21} \\ j^2T_1 + T_2 + jT_3 = \dfrac{1}{6}(1-j^2) \\ jT_1 + T_2 + j^2T_3 = \dfrac{1}{6}(1-j) \end{cases}$. Bon, on sent qu'il y a de l'idée mais il n'y a rien de décisif. Il faut aller encore plus loin :
Soit $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{6}\right)$. On multiplie la $k^{\text{ème}}$ ligne par ζ^k et on additionne le tout :
$xS + \zeta vS + \zeta^2 uS + \zeta^3 tS + \zeta^4 zS + \zeta^5 yS = 1$ en posant $S = 1+2\zeta+3\zeta^2+4\zeta^3+5\zeta^4+6\zeta^5$. Soit $P(X) = X\dfrac{X^6-1}{X-1}$, on a $S = P'(\zeta)$.
Or $P'(X) = \dfrac{X^6-1}{X-1} + X\dfrac{6X^5(X-1)-(X^6-1)}{(X-1)^2}$, d'où $S = \dfrac{6}{\zeta-1}$.

On obtient ainsi en faisant jouer le rôle de ζ par $\zeta^2,\zeta^3,\dots$

$$\begin{cases} x & +v & +u & +t & +z & +y & = & \dfrac{1-1}{6}+\dfrac{1}{21} \\ x & +\zeta v & +\zeta^2 u & +\zeta^3 t & +\zeta^4 z & +\zeta^5 y & = & \dfrac{\zeta-1}{6} \\ x & +\zeta^2 v & +\zeta^4 u & +\zeta^6 t & +\zeta^2 z & +\zeta^4 y & = & \dfrac{\zeta^2-1}{6} \\ x & +\zeta^3 v & +\zeta^6 u & +\zeta^9 & +\zeta^{12} z & +\zeta^{15} y & = & \dfrac{\zeta^3-1}{6} \\ x & +\zeta^4 v & +\zeta^8 u & +\zeta^{12} t & +\zeta^{16} z & +\zeta^{20} y & = & \dfrac{\zeta^4-1}{6} \\ x & +\zeta^5 v & +\zeta^{10} u & +\zeta^{15} t & +\zeta^{20} z & +\zeta^{25} y & = & \dfrac{\zeta^5-1}{6} \end{cases}$$

On trouve x en additionnant les lignes, en utilisant $1+\zeta^k+\zeta^{2k}+\zeta^{3k}++\zeta^{4k}++\zeta^{5k}=0$ pour $1\leqslant k\leqslant 5$: $6x=\dfrac{1}{21}-1$ d'où $x=-\dfrac{10}{63}$. Pour trouver v, on multiplie la $k^{\text{ème}}$ ligne par ζ^{5k} et on additionne le tout : $6v=1+\dfrac{1}{21}$ d'où $v=\dfrac{11}{63}$.
Pour trouver t, on multiplie la k-ième ligne par ζ^{4k} et on additionne le tout : $6u=\dfrac{1}{21}$ d'où $t=\dfrac{1}{126}$. Le même calcul donne le même résultat pour les autres inconnues : $t=z=y=\dfrac{1}{126}$.

$$A^{-1}=\frac{1}{126}\begin{pmatrix} -20 & 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 22 & -20 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 22 & -20 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 22 & -20 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 22 & -20 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 22 & -20 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.45 ♡♡♡

On considère une matrice $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ à diagonale dominante *:*

$$\forall i\in[\![1,n]\!]^2,\quad |a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$$

Montrer que la matrice A est inversible. Cette propriété est connue sous le nom de lemme d'Hadamard.

Solution : *Supposons que A ne soit pas inversible. Alors il existe $X=(x_i)\in\mathfrak{M}_1(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX=0$. Comme X est non nul, on sait que $\alpha=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|\neq 0$. De plus, on a encore $A(X/\alpha)=0$. On peut donc supposer que $\max_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|=1$. On note i_0 l'indice $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $|x_i|=1$. L'égalité $AX=0$ amène pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=0$ ou encore $-a_{ii}x_i=\sum_{j=1,j\neq i}^n a_{ij}x_j$. En particulier, pour $i=i_0$, cette égalité devient en passant à la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire :*

$$|a_{i_0i_0}|=|a_{i_0i_0}x_{i_0}|=\left|\sum_{j=1,j\neq i_0}^n a_{i_0j}x_j\right|\leqslant\sum_{j=1,j\neq i_0}^n|a_{i_0j}||x_j|\leqslant\sum_{j=1,j\neq i_0}^n|a_{i_0j}|$$

car $\max_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|=1$. Mais comme la matrice est à diagonale dominante, on a aussi $|a_{i_0i_0}|>\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0j}|$ et on aboutit à une contradiction. Par conséquent A est inversible.

Exercice 25.46 ♡♡♡

1. *Soit $n\in\mathbb{N}$, Démontrer qu'il existe un unique polynôme $U_n(X)\in\mathbb{Z}[X]$, de degré n, vérifiant*

$$\forall\vartheta\in\mathbb{R},\ \sin\vartheta.U_n(\cos\vartheta)=\sin(n+1)\vartheta.$$

Démontrer que

$$U_{n+1}(X)+U_{n-1}(X)=2XU_n(X)\qquad(*)$$

Démontrer que

$$\forall n\geqslant 1,\ \forall p\geqslant 1,\ U_{n+p}=U_pU_n-U_{p-1}U_{n-1}\qquad(**).$$

2. *Soit*

$$\mathrm{B}_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2x & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour $x \neq \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $\mathrm{B}_n(x)$ *est inversible et son inverse est la matrice symétrique définie par*

$$b'_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\mathrm{U}_{i-1}(x)\mathrm{U}_{n-j}(x)}{\mathrm{U}_n(x)} \text{ pour } i \leqslant j$$

et

$$b'_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\mathrm{U}_{j-1}(x)\mathrm{U}_{n-i}(x)}{\mathrm{U}_n(x)} \text{ pour } i \geqslant j.$$

Solution :

1. *Existence : On l'établit par récurrence. On peut prendre* $\mathrm{U}_0(\mathrm{X}) = 1$, $\mathrm{U}_1(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}$, *et puisque* $\sin(n+2)\vartheta + \sin n\vartheta = 2\cos\vartheta \sin(n+1)\vartheta$ *on a nécessairement*

$$\sin\vartheta\, \mathrm{U}_{n+1}(\cos\vartheta) + \sin\vartheta\, \mathrm{U}_{n-1}(\cos\vartheta) = 2\cos\vartheta \sin\vartheta\, \mathrm{U}_n(\cos\vartheta).$$

Donc on choisit $\mathrm{U}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{U}_n(x) - \mathrm{U}_{n-1}(x)$ *sur* $[-1;1]$. *On en déduit que les* U_n *sont des fonctions polynômes, appelés* polynômes de Tchebychev *(de deuxième espèce). Les polynômes* $\mathrm{U}_n(\mathrm{X})$ *ainsi construits conviennent et appartiennent à* $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$.
Unicité : La différence de deux tels polynômes s'annulerait sur $[-1;1]$ *ce qui donne l'unicité.*
On a bien entendu

$$\mathrm{U}_{n+1}(\mathrm{X}) + \mathrm{U}_{n-1}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathrm{U}_n(\mathrm{X}). \qquad (*)$$

U_n *est de degré* n *par une récurrence immédiate.*
Les $\xi_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ *sont les* n *racines distinctes de* U_n.
Enfin, en utilisant trois fois $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - cos(a+b))$, *on a d'une part :*

$$\sin^2\vartheta\, \mathrm{U}_{n+p}(\cos\vartheta) = \sin\vartheta \sin(n+p+1)\vartheta = \frac{1}{2}\cos(n+p)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(n+p+2)\vartheta,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sin^2\vartheta\, \mathrm{U}_p(\cos\vartheta)\mathrm{U}_n(\cos\vartheta) - \sin^2\vartheta\, \mathrm{U}_{p-1}(\cos\vartheta)\mathrm{U}_{n-1}(\cos\vartheta) &= \sin(p+1)\vartheta \sin(n+1)\vartheta - \sin p\vartheta \sin n\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(p+n+2)\vartheta \\ &\quad - \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta + \frac{1}{2}\cos(p+n)\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\cos(p+n)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta \end{aligned}$$

On a bien établi (**)

2. *Soit* $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *(en posant* $\mathrm{U}_{-1}(x) = 0$ *dans le cas où* $j = n$*)*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} b_{kj} &= b'_{ij-1} b_{j-1j} + b'_{ij} b_{jj} + b'_{ij+1} b_{j+1j} = b'_{ij-1} b_{j-1j} + 2x b'_{ij} + b'_{ij+1} \\ &= \frac{(-1)^{i+j-1}\mathrm{U}_{i-1}\mathrm{U}_{n-j+1} + (-1)^{i+j} 2x\mathrm{U}_{i-1}\mathrm{U}_{n-j} + (-1)^{i+j+1}\mathrm{U}_{i-1}\mathrm{U}_{n-j-1}}{\mathrm{U}_n(x)} \\ &= (-1)^{i+j-1} \frac{\mathrm{U}_{i-1}\left(\mathrm{U}_{n-j+1} - 2x\mathrm{U}_{n-j} + \mathrm{U}_{n-j-1}\right)}{\mathrm{U}_n(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

d'après $(*)$ *où l'on remplace* n *par* $n - j$.

Pour $i=j$ (en posant $U_{-1}(x)=0$ dans le cas où $j=n$ et donc $b'_{nn+1}=0$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}b_{ki} &= b'_{ii-1}b_{i-1i}+b'_{ii}b_{ii}+b'_{ii+1}b_{i+1i} = b'_{ii-1}b_{i-1i}+2xb'_{ii}+b'_{ii+1}\\ &= -\frac{U_{i-2}U_{n-i}+2xU_{i-1}U_{n-i}-U_{i-1}U_{n-i-1}}{U_n(x)}\\ &= \frac{1}{U_n(x)}\left(-U_{i-2}U_{n-i}+U_{i-1}\left(2xU_{n-i}+U_{n-i-1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{U_n(x)}\left(-U_{i-2}U_{n-i}+U_{i-1}U_{n-i+1}\right) = \frac{1}{U_n(x)}U_{n-i+1+i-1} \text{ d'après } (**)\\ &= \frac{1}{U_n(x)}U_n = 1.\end{aligned}$$

25.12.6 Calcul des puissances d'une matrice

Exercice 25.47 ♡

Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}^*$ et les matrices A suivantes :

1. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

Solution : *Par des récurrences faciles, on trouve :*

1. $A^n=\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{pmatrix}$
2. $A^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b\\0&a^n\end{pmatrix}$
3. $A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
4. $A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

Exercice 25.48 ♡

1. *Calculer les puissances de* $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$.
2. *On pose :* $F_0=0$; $F_1=1$; $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ *(suite de Fibonacci) .*
   Démontrer que pour tous entiers naturels n et p, $F_{n+p}=F_{n+1}F_p+F_nF_{p-1}$.

Solution :

1. *Par récurrence,* $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}$.
2. *On calcule le coefficient de la* 1ère *ligne et* 2ème *colonne de* $A^{n+p}=A^nA^p$. *Comparer avec l'exercice 20.21 p. 764*

Exercice 25.49 ♡

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

1. *Montrer que* $A-I_3$ *est nilpotente d'ordre* 3 *(c'est à dire que* $(A-I_3)^2\neq 0$ *et que* $(A-I_3)^3=0$
2. *En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton* A^n *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Solution :

1. *Par un calcul direct, on montre que* $B=A-I_3$ *vérifie* $B^3=0$ *et* $B^2\neq 0$.

2. *Utilisant la formule du binôme, ce qui est valide car* $I_3 \times B = B \times I_3$*, on obtient, pour* $n \geqslant 3$ *:*

$$\begin{aligned} A^n &= (B+I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \\ &= \binom{n}{0}B^0 + \binom{n}{1}B^1 + \binom{n}{2}B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(n-2) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette formule reste valable si $n = 0, 1, 2$.

Exercice 25.50 ♡

Calculer A^n *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de deux manières différentes.*

Solution : *Même déroulement que dans l'exercice précédent : on forme la matrice* $B = A - I_3$ *et on montre qu'elle est nilpotente d'ordre* 3*. On applique ensuite la formule du binôme et on trouve :* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. On peut aussi prouver ce résultat en effectuant une récurrence.*

Exercice 25.51 ♡♡

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme* $X^2 - 5X + 4$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Pour* $n \geqslant 2$*, déterminer le reste de la division euclidienne de* X^n *par* $X^2 - 5X + 4$.
4. *En déduire l'expression de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. *Par un calcul direct.*
2. *On déduit de la question précédente que :* $A\left(\frac{5}{4}I_2 - \frac{1}{4}A\right) = I_2$. A *est donc inversible d'inverse :* $\frac{5}{4}I_2 - \frac{1}{4}A$.
3. *En utilisant le théorème de la division euclidienne, il existe des polynômes à coefficients réels* Q *et* R *tels que :* $X^n = Q\left(X^2 - 5X + 4\right) + R$ *et* $\deg R < 2$*. Le polynôme* R *est donc de la forme* $R = aX + b$*. Remarquant que les racines de* $X^2 - 5X + 4$ *sont* 1 *et* 4*, on obtient le système :* $\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + b = 4^n \end{cases}$ *qui admet comme solution :* $a = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ *et* $b = \frac{1}{3}(4 - 4^n)$.
4. *On en déduit que si* $n \geqslant 2$*,* $A^n = Q(A)\left(A^2 - 5A + 4I_3\right) + R(A) = R(A) = \boxed{\frac{1}{3}\left(4^n - 1\right)A + \frac{1}{3}\left(4 - 4^n\right)I_2}$

Exercice 25.52 ♡♡

On considère la matrice $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *remplie de* 1 *:*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* J^2 *puis pour* $k \in \mathbb{N}$*,* J^k.
2. J *est-elle inversible ?*

3. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances successives de A.

Solution :

1. $J^2 = nJ$ *puis par récurrence, pour* $k \geqslant 1$, $J^k = n^{k-1}J$.
2. *Puisque* $J^2 = nJ$, *il vient que* $J(J - nI) = 0$ *et alors si* J *était inversible, en multipliant à gauche par* J^{-1}, *on aurait* $J = nI$ *ce qui est faux pour* $n \geqslant 2$.
   Remarque : La matrice J *est visiblement de rang 1.*
3. *Écrivons* $A = 2I - J$ *et en utilisant le binôme (*I *et* J *commutent), on trouve pour* $n \geqslant 1$ *que*

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k J^k = 2^n I + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k 3^{k-1}\Big) J$$

Mais $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k 3^{k-1} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^k - 2^n\right) = \frac{(-1)^n - 2^n}{3}$. *Et finalement,*

$$A^n = 2^n I + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} J.$$

Exercice 25.53 ♡

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Solution : *Décomposons la matrice sous la forme* $A = H - I$ *où*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H^2 = a\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad H^3 = 0$$

Avec le binôme, on trouve finalement que

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1 + \frac{n(n-1)}{2}a & \frac{n(n-1)}{2}a \\ n & -\frac{n(n-1)}{2}a & 1 - \frac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}$$

Exercice 25.54 ♡

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Calculer ses puissances A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Solution : *On pose* $A = aI_2 + bJ$ *avec* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On vérifie que* $J^2 = I_2$. *Comme* I_2 *et* J *commutent, on peut appliquer la formule du binôme :*

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} J^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} I_2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} J = SI_2 + TJ.$$

Maintenant $(a-b)^n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = S - T$. *Comme* $(a+b)^n = S + T$, *on en déduit* $S =$

$\frac{1}{2}\left[(a+b)^n+(a-b)^n\right]$ *et* $T=\frac{1}{2}\left[(a+b)^n-(a-b)^n\right]$. *Donc*

$$A^n=\begin{pmatrix}S & T\\ T & S\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(a+b)^n+(a-b)^n & (a+b)^n-(a-b)^n\\ (a+b)^n-(a-b)^n & (a+b)^n+(a-b)^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 25.55 ♡

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&b&0\\0&a&b\\b&0&a\end{pmatrix}$. *Calculer les puissances des matrices* A, B.

Solution : *On écrit* $A=I+J$ *avec* $J=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. *On calcule* $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ *et* $J^3=0$. *En appliquant le binôme,* $A^n=I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2$.

On écrit $B=aI+bP$ *avec* $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. *Alors* $P^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ *et* $P^3=I$. *En appliquant la formule du binôme,* $B^n=\alpha I+\beta P+\gamma P^2$ *avec* $\alpha=\sum_{k=0,k=3p}^{n}a^{n-k}b^k\binom{n}{k}$, $\beta=\sum_{k=0,k=3p+1}^{n}a^{n-k}b^k\binom{n}{k}$ *et* $\gamma=\sum_{k=0,k=3p+2}^{n}a^{n-k}b^k\binom{n}{k}$.

Pour calculer ces trois sommes (voir aussi B.2.2 p. 1162), on développe $(a+b)^n$, $(a+jb)^n$ *et* $(a+j^2b)^n$. *On trouve ainsi*

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=(a+b)^n\\ \alpha+\beta j+\gamma j^2=(a+jb)^n\\ \alpha+\beta j^2+\gamma j=(a+j^2b)^n\end{cases}.$$

Soit $V=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ *et* $D=\begin{pmatrix}(a+b)^n\\(a+jb)^n\\(a+j^2b)^n\end{pmatrix}$. *Posons aussi* $\overline{V}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$. *On a* $V\overline{V}=3I_3$, *donc* $X=\frac{1}{3}\overline{V}D$, *soit*

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\left((a+b)^n+(a+jb)^n+(a+j^2b)^n\right)\\ \beta=\frac{1}{3}\left((a+b)^n+j^2(a+jb)^n+j(a+j^2b)^n\right)\\ \gamma=\frac{1}{3}\left((a+b)^n+(ja+jb)^n+j^2(a+j^2b)^n\right)\end{cases}.$$

Autrement dit $B^n=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \gamma&\alpha&\beta\\ \beta&\gamma&\alpha\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(a+b)^n+(a+jb)^n+(a+j^2b)^n & (a+b)^n+j^2(a+jb)^n+j(a+j^2b)^n & (a+b)^n+(ja+jb)^n+j^2(a+j^2b)^n\\ (a+b)^n+(ja+jb)^n+j^2(a+j^2b)^n & (a+b)^n+(a+jb)^n+(a+j^2b)^n & (a+b)^n+j^2(a+jb)^n+j(a+j^2b)^n\\ (a+b)^n+j^2(a+jb)^n+j(a+j^2b)^n & (a+b)^n+(ja+jb)^n+j^2(a+j^2b)^n & (a+b)^n+(a+jb)^n+(a+j^2b)^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 25.56 ♡

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}$. *Calculer* A^n. *(on décomposera* $A=I_2+4J$*)*

Solution : *On a* $A=I_2+4J$, *avec* $J=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$. *Comme* $J^2=0$, *on en déduit, puisque* I_2 *et* J *commutent,* $A^n=I_2+4nJ=\begin{pmatrix}4n+1&-4n\\4n&-4n+1\end{pmatrix}$.

Exercice 25.57 ♡♡

1. *Soit la matrice* $H=((h_{ij}))\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $h_{ij}=1$. *Calculer* H^k.
2. *En déduire les puissances de la matrice* $A=((a_{ij}))$ *où* $a_{ij}=(1-\delta_{ij})$.
3. *Montrer que la matrice* A *est inversible en calculant son rang.*
4. *Trouver l'inverse de la matrice* A *(on le cherchera sous la forme* $aI+bH$*).*

Solution :

1. On montre par récurrence que $\mathrm{H}^k = n^{k-1}\mathrm{H}$ pour $k \geqslant 1$ et $\mathrm{H}^0 = \mathrm{I}$.
2. $\mathrm{A} = \mathrm{H} - \mathrm{I}$. En utilisant la formule du binôme,
$$\mathrm{A}^p = (-1)^p\mathrm{I} + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}n^k(-1)^{p-k}\right)\mathrm{H} = (-1)^p\mathrm{I} + \frac{(n-1)^p}{n}\mathrm{H} - \frac{(-1)^p}{n}.\mathrm{H}$$
3. Par les opérations $\mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n \leftarrow \mathrm{C}_n - \mathrm{C}_1$, puis en ajoutant toutes les colonnes de la matrice obtenue à la première, A a même rang que la matrice triangulaire supérieure avec pour éléments $(n-1), -1, \dots, -1$ sur la diagonale. Par conséquent, pour $n \geqslant 2$, le rang de A vaut n et donc A est inversible.
4. En calculant
$$(a\mathrm{I} + b\mathrm{H})(\mathrm{H} - \mathrm{I}) = -a\mathrm{I} + (a + (n-1)b)\mathrm{H}$$
il suffit de prendre $a = -1$ et $b = \dfrac{1}{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Par conséquent, A est inversible et
$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{n-1}\mathrm{H} - \mathrm{I}$$

Exercice 25.58 ♡♡

1. Soit la matrice $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer les matrices J^2 et J^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer les puissances de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & & 0 \\ b & a & & & \vdots \\ 0 & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices de cette forme sont appelées matrices de Jordan.

Solution :

1. On a $\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On déduit donc J^2 de J « en baissant d'un cran la diagonale de 1 dans la matrice ».

   On déduit J^3 de J^2 par le même procédé et ainsi de suite. On obtient alors $\mathrm{J}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{J}^n = 0$ et $\mathrm{J}^m = 0$ pour tout $m \geqslant n$.
2. On remarque que $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}$. Comme I_n et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme. On obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$:
$$(a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J})^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k\mathrm{J}^k$$
et
$$\mathrm{A}^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ \binom{m}{1}a^{m-1}b & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \binom{m}{m}b^m & & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \binom{m}{m}b^m & \dots & & \binom{m}{1}a^{m-1}b & a^m \end{pmatrix} \text{ si } m < n$$

$$A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ \binom{m}{1}a^{m-1}b & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ \binom{m}{k}a^{m-k}b^k & & & & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{m}{n}a^{m-n}b^n & \dots & & \binom{m}{k}a^{m-k}b^k & \dots & \binom{m}{1}a^{m-1}b & a^m \end{pmatrix} \text{ si } m \geqslant n$$

25.12.7 Représentation matricielle d'une application linéaire

Exercice 25.59 ♡

Pour chacune des applications linéaires suivantes :

1. *vérifier que u est linéaire.*
2. *déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés.*
3. *déterminer son rang.*
4. *Déterminer u^{-1} quand cette application existe.*
5. *calculer l'image du vecteur V donné en utilisant cette matrice.*

1. $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y+z, x-2y-3z) \end{cases}$ *et* $V = (0, 1, -1)$..
2. $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+z, y-z, z-x) \end{cases}$ *et* $V = (1, 2, -1)$.
3. *On pose* $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$. $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{cases}$ *et* $V = (-1, 0, 2)$.
4. $u : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X) - P \end{cases}$ *et* $V = X^3 - 3X^2 + X - 1$.
5. $u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{cases}$ *et* $V = X^2 - X + 1$.
6. $u : \begin{cases} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M \end{cases}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. $u : \begin{cases} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & EM \end{cases}$ *où* $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution :

1. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*
   (b) $A = \text{Mat}_{e' \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ *où e est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e' celle de $\mathbb{R}^2$.*
   (c) $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 2$
   (d) *u ne peut être bijective car $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas de même dimension.*
   (e) *On a* $B = \text{Mat}_{e'} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (0, 1)$.
2. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*
   (b) $A = \text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
   (c) $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 3$
   (d) *On en déduit que u est bijective. De plus* $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *donc* u^{-1} :
   $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(x-z, x+2y+z, x+z) \end{cases}$

(e) *On a* $B = \text{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (0,3,-2)$.

3. (a) *u est linéaire par bilinéarité du produit vectoriel.*

   (b) $A = \text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *où e désigne la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

   (c) $\text{rg}\, u = \text{rg} A = 2$.

   (d) *u n'est donc pas bijective.*

   (e) *On a* $B = \text{Mat}_e V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (-2,3,-1)$.

4. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

   (b) $A = \text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *où* $e = (1, X, X^2, X^3)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.

   (c) $\text{rg}\, u = \text{rg} A = 3$.

   (d) *u n'est donc pas bijective.*

   (e) *On a* $B = \text{Mat}_e V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

5. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

   (b) $A = \text{Mat}_{e' \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *où e' est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et e celle de* $\mathbb{R}_2[X]$.

   (c) $\text{rg}\, u = \text{rg} A = 3$.

   (d) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On en déduit que* $u^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(2x + (-3x+4y-z)X + (x-2y+z)X^2\right) \end{cases}$

   (e) *On a* $B = \text{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = 3X^2 + X + 1$.

6. (a) *u est linéaire car l'opération de transposition est linéaire.*

   (b) $A = \text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où* $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ *est la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

   (c) $\text{rg}\, u = \text{rg} A = 4$.

   (d) *On vérifie sans peine que* $A^{-1} = A$ *ce qui se vérifie par ailleurs en remarquant que la transposition est une symétrie de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

   (e) *On a* $B = \text{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

   (b) $A = \text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où* $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ *est la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

   (c) $\text{rg}\, u = \text{rg} A = 4$.

   (d) *On vérifie que* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On montre par ailleurs que :* $u^{-1} : \begin{cases} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & E^{-1}M \end{cases}$

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

Exercice 25.60 ♡

Soit l'endomorphisme $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'' \end{array} \right.$.

1. *Montrer que* φ *est linéaire.*
2. *Écrire la matrice de* φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 12 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n(n-1) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.61 ♡

Soit $\varphi : P \mapsto XP' + P$ *où* P *est un polynôme.*

1. *Prouver que* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. *Calculer la matrice de* φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.
3. *Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.*
4. *En déduire que* φ *est bijective et calculer l'image réciproque de chacun des éléments de la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *par* φ.

Solution :

1. *La linéarité provient de la linéarité de la dérivation et de la multiplication par* X. *Reste à démontrer que* $XP' + P$ *est un polynôme et que* $\deg(XP' + P) \leqslant 3$ *ce qui ne pose pas de difficulté.*
2. *On a* $\varphi\left(X^k\right) = XkX^{k-1} + X^k = (k+1)X^k$. *D'où la matrice :* $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.
3. $M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.
4. *On a* $\varphi^{-1}\left(X^k\right) = \dfrac{1}{k+1}X^k$.

Exercice 25.62 ♡

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ *et les vecteurs* $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$ *donnés par :*

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{ch} x, \quad f_2 : x \mapsto \operatorname{sh} x, \quad f_3 : x \mapsto x \operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad f_4 : x \mapsto x \operatorname{sh} x$$

1. *Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel* F *de* E *engendré par la famille* $f = \left(f_1, f_2, f_3, f_4\right)$.
2. *Soit* $\varphi : f \mapsto f''' - 2f'' + f' - f$. *Montrer que* $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
3. *Déterminer la matrice de* φ *dans la base* f.
4. φ *est-elle un automorphisme de* F *dans* F *? Si oui, déterminer la matrice de* φ^{-1} *dans la base* f.
5. *Trouver une solution particulière de l'équation différentielle :* $f''' - 2f'' + f' - f = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x$.

Solution :

1. $\dim F = 4$ *car la famille* f *est libre. En effet supposons* $\forall x \in \mathbb{R}, a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + cx \operatorname{ch} x + dx \operatorname{sh} x = 0$, *en regardant en* 0, *on a* $a = 0$ *on a donc* $dx \operatorname{sh} x = -(b \operatorname{sh} x + cx \operatorname{ch} x)$ *qui est donc une fonction impaire : d'où* $d = 0$. *Comme en* $+\infty$, $b \operatorname{sh} x = o(x \operatorname{sh} x)$ *on en déduit que* d, *puis* c *sont nuls.*
2. *La linéarité est claire.* $\varphi(f_1) = f_2 - 2f_1 + f_2 - f_1 = 2f_2 - 3f_1, \varphi(f_2) = 2f_1 - 3f_2, \varphi(f_3) = 2f_4 - 3f_3 + 4f_1 - 4f_2$ *et* $\varphi(f_4) = 2f_3 - 3f_4 + 4f_2 - 4f_1$.
3. $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
4. $M^{-1} = -\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & -4 \\ 5 & 10 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. *Comme* M^{-1} *existe,* φ *est un automorphisme de* F.
5. *On cherche une solution* $u \in F$, *vérifiant* $\varphi(u) = f_2 + f_3 = v$. *Il suffit de prendre* $u = \varphi^{-1}(u)$ *pour cela on calcule* $-\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & -4 \\ 5 & 10 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ *D'où* $u = -\dfrac{1}{5}(-3\operatorname{ch} x - 2\operatorname{sh} x + 3x \operatorname{ch} x + 2x \operatorname{sh} x)$.

Exercice 25.63 ♡♡

On considère un $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* E *de dimension* 3 *et* f *un endomorphisme non nul de* E. *Montrez que* $f^2 = 0$ *si et seulement s'il existe une base* e *de* E *telle que*

$$\operatorname{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : *Si* $f^2 = 0$, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. *D'après le théorème du rang,*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 3$$

Comme $\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$, *il vient que* $3 \leqslant 2\dim \operatorname{Ker} f$ *et donc que* $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 2$. *Comme* f *n'est pas l'endomorphisme nul,* $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ *et* $\dim \operatorname{Im} f = 1$. *Donc il existe un vecteur* $e_1 \in E$ *non-nul tel que* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1)$. *On complète en une base* (e_1, e_3) *de* $\operatorname{Ker} f$ *que l'on complète ensuite en une base* (e_1, e_2, e_3) *de* E. *Comme* $f(e_2) \in \operatorname{Im} f$, *il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(e_2) = \lambda e_1$. *Mais* λ *n'est pas nul (sinon* $f = 0$*) ; on pose alors* $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\lambda} e_2$. *La matrice de* f *dans la base* $e = (e_1, \varepsilon_2, e_3)$ *est de la forme souhaitée. La réciproque est évidente.*

Exercice 25.64 ♡♡

On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *donnée par :* $\forall (i,j) [\![1, n+1]\!]$, $\quad a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$. *On suppose que* A *est la matrice d'un endomorphisme* $\theta \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ *dans la base canonique* $e = (1, X, \dots, X^n)$ *de* $\mathbb{R}_n[X]$.

1. *Soit* $P \in \mathbb{R}_n[X]$. *Expliciter* $\theta(P)$.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.
3. *Calculer* A^m *pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. *Soient* $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ *et* $V = \operatorname{Mat}_e(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. *On a :*

$$\operatorname{Mat}_e(\theta(P)) = AV = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \\ \vdots \\ \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \binom{k}{0} a_k \\ \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} a_k \\ \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} a_{n-1} + \binom{n}{n-1} a_n \\ \binom{n}{n} a_n \end{pmatrix}$$

et donc $\theta(\mathrm{P}) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0}a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}a_k\right)\mathrm{X} + \ldots + \left(\binom{n-1}{n-1}a_{n-1} + \binom{n}{n-1}a_n\right)\mathrm{X}^{n-1} + \binom{n}{n}a_n\mathrm{X}^n$*, ce qui amène, en regroupant par coefficients et en utilisant la formule du binôme :*

$$\begin{aligned}\theta(\mathrm{P}) &= a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{X}^k + a_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\mathrm{X}^k + \ldots + a_1(\mathrm{X}+1) + a_0\\ &= a_n(\mathrm{X}+1)^n + a_{n-1}(\mathrm{X}+1)^{n-1} + \ldots + a_1(\mathrm{X}+1) + a_0\\ &= \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)\end{aligned}$$

On a alors montré que $\boxed{\theta(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)}$.

2. θ *est un automorphisme de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *et , pour tout* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\theta^{-1}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$. *On déduit de la question précédente que* A *est inversible et que :* $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{Mat}_e\left(\theta^{-1}\right) = \left(b_{ij}\right)$ *avec pour tout* $i,j\in[\![0,n]\!]$, $\boxed{b_{ij} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}}$

3. *De la même façon que précédemment,* $\mathrm{A}^m = \mathrm{Mat}_e(\theta^m)$ *et, pour tout* $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\theta^m(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+m)$ *donc* $\mathrm{A}^m = \left(c_{ij}\right)$ *avec pour tout* $i,j\in[\![0,n]\!]$, $\boxed{c_{ij} = m^{j-i}\binom{j-1}{i-1}}$.

Exercice 25.65 ♡♡

Soit $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. *On définit l'application*

$$f_{\mathrm{A}} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})\\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX}\end{array}\right.$$

1. *Vérifier que* f_{A} *est un endomorphisme de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, *et déterminer sa matrice dans la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Comparer* $\mathrm{rg}\, f_{\mathrm{A}}$ *et* $\mathrm{rg}\, u_{\mathrm{A}}$ *où* u_{A} *est l'unique endomorphisme de matrice* A *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

Solution :

1. *Si* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, *on trouve* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{pmatrix}$.
2. *En général on a* $\mathrm{rg}\, f_{\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{rg}\, u_{\mathrm{A}}$. *Si* A *est inversible, alors* f_{A} *est inversible, et* f_{A}^{-1} *est définie par*
$f_{\mathrm{A}}^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})\\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}\end{array}\right.$. *Donc* $\mathrm{rg}\, f_{\mathrm{A}} = 4 = 2\,\mathrm{rg}\, u_{\mathrm{A}}$.
Si A *est nulle, il en est de même pour* f_{A}.
Si A *est de rang* 1, *alors il existe une relation de dépendance linéaire entre les deux colonnes. On retrouve cette relation entre la premières et troisième colonne de* M *d'une part et entre la deuxième et la quatrième d'autre part. Donc l'espace engendré par les colonnes de* M *est de dimension inférieure ou égale à* 2. *Par ailleurs la première et la deuxième colonne sont linéairement indépendantes. D'où le résultat.*

Exercice 25.66 ♡♡♡

Soit $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $a_{ij} = (-1)^i.\binom{n-j-1}{i}$ $(0\leqslant i,j\leqslant n-1)$.

1. *Démontrer que* $\mathrm{A}^3 = (-1)^{n-1}\mathrm{I}_n$.
   Indication 25.24 : On pourra considérer $\mathrm{L} : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]\\ \mathrm{P(X)} & \longmapsto & (1-\mathrm{X})^{n-1}.\mathrm{P}\left(\frac{1}{1-\mathrm{X}}\right)\end{array}\right.$.
2. *En déduire que*
$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{i+k+\ell}\binom{n-k-1}{i}\binom{n-\ell-1}{j}\binom{n-j-1}{\ell} = (-1)^{n-1}\delta_{ij}$$
   pour tout $(n,i,j)\in(\mathbb{N}^*)^3$, $i,j\leqslant n$.

Solution :

1. *Remarquons que* L *est bien linéaire, et que* $L(X^k) = (1-X)^{n-1}.\dfrac{1}{(1-X)^k} = (1-X)^{n-k-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. L *est donc bien un endomorphisme.* $L^2(X^k) = (1-X)^{n-1}\left(1-\dfrac{1}{1-X}\right)^{n-k-1} = (1-X)^{n-1}\left(\dfrac{-X}{1-X}\right)^{n-k-1} = (-X)^{n-k-1}(1-X)^k$.
   $L^2(X^k) = (1-X)^{n-1}\left(-\dfrac{1}{1-X}\right)^{n-k-1}\left(1-\dfrac{1}{1-X}\right)^{k} = (1-X)^{n-1}\left(-\dfrac{1}{1-X}\right)^{n-k-1}\left(\dfrac{-X}{1-X}\right)^{k} = (-1)^{n-1}X^k$.
   Donc $L^3 = (-1)^{n-1}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.
   Enfin La matrice de L *dans la base naturelle de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ *est donnée par ses vecteurs colonnes. La* $j^{\text{ème}}$ *est donnée par* $L(X^j) = (1-X)^{n-j-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j-1}(-1)^i\binom{n-j-1}{i}X^i = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-j-1}{i}X^i$. *On retrouve donc bien la matrice* A.
   On a donc bien $A^3 = (-1)^{n-1}I_n$.

2. *Le calcul de* $B = A^3$ *s'obtient par*
   $b_{ij} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{ik}a_{k\ell}a_{\ell j} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-k-1}{i}(-1)^k\binom{n-\ell-1}{k}(-1)^\ell\binom{n-j-1}{\ell}$. *D'où le résultat.*

25.12.8 Structure formée de matrices

Exercice 25.67 ♡

Soit l'ensemble

$$\mathscr{J} = \left\{\begin{pmatrix} x & x \\ x & x\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}.$$

Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices, $\mathscr{J}$ *est un groupe abélien.*

Solution : *Soit* $J(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x\end{pmatrix}$ *et* $J = J(1)$. *On a* $J^2 = 2J$ *et* $J(x)J(y) = 2xyJ = J(2xy)$. *On a donc la stabilité et la commutativité. On a aussi* $J(x)J(\frac{1}{2}) = J(x)$ *donc* $J(\frac{1}{2})$ *est élément neutre et* $J(x)J(y) = J(\frac{1}{2})$ *lorsque* $2xy = \frac{1}{2}$ *soit* $y = \frac{1}{4x}$. *Tout élément admet bien un symétrique.*

Exercice 25.68 ♡

Pour la multiplication usuelles des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes :

$$GL(2,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det M = 1\}\ ?$$

Solution : *Le premier ensemble n'est pas un groupe car, par exemple, la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ *ne peut avoir pour inverse que* $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ *qui n'appartient pas à l'ensemble.*
Notons $G = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det M = 1\}$ *et montrons que* G *est un sous-groupe de* $GL_2(\mathbb{R})$.
– *la matrice identité appartient à* G.
– *si* $A, B \in G$ *alors* $AB \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ *et* $\det AB = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$, *et donc* $AB \in G$.
– *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ *alors* $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$ *appartient à* G *et est l'inverse de* A.

Exercice 25.69 ♡

1. *L'ensemble* $E = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$ *muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *est-il un groupe ?*
2. *L'ensemble* $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ *des matrices symétriques réelles d'ordre* 2 *muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *est-il un groupe ?*

Solution :

1. *Oui.* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. *On a un groupe abélien.*
2. *Non. Le produit de deux matrices symétriques n'a aucune raison d'être symétrique :* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
   La loi n'est pas interne.

Exercice 25.70 ♡

1. *L'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad-bc \neq 0$ *et* $a^2-b^2-c^2-d^2 \leqslant 1$ *est il un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ *?*
2. *L'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *est-il un sous groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ *?*
3. *Existe-t-il une valeur* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *telle que l'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad-bc \neq 0$ *et* $a \leqslant \mathrm{M}$ *forme un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ *?*

Solution :

1. *L'ensemble* G *des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad-bc \neq 0$ *et* $a^2-b^2-c^2-d^2 \leqslant 1$ *n'est pas un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. *En effet les deux matrices* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ *appartiennent à* G *et leur produit* $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ *n'appartient pas à* G.
2. *L'ensemble* H *des matrices* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *est un sous groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. *En effet,*
   - I_2 *élément neutre de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$ *appartient à* H.
   - *Soient* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ *deux éléments de* H *alors* $\mathrm{MM}' = \begin{pmatrix} ac & ad+bc^{-1} \\ 0 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$ *donc le produit de deux éléments de* H *appartient à* H.
   - *Soit* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. *Alors* $\mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *appartient à* H.
3. *Soit* K_M *l'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad-bc \neq 0$ *et* $a \leqslant \mathrm{M}$. *Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il n'existe pas de valeur* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *telle que* K_M *forme un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$.
   Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *tel que* K_M *forme un sous-groupe de* $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$. *Alors* I_2 *appartient à* K_M *donc* $\mathrm{M} \geqslant 1$. *Ainsi, les matrices* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ *appartiennent à* K_n *donc le produit* $\mathrm{AA}_n = \begin{pmatrix} 1+n & 2 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ *appartient à* K_n. *En conséquence, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $1+n \leqslant \mathrm{M}$, *ce qui est absurde.*

Exercice 25.71 ♡

Soient les ensembles

$$\mathrm{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathrm{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Étudier si, munis des lois usuelles, L *et* M *sont des anneaux, des corps.*

Solution : *Soit* $\mathrm{A}(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $\mathrm{A}(x)+\mathrm{A}(y) = \mathrm{A}(x+y)$ *et* $\mathrm{A}(x)+\mathrm{A}(y) = \mathrm{A}(x+y)$. *On vérifie ainsi que* M *est un anneau et même un corps. De fait,* $\mathrm{A} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{A}(x)$ *est un morphisme d'anneaux.*
Soit $\mathrm{B}(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} = x\mathrm{A}(1)$. *On a* $\mathrm{A}(1)^2 = 0$. *On en déduit que* $\mathrm{A}(x)\mathrm{A}(y) = 0 = \mathrm{A}(0)$. *La multiplication est donc associative, commutative, distributive par rapport à l'addition. En revanche il n'y a pas d'élément neutre. Bien entendu,* M *n'est pas un corps.*

Exercice 25.72 ♡

Soit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *On note* $\mathscr{C}$ *l'ensemble des matrices qui commutent avec* A.
Montrer que $\mathscr{C}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *et déterminer sa dimension.*

Solution : $\mathscr{C}$ *est le noyau de* $f_\mathrm{A} : \begin{cases} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX}-\mathrm{XA} \end{cases}$ *et en tant que tel est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
On a clairement $\mathrm{A} \in \mathscr{C}$ *et* $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{C}$. *Remarquons aussi que les matrices de* $\mathscr{C}$ *commutent aussi avec* $\mathrm{S} = \mathrm{A}-\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{C}$, *on a* $\mathrm{SM} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{MS} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$. *On a donc* $-b = c$ *et* $a = d$. *Donc* $\mathscr{C}$ *est bien le sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *engendré par* A *et* I_2 *(ou par* S *et* I_2*.)*

Exercice 25.73 ♡

Posons :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $E = \{xI + yJ \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. *Vérifier que* $J^2 = -I$ *et montrer que l'application* $\theta : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & E \\ x + iy & \longmapsto & xI + yJ \end{cases}$ *est un isomorphisme de corps.*

Solution : θ *est linéaire, et* $\theta(x+iy) = xI + yJ = 0$ *n'est vérifié que pour* $x = y = 0$. θ *est donc un isomorphisme linéaire entre* E *et* $\mathbb{C}$.
Une fois établi $J^2 = -I$, *on en déduit que* $\theta((xI+yJ)(x'I+y'J)) = \theta((xx'-yy')I + (xy'+yx')J) = \theta(xI+yJ)\theta(x'I+y'J)$.
Comme on a $\theta(I) = 1$, *on a bien un isomorphisme de corps.*

Exercice 25.74 ♡♡

Soit $c > 0$.

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{c} \\ \frac{x}{c} & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x \in]-c; c[.$$

Démontrer que cet ensemble de matrices est un sous-groupe. (de quoi ?)

Solution : *On pose* $\varphi = \text{argth}\left(\frac{x}{c}\right)$ *; Soit* $x = c.\text{th}\varphi$. *Or* $1 - \text{th}^2\varphi = \frac{1}{\text{ch}^2\varphi}$. *Donc* $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = \text{ch}\varphi$, *et* $\frac{\frac{x}{c}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = \text{sh}\varphi$. *Donc*
$M(x) = \begin{pmatrix} \text{ch}\varphi & \text{sh}\varphi \\ \text{sh}\varphi & \text{ch}\varphi \end{pmatrix}$. *En posant* $\vartheta = \text{argth}\left(\frac{y}{c}\right)$,
on a $M(x).M(y) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\varphi+\vartheta) & \text{sh}(\varphi+\vartheta) \\ \text{sh}(\varphi+\vartheta) & \text{ch}(\varphi+\vartheta) \end{pmatrix}$. *On obtient bien un sous-groupe du groupe des matrices inversibles. On l'appelle le groupe de Lorentz.*

Exercice 25.75 ♡♡

On considère le sous-espace vectoriel V *de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *engendré par les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrez qu'aucun élément de V *n'est inversible. Montrez que* $(V, +, \times)$ *est un corps isomorphe à* $\mathbb{C}$.

Solution : *Soit* $M = \lambda A + \mu B$ *et* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On a* $MX = 0$. *Donc* M *n'est pas inversible.*
Pour la suite, on a besoin de quelques calculs euphorisants : $AB = BA = -(A+B)$; $A^2 = B - 2A$; $B^2 = A - 2B$. *On en déduit que* V *est stable par multiplication. On remarque ensuite que* $(\lambda A + \mu B)(\lambda' A + \mu' B) = \left[(\lambda-\mu)(\lambda'-\mu') - 3\lambda\lambda'\right] A + \left[(\lambda-\mu)(\lambda'-\mu') - 3\mu\mu'\right] B$. *On en déduit que la multiplication est commutative dans* V. *On cherche l'élément neutre de* V *sous la forme* $\lambda' A + \mu' B$. *On doit avoir* $(\lambda A + \mu B)(\lambda' A + \mu' B) = \lambda A + \mu B$ *pour tous* λ *et* μ, *donc en particulier lorsque* $\lambda - \mu = 0$, *ce qui donne* $\lambda' = \mu' = -\frac{1}{3}$. *On pose alors* $E = -\frac{1}{3}(A+B)$. *Ensuite on vérifie que* $A(A+B) + 3A = B(A+B) + 3B = 0$ *ce qui veut bien dire que* $AE = A$ *et* $BE = B$. *On en déduit par linéarité que* E *est élément neutre de* V *pour la multiplication.*
Enfin $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB = -(A+B) + 2(A+B) = -3E$. *Donc en posant* $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(A-B)$, *on a* $J^2 = -E$.
Maintenant on a tout reconstitué : (E, J) *est une base de* V *et* $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & V \\ z = a + bi & \longmapsto & aE + bJ \end{cases}$ *est un isomorphisme d'anneaux qui transporte la structure de corps de* $\mathbb{C}$ *sur* V.

Exercice 25.76 ♡♡♡

Pour tout $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$, *on pose* $\Gamma_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & -\sin 2\vartheta & \sin^2\vartheta \\ \cos\vartheta.\sin\vartheta & \cos 2\vartheta & -\sin\vartheta.\cos\vartheta \\ \sin^2\vartheta & \sin 2\vartheta & \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$

1. *Démontrer que* $\Gamma = \{\Gamma_\vartheta, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ *est un groupe.*
2. *Calculer* $\det \Gamma_\vartheta$.

Solution :

1. *Soit* $A = \Gamma_\vartheta.\Gamma_\varphi = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. *On a*

$$\begin{array}{lcl}
a_{1,1} &=& \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi - \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
&=& \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi - 2\sin\vartheta.\sin\varphi\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
&=& \big(\cos\vartheta.\cos\varphi - \sin\vartheta.\sin\varphi\big)^2 = \cos^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{1,2} &=& -\cos^2\vartheta.\sin 2\varphi - \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \sin^2\vartheta.\sin 2\varphi \\
&=& -\sin 2\varphi.(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi = -(\cos 2\vartheta\sin 2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi) \\
&=& -\sin 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{1,3} &=& \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
&=& \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi + 2\sin\vartheta.\sin\varphi\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
&=& \big(\cos\vartheta.\sin\varphi + \sin\vartheta.\cos\varphi\big)^2 = \sin^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,1} &=& \cos\vartheta.\sin\vartheta.\cos^2\varphi + \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta\sin^2\varphi \\
&=& \sin\vartheta.\cos\vartheta.(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi \\
&=& \frac{1}{2}(\sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \cos 2\vartheta.\sin 2\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\vartheta+2\varphi) \\
&=& \sin(\vartheta+\varphi).\cos(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,2} &=& -\cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\varphi + \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta\sin 2\varphi \\
&=& \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - 2\cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\varphi = \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - \sin 2\vartheta.\sin 2\varphi \\
&=& \cos 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,3} &=& \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin^2\varphi - \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta.\cos^2\varphi \\
&=& -a_{2,1} = -\sin(\vartheta+\varphi).\cos(\vartheta+\varphi). \\
a_{3,1} &=& \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
&=& a_{1,3} = \sin^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{3,2} &=& -\sin^2\vartheta.\sin 2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \cos^2\vartheta.\sin 2\varphi \\
&=& -a_{1,2} = \sin 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{3,3} &=& \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi - \sin 2\vartheta.\sin\varphi.\cos\varphi + \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
&=& a_{1,1} = \cos^2(\vartheta+\varphi).
\end{array}$$

Finalement $\Gamma_\vartheta.\Gamma_\varphi = \Gamma_{\vartheta+\varphi}$. *On a donc un morphisme de* $\mathbb{R}$ *sur* Γ, *qui fait donc de* Γ *un groupe.*

2. *Un calcul avec la règle de Sarrus n'est jamais méprisable :*

$$\begin{array}{lcl}
\det\Gamma_\vartheta &=& \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta.\sin^2\vartheta + \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\vartheta.\sin^2\vartheta \\
&& -\sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta. + \sin 2\vartheta.\cos\vartheta.\sin\vartheta.\cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta.\sin 2\vartheta \\
&=& \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta + \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\vartheta - \sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta \\
&=& \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + 2.\sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta - \sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta \qquad . \\
&=& \cos 2\vartheta.(\cos^4\vartheta - \sin^4\vartheta) + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta. \\
&=& \cos 2\vartheta.(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta. \\
&=& \cos 2\vartheta.\cos 2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta = \cos^2(2\vartheta) + \sin^2(2\vartheta) = 1.
\end{array}$$

Si on utilise le fait que $\Gamma = \{\Gamma_\vartheta, \vartheta\in\mathbb{R}\}$ *est un groupe, alors un argument plus savant permet d'aboutir au même résultat :*

Tous les éléments de Γ_ϑ *sont en valeur absolue inférieurs á* 1. *Donc* $|\det\Gamma_\vartheta| \leqslant \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} 1 \leqslant 6$.

Or $\vartheta \longrightarrow \det\Gamma_\vartheta$ *est un morphisme de groupes. Son image est donc un sous-groupe borné de* $\mathbb{R}$. *Il est donc inclus dans* $\{-1;1\}$. *De plus,* $\vartheta \longrightarrow \det\Gamma_\vartheta$ *est une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *son image est donc un intervalle. C'est donc* $\{1\}$. *Donc,* $\forall\vartheta\in\mathbb{R}, \det\Gamma_\vartheta = 1$.

Exercice 25.77 ♡

Pour chacun des sous-ensembles suivants :

1. *Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de* $E = \mathfrak{M}_3(E)$.
2. *En donner une base et la dimension.*

$$F_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & -b & a \\ b & -a & b \\ a & -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{et} \quad F_2 = \left\{\begin{pmatrix} 2a & c-b & a \\ 3b+c & a-b & a+2c \\ a+3c & b & -a-c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

Solution :

1. $F_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$
2. $F_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 25.78 ♡

Soit E *l'ensemble des matrices de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ *de la forme :* $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

1. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. *Donner une base de* E.
2. *Montrer que* E *est un sous-anneau commutatif de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.
3. *Déterminer les éléments inversibles de* E.
4. *Déterminer les diviseurs de zéro de* E.

Solution :

1. *L'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *est linéaire, clairement surjective. Son noyau est réduit au vecteur nul.* φ *est donc bijective. Une base de* E *est donc, par exemple,* $(\varphi(1,0), \varphi(0,1))$.
2. $\varphi(a,b).\varphi(a',b') = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'+b' & b' \\ -b' & a'-b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+ab'+ba' & ab'+ba' \\ -ba'-ab' & aa'-ab'-ba' \end{pmatrix} = \varphi(aa', ab'+ba')$. E *est donc stable par multiplication. Comme il contient* $I_2 = \varphi(1,0)$, *c'est un sous-anneau de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.
3. *Les éléments inversibles de* E *sont ceux pour lesquels* $a \neq 0$. *On a alors* $\varphi(a,b)^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}\right)$.
4. *En résolvant le système* $\left\{ \begin{array}{rcl} aa' & = & 0 \\ ab'+ba' & = & 0 \end{array} \right.$ *On obtient par exemple* $a = 0$ *ce qui interdit* $b = 0$ *et implique* $a' = 0$. *Donc les diviseurs de zéro sont les* $(\varphi(0,b).\varphi(0,b'))$ *avec* $bb' \neq 0$.

Exercice 25.79 ♡♡

Une matrice $A = (a_{i,j})$ *de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *est dite magique si elles vérifie les* 4 *conditions suivantes :*

1. *Pour tout* $j \in \{1,2,3\}$, *on a :* $\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 0$.
2. *Pour tout* $i \in \{1,2,3\}$, *on a :* $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 0$.
3. *On a :* $\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0$.
4. $a_{13} + a_{22} + a_{31} = 0$.

On notera $\mathscr{M}$ *l'ensemble des matrices magiques.*

1. *Montrer que l'ensemble des matrices magiques possède une structure de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
2. *Montrer que si* $M \in \mathscr{M}$ *alors* ${}^tM \in \mathscr{M}$.
3. *Caractériser les matrices magiques antisymétriques et les matrices symétriques. On notera* $\mathscr{A}$ *l'ensemble des matrices magiques antisymétriques et* $\mathscr{S}$ *l'ensemble des matrices magiques symétriques.*
4. *Prouver que* $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = \mathscr{M}$.
5. *Interpréter le résultat obtenu.*

Solution :

1. $\mathscr{M}$ *est l'intersection des noyaux de huit formes linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *comme intersection de sous-espaces vectoriels.*
2. *C'est clair, les rôles des formes linéaires* $A \longmapsto \sum_{i=1}^{3} a_{ik}$ et $A \longmapsto \sum_{i=1}^{3} a_{ki}$ *étant échangés.*
3. *Soit* $A \in \mathscr{A}$. *On a* $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. *En posant* $a = a_{13}$ *on obtient* $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & -a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$ *et*
   $\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & -a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.
   Soit $A \in \mathscr{S}$. *En posant* $a = a_{13}$ *on obtient* $a_{31} = a$ *et* $a_{22} = -2a$. *On pose* $b = a_{12}$ *d'où* $a_{21} = b$, $a_{11} = -a-b$, $a_{33} = b+3a$, $a_{23} = a_{32} = 2a-b$. *La somme de la* 3ème *colonne donne* $6a = 0$. *Donc* $\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b & 0 \\ b & 0 & -b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$.

4. $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est la somme directe de l'espace des matrices symétriques et de l'espace des matrices symétriques. Donc a fortiori $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = \mathscr{M}$. ($\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}) + \frac{1}{2}(\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A})$).
5. On en déduit que $\mathscr{M} = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b-a & a \\ a+b & 0 & -a-b \\ -a & a-b & b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 25.80 ♡

(Extrait des petites Mines 2006)

I-Étude de deux ensembles de matrices

Soit (x,y) *un élément quelconque de* $\mathbb{R}^2$. *On note* $\mathrm{M}_{x,y}$ *la matrice*

$$\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$$

Soit Σ *le sous-ensemble de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *tel que* $\Sigma = \{\mathrm{M}_{x,y} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Quelle relation doivent vérifier x et y pour que la matrice $\mathrm{M}_{x,y}$ ne soit pas inversible ? Calculer le produit $\mathrm{M}_{x,y} \times \mathrm{M}_{-x,y}$. En déduire l'inverse de $\mathrm{M}_{x,y}$ lorsqu'il existe.
2. Σ est-il un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$? On justifiera sa réponse.

   Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{J} = \{\mathrm{A} + \mathrm{M}_{x,y} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Montrer que J est un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.
4. Quelle est la dimension de J ? Déterminer une base de J.
5. Montrer que la loi $\times$ est interne dans J.

II - Étude d'une application de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

Soit B *une matrice quelconque de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. *Soit* φ_B *l'application de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *dans* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *qui à la matrice* X *associe la matrice* $\varphi_\mathrm{B}(\mathrm{X}) = \mathrm{B} \times \mathrm{X}$.

1. Montrer que φ_B est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.
2. On suppose dans cette question que $\mathrm{B} = \mathrm{M}_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) φ_B est elle surjective ? Bijective ?
   (b) Déterminer la matrice de φ_B dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
   On rappelle que la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est constituée des matrices $(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2})$ où

$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On prend dans cette question $\mathrm{B} = \mathrm{M}_{0,-2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. φ_B est-elle surjective ? Bijective ?

Solution : *I.*

1. $\mathrm{M}_{x,y}$ n'est pas inversible lorsque $x^2 - y^2 - 2y = 0$. Dans les autres cas, $\mathrm{M}_{x,y}$ est inversible dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, mais peut-être pas dans Σ.
   $\mathrm{M}_{x,y} \times \mathrm{M}_{-x,y} = (y^2 - x^2 + 2y)\mathrm{I}_2$. Donc, lorsque $x^2 - y^2 - 2y \neq 0$, $\mathrm{M}_{x,y}^{-1} = \mathrm{M}\left(-\frac{x}{y^2-x^2+2y}, \frac{y}{y^2-x^2+2y}\right)$ qui appartient bien à Σ.
2. La matrice nulle n'appartient pas à Σ. Donc Σ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.
3. L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{A} + \mathrm{M}_{x,y} \end{array} \right.$ est linéaire, clairement surjective. Son noyau est réduit au vecteur nul. φ est donc bijective.
4. Une base de E est donc, par exemple, $(\varphi(1,0), \varphi(0,1))$. J est de dimension 2.
5. $\varphi(x,y).\varphi(x',y') = \begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'-y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - xy' - yx' + yy' & xy' + yx' \\ 0 & xx' + xy' + yx' + yy' \end{pmatrix}$
   $= \varphi(xx' + yy', xy' + yx')$. C'est bien dire que la loi $\times$ est interne dans J.

II.

1. *On a* $B(\lambda X+\mu Y)=\lambda BX+\mu BY$. *De plus* $BX\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. φ_B *est donc un endomorphisme de* $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.
2. (a) *On a* $B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$. *On a* $\varphi_{B^{-1}}\left(\varphi_B(X)\right)=B^{-1}.\varphi_B(X)=B^{-1}BX=X$. *On a donc* $\varphi_{B^{-1}}=\left(\varphi_B\right)^{-1}$.

   (b) *On a* $BE_{1,1}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=E_{1,1}+2E_{2,1}$. *On obtient ainsi la première colonne de la matrice de* φ_B *dans la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$. *On trouve de la même façon les autres colonnes :* $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\2&0&3&0\\0&2&0&3\end{pmatrix}$.
3. *Cette fois* B *n'est pas inversible. Puisqu'il n'est pas question d'obtenir une solution à* $\varphi_B(X)=I_2$, φ_B *n'est pas surjective et donc pas bijective.*

Exercice 25.81 ♡♡

Soit une sous-algèbre $\mathscr{A}$ *de l'algèbre* $L(E)$. *On suppose que* $\forall f\in L(E)$, $f^2\in\mathscr{A}\implies f\in\mathscr{A}$. *Montrer que* $\mathscr{A}=L(E)$.

Solution : *Raisonnons de façon équivalente sur les matrices carrées. Supposons que* $\mathscr{A}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $\forall M\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $M^2\in\mathscr{A}\implies M\in\mathscr{A}$. *Il suffit de montrer que toute matrice* E_{ij} *de la base canonique appartient à* $\mathscr{A}$. *Comme* $\mathscr{A}$ *est une sous-algèbre de* $L(E)$, $0_{L(E)}\in\mathscr{A}$. *Or si* $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $E_{ij}^2=E_{ij}E_{ij}=\delta_{ij}E_{ij}$. *Par conséquent, si* $i\neq j$, $E_{ij}^2\in\mathscr{A}$ *et donc* $E_{ij}\in\mathscr{A}$. *Soit maintenant* $i\in[\![1,n]\!]$. *Soit* $j\neq i$. *On sait que* $E_{ij},E_{ji}\in\mathscr{A}$ *et comme* $\mathscr{A}$ *est une sous-algèbre de* $L(E)$, *le produit* $E_{ij}E_{ji}=E_{ii}$ *est encore dans* $\mathscr{A}$. *Comme* $\mathscr{A}$ *contient toutes les matrices de la base canonique et que c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}=\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

25.12.9 Changement de base

Exercice 25.82 ♡

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ *muni de sa base canonique* $e=(e_1,e_2)$. *On considère l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^2$ *donné par :*

$$f(e_1)=e_1+e_2\quad\text{et}\quad f(e_2)=-e_1+2e_2$$

1. *Déterminer la matrice* A *de* f *dans la base canonique* e.
2. *Soit* $v=xe_1+ye_2\in\mathbb{R}^2$. *Calculer les composantes* x' *et* y' *de* $f(v)$ *dans la base canonique* e.
3. *On pose :* $\varepsilon_1=e_2$ *et* $\varepsilon_2=e_1+e_2$. *Prouver que* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ *est une base de* E.
4. *Déterminer* $P_{e\to\varepsilon}$ *ainsi que* $P_{\varepsilon\to e}$.
5. *En déduire la matrice* B *de* f *dans la base* ε *et en déduire les expressions de* $f(\varepsilon_1)$ *et* $f(\varepsilon_2)$ *en fonction de* ε_1 *et* ε_2.

Solution :

1. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$
2. *Par linéarité de* f : $f(v)=\left(x-y,x+2y\right)$
3. *Comme* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ *et que cette matrice est inversible, la famille* ε *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
4. *Comme* $P_{e\to\varepsilon}=\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ *alors* $P_{\varepsilon\to e}=(P_{e\to\varepsilon})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$
5. *La formule de changement de base amène* $B=\mathrm{Mat}_\varepsilon\left(f\right)=P_{\varepsilon\to e}\mathrm{Mat}_e\left(f\right)P_{e\to\varepsilon}$. *Après calcul, on trouve :* $B=\begin{pmatrix}3&3\\-1&0\end{pmatrix}$

Exercice 25.83 ♡

Soit (e_1,e_2,e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *On pose :*

$$f_1=e_1-e_2+2e_3,\quad f_2=e2+e_3,\quad e_1+2e_3$$

1. *Prouver que* $\left(f_1,f_2,f_3\right)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Écrire la matrice de passage de la base e à la base f.*
3. *Déterminer la matrice de passage de la base f à la base e.*
4. *On considère le vecteur u de coordonnées $(-1,0,2)$ dans la base canonique. Quelles sont ses coordonnées dans la base f ?*
5. *On considère l'endomorphisme* $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-2z,-x-z,-x+2y)\end{array}\right.$. *Déterminer la matrice de* θ *dans la base f.*

Solution :

1. *On a :* $\operatorname{Mat}_e(f)=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}$. *Le déterminant de cette matrice est -1. On en déduit que la famille f est libre et comme elle est de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Par définition :* $P_{e\to f}=\operatorname{Mat}_e(f)$.
3. *De même* $P_{f\to e}=(P_{e\to f})^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-2&0&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$
4. *D'après la formule de changement de base* $\operatorname{Mat}_f u=P_{f\to e}\operatorname{Mat}_e(u)=\begin{pmatrix}4\\4\\-5\end{pmatrix}$.
5. *On a :* $\operatorname{Mat}_e(\theta)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&0&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}$. *En utilisant la formule de changement de base* $\operatorname{Mat}_f(\theta)=P_{f\to e}\operatorname{Mat}_e(\theta)P_{e\to f}$, *on trouve* $\operatorname{Mat}_f(\theta)=\begin{pmatrix}8&5&8\\5&4&5\\-12&-6&-11\end{pmatrix}$

Exercice 25.84 ♡

Soient :

$$P_1=X^2+1,\quad P_2=X+1\quad\text{et}\quad P_3=2X^2-X$$

On note $\mathscr{B}=(1,X,X^2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}'=(P_1,P_2,P_3)$ *forme une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *Écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, puis celle de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.*
3. *Soit* $P(X)=X^2-X+2$. *Donner les composantes de* P *dans la base* $\mathscr{B}'$.
4. *On considère l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *donné par* $\theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X]\\ P & \longmapsto & XP'\end{array}\right.$. *Déterminer la matrice de* θ *dans la base* $\mathscr{B}'$.

Solution :

1. *On a* $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$ *et* $\det\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=1$ *donc la famille $\mathscr{B}'$ est libre. Cette famille est de plus de cardinal égal à la dimension de* $\mathbb{R}_2[X]$ *ce qui prouve que c'est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *On a* $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ *et* $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}=(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1}=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$
3. *On a* $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(P)=P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(P)=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

4. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\theta) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta)\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 25.85 ♡

On considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ *et* $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ *tous deux munis de leurs bases canoniques respectives qu'on notera* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *et* $f = (f_1, f_2)$*. Soit* $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y-z) \end{cases}$.

1. *Prouver que* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et écrire la matrice de* u *relativement aux bases* e *et* f.
2. *On considère les familles de vecteurs* $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *avec* $e'_1 = (0,1,-1)$, $e'_2 = (1,0,2)$, $e'_3 = (1,1,0)$ *et* $f' = (f'_1, f'_2)$ *avec* $f'_1 = (1,0)$, $f'_2 = (1,1)$*. Montrer que* e' *et* f' *sont des bases de respectivement* E *et* F *et écrire les matrices de changement de base de* e *vers* e' *et de* f *vers* f'.
3. *En déduire la matrice de* u *relativement aux bases* e' *et* f'.

Solution :

1. *On vérifie facilement que* u *est linéaire. De plus* $\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. *On écrit* $\mathrm{Mat}_e\, e' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et comme* $\det(\mathrm{Mat}_e\, e') = 1$ *on en déduit que* e' *est une base de* E*. De même* $\mathrm{Mat}_f(f') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\det(\mathrm{Mat}_f(f')) = 1$*. La famille* f' *est donc une base de* F*. De plus* $\mathrm{P}_{e\to e'} = \mathrm{Mat}_e\, e'$ *et* $\mathrm{P}_{f\to f'} = \mathrm{Mat}_f\, f'$.
3. *La formule de changement de bases est* $\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \mathrm{P}_{f'\to f}\mathrm{Mat}_{f\leftarrow e}(u)\mathrm{P}_{e\to e'}$ *et comme* $\mathrm{P}_{f'\to f} = (\mathrm{P}_{f\to f'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a* $\mathrm{Mat}_{f'\leftarrow e'}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.86 ♡

Dans le $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* e*, on considère la famille de vecteurs* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *donnés par* $\varepsilon_1 = (1,0,2)$, $\varepsilon_2 = (0,1,1)$, $\varepsilon_3 = (1,0,1)$*. Posons* $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *et* $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.

1. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E*. Donner une base de* E *adaptée à la supplémentarité de ces deux sous-espaces vectoriels.*
2. *Écrire, dans la base* e*, la matrice de la projection* p *de* E *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire les matrices, dans la base* e *de :*
   (a) *la projection* p' *de* E *sur* G *parallèlement à* F.
   (b) *la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G.

Solution :

1. *On a* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\det \mathrm{A} = -1$*. La famille* ε *est donc une base de* E*. On en déduit que* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *forme une base de* F *et que* (ε_3) *forme une base de* G*. Ces deux sous-espaces sont de plus clairement supplémentaires et la base* ε *est adaptée à cette supplémentarité.*
2. *On a :* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et, en utilisant les formules de changement de base* $\mathrm{Mat}_e(p) = \mathrm{P}_{e\to\varepsilon}\mathrm{Mat}_\varepsilon(p)\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}$ *avec* $\mathrm{P}_{e\to\varepsilon} = \mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ *et* $\mathrm{P}_{\varepsilon\to e} = (\mathrm{P}_{e\to\varepsilon})^{-1}$*. Après calculs, on trouve* $\mathrm{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. (a) *On sait que* $p + p' = \mathrm{id}_E$. *Donc* $\mathrm{Mat}_e(p') = I_3 - \mathrm{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) *On sait aussi que* $s = 2p - \mathrm{id}_E$. *Donc* $\mathrm{Mat}_e(s) = 2\,\mathrm{Mat}_e(p) - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.87 ♡

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\varepsilon_1 = (0,0,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,1)$ *et* $\varepsilon_3 = (0,1,1)$. *On pose :* $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.

1. *Prouver que* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est une base de* E *et en déduire que* $E = F \oplus G$.
2. *Déterminer la matrice dans la base canonique* e *de* E *de la projection* p *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire, dans la base canonique de* E*, la matrice de la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G *et la matrice de la projection* p' *sur* G *parallèlement à* F.

Solution :

1. *Comme la matrice* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible, la famille* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Comme* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *est une base de* F *et que* (ε_3) *est une base de* G*, on en déduit que* $E = F \oplus G$.
2. *On sait que* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *donc grâce aux formules de changement de base* $\mathrm{Mat}_e(p) = P_{e\to\varepsilon}\,\mathrm{Mat}_\varepsilon(p)\,P_{\varepsilon\to e}$ *avec* $P_{e\to\varepsilon} = \mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ *et* $P_{\varepsilon\to e} = (P_{e\to\varepsilon})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On effectue les calculs et on trouve* $\mathrm{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. *On sait que* $s = 2p - \mathrm{id}_E$ *et que* $p + p' = \mathrm{id}_E$ *donc* $\mathrm{Mat}_e(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_e(p') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25.88 ♡

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *représenté par* A *dans la base* e. *On pose* $\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (1,0,2)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. *Montrer que* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker}\, f$ *et de* $\mathrm{Im}\, f$.

Solution :

1. *On vérifie que* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *est inversible donc* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *D'après la formule de changement de base* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(f) = P_{\varepsilon\to e}\,\mathrm{Mat}_e(f)\,P_{e\to\varepsilon}$ *avec* $P_{e\to\varepsilon} = \mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ *et* $P_{\varepsilon\to e} = (P_{e\to\varepsilon})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Il vient* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
3. *Les deux derniers vecteurs colonnes de* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(f)$ *sont non colinéaires et le premier est nul donc* $\mathrm{rg}\, f = 2$ *et* $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$. *Les vecteurs* $f(\varepsilon_2) = (1,1,0)$ *et* $f(\varepsilon_3) = (0,0,-2)$ *sont non colinéaires et dans l'image de* f. *Il forment donc une base de* $\mathrm{Im}\, f$. *La formule du rang permet d'affirmer que* $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$. *Comme* $f(\varepsilon_1) = 0$*, une base de* $\mathrm{Ker}\, f$ *est* (ε_1).

Exercice 25.89 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e=(e_1,e_2,e_3)$*. On considère* f *l'endomorphisme de* E *dont la matrice dans la base* e *est* $A=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\1&0&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

1. *Calculer* A^2*. Que peut-on en déduire au sujet de* f *?*
2. *Déterminer une base de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*.*
3. *Prouver de deux façons différentes que* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont supplémentaires dans* E*.*
4. *Quelle est la matrice de* f *relativement à une base adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que* $A^2=A$*. On a alors* $f^2=f$ *et* f *est donc un projecteur de* E*.*
2. *Soit* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$*. On a :* $AX=0$ *si et seulement si* $\begin{cases}3x-2y-4z&=0\\x-2z&=0\\x-y-z&=0\end{cases}$ *c'est-à-dire si et seulement si* $X\in\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$*.*
   On en déduit que $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ *où* $\varepsilon_1=2e_1+e_2+e_3$*. Par ailleurs, posons* $\varepsilon_2=f(e_1)$ *et* $\varepsilon_3=f(e_2)$*. On vérifie, par un calcul matriciel facile que* $\varepsilon_2=3e_1+e_2+e_3$ *et que* $\varepsilon_3=-2e_1+e_3$*. Les vecteurs* ε_2 *et* ε_3 *sont dans* $\operatorname{Im} f$ *et sont non colinéaires. Ils forment donc une famille libre. En appliquant la formule du rang, on montre que* $\dim\operatorname{Im} f=2$*. Il s'ensuit que cette famille est une base de* $\operatorname{Im} f$*.*
3. *Comme* f *est un projecteur,* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont nécessairement supplémentaires dans* E*.*
4. *Utilisant la question précédente, la famille* ε *est adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*. On obtient facilement :* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$*.*

Exercice 25.90 ♡

Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $A=\begin{pmatrix}2&4&4\\0&4&2\\0&-4&-2\end{pmatrix}$*. Notons* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base* e *est* A*.*

1. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$*. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Déterminer une base à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$ *et écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Écrire* f *comme composée de transformations vectorielles élémentaires.*

Solution :

1. *Pour tout* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*, on vérifie facilement que* $f(x,y,z)=(2x+4y+4z,4y+2z,-4y-2z)$*. On en déduit que* $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ *où* $\varepsilon_1=(2,1,-2)$ *et que* $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *où* $\varepsilon_2=(1,0,0)$ *et* $\varepsilon_3=(0,1,-1)$*. On vérifie facilement que la famille* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *est une base de* E*. Comme* (ε_1) *est une base de* $\operatorname{Ker} f$ *et que* $(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$*, on sait que* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont supplémentaires dans* E*.*
2. *La famille* ε *est adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*. Utilisant la formule de changement de base :* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f)=P_{\varepsilon\to e}\operatorname{Mat}_e(f)P_{e\to\varepsilon}$ *où* $P_{e\to\varepsilon}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ *et où* $P_{\varepsilon\to e}={P_{e\to\varepsilon}}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}$*, on obtient*
   $$\operatorname{Mat}_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&2\\0&2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&4&4\\0&4&2\\0&-4&-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$
3. f *est alors la composée de l'homothétie vectorielle de rapport* 2 *et de la projection de* $\mathbb{R}^3$ *sur le plan* $\operatorname{Im} f$ *parallèlement au plan* $\operatorname{Ker} f$*.*

Exercice 25.91 ♡

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une base* $e=(e_1,e_2,e_3)$*. On considère* $u\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *représenté dans la base* e *par la matrice* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la famille* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *avec* $\varepsilon_1=(-1,1,-1)$*,* $\varepsilon_2=(0,1,0)$ *et* $\varepsilon_3=(0,1,1)$ *est une base de* E*. Écrire la matrice de passage de la base* e *à la base* ε*.*
2. *Calculer la matrice de* u *dans la base* ε*.*
3. *En déduire la matrice de* u^n *dans la base* e*.*

Solution :

1. *Comme* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ *et que* $\det(\mathrm{Mat}_e(\varepsilon))=1$*, la famille* f *est de rang* 3 *et forme donc une base de* E*. De plus* $\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}=\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$*.*
2. *Appliquant les formules de changement de bases :* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(u)=\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}\mathrm{Mat}_e(u)\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}$ *avec* $\mathrm{P}_{\varepsilon\to e}=(\mathrm{P}_{e\to\varepsilon})^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_e(u)=\mathrm{A}$*. On en déduit que* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$*.*
3. *Notons* $\mathrm{P}=\mathrm{P}_{e\to\varepsilon}$ *et* $\mathrm{A}_0=\mathrm{Mat}_\varepsilon(u)$*. On a donc :* $\mathrm{Mat}_e(u^n)=\mathrm{A}^n=\left(\mathrm{P}\mathrm{A}_0\mathrm{P}^{-1}\right)^n=\mathrm{P}\mathrm{A}_0^n\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1+2^n&2^n&0\\1-2^n&0&2^n\end{pmatrix}$

Exercice 25.92 ♡

On considère le $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$ *muni de sa base canonique* $e=(e_1,e_2,e_3)$*. Soit* u *l'endomorphisme de* E *représenté dans la base* e *par la matrice* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-3&-1&3\\-2&-2&3\end{pmatrix}$*. Le but de cet exercice est de trouver une base* ε *de* E *tel que dans cette base la matrice de* u *est diagonale. On dira alors qu'on a diagonalisé* u*.*

1. *Développer le polynôme* $\mathrm{P}(\lambda)=\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)$*.* P *est appelé* ***polynôme caractéristique*** *de* u*.*
2. *Calculer les racines de* P*. Les trois réels trouvés sont appelées* ***valeurs propres*** *de* u*.*
3. *Déterminer des vecteurs* $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ *de* E *en sorte que* (ε_1) *forme une base de* $\mathrm{Ker}\,(u-id)$*,* (ε_2) *forme une base de* $\mathrm{Ker}\,(u-2id)$ *et* (ε_3) *forme une base de* $\mathrm{Ker}\,(u+id)$*. Ces trois vecteurs sont des* ***vecteurs propres*** *de* u*.*
4. *Montrer que* $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ *est une base de* E*.*
5. *Vérifier que la matrice de* u *dans la base* ε *est diagonale.*

Solution :

1. *On a :* $\mathrm{P}(\lambda)=\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)=\begin{vmatrix}-\lambda&-2&1\\-3&-1-\lambda&3\\-2&-2&3-\lambda\end{vmatrix}$*. En effectuant les opérations élémentaires* $\mathrm{C}_1\leftarrow\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_3$ *puis* $\mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1$*, on a* $\mathrm{P}(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda+1&-2&1\\0&-1-\lambda&3\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda+1)(-1-\lambda)(2-\lambda)$*.*
2. *Les valeurs propres de* u *sont* 1*,* -1 *et* 2*.*
3. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*. Posons* $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$*. On a :* $u(x)-x=0$ *si et seulement si* $\mathrm{AX}-\mathrm{X}=0$ *qui est équivalent au système* $\begin{cases}-2y+z-x=0\\-3x-2y+3z=0\\-2x-2y+2z=0\end{cases}$ *On vérifie que l'ensemble des solution de ce système est donné par* $\mathrm{V}ect(\varepsilon_1)$ *avec*

$\varepsilon_1 = (1,0,1)$. *Donc* $\operatorname{Ker}(u - id) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ *On montre de même que* $\operatorname{Ker}(u - 2id) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2)$ *avec* $\varepsilon_2 = (-1,1,0)$ *et que* $\operatorname{Ker}(u + id) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_3)$ *avec* $\varepsilon_3 = (1,1,1)$.

4. *Comme* $P = \operatorname{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et que* $\det(P) =_1$, *la famille* ε *est de rang* 3 *et forme une base de* E.

5. *On a :* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(u) = P_{\varepsilon\to e} \operatorname{Mat}_e(u) P_{e\to\varepsilon}$ *avec* $P_{\varepsilon\to e} = (\operatorname{Mat}_e(\varepsilon))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et donc :*

$$\operatorname{Mat}_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25.93 ♡♡

Soit $E = \mathbb{R}^2$. *Déterminer tous les endomorphismes* $u \in L(E)$ *tels que :*

$$\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(1,2), \text{ et } \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(1,1)$$

Solution : *Posons* $f_1 = (1,2)$ *et* $f_2 = (0,1)$. *Comme* f_1 *et* f_2 *ne sont pas colinéaires,* $u(f_2)$ *est non nul et élément de* $\operatorname{Im} u$. *Il existe donc* $\alpha \neq 0$ *tel que* $u(f_2) = (\alpha,\alpha)\alpha e_1 + \alpha e_2 = \alpha f_1 - \alpha f_2 =$. *On vérifie facilement que* $f = (f_1, f_2)$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$. *Il est clair que* $\operatorname{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. *De plus,* $P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P_{f\to e} = P_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On en déduit que* $\operatorname{Mat}_e(u) = P_{e\to f} \operatorname{Mat}_f(u) P_{f\to e} = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha \\ -2\alpha & \alpha \end{pmatrix}$. *On en déduit que* $u(x,y) = \alpha(-2x+y, -2x+y)$. *Réciproquement, on vérifie facilement que tous les endomorphismes de cette forme satisfont l'hypothèse.*

Exercice 25.94 ♡♡

1. *Soit un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie et un endomorphisme* $u \in L(E)$ *de rang* 1. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $u^2 = \lambda u$.
2. *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Montrer que* $\underbrace{(\operatorname{rg}(A) = 1)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{(\exists (X,Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^{*2}\ A = X\,{}^tY)}_{(ii)}$.

Solution :

1. *Comme* $\operatorname{rg}(u) = 1$, *d'après la formule du rang,* $\operatorname{Ker} u$ *est de dimension* $n-1$ *où* $n = \dim E$. *Soit* e' *une base de* $\operatorname{Ker} u$. *On applique le théorème de base incomplète pour compléter par un vecteur* $e_n \in E$ *en une base* e *de* E. *Comme* $\operatorname{Vect}(e_n) = \operatorname{Im} u$, *il existe* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *tel que* $u(e_n) = \lambda e_n$. *Soit* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ *alors* $u(x) = x_n u(e_n) = x_n \lambda e_n$ *et* $u^2(x) = x_n \lambda^2 e_n = \lambda u(x)$ *et la propriété est prouvée.*
2. $(i) \implies (ii)$ *Supposons que* $\operatorname{rg}(A) = 1$. *Soit* b *la base canonique de* $\mathbb{K}^n$. *Il existe* $u \in L(\mathbb{K}^n)$ *tel que* $\operatorname{Mat}_b(u) = A$. *Comme* $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) = 1$, *d'après la question* 1, *on sait qu'il existe une base* e *de* $\mathbb{K}^n$ *tel que* $u(e_i) = 0$ *pour tout* $i \in [\![1, n-1]\!]$ *et* $u(e_n) = \lambda e_n$ *où* $\lambda \in \mathbb{K}^*$. *Donc*

$$\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda X_0\,{}^tX_0$$

avec $X_0 = {}^t(0,\dots,0,1) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. *Si* $P = P_{b\to e}$ *alors* $A = PX_0\,{}^tX_0P^{-1} = X\,{}^tY$ *avec* $X = \lambda PX_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *et* $Y = {}^tP^{-1}X_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. *Remarquons que* X *et* Y *sont non nuls car c'est le cas de* X_0 *et que* P *est inversible.*

$(ii) \implies (i)$ *Réciproquement, si* $A = X\,{}^tY$ *avec* $X = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ *et* $Y = {}^t(y_1,\dots,y_n) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ *alors*

$$A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Toutes les colonnes de A *sont colinéaires donc* $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 1$ *car* X *est non nul.*

25.12.10 Matrices semblables, équivalentes

Exercice 25.95 ♡

Trouver les matrices E_{ij} *de la base canonique de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *semblables à une matrice diagonale.*

Solution : *Ce sont celles qui sont déjà des matrices diagonales, c'est-à-dire celles pour lesquelles* $i = j$*. En effet supposons l'espace d'un instant qu'une matrice* E_{ij} *soit semblable à une matrice diagonale* D *avec* $i \neq j$*. On en déduit que* $0 = E_{ij}^2$ *est semblable à* D^2*, donc* $D^2 = 0$ *donc* $D = 0$ *puisque* D *est diagonale. Donc le rang de* D *égale* 0*, alors que celui de* E_{ij} *égale* 1*. Comme deux matrices semblables ont même rang, on a une contradiction.*

Exercice 25.96 ♡

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est semblable à la matrice* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution : *Soit* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*, on a* $P^{-1} = \frac{1}{2}{}^tP$ *et* $P^{-1}AP = D$.

Exercice 25.97 ♡

Les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *sont-elles semblables ?*

Solution : *En regardant l'action de ces matrices sur les vecteurs colonnes de la base naturelle, on voit que* $B^3 = 0$ *et* $A^3 = A$. A *et* B *ne peuvent pas être semblables.*

Exercice 25.98 ♡

Soient deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *, avec* A *inversible.*

1. *Montrer que* AB *et* BA *sont semblables.*
2. *Montrer que le résultat est faux si* A *n'est pas inversible.*

Solution :

1. *Si* A *est inversible, il suffit d'écrire* $AB = A(BA)A^{-1}$
2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Les matrices* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *n'ont pas même rang et n'ont donc aucune chance d'être semblables.*

Exercice 25.99 ♡

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *qui s'écrit :*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ {}^tD & a \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $C, D \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ *et* $a \in \mathbb{R}$*. On suppose que* B *est inversible. Montrer que* A *est inversible si et seulement si*

$$a \neq {}^t DB^{-1}C$$

Solution : *Si* A *n'était pas inversible, il existerait* X *tel que* $AX = 0$ *avec* $X \neq 0$*. De plus,* $x_n \neq 0$ *(car* B *inversible). En notant* $\widetilde{X} = (x_1, \dots, x_{n-1})$*, on obtiendrait que* $B\widetilde{X} + x_nC = 0$ *et* ${}^tD\widetilde{X} + ax_n = 0$*, d'où la relation.*
Réciproquement, si $a = {}^t DB^{-1}C$*, alors on construit un vecteur* $X = -\left(B^{-1}C, -1\right)$ *, on a* $AX = 0$ *avec bien sûr* $X \neq 0$.

Exercice 25.100 ♡♡

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \nearrow & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la matrice* P *est inversible et calculer son inverse* P^{-1}.
2. *Pour une matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*, calculer la matrice* PAP.
3. *En déduire qu'une matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Solution :

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E. Alors il existe un unique $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{P}$. On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = e_{n-i+1}$ et $u^2(e_i) = e_i$, donc $\mathrm{P}^2 = \mathrm{I}_n$. Par conséquent, $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}$.
2. Puisque $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^n \mathrm{E}_{k,n-k+1}$,
$$\mathrm{PAP} = \sum_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n} a_{ij} \mathrm{E}_{k,n-k+1} \mathrm{E}_{ij} \mathrm{E}_{n-l+1,l} = \sum_{i,j,k,l} \delta_{n+1-k,i} \delta_{j,n+1-l} \mathrm{E}_{k,l} = \sum_{k,l} a_{n+1-k,n+1-l} \mathrm{E}_{kl}$$
La matrice PAP s'obtient en faisant deux symétries de A par rapport aux deux diagonales.
3. Puisque $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}$, PAP^{-1} est une matrice triangulaire supérieure lorsque A est une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 25.101 ♡♡

Á quelle condition deux matrices E_{pq} et E_{kl} de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

Solution : Considérons l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique.

1. Une condition nécessaire est que les matrices aient même trace. Donc si $p = q$ et $k \neq l$, (ou bien $p \neq q$ et $k = l$), les deux matrices ne sont pas semblables.
2. Montrons que deux matrices E_{pp} et E_{qq} ($p \neq q$) sont semblables. Soit u l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{E}_{pp}$. Considérons la base e' obtenue en permutant les deux vecteurs e_p et e_q. Dans la base e', la matrice de u est E_{qq}. Par conséquent, les deux matrices E_{pp} et E_{qq} représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes : elles sont semblables. Complément : écrivez la matrice de passage de la base e vers la base e', et son inverse.
3. Soient quatre indices $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $p \neq q$ et $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq l$. Notons u l'unique endomorphisme ayant pour matrice E_{pq} dans la base e. Considérons la base e' obtenue en échangeant les vecteurs $e_q \leftrightarrow e_l$ et $e_p \leftrightarrow e_k$. Alors la matrice de l'endomorphisme u dans la base e' est la matrice E_{kl} (faire un dessin et vérifier ce résultat même lorsque $p = q$ ou $k = l$). Donc les matrices E_{pq} et E_{kl} sont semblables. Pouvez-vous écrire la matrice de passage $\mathrm{P}_{e \to e'}$ correspondante ? Quel est son inverse ?

Exercice 25.102 ♡♡

Soit une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}$ et telle que A n'est pas une matrice scalaire. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de E. Il existe un unique endomorphisme u de E ayant A comme matrice dans la base e. Puisque $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}$, $u^2 = \mathrm{id}$ et donc u est une symétrie vectorielle. On a
$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}).$$
En effet, on peut toujours écrire $x = \dfrac{1}{2}(x + u(x)) + \dfrac{1}{2}(x - u(x))$ avec $x + u(x) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $x - u(x) \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. L'intersection de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ étant bien sûr réduite au vecteur nul.
Comme A n'est pas scalaire, $u \neq \mathrm{id}$ et $u \neq -\mathrm{id}$. Par conséquent, aucun des deux noyaux n'est $\mathbb{R}^2$ tout entier. Les noyaux $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ sont donc des droites vectorielles. Considérons $f_1 \neq 0$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $f_2 \neq 0$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. D'après le théorème sur les bases adaptées à une somme directe, $f = (f_1, f_2)$ est une base de E. Dans cette base,
$$\mathrm{D} = \mathrm{M}at_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
De la même façon, il existe un unique endomorphisme v ayant $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme matrice dans la base canonique. Comme $\mathrm{B}^2 = \mathrm{id}$, le même raisonnement montre que v est une symétrie vectorielle et permet de construire une base g dans laquelle $\mathrm{M}at_g(v) = \mathrm{D}$.
Par conséquent, puisque A et D sont semblables et que B et D sont semblables, on en déduit que A et B sont semblables.

Exercice 25.103 ♡♡

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et un endomorphisme $f \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ de rang 1.

1. *Si l'on suppose que* $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$*, montrer qu'il existe une base* ε *de* E *et un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$\operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. *En déduire que pour tout endomorphisme* f *de rang* 1*, il existe un scalaire* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tel que* $f^2 = \alpha f$.
3. *Soit une base* e *quelconque de* E*, et un endomorphisme* $f \in L(E)$ *quelconque. On note* $B = \operatorname{Mat}_e(f)$ *la matrice de l'endomorphisme* f *dans la base* e*. Montrer l'équivalence*

$$\underbrace{\big(\operatorname{rg}(f) = 1\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(\exists (X,Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^2 \text{ non nuls tels que } B = X\,{}^tY\big)}_{(ii)}$$

(On se contentera de la démonstration dans le cas où $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$*).* *voir exercice 25.94 p.1025.*

Solution :

1. *D'après la formule du rang,*

$$n = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$$

donc $\operatorname{Ker} f$ *est un hyperplan de* E *de dimension* $(n-1)$*. Comme* $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 1$*, il existe un vecteur* $a \neq 0$ *tel que* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$*. Puisque l'on a supposé que* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$*, et que* $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$*, on sait que*

$$E = \operatorname{Vect}(a) \oplus \operatorname{Ker} f$$

le système (a) *est une base de* $\operatorname{Im} f$*, et si l'on suppose* $n \geqslant 2$*, puisque* $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$*, il existe une base de* $\operatorname{Ker} f$ *de la forme* $(\varepsilon_2 \dots, \varepsilon_n)$*. Le théorème de la base adaptée à une somme directe nous dit alors que le système* $\varepsilon = (a, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ *est une base de* E*. Comme* $f(a) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$*, il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $f(a) = \lambda a$*. La matrice de* f *dans la base* ε *est donc bien de la forme souhaitée.*

2. *Dans le cas où* $a \in \operatorname{Ker} f$*, on a* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ *et donc* $f^2 = 0$*. Le résultat est montré avec* $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$.

   On peut donc supposer que $\operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$ *et alors* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$*. D'après a), on a construit une base* ε *dans laquelle la matrice de* f *était simple :* $A = \operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = \lambda E_{11}$*. On calcule alors* $A^2 = \lambda^2 E_{11} E_{11} = \lambda^2 E_{11} = \lambda A$ *et on en déduit que* $f^2 = \lambda f$.

3. *Supposons que* $\operatorname{rg} f = 1$*. Lorsque* $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$*, on a construit une base* ε *dans laquelle la matrice de* f *s'écrivait* $A = \lambda E_{11}$*. Posons* X' *la matrice colonne avec un* λ *sur la première ligne et des zéros sur les autres lignes, et* Y' *la matrice colonne avec un* 1 *sur la première ligne et des zéros sur les autres lignes. Un calcul direct montre que*

$$A = X'\,{}^tY'$$

Mais puisque les matrices A *et* B *représentent le même endomorphisme* f *dans deux bases différentes* ε *et* e*, elles sont semblables. En notant* P *la matrice de passage de la base* ε *vers la base* e*, on a*

$$A = PBP^{-1} = (PX')\,{}^tY'P^{-1} = (PX')^t\,({}^tP^{-1}Y')$$

et il suffit de poser $X = PX' \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *et* $Y = {}^tP^{-1}Y' \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *pour avoir* $B = X\,{}^tY$.

Si l'on suppose maintenant que $B = X\,{}^tY$*, en notant* $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *et* $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$*, la matrice* B *s'écrit :*

$$B = ((x_i y_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que toutes les colonnes de cette matrice sont proportionnelles à la matrice colonne X*. En utilisant l'algorithme du rang, on trouve que cette matrice est de rang* 1 *(la colonne* X *est non-nulle).*

25.12.11 Systèmes linéaires

Exercice 25.104 ♡

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ *les systèmes :*

1. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y-z=2 \\ 2z=8 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -x-3y+5z=2 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x+y+z=-1 \\ x-3y+2z=-1 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-3y+z=4 \\ x-3y-4z=5 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y+3z=0 \\ x+2y+6z=2 \\ 7x+3y+9z=14 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+y-z=2 \\ x-2y+4z=1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ -x-y+z=-1 \end{cases}$

Solution :

1. *En remontant, on trouve successivement :* $z=4;\ y=2;\ x=-1$.
2. $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-3y+z=4 & L_2 \longleftarrow L_2-2L_1 \\ x-3y-4z=5 & L_3 \longleftarrow L_3-L_1 \end{cases} \begin{cases} x-y+2z=1 \\ -y-3z=2 \\ -2y-6z=4 \end{cases}$.
   Les deux dernières équations sont équivalentes. Le système est de rang 2 *et compatible. En prenant* z *comme paramètre, l'ensemble des solutions est* $\{(-5z-1,-3z-2,z) \mid z\in\mathbb{K}\}$.
3. *Système de Cramer :* $\left\{\left(-\frac{5}{2},1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.
4. *Système de rang* 2 *et compatible.* $\{(2,-3z,z) \mid z\in\mathbb{K}\}$.
5. *Système de Cramer :* $\{(-2,1,2)\}$.
6. *Système de rang* 2 *mais pas compatible. Pas de solution.*
7. $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ *soit* $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 3x+5z=0 \end{cases}$. *Le système est de rang* 2*, donc compatible. En prenant* z *comme paramètre, l'ensemble des solutions est* $\left\{\left(-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}z,z\right) \mid z\in\mathbb{K}\right\}$.
8. *Le système est clairement de rang* 1 *et compatible (on a trois fois la même équation). L'ensemble des solutions est le plan d'équation* $x+y-z=1$.

Exercice 25.105 ♡

Sans chercher à résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leur ensemble solution :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Solution : *Premier système : Matrice de rang* 3 *(inversible) donc une unique solution* $(0,0,0)$.
Deuxième système : Matrice de rang 2*, système non compatible, pas de solution.*
Troisième système : Matrice de rang 2*, système non compatible, pas de solution.*

Exercice 25.106 ♡

Discuter, suivant la valeur de m*, la dimension de l'espace des solutions des systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} x+my+z=0 \\ mx+y+mz=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$

Solution :

1. *Si* $m=1$ *ou* $m=-1$*, alors le système est de rang* 1*. L'espace des solutions est de dimension* 2*. Sinon le système est de rang* 2 *et l'espace des solutions est de dimension* 1*. Dans ce dernier cas, l'ensemble des solutions est* $\{(x,0,-x), x\in\mathbb{R}\}$.
2. *Si* $m=1$*, alors le système est de rang* 1*. L'espace des solutions est de dimension* 2*. Si* $m=-2$*, alors le système est de rang* 2*. L'espace des solutions est de dimension* 1*. Sinon le système est de Cramer. L'espace des solutions est de dimension* 0.

Exercice 25.107 ♡

On considère, pour un paramètre réel m*, les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+my+z=0 \quad \text{et} \quad mx+y-mz=0\right\}$$
$$\text{et} \quad G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-my+z=0\right\}$$

1. *Déterminer la dimension de* F *et de* G.
2. *Discuter suivant les valeurs de* m *la dimension du sous-espace vectoriel* $F\cap G$.

Solution :

1. *Que m soit égal à 1 ou non,* $\dim F = 1$ *car le rang de* $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \end{pmatrix}$ *égale* 2. $\dim G = 2$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} = -4m^2$. *Si* $m = 0$*, alors* $F \cap G$ *est de dimension* 1*, et de dimension* 0 *sinon.*

Exercice 25.108 ♡

Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1*,* b_2*,* b_3 *et* b_4 *:*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+4z+7t &=& b_1 \\ x+3y+4z+5t &=& b_2 \\ x+3y+3z+2t &=& b_3 \\ x+y+z+t &=& b_4 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t &=& b_1 \\ x+4y+7z+3t &=& b_2 \\ y+2z &=& b_3 \\ x+2y+3z+2t &=& b_4 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z-t &=& b_1 \\ -x+3y+t &=& b_2 \\ 2x-2y+2z-2t &=& b_3 \\ 2y+z &=& b_4 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z+2t &=& b_1 \\ -2x-4y-2z-4t &=& b_2 \\ -x-2y-z-2t &=& b_3 \\ 3x+6y+3z+6t &=& b_4 \end{array}\right.$$

Solution :
(S_1) *: solution unique quels que soient* b_1, b_2, b_3, b_4.
(S_2) *: solutions si* $b_2 = b_1 + b_3$.
(S_3) *: solutions si* $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ *et* $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$.
(S_4) *: solutions si* $b_2 = -2b_1$ *et* $b_3 = -b_1$ *et* $b_4 = 3b_1$.

Exercice 25.109 ♡

Résoudre les systèmes suivants à l'aide du déterminant :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \\ -x+2y+4z=0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x+y+2z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ -x-2y-5z=-1 \end{array}\right.$$

Solution : *Premier système :* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ *et* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *donc le système est de rang* $\leqslant 2$*. Comme* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ *le système est de rang* 2*. On a une droite de solution, l'intersection des deux plans* $x+y-z=0$ *et* $x+3y+z=0$*, autrement dit la droite vectorielle engendrée par* $(-2,1,-1)$.
Deuxième système : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ *donc le système est de rang* $\leqslant 2$*. Comme* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *le système est de rang* 2 *et on peut choisir* x *comme paramètre. On résout alors en* y *et* z *le système des deux premières équations en fonction de* x*. Soit* $y = 3-3x$ *et* $z = x-1$*. On vérifie enfin avec la troisième équation :* $-x-6+6x-5x+5=-1$.

Exercice 25.110 ♡♡

Soit f *l'application linéaire qui fait correspondre au vecteur* (x,y,z) *le vecteur* (a,b,c,d) *dont les coordonnées sont définies par le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} -x-y+mz=a \\ -mx+y+mz=b \\ x-y-mz=c \\ mx+y+z=d \end{array}\right.$$

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m*, le rang de* f*. En déduire le nombre de solutions du système précédent puis le résoudre en fonction du second membre.*

Solution : *Après permutation des deuxièmes et troisièmes lignes, on effectue des oel sur le tableau :*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & m & a \\ 1 & -1 & -m & c \\ -m & 1 & m & b \\ m & 1 & 1 & d \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-mL_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+mL_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & m & a \\ 0 & -2 & 0 & a+c \\ 0 & 1+m & m-m^2 & b-ma \\ 0 & 1-m & 1+m^2 & d+ma \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r|c}
\begin{array}{rrrr} & -1 & -1 & m \\ & 0 & -2 & 0 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1+m}{2} L_2 & 0 & 0 & m-m^2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1-m}{2} L_2 & 0 & 0 & 1+m^2 \end{array} & \begin{array}{c} a \\ a+c \\ b-ma+\frac{1+m}{2}(a+c) \\ d+ma+\frac{1-m}{2}(a+c) \end{array}
\end{array}$$

En prenant les lignes L_1, L_2 *et* L_4 *on voit que le rang du système égale* 3. *Donc s'il existe une solution, alors elle est unique.*
On résout donc le système (triangulaire) en x, y *et* z *grâce aux lignes* L_1, L_2 *et* L_4. *La ligne* L_3 *sert de vérification : Si*

$$\left(m-m^2\right) z = \frac{m-m^2}{1+m^2}\left(d+ma+\frac{1-m}{2}(a+c)\right) = b-ma+\frac{1+m}{2}(a+c),$$

alors le système est compatible et admet une solution unique. Sinon il n'admet pas de solution.

Exercice 25.111 ♡♡

Déterminer suivant les valeurs des réels m, a, b, c *les solutions du système :*

$$\begin{cases} mx+my+mz = a \\ x+my+z = b \\ x+y+mz = c \end{cases}$$

Solution : *La matrice de ce système linéaire est* $A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ *et* $\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } m=0 \\ 1 & \text{si } m=1 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

– *Si* $m=0$ *le système devient :* $\begin{cases} 0=a \\ x+z=b \\ x+y=c \end{cases}$. *Il n'est compatible que si* $a=0$. *Dans ce cas, l'ensemble de ses solutions est :* $(b, c-b, 0) + \mathrm{Vect}(-1,1,1)$.
– *Si* $m=1$ *le système est :* $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+z=b \\ x+y+z=c \end{cases}$. *Il n'est compatible que si* $a=b=c$. *Dans ce cas, l'ensemble solution est* $(a,0,0)+\mathrm{Vect}((-1,1,0),(0,1,-1))$
– *Le système est de Cramer si* $m \neq 0$ *et* $m \neq 1$. *Il admet une et une seule solution donnée par :*

$$\left(\frac{(m+1)a-cm-mb}{m(m-1)}, -\frac{-mb+a}{m(m-1)}, -\frac{a-cm}{m(m-1)}\right)$$

Exercice 25.112 ♡♡

Déterminer suivant les valeurs des réels m, a, b, c *les solutions du système :*

$$\begin{cases} x-y-mz = a \\ x+2y+z = b \\ x+y-z = c \end{cases}$$

Solution : *La matrice de ce système linéaires est* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -m \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } m=5 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

– *Si* $m=5$ *le système devient :* $\begin{cases} x-y-5z=a \\ x+2y+z=b \\ x+y-z=c \end{cases}$ *qui est équivalent à :* $\begin{cases} x-y-5z = a \\ y+2z = \dfrac{b-a}{3} \\ y+2z = \dfrac{c-a}{2} \end{cases}$. *Il n'est compatible que si* $\dfrac{b-a}{3} = \dfrac{c-a}{2}$. *Dans ce cas, l'ensemble de ses solutions est :* $\left(\dfrac{2a+b}{3}, \dfrac{b-a}{3}, 0\right) + \mathrm{Vect}(3,-2,1)$.
– *Le système est de Cramer si* $m \neq 5$. *Il admet une et une seule solution donnée par :*

$$\left(-\frac{3a+(m+1)b+(1-2m)c}{m-5}, \frac{2a-(m+1)c+(m-1)b}{m-5}, -\frac{a+2b-3c}{m-5}\right)$$

Exercice 25.113 ♡♡

Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax+by+z &= 1 \\ x+by+z &= b \\ x+by+az &= 1 \end{cases}$$

Solution : *Le déterminant de la matrice vaut* $(a-1)^2b$.

1. $a\neq 1, b\neq 0$, $\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{1-b}{a-1},\frac{ab+b-2}{(a-1)b},\frac{1-b}{a-1}\right)\right\}$.
2. $a=1$, *le système est compatible si et seulement si* $b=1$ *et dans ce cas,* $\mathscr{S}=(1,0,0)+\mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$.
3. $b=0, a\neq 1$ *: le système est incompatible.*

Exercice 25.114 ♡♡

Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax+by+z=1\\ x+aby+z=b\\ x+by+az=1\end{cases}$$

Solution : *Le déterminant du système égale* $b(a+2)(a-1)^2$.
Si $b=0$, *le système est toujours incompatible. Sinon,*

1. $a\neq -2,1$:
$$\left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)},\frac{ab+b-2}{(a-1)(a+2)b},\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\right)$$
2. $a=-2, b\neq -2$, $\varnothing$.
3. $a=1, b\neq 1$, $\varnothing$.
4. $a=-2$ *et* $b=-2$, $(-1-2y,y,-1-x-y)$.
5. $a=1$ *et* $b=1$, $(x,y,x-y)$.

Exercice 25.115 ♡♡

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x+ay+bz=a\\ x-2ay+bz=b\end{cases}$$

Solution : *On soustrait les deux lignes pour obtenir* $\begin{cases} x+ay+bz=a\\ -3ay=b-a\end{cases}$.
Si $a=0$, *deux cas se présentent : Si* $b=0$ *alors le système est de rang* 1 *et les solutions sont* $(0,y,z)$. *Si* $b\neq 0$ *alors le système n'est pas compatible.*
Si $a\neq 0$, *alors* $y=\frac{a-b}{3a}$ *et* $x+bz=\frac{2a+b}{3}$ *qui est une équation de droite dans le plan* $y=\frac{a-b}{3a}$.

Exercice 25.116 ♡

Résoudre $\begin{cases} 10x+7y+8z+7t=32\\ 7x+5y+6z+5t=23\\ 8x+6y+10z+9t=33\\ 7x+5y+9z+10t=31\end{cases}$ *et* $\begin{cases} 10x+7y+8z+7t=32{,}1\\ 7x+5y+6z+5t=22{,}9\\ 8x+6y+10z+9t=33{,}1\\ 7x+5y+9z+10t=30{,}9\end{cases}$.

Commentaire.

Solution : $(1,1,1,1)$ *est la solution du premier système.* $(9{,}2;-12{,}6;4{,}5;-1{,}1)$ *est la solution du deuxième système. Dans cet exemple, une petite perturbation* $(0{,}1;-0{,}1;0{,}1;-0{,}1)$ *du vecteur de données entraîne une grosse perturbation du vecteur de solutions.*

Chapitre 26

Groupe symétrique, déterminant

Pour bien aborder ce chapitre

Ce chapitre est réservé aux élèves de MPSI. On va y définir le déterminant en toute généralité. Il va nous falloir au préalable étudier le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Il est formé de toutes les permutations d'un ensemble E à n éléments et admet comme loi interne la composition. Ce groupe est très important en mathématiques. Ainsi, c'est en étudiant le groupe des permutations des racines d'un polynôme que Galois est parvenu à prouver la non résolubilité par radicaux des équations polynomiales de degré $\geqslant 5$. Le mathématicien Arthur Cayley a par ailleurs prouvé que tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ (son résultat est en fait plus général car il s'étend aux groupes de cardinal infini).

La construction du déterminant est basée sur les notions que nous allons introduire quant au groupe symétrique. On explicitera ensuite, comme dans le cas des déterminants de taille 2 et 3 traités dans le chapitre précédent, ce qu'est le déterminant d'un endomorphisme et d'une famille de vecteurs.

Le développement de la notion de déterminant est fortement lié aux tentatives effectuées par les mathématiciens pour résoudre les systèmes linéaires à n équations et n inconnues. En 1545, Cardan introduit des déterminants de taille 2 pour résoudre des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues. En 1678, Leibnitz fait de même mais pour $n = 3$ et en 1748, MacLaurin résout le problème quand $n = 4$. En 1750, Cramer établit des formules pour le cas général mais ne sait pas les démontrer (voir le théorème 26.19 page 1044). En 1764, Bézout reprend les travaux de Cramer et met en place les formules de développement suivant une rangée (voir le théorème 26.24 page 1047). Elles permettent de formuler des relations de récurrence pour le calcul des déterminants. Dans les ˋˋ *Disquisitiones arithmeticae*˝, Gauss donne au déterminant sa dénomination actuelle. Lagrange comprend le lien du déterminant avec la notion de volume. C'est au 19e siècle que Cauchy utilise pour la première fois le mot déterminant dans le sens qu'on lui donne maintenant. Il fait, dans un long article, la synthèse des connaissances à son sujet et jette les bases de la réduction des endomorphismes. Grâce à trois articles dans le journal de Crelle, Jacobi popularise la notion et construit des algorithmes permettant de le calculer. Il faut attendre le milieu du 19e siècle pour que les déterminants soient utilisés, par Sylvester et Cayley dans le cadre matriciel. Ce dernier est à l'origine de la notation utilisée pour les écrire avec des grandes barres verticales.

26.1 Le groupe symétrique

DÉFINITION 26.1 **Groupe des permutations**
Soit un ensemble E. On appelle *permutation* de E, une bijection $\sigma : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$. On note $\mathfrak{S}_{\mathrm{E}}$ l'ensemble des permutations de l'ensemble E. Puisque $\mathfrak{S}_{\mathrm{E}} = \mathscr{B}(\mathrm{E})$, on sait que $\left(\mathfrak{S}_{\mathrm{E}}, \circ\right)$ est un groupe, appelé *groupe des permutations* de l'ensemble E.

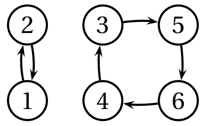
Dans la suite, on considèrera un ensemble fini E de cardinal n, et en particulier $\mathrm{E} = [\![1, n]\!]$.

DÉFINITION 26.2 ♡♡ **Groupe symétrique**
Lorsque l'ensemble $\mathrm{E} = [\![1, n]\!]$, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de E qui est un groupe fini de cardinal $n!$. Ce groupe s'appelle le *groupe symétrique* d'ordre n. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

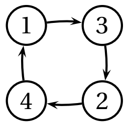
DÉFINITION 26.3 Orbite d'un élément
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ et un élément $x \in E$. On appelle *orbite* de l'élément x selon la permutation σ, l'ensemble $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^k(x)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$. On vérifie facilement que si $y \in \mathcal{O}(x)$, alors $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$.

Exemple 26.1 Si $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(2) = \{1,2\}$ et $\mathcal{O}(3) = \mathcal{O}(4) = \mathcal{O}(5) = \mathcal{O}(6) = \{3,4,5,6\}$.



DÉFINITION 26.4 Permutation circulaire
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. On dit que c'est une *permutation circulaire* s'il existe un élément $x \in E$ tel que $\mathcal{O}(x) = E$.

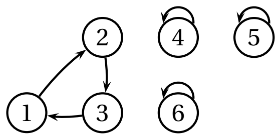
Exemple 26.2 Si $E = \{1,2,3,4\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une permutation circulaire :



Remarque 26.1 Il y a $(n-1)!$ permutations circulaires dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

DÉFINITION 26.5 Cycle
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. On dit que σ est un *cycle* s'il y a au plus une orbite qui n'est pas réduite à un élément. Cette orbite s'appelle le *support* du cycle, et le cardinal de cette orbite s'appelle la *longueur* du cycle.

Exemple 26.3 $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, est un cycle de support $\{1,2,3\}$ et de longueur 3. On note plus simplement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ un tel cycle.



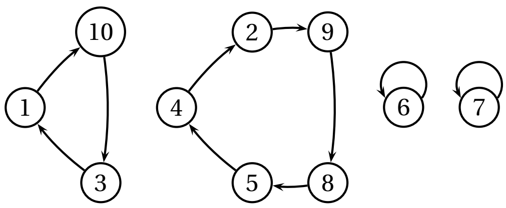
LEMME 26.1 Deux cycles de supports disjoints commutent
Soient deux cycles σ_1 et σ_2 de $\mathfrak{S}_E$ de supports disjoints. Alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Démonstration *Soient c_1 et c_2 deux cycles de supports disjoints. Montrons que $c_1 \circ c_2 = c_2 \circ c_1$. Soit $x \in E$, étudions trois cas : si x est dans le support de c_1, il n'est pas dans le support de c_2 donc $c_2(x) = x$. Par conséquent, $c_1 \circ c_2(x) = c_1(x)$ et puisque $c_1(x)$ est dans le support de c_1, il n'est pas dans le support de c_2 et donc $c_2(c_1(x)) = c_1(x)$. De même, si x est dans le support de c_2, $c_1 \circ c_2(x) = c_2 \circ c_1(x) = c_2(x)$. Si enfin x n'est ni dans le support de c_1, ni dans le support de c_2, il est invariant à la fois par c_1 et c_2 d'où $c_1 \circ c_2(x) = c_2 \circ c_1(x) = x$.*

THÉORÈME 26.2 ♡♡ Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. Elle se décompose en un produit fini de cycles de supports disjoints qui commutent deux à deux.

On obtient en pratique la décomposition en dessinant les orbites de la permutation σ :

Exemple 26.4 Considérons la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. On représente graphiquement ses orbites :



Définissons alors les cycles $c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ de support $\{1, 10, 3\}$ et $c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 9 & 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ de support $\{2, 4, 5, 8, 9\}$. On a bien $\sigma = c_1 \circ c_2 = c_2 \circ c_1$. La décomposition en cycles permet de calculer facilement les puissances d'une permutation dans le groupe symétrique. Puisque les cycles commutent, $\sigma^k = c_1^k \circ c_2^k$. Si l est la longueur d'un cycle c, puisque $c^l = \mathrm{id}$, $c^k = c^p$ où p est le reste de la division de k par l. Sur notre exemple, $\sigma^{11} = c_1^{11} \circ c_2^{11} = c_1^2 \circ c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 10 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION 26.6 ♡♡♡ **Transposition**
Une *transposition* de $\mathfrak{S}_E$ est un cycle de longueur 2. Une transposition échange deux éléments a, b et laisse les autres invariants. On note τ_{ab} une telle transposition.

Remarque 26.2 Se donner une transposition dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ revient à se donner une paire d'éléments $\{i, j\}$ distincts. Il y a donc $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ transpositions dans $\mathfrak{S}_n$. On calcule facilement la composée de transpositions : $\sigma = \tau_{23} \circ \tau_{12} \circ \tau 13 = \tau_{12}$: tous les $i \notin \{1, 2, 3\}$ sont invariants par ces trois transpositions donc $\sigma(i) = i$ et $\sigma(1) = \tau_{23} \circ \tau_{12}(3) = \tau_{23}(3) = 2$, $\sigma(2) = \tau_{23} \circ \tau_{12}(2) = \tau_{23}(1) = 1$, $\sigma(3) = \tau_{23} \circ \tau_{12}(1) = \tau_{23}(2) = 3$.

THÉORÈME 26.3 ♡♡♡ **Décomposition en transpositions**
Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en un produit fini de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$$

Il n'y a pas unicité d'une telle décomposition.

Exemple 26.5 On dispose d'un algorithme simple qui permet de trouver une telle décomposition. Si par exemple $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,

– On commence par regarder $\sigma(6) = 4 \neq 6$. Formons donc la permutation $\sigma_1 = \tau_{46} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Le 6 est maintenant à sa place.
– Comme $\sigma_1(5) = 4$, on forme $\sigma_2 = \tau_{45} \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et maintenant 5 et 6 sont à leur place.
– Comme $\sigma_2(4) = 2$, on forme $\sigma_3 = \tau_{42} \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
– Comme $\sigma_3(3) = 1$, on forme $\sigma_4 = \tau_{13} \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$.

Au bout d'au plus n étapes, on trouve l'identité. Il suffit alors d'écrire

$$\tau_{13} \circ \tau_{42} \circ \tau_{45} \circ \tau_{46} \circ \sigma = \mathrm{id}$$

et comme pour toute transposition $\tau^{-1} = \tau$, on en déduit la décomposition de σ :

$$\sigma = (\tau_{13} \circ \tau_{42} \circ \tau_{45} \circ \tau_{46})^{-1} = \tau_{46} \circ \tau_{45} \circ \tau_{42} \circ \tau_{13}$$

Cet algorithme montre que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit comme un produit d'au plus n transpositions.

Pour terminer ce paragraphe, dressons la table du groupe $\mathfrak{S}_3$: à chaque ligne on place un élément σ_i et à chaque colonne un élément σ_j. À l'intersection de la ligne i et de la colonne j, on place l'élément $\sigma_i \circ \sigma_j$. Il y a $3! = 6$ permutations : $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{id}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \sigma, \sigma^2\}$ où $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une permutation circulaire avec $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathfrak{S}_3$	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	σ	σ^2
id	id	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}	σ	σ^2
τ_{12}	τ_{12}	id	σ^2	σ	τ_{23}	τ_{13}
τ_{13}	τ_{13}	σ	id	σ^2	τ_{12}	τ_{23}
τ_{23}	τ_{23}	σ^2	σ	id	τ_{13}	τ_{12}
σ	σ	τ_{13}	τ_{23}	τ_{12}	σ^2	id
σ^2	σ^2	τ_{23}	τ_{12}	τ_{13}	id	σ

On voit que le groupe $\mathfrak{S}_3$ n'est pas commutatif : par exemple $\tau_{12} \circ \tau_{13} \neq \tau_{13} \circ \tau_{12}$. Plus généralement, le groupe $\mathfrak{S}_n$ n'est jamais commutatif puisque si i, j, k sont distincts, $\tau_{ij} \circ \tau_{jk} \neq \tau_{jk} \circ \tau_{ij}$. On peut montrer que les groupes finis de moins de 5 éléments sont tous commutatifs donc $\mathfrak{S}_3$ donne le premier exemple de groupe non commutatif à 6 éléments.

26.1.1 Signature d'une permutation

DÉFINITION 26.7 ♡ **Signature d'une permutation**
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit qu'un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ est un *inversion* de σ lorsque

$$i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)$$

On note I(σ) le nombre d'inversions de la permutation σ, et on définit la *signature* de la permutation σ par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$$

On dit qu'une permutation σ est *paire* si $\varepsilon(\sigma) = +1$ et *impaire* lorsque $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exemple 26.6 Considérons la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Écrivons son tableau d'inversions :

i	1	2	3	4	5	6	7
$\text{Card}\{j > i \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$	2	3	4	1	0	0	0

On trouve que $I(\sigma) = 10$ et $\varepsilon(\sigma) = 1$;

LEMME 26.4 **Expression algébrique de la signature**
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a les expressions suivantes pour sa signature :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\substack{\{i,j\} \subset [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Démonstration *Considérons une paire $\{i,j\} \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$. Puisque $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ on peut supposer que $i < j$ et donc $P = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.*

– *Si (i,j) est une inversion de σ, $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$ donc $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = -\frac{|\sigma(j)-\sigma(i)|}{|j-i|}$.*
– *Si (i,j) n'est pas une inversion de σ, $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \frac{|\sigma(j)-\sigma(i)|}{|j-i|}$.*

On peut donc écrire

$$P = (-1)^{I(\sigma)} \frac{\prod_{\{i,j\}} |\sigma(j)-\sigma(i)|}{\prod_{\{i,j\}} |j-i|}$$

On remarque également que

$$\prod_{\{i,j\}} |\sigma(j)-\sigma(i)| = \prod_{\{k,l\}} |k-l|$$

En effet, puisque σ est bijective, pour toute paire $\{k,l\}$ il existe une unique paire $\{i,j\}$ telle que $\{k,l\} = \{\sigma(i),\sigma(j)\}$. Finalement, $P = (-1)^{I(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$;

THÉORÈME 26.5 ♡♡♡ **La signature est un morphisme de groupes**
L'application

$$\varepsilon : \begin{cases} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\}, \times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{cases}$$

est un morphisme de groupes.

Démonstration *Soient deux permutations σ_1, σ_2 de $\mathfrak{S}_n$. Montrons que $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \times \varepsilon(\sigma_2)$. En utilisant la forme algébrique de la signature,*

$$P = \varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{j-i}$$

$$P = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)} \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)}{j-i}$$

Mais comme toute paire $\{k,l\}$ s'écrit de façon unique $\{\sigma_2(j), \sigma_2(i)\}$ où $\{i,j\}$ est une paire,

$$P = \prod_{\{k,l\}} \frac{\sigma_1(k) - \sigma_1(l)}{k-l} \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)}{j-i} = \varepsilon(\sigma_1) \times \varepsilon(\sigma_2)$$

DÉFINITION 26.8 ♡ **Groupe alterné**
La signature étant un morphisme de groupes, son noyau

$$\operatorname{Ker}\varepsilon = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = +1\}$$

est un sous-groupe du groupe symétrique, appelé *groupe alterné*. On le note $\mathscr{A}_n$.

LEMME 26.6 ♡♡ **Signature d'une transposition**
Soit τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$. C'est une permutation impaire : $\varepsilon(\tau) = -1$.

Démonstration *Soit $i \in [\![2, n]\!]$. La transposition τ_{1i} s'écrit :*

$$\tau_{1i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (i-1) & i & (i+1) & \dots & n \\ i & 2 & \dots & (i-1) & 1 & (i+1) & \dots & n \end{pmatrix}$$

Le tableau d'inversions de τ_{1i} s'écrit donc :

i	1	2	...	$i-1$	i	...	n
	$(i-1)$	1	...	1	0	...	0

Par conséquent, $\mathrm{I}(\tau_{1i}) = (i-1)+(i-2) = 2i-3$ d'où l'on tire $\varepsilon(\tau_{1i}) = (-1)^{2i-3} = -1$. Il suffit ensuite de remarquer que si $i, j \in [\![1, n]\!]$ sont distincts et différents de 1,

$$\tau_{ij} = \tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i}$$

et par conséquent,

$$\varepsilon(\tau_{ij}) = \varepsilon(\tau_{1i})\varepsilon(\tau_{1j})\varepsilon(\tau_{1i}) = -1$$

Remarque 26.3 Puisque l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{A}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \setminus \mathscr{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \tau \circ \sigma \end{cases}$$

est une bijection, on en déduit que le cardinal du groupe alterné vaut $n!/2$.

COROLLAIRE 26.7 ♡♡ **Autre caractérisation de la signature**
Si une permutation σ s'écrit comme produit de p transpositions,

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$$

alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Démonstration *Comme la signature est un morphisme de groupes, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1) \times \dots \times \varepsilon(\tau_p) = (-1)^p$.*

Remarque 26.4 La décomposition d'une permutation en produit de transpositions n'est pas unique, mais la *parité* du nombre de transpositions est la même pour toute décomposition.

Exemple 26.7 Dans les années 1870, Sam Loyd a offert une prime de 1000 dollars à la personne qui trouverait la solution du jeu de taquin suivant : la case 16 est vide, et les pièces peuvent glisser sur cette case vide. Lors du premier coup, on peut faire glisser la case 15 ou la case 12 sur la case vide, et ainsi de suite. Le défi consiste à obtenir la même configuration que la configuration initiale où les cases 14 et 15 sont inversées.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

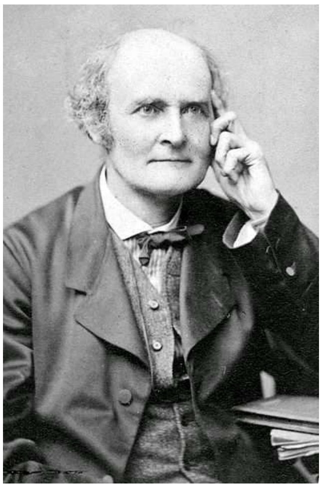
Toute configuration du taquin peut être représentée par une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{16}$: $\sigma(i)$ représente le numéro de pièce qui se trouve sur la case i. La position initiale correspond à la transposition id et la position finale à la transposition $\tau_{14,15}$.

Pour passer d'une configuration σ à une configuration σ', on échange une plaque avec la case vide donc $\sigma' = \tau \circ \sigma$ où τ est une transposition. Si l'on arrive à résoudre le puzzle en n coups, on a donc

$$\tau_n \circ \cdots \circ \tau_1 \circ \mathrm{id} = \tau_{14,15}$$

En prenant la signature, $(-1)^n = -1$ et il faut donc un nombre impair de coups. Colorions maintenant les cases du taquin alternativement en noir et blanc comme sur un échiquier. On s'aperçoit qu'a chaque mouvement, la case vide change de couleur. Comme dans la configuration initiale et finale la case vide est de la même couleur, le nombre de coups doit être pair. On aboutit donc à une contradiction et le problème est impossible à résoudre.

BIO 23 Arthur Cayley, né le 16 août 1821 à Richmond, mort le 26 janvier 1895 à Cambridge



Mathématicien anglais. Arthur Cayley montre très tôt de fortes aptitudes pour les mathématiques. À 14 ans, il rentre au King's College School. Ses professeurs invitent ses parents à pousser leur fils vers l'université. Il entre à Cambridge à l'âge exceptionnel de 17 ans. Pour ses 20 ans, il a déjà versé trois contributions au Cambridge Mathematical Journal. Celles-ci portent sur des lectures des œuvres de Lagrange et Laplace. À la fin du premier cycle, il reçoit le Smith's Prize.
Mais à 25 ans, il choisit d'embrasser la profession d'avocat. Métier qu'il exercera pendant 14 ans. Il côtoie alors le mathématicien Sylvester, lui aussi avocat et avec lequel il aura de nombreuses discussions mathématiques. Cayley publiera pendant cette période entre 200 et 300 articles mathématiques.
Alors qu'il est âgé de 42 ans, on lui propose une chaire à Cambridge. Il renonce alors à son travail lucratif d'avocat pour se consacrer entièrement aux mathématiques.
L'œuvre mathématique de Cayley est immense et est réunie dans une collection de 13 volumes intitulée ``*Collected Mathematical Papers*´´. Il a en particulier et parallèlement à Grassmann découvert les notions d'espace vectoriel et de dimension. Il est le premier, avec Sylvester, a introduire la notion de matrice. Il s'est beaucoup intéressé à la théorie des invariants qui vise à étudier les propriétés algébriques invariantes par l'action d'une application linéaire. Vous étudierez en seconde année le théorème de Hamilton-Cayley qui est une de ses contributions fondamentales à l'algèbre linéaire et qui dit que toute matrice carrée annule son polynôme caractéristique.

26.2 Construction du déterminant

Étant donnée une famille de n vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ d'un espace vectoriel de dimension n, nous voulons développer un outil qui permet de détecter si cette famille est liée ou libre. Dans la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

26.2.1 Formes n-linéaires alternées

DÉFINITION 26.9 **Forme n-linéaire**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une application $\varphi : \mathrm{E}^n \mapsto \mathbb{K}$ est n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chaque variable, les autres étant fixées : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathrm{E}^n,\ \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},\lambda x+\mu y,x_{i+1},\dots,x_n) = \lambda\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n) + \mu\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)$$

Nous noterons $\mathscr{L}^n(\mathrm{E})$ l'ensemble des formes n-linéaires sur l'espace E.

Remarque 26.5 On vérifie facilement que $\mathscr{L}^n(\mathrm{E})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E^n vers E.

PROPOSITION 26.8 **Opération de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathscr{L}^n(\mathrm{E})$**
Soit $\varphi \in \mathscr{L}^n(\mathrm{E})$ une forme n-linéaire et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. On définit une nouvelle forme n-linéaire :

$$\sigma \star \varphi : \begin{cases} \mathrm{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) \end{cases}$$

et si $\sigma_1,\sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma_1 \star (\sigma_2 \star \varphi) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \star \varphi$.

Démonstration *On vérifie facilement que* $\sigma\star\varphi$ *est encore une forme* n*-linéaire. Notons pour* $i\in[\![1,n]\!]$, $y_i = x_{\sigma(i)}$ *et calculons,* $\sigma_1\star(\sigma_2\star\varphi)(x_1,\dots,x_n) = (\sigma_2\star\varphi)(x_{\sigma_1(1)},\dots,x_{\sigma_1(n)}) = \varphi(y_{\sigma_2(1)},\dots,y_{\sigma_2(n)})$. *Mais* $y_{\sigma_2(i)} = x_{\sigma_1(\sigma_2(i))} = x_{\sigma_1\circ\sigma_2(i)}$ *d'où le résultat.*

DÉFINITION 26.10 **Forme n-linéaire antisymétrique**
On dit qu'une forme n-linéaire $\varphi\in\mathscr{L}^n(\mathrm{E})$ est antisymétrique lorsque $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\sigma\star\varphi = \varepsilon(\sigma)\varphi$ où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

LEMME 26.9
Une forme n-linéaire φ est antisymétrique si et seulement si $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathrm{E}^n$, $\forall i,j\in[\![1,n]\!]$, $i<j$,

$$\varphi(x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_n) = -\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)$$

Démonstration
- *Si* φ *est antisymétrique, en notant* τ_{ij} *la transposition qui échange* i *et* j*, on obtient immédiatement le résultat.*
- *Réciproquement, toute permutation* σ *s'écrit comme un produit de transpositions :*

$$\sigma = \tau_1\circ\dots\tau_k$$

et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. *Il suffit d'utiliser la proposition précédente :* $\sigma\star\varphi = \tau_1\star\dots\tau_k\star\varphi = (-1)^k\varphi = \varepsilon(\sigma)\varphi$.

Nous voulons trouver des formes n-linéaires qui s'annulent sur les systèmes liés. En particulier, lorsque deux vecteurs d'une famille sont égaux, notre forme doit s'annuler. C'est ce qui motive la définition suivante :

DÉFINITION 26.11 ♡♡
On dit qu'une forme n-linéaire $\varphi:\mathrm{E}^n\mapsto\mathbb{K}$ est alternée si elle s'annule sur tout système comportant deux vecteurs égaux : $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathrm{E}^n$, $\forall i,j\in[\![1,n]\!]$, $i<j$, si $x_i = x_j$, alors

$$\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$$

Les deux notions de forme n-linéaire antisymétrique et alternée sont identiques comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME 26.10 ♡♡ **Alternée = Antisymétrique**
Une forme n-linéaire est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

Démonstration
- *Supposons* φ *antisymétrique et considérons* n *vecteurs* $(x_1,\dots,x_n)$ *avec* $x_i = x_j = x$. *Pour la permutation* τ_{ij} *qui échange* i *et* j*, on doit avoir*

$$\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = -\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$$

d'où $2\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$. *Comme nous travaillons avec un corps* $\mathbb{K} = \mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$, *il vient que* $\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$.
- *Réciproquement, soient* $i<j$ *deux indices, puisque* φ *est alternée,*

$$\varphi(x_1,\dots,x_i+x_j,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n) = O_{\mathbb{K}}$$

Mais en développant, en utilisant la bilinéarité et le fait que φ *est alternée, on trouve que*

$$\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)+\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$$

Nous avons donc montré que pour toute transposition τ_{ij}, $\tau_{ij}\star\varphi = -\varphi$. *Il suffit de conclure en utilisant le lemme 26.9.*

Remarque 26.6 On note $\mathscr{A}^n(\mathrm{E})$ l'ensemble des formes n-linéaires antisymétriques (ou alternées) et on vérifie facilement que c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}^n(\mathrm{E})$.

PROPOSITION 26.11 **Une forme n-linéaire antisymétrique détecte les systèmes liés**
Soit φ une forme n-linéaire antisymétrique. Si la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée, alors $\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$.

Démonstration *Si la famille est liée, l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres : il existe* $i\in[\![1,n]\!]$ *tel que*

$$x_i = \sum_{j\neq i}\lambda_j x_j$$

Mais comme φ *est alternée,*

$$\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = \sum_{j\neq i}\lambda_j\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$$

26.2.2 Déterminant de n vecteurs dans une base

Pour comprendre ce paragraphe, nous allons commencer par un calcul simple en dimension 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $e = (e_1, e_2)$ une base de E. Considérons une famille de deux vecteurs (x_1, x_2) que nous décomposons dans la base e :

$$\begin{cases} x_1 &= x_{11}e_1 + x_{21}e_2 \\ x_2 &= x_{12}e_1 + x_{22}e_2 \end{cases}$$

Soit φ une forme 2-linéaire alternée sur E. En utilisant la bilinéarité,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) &= x_{11}\varphi(e_1, x_{12}e_1 + x_{22}e_2) + x_{21}\varphi(e_2, x_{12}e_1 + x_{22}e_2) \\ &= x_{11}x_{12}\varphi(e_1, e_1) + x_{11}x_{22}\varphi(e_1, e_2) + x_{21}x_{12}\varphi(e_2, e_1) + x_{21}x_{22}\varphi(e_2, e_2) \end{aligned}$$

Puisque φ est alternée, $\varphi(e_1, e_1) = \varphi(e_2, e_2) = 0_{\mathbb{K}}$ et $\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2)$. Finalement,

$$\varphi(x_1, x_2) = \left[x_{11}x_{22} - x_{21}x_{22}\right]\varphi(e_1, e_2)$$

Définissons une application que nous appellerons *déterminant dans la base e* :

$$\det_e : \begin{cases} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette application $\det_e$ est bien une forme 2-linéaire alternée. Alors, en notant $\lambda = \varphi(e_1, e_2)$, nous avons montré que $\varphi = \lambda \det_e$. En d'autres termes, l'espace des formes 2-linéaires alternées sur un espace de dimension 2 est une droite vectorielle engendrée par $\det_e$: $\mathscr{A}^2(E) = \operatorname{Vect}(\det_e)$. Ce résultat se généralise en dimension n quelconque : c'est le théorème principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 26.12 ♡♡♡ **Les formes n-linéaires alternées forment une droite vectorielle**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace E de dimension n. Pour une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E, on note x_{ij} les composantes des vecteurs x_j dans la base e :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}e_i$$

1. L'application
$$\det_e : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} \end{cases}$$
est une forme n-linéaire alternée appelée *déterminant* dans la base e.
2. Toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle au déterminant et l'espace $\mathscr{A}^n(E)$ est une droite vectorielle :
$$\mathscr{A}^n(E) = \operatorname{Vect}(\det_e), \quad \dim \mathscr{A}^n(E) = 1$$
3. $\det_e(e_1, \dots, e_n) = 1_{\mathbb{K}}$.

Démonstration *Soit $\varphi \in \mathscr{A}^n(E)$ une forme n-linéaire alternée et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ n vecteurs que l'on décompose dans la base e. Calculons en utilisant la n-linéarité de φ,*

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1,1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n,n}e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} x_{i_1,1}x_{i_2,2} \dots x_{i_n,n}\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

Puisque φ est alternée, lorsque $i_p = i_q$, $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, \dots, e_{i_q}, \dots, e_{i_n}) = 0_{\mathbb{K}}$. Par conséquent, ne restent dans la somme que les termes correspondant aux n-uplets $(i_1, \dots, i_n)$ où les i_k sont tous distincts. L'application $\sigma : \begin{cases} [\![1, n]\!] & \longrightarrow & [\![1, n]\!] \\ k & \longmapsto & i_k \end{cases}$ est donc une permutation de $[\![1, n]\!]$. Nous pouvons alors écrire

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}\varphi(e_{\sigma(1)}, \dots e_{\sigma(n)})$$

Mais puisque φ est alternée, $\varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(e_1, \dots, e_n)$. En notant $\lambda = \varphi(e_1, \dots, e_n)$, on obtient finalement que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}$$

Nous avons donc montré qu'il existait une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $\varphi = \lambda \det_e$. La vérification que $\det_e$ est bien une forme n-linéaire alternée est technique et moins intéressante, nous ne la ferons pas. Vérifions enfin que $\det_e(e_1, \dots, e_n) = 1$. Puisque le vecteur e_j se décompose dans la base e avec les coordonnées $x_{ij} = \delta_{ij}$,

$$\det_e(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(1),1} \dots \delta_{\sigma(n),n}$$

Mais si $\sigma \neq \mathrm{id}$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$ et alors $\delta_{\sigma(i),i} = 0$ et le terme correspondant de la somme est nul. Il ne reste donc que le terme correspondant à $\sigma = \mathrm{id}$ qui vaut 1.

Remarque 26.7 Considérons un espace vectoriel de dimension 3 et une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. Trois vecteurs (x_1, x_2, x_3) se décomposent dans cette base :

$$\begin{cases} x_1 &= x_{11} e_1 + x_{21} e_2 + x_{31} e_3 \\ x_2 &= x_{12} e_1 + x_{22} e_2 + x_{32} e_3 \\ x_3 &= x_{13} e_1 + x_{23} e_2 + x_{33} e_3 \end{cases}$$

Dans $\mathfrak{S}_3$, il y a trois permutations paires :

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad ,\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

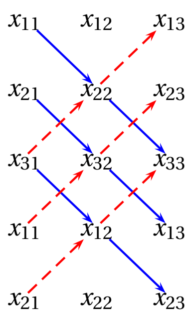
ainsi que trois permutations impaires :

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant des trois vecteurs dans la base e s'écrit donc :

$$\det_e(x_1, x_2, x_3) = x_{11} x_{22} x_{33} + x_{21} x_{32} x_{13} + x_{31} x_{12} x_{23} - x_{21} x_{12} x_{33} - x_{31} x_{32} x_{13} - x_{11} x_{32} x_{23}$$

Si l'on considère la matrice des trois vecteurs dans la base e, $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, on dispose d'un moyen mnémotechnique pour calculer le déterminant des trois vecteurs, la *Règle de Sarrus*. Il suffit de recopier en bas de la matrice ses deux premières lignes et de tracer les trois diagonales descendantes, de prendre le produit des coefficients sur chacune des diagonales affectés du signe + et de tracer les trois diagonales montantes en prenant le produit des coefficients sur chaque diagonale affecté du signe − :



THÉORÈME 26.13 ♡♡ **Formule de changement de base**
Soient e et e' deux bases de l'espace E et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E}^n$. On a la relation suivante entre le déterminant des vecteurs dans les deux bases :

$$\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_e(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration *La preuve est typique et utilise le théorème de structure de $\mathscr{A}^n(\mathrm{E})$. Puisque $\det_{e'} \in \mathscr{A}^n(\mathrm{E})$, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $\det_{e'} = \lambda \det_e$. En particulier,*

$$\det_{e'}(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_e(e_1, \dots, e_n) = \lambda$$

Alors,

$$\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det_e(x_1, \dots, x_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \det_e(x_1, \dots, x_n)$$

THÉORÈME 26.14 ♡♡♡ **Le déterminant détecte exactement les familles liées**
Une famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)=0_{\mathbb{K}}$.

Démonstration

– *Nous avons déjà vérifié que si la famille est liée, son déterminant est nul.*
– *Supposons donc que* $(x_1,\dots,x_n)$ *est une famille de déterminant nul. Par l'absurde, si elle était libre, elle définirait une base* e' *de* E*, mais d'après la formule de changement de base, on aurait*

$$1_{\mathbb{K}}=\det_{e'}(x_1,\dots,x_n)=\det_{e'}(e_1,\dots,e_n)\times\det_e(x_1,\dots,x_n)=0_{\mathbb{K}}$$

ce qui est impossible.

26.2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u\in\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme. Nous allons attacher à u un scalaire $\det(u)$ appelé *déterminant de l'endomorphisme*.

PROPOSITION 26.15 ♡♡ **Déterminant d'un endomorphisme**
Si $e=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, le scalaire

$$\det(u)=\det_e(u(e_1),\dots,u(e_n))$$

est indépendant de la base e, on l'appelle déterminant de l'endomorphisme u.

Démonstration *Définissons l'application*

$$\varphi:\begin{cases}\mathrm{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \det_e(u(x_1),\dots,u(x_n))\end{cases}$$

Il est clair que φ *est une forme* n*-linéaire alternée. Puisque* $\mathscr{A}^n(\mathrm{E})$ *est une droite vectorielle, il existe une constante* $\lambda\in\mathbb{K}$ *telle que* $\varphi=\lambda\det_e$*, c'est-à-dire* $\forall(x_1,\dots,x_n)$, $\det_e(u(x_1),\dots,u(x_n))=\lambda\det_e(x_1,\dots,x_n)$*. En prenant* $(x_1,\dots,x_n)=(e_1,\dots,e_n)$*, on trouve que*

$$\lambda=\det_e(u(e_1),\dots,u(e_n))$$

Considérons maintenant une autre base $e'=(e'_1,\dots,e'_n)$ *de* E*. En prenant* $(x_1,\dots,x_n)=(u(e'_1),\dots,u(e'_n))$*, on a :*

$$\det_e(u(e'_1),\dots,u(e'_n))=\det_e(u(e_1),\dots,u(e_n))\det_e(e'_1,\dots,e'_n)$$

En utilisant la formule du changement de base pour le déterminant, on a également :

$$\det_e(u(e'_1),\dots,u(e'_n))=\det_e(e'_1,\dots,e'_n)\det_{e'}(u(e'_1),\dots,u(e'_n))$$

Puisque $(e'_1,\dots,e'_n)$ *est libre,* $\det_e(e'_1,\dots,e'_n)\neq 0_{\mathbb{K}}$ *et en simplifiant, on trouve finalement que*

$$\det_e(u(e'_1),\dots,u(e'_n))=\det_e(u(e_1),\dots,u(e_n))$$

ce qui montre que l'expression $\det(u)$ *ne dépend pas de la base* e*.*

Remarque 26.8 $\det(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})=\det_e(e_1,\dots,e_n)=1_{\mathbb{K}}$ et $\det(0_{\mathfrak{L}(\mathrm{E})})=0_{\mathbb{K}}$. Si $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$\det(\lambda u)=\lambda^n\det(u)$$

En effet, en utilisant la multilinéarité du déterminant de n vecteurs, $\det(\lambda u)=\det_e(\lambda u(e_1),\dots,\lambda u(e_n))=\lambda^n\det_e(u(e_1),\dots,u(e_n))$.

THÉORÈME 26.16 ♡♡♡ **Le déterminant est multiplicatif**
Si u et v sont deux endomorphismes de E,

$$\boxed{\det(u\circ v)=\det(u)\times\det(v)}$$

Démonstration *Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, définissons l'application*

$$\varphi : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \det_e(u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{cases}$$

On vérifie aisément que φ est une forme n-linéaire alternée et puisque $\mathscr{A}^n(E)$ est une droite vectorielle, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $\varphi = \lambda \det_e$. En prenant $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$, on tire que $\lambda = \det(u)$. Par conséquent, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\det_e(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_e(x_1, \dots, x_n)$$

En prenant ensuite $(x_1, \dots, x_n) = (v(e_1), \dots, v(e_n))$, on en déduit

$$\det_e(u \circ v(e_1), \dots, u \circ v(e_n)) = \det(u) \det_e(v(e_1), \dots, v(e_n))$$

c'est-à-dire $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$.

PROPOSITION 26.17 ♡♡♡ **Un endomorphisme est inversible si et seulement si son déterminant est non nul**

1. $u \in GL(E) \iff \det(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$.
2. Si $u \in GL(E)$, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Démonstration *Si u est inversible, $u \circ u^{-1} = \mathrm{id}_E$ d'où $\det(u) \times \det(u^{-1}) = 1_{\mathbb{K}}$ ce qui montre que $\det(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$ et $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$. Réciproquement, si $\det(u) = \det_e(u(e_1), \dots, u(e_n)) \neq 0_{\mathbb{K}}$, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre et on sait qu'alors u est inversible.*

Remarque 26.9 L'application

$$\det : \begin{cases} (GL(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^\star, \times) \\ u & \longmapsto & \det(u) \end{cases}$$

est un morphisme de groupes. Par contre, le déterminant n'est pas linéaire et en général, $\det(u + v) \neq \det(u) + \det(v)$.

26.2.4 Déterminant d'une matrice carrée

DÉFINITION 26.12 ♡♡♡ **Déterminant d'une matrice carrée**

Soit $A = ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On définit son déterminant par la formule :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

On notera entre deux barres le déterminant d'une matrice :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque 26.10 Si $E = \mathbb{K}^n$ et e désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$, il existe un unique endomorphisme $u \in \mathfrak{L}(E)$ ayant pour matrice A dans la base canonique : $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ et alors

$$\det(A) = \det(u)$$

En effet, la j-ème colonne de A correspond aux coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base E :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

et alors

$$\det(u) = \det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

et il suffit d'utiliser la formule du déterminant de n vecteurs. On en déduit les propriétés suivantes en utilisant les résultats sur le déterminant d'un endomorphisme :

1. $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$.
2. $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0_{\mathbb{K}}$ et si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont même déterminant. En effet, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$, $\det(A) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(P)\dfrac{1}{\det(P)}\det(B) = \det(B)$.

Le résultat suivant est à la base du calcul pratique des déterminants :

THÉORÈME 26.18 ♡♡♡ **Opérations élémentaires sur les colonnes**

1. On ne modifie pas le déterminant d'une matrice si l'on retranche à une de ses colonnes C_j une combinaison linéaire des autres colonnes :

$$\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j - \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k, C_{j+1}, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n)$$

Lors du calcul d'un déterminant, pour expliquer les calculs, on code cette opération élémentaire sur les colonnes de façon algorithmique : $C_j \leftarrow C_j - \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k$.

2. Si l'on inverse deux colonnes d'une matrice, on change son déterminant en son opposé :

$$\det(C_1, \dots, C_k, \dots, C_l, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_l, \dots, C_k, \dots, C_n)$$

On désigne cette opération élémentaire par : $C_k \leftrightarrow C_l$.

Démonstration

1. *Il suffit d'utiliser la multilinéarité du déterminant :* $\det(C_1, \dots, C_j - \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) - \sum_{k \neq j} \lambda_k \det(C_1, \dots, C_k, \dots, C$ *On utilise ensuite que le déterminant est une forme n-linéaire alternée : lorsque deux colonnes sont égales dans un déterminant, il est nul.*
2. *Le déterminant est une forme n-linéaire antisymétrique et le résultat est immédiat.*

THÉORÈME 26.19 ♡♡♡ **Formules de Cramer**

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A. Le système de Cramer $AX = B$ possède une unique solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et on sait exprimer x_i à l'aide de déterminants :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par le second membre B.

Démonstration *Comme* $AX = B$, *en notant* $C_1, \dots, C_n$ *les vecteurs colonnes de* A,

$$x_1 C_1 + \dots + x_i C_i + \dots + x_n C_n = B$$

Calculons alors le déterminant de la matrice A_i *:*

$$\det(A_i) = \det(C_1, \dots, \sum_{k=1}^{n} x_k C_k, \dots, C_n)$$

Par multilinéarité,

$$\det(A_i) = \sum_{k=1}^{n} x_i \det(C_1, \dots, C_k, \dots, C_n)$$

mais tous ces déterminants sont nuls (deux colonnes sont égales), sauf celui où $C_k = C_i$ *et donc* $\det(A_i) = x_i \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det(A)$.

Remarque 26.11 Cette formule est utile pour résoudre rapidement un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} ax+by &= \alpha \\ cx+dy &= \beta \end{cases}$$

qui possède une unique solution lorsque $ad-bc \neq 0$:

$$\begin{cases} x &= \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{ad-bc} \\ \\ y &= \dfrac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{ad-bc} \end{cases}$$

Dans le cas général, pour $n \geqslant 3$ cette formule n'est pas utilisée : elle impose de calculer $(n+1)$ déterminants de taille $n \times n$ ce qui est trop coûteux. La méthode du pivot de Gauss est préférable.

PROPOSITION 26.20 ♡♡♡ **Déterminant d'une matrice triangulaire**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\det(A) = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$$

Démonstration *Utilisons la formule du déterminant :*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

Pour que $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$ *soit non nul, il faut que* $\sigma(1) \leqslant 1$, $\sigma(2) \leqslant 2$, $\dots$, $\sigma(n) \leqslant n$ *et donc* $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, $\dots$, $\sigma(n) = n$, *c'est-à-dire* $\sigma = \mathrm{id}_E$. *Il n'y a qu'un terme non nul dans la somme qui vaut* $a_{1,1} \dots a_{n,n}$.

PROPOSITION 26.21 ♡♡♡ **Déterminant d'une transposée**

Une matrice et sa transposée ont même déterminant :

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

Démonstration *La formule du déterminant donne*

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

Puisque l'application

$$T : \begin{cases} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1} \end{cases}$$

est bijective, on peut effectuer dans la somme le changement d'indices $\sigma' = \sigma^{-1}$. *Il existe* $k \in [\![1,n]\!]$ *tel que* $1 = \sigma'(k)$, *c'est-à-dire* $k = \sigma(1)$ *et alors* $a_{1,\sigma(1)} = a_{\sigma(k),k}$. *Quitte à réordonner les termes du produit,*

$$a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n}$$

Remarquons ensuite que $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)$ *car* $1 = \varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1})$. *On peut donc écrire*

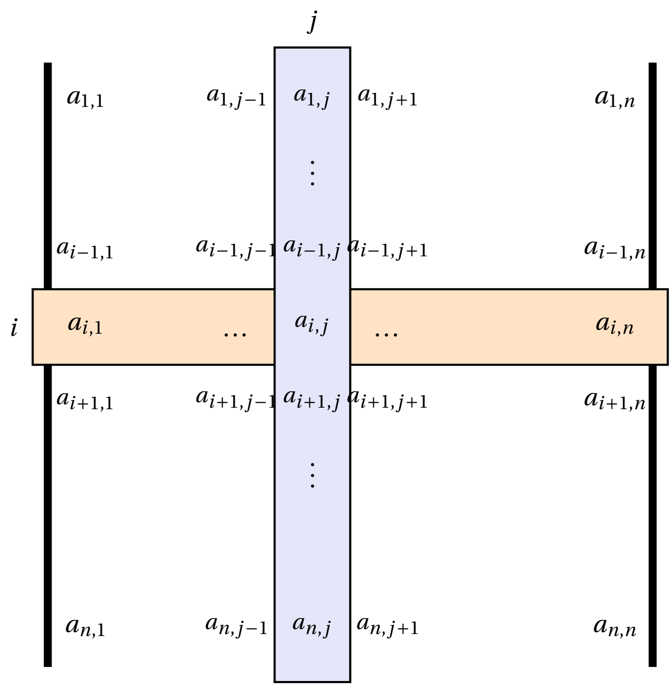
$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} = \det(A)$$

Remarque 26.12 Les opérations élémentaires du théorème 26.18 page précédente sont donc également valables sur les lignes d'une matrice puisqu'en transposant une matrice, on échange lignes et colonnes.

DÉFINITION 26.13 ♡♡♡ **Mineurs, cofacteurs**
Soit un déterminant d'une matrice $n \times n$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. On note m_{ij} le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en barrant la i-ème ligne et la j-ème colonne de Δ. m_{ij} s'appelle le *mineur* relatif à a_{ij}
2. On appelle *cofacteur* de Δ relatif à a_{ij}, le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$



LEMME 26.22

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = m_{n,n}$$

Le premier déterminant est de taille $n \times n$ et le deuxième est le mineur $m_{n,n}$ de taille $(n-1) \times (n-1)$.

Démonstration *Avec la formule du déterminant,*

$$\Delta = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n-1),n-1} a_{\sigma(n),n}$$

Mais comme la dernière colonne est remplie de zéros sauf à la dernière ligne, $a_{\sigma(n),n} \neq 0 \iff \sigma(n) = n$. Il ne reste dans la somme que les termes correspondant aux permutations telles que $\sigma(n) = n$. La restriction σ' d'une telle permutation à $[\![1, n-1]\!]$ définit une permutation de $\mathfrak{S}_{n-1}$ et on peut écrire

$$\Delta = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n-1),n-1}$$

Il suffit alors de remarquer que σ et σ' ont le même nombre d'inversions, donc que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')$.

LEMME 26.23

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ & & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta_{ij}$$

Démonstration *L'idée consiste à effectuer des échanges de deux colonnes successives pour placer la colonne C_j en dernière position sans modifier l'ordre des autres colonnes : $C_j \leftrightarrow C_{j+1}, \dots, C_{n-1} \leftrightarrow C_n$. Chaque échange de colonnes modifie le signe du déterminant (la forme n-linéaire est antisymétrique) et il y a $(n-j)$ échanges. On obtient donc que notre déterminant vaut :*

$$(-1)^{n-j}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & & \vdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 0 \end{vmatrix}$$

Une fois la colonne en dernière position, on amène la ligne i en dernière position en effectuant $(n-i)$ échanges $L_i \leftrightarrow L_{i+1} \dots L_{n-1} \leftrightarrow L_n$. Au total, on a fait $(2n-i-j)$ échanges et comme $(-1)^{2n-i-j} = (-1)^{i+j}$, notre déterminant vaut :

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 1 \end{vmatrix}$$

En utilisant le lemme 26.22, notre déterminant vaut donc : $\Delta = (-1)^{i+j} m_{ij} = \Delta_{ij}$.

THÉORÈME 26.24 ♡♡♡ **Développement d'un déterminant par rapport à une ligne-colonne**
Soit une matrice carrée $A = ((a_{ij}))_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Démonstration *Notons $C_1, \dots, C_j, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de notre matrice. Décomposons le vecteur C_j sur la base canonique de $\mathbb{K}^n$:*

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} K_i$$

où $K_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, 0)$ est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Puisque le déterminant est une forme n-linéaire, en développant par rapport à la j-ème colonne,

$$\det(A) = \det(C_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} K_j, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\delta_{i,j}$$

Le déterminant $\delta_{i,j}$ est le déterminant calculé au lemme 26.23. On a donc

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Delta_{i,j}$$

Pour l'autre formule, il suffit d'échanger le rôle des lignes-colonnes, c'est-à-dire considérer la matrice ${}^tA$ qui a même déterminant que A.

Exemple 26.8 Développons un déterminant 3×3 selon la deuxième colonne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = -d\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix}$$

Développons ce même déterminant selon la troisième ligne :

$$\Delta = c\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}$$

On dispose d'une méthode typique pour calculer un déterminant $n\times n$.

1. À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes-colonnes, faire apparaître le maximum de zéros dans une colonne (ligne).
2. Développer alors le déterminant selon cette colonne (ligne) et se ramener au calcul de déterminants de taille inférieure : $(n-1)\times(n-1)$.

Cette méthode ainsi que d'autres sont développées dans l'appendice sur les techniques d'algèbre, B, paragraphe B.5.3, p. 1181.

Exemple 26.9 Calcul de

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1}\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

(déterminant de Vandermonde)
Il suffit d'exécuter l'opération sur les colonnes $C_i \longleftarrow C_i-(x_n\times C_{i-1})$, en partant de $i=n$ et en remontant jusqu'à $i=2$. et devient :

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{vmatrix}.$$

En développant selon la dernière ligne, il vient :

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}x_1-x_n & x_1(x_3-x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\end{vmatrix}.$$

Soit

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1-x_n)(x_2-x_n)\dots(x_{n-1}-\alpha_n)\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}.$$

Par récurrence immédiate,

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

PROPOSITION 26.25 **Condition d'alignement de trois points dans le plan**
On se place dans le plan rapporté à un repère $\mathscr{R}$ et on considère trois points $M_1\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right._{\mathscr{R}}$, $M_2\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right._{\mathscr{R}}$, $M_3\left|\begin{matrix}x_3\\y_3\end{matrix}\right._{\mathscr{R}}$. Ces trois points sont alignés si et seulement si

$$\boxed{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=0}$$

Démonstration *En utilisant les opérations élémentaires* $C_2\leftarrow C_2-C_1$ *et* $C_3\leftarrow C_3-C_1$, $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x_1 & (x_2-x_1) & (x_3-x_1)\\ y_1 & (y_2-y_1) & (y_3-y_1)\end{vmatrix}$ *et en développant par rapport à la première ligne,* $\Delta=\begin{vmatrix}(x_2-x_1) & (x_3-x_1)\\ (y_2-y_1) & (y_3-y_1)\end{vmatrix}=\det_e(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3})$. *Les trois points sont alignés si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *et* $\overrightarrow{M_1M_3}$ *sont colinéaires, c'est-à-dire* $\Delta=\det(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3})=0$,

DÉFINITION 26.14 ♡♡♡ **Comatrice**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On définit sa *comatrice* comme étant la matrice des cofacteurs :

$$\mathrm{com}(A) = ((\Delta_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

On dispose de la relation fondamentale entre une matrice et sa comatrice :

THÉORÈME 26.26 ♡♡♡ **Relation entre matrice et comatrice**

$$\boxed{A \times {}^t\mathrm{com}(A) = \det(A).I_n}$$

Démonstration *Calculons les coefficients de la matrice* $B = A \times {}^t\mathrm{com}(A)$, $C = ((c_{ij}))$ *où*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk}$$

- *Si* $i = j$, $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} = \det(A)$, *on reconnaît le développement de* $\det(A)$ *selon la ligne* i.
- *Si* $i \neq j$, *considérons la matrice* $\widetilde{A}$ *obtenue en remplaçant la jème ligne de* A *par la ligne* i. *En développant* $\det(\widetilde{A})$ *selon la ligne* L_j, *on trouve que* $\det(\widetilde{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = c_{ij}$ *et puisque deux lignes de* $\widetilde{A}$ *sont identiques,* $\det(\widetilde{A}) = 0$.

Les coefficients diagonaux de C *valent* $\det(A)$ *et les autres sont nuls et donc* $C = \det(A)I_n$.

COROLLAIRE 26.27 ♡♡ **Expression de l'inverse d'une matrice**

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, on dispose d'une formule (théorique) qui donne son inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A)$$

Démonstration *Puisque* $\det(A) \neq 0$, *on peut diviser la relation fondamentale par* $\det(A)$: $A \times \left[\frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A)\right] = I_n$ *ce qui donne l'expression de* A^{-1}.

Remarque 26.13 Cette formule est surtout d'un intérêt théorique pour $n \geqslant 3$ car elle demande de calculer n^2 déterminants $(n-1)\times(n-1)$ (les cofacteurs) et un déterminant $n \times n$. Par contre, il est bon de connaître par coeur l'expression de l'inverse d'une matrice 2×2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice inversible, $\det(A) = ad - bc \neq 0$ et $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ d'où

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

On retient qu'il suffit d'inverser les éléments diagonaux, de changer le signe des autres coefficients et de diviser par $\det(A)$.

Exemple 26.10 Exprimons le déterminant de com(A) en fonction du déterminant de A. En prenant le déterminant de la relation fondamentale, on trouve que :

$$\det(A)\det(\mathrm{com}(A)) = (\det A)^n$$

- Si A est inversible, on peut diviser par det(A) d'où $\det(\mathrm{com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.
- Si A n'est pas inversible, notons u l'endomorphisme ayant A comme matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et v l'endomorphisme ayant com(A) dans la base canonique. Puisque $u \circ v = 0$, $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$. Si $A \neq 0$, $\dim \mathrm{Ker}\, u < n$ ce qui montre que v n'est pas inversible donc que $\det(\mathrm{com}(A)) = 0$. Si $A = 0$, tous ses cofacteurs sont nuls et alors $\mathrm{com}(A) = 0$ et on a encore $\det(\mathrm{com}(A)) = 0$.

Dans tous les cas, on a vérifié que $\det(\mathrm{com}(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

PROPOSITION 26.28 ♡♡♡ **Formule du déterminant par blocs**
Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ deux matrices carrées et $B \in \mathfrak{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ une matrice rectangulaire. On définit la matrice carrée par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

On sait calculer un déterminant avec un bloc de zéros en bas à gauche :

$$\boxed{\det(M) = \det(A)\det(C)}$$

Démonstration *En utilisant la formule du déterminant,*

$$\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(p),p} m_{\sigma(p+1),p+1}\dots m_{\sigma(n),n}$$

Puisque dans les p premières colonnes, il y a des zéros dans les lignes d'indice supérieur à $p+1$, pour que le produit $m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(p),p}$ soit non nul, il est nécessaire que $\sigma(1),\dots,\sigma(p) \in [\![1,p]\!]$ et alors $m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(p),p} = a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(p),p}$. Ne reste donc dans cette somme que les termes correspondant à des permutations σ vérifiant $sigma([\![1,p]\!]) \subset [\![1,p]\!]$ et $\sigma([\![p+1,n,)]\!] \subset [\![p+1,n]\!]$. On peut décomposer ces permutations sous la forme $\sigma = \sigma_1\circ\sigma_2$ où σ_1 laisse invariant $[\![p+1,n]\!]$ et σ_2 laisse invariant $[\![1,p]\!]$. On a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$. De plus, la restriction de σ_1 à $[\![1,p]\!]$ définit une permuatation de $\mathfrak{S}_{[\![1,p]\!]}$, et la restriction de σ_2 à $[\![p+1,n]\!]$ définit une permutation de $\mathfrak{S}_{[\![p+1,n]\!]}$. Alors, $\det(M) = \sum_{(\sigma_1,\sigma_2)} \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) a_{\sigma_1(1),1}\dots a_{\sigma_1(p),p} c_{\sigma_2(p+1),p+1}\dots c_{\sigma_2(n),n}$ que l'on peut écrire $\left[\sum_{\sigma_1\in\mathfrak{S}_{[\![1,p]\!]}} \varepsilon(\sigma_1) a_{\sigma_1(1),1}\dots a_{\sigma_1(p),p}\right] \times \left[\sum_{\sigma_2\in\mathfrak{S}_{[\![p+1,n]\!]}} \varepsilon(\sigma_2) c_{\sigma_2(p+1),p+1}\dots c_{\sigma_2(n),n}\right] = \det(A)\times\det(C)$.
On peut prouver la formule de façon plus simple en effectuant le produit par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$$

En développant successivement selon les colonnes $C_1,\dots,C_p$, on calcule facilement

$$\det\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix} = \det(C)$$

et en développant successivement selon les lignes $L_n,\dots L_{p+1}$, on calcule facilement

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \det(A)$$

Il suffit ensuite d'utiliser que le déterminant du produit de deux matrices carrées est le produit de leurs déterminants.

Remarque 26.14 Attention à ne pas utiliser d'autres formules que celle du théorème. Par exemple, si $A,B,C,D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, en général $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C) \dots$

Exemple 26.11 Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, Formons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

Pour calculer son déterminant, essayons de faire apparaître un bloc de zéros en bas à gauche.

1. Si $d \neq 0$, en effectuant les opérations élémentaires suivantes sur les colonnes : $C_1 \leftarrow C_1 - \frac{c}{d}C_{n+1}$, …, $C_n \leftarrow C_n - \frac{c}{d}C_{2n}$, on obtient

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} (a-\frac{c}{d})I_n & bI_n \\ 0_{n,n} & dI_n \end{pmatrix} = \left(a-\frac{c}{d}\right)^n d^n = (ad-bc)^n$$

2. Si $d = 0$, le déterminant à calculer s'écrit

$$\det(M) = \det\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

   Amenons le bloc de zéros à gauche en effectuant les opérations suivantes sur les colonnes : $C_1 \leftrightarrow C_{n+1}$, …, $C_n \leftrightarrow C_{2n}$. On obtient

$$\det(M) = (-1)^n \det\begin{pmatrix} bI_n & aI_n \\ 0_{n,n} & cI_n \end{pmatrix} = (-1)^n b^n c^n$$

Dans les deux cas, on obtient que $\det(M) = (ad-bc)^n$.

26.3 Exercices

26.3.1 Groupe symétrique

Exercice 26.1 ♡

On considère la permutation de $\mathfrak{S}_{2n}$ définie par

$$\sigma(p) = \begin{cases} 2p-1 & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant n \\ 2(p-n) & \text{si } n < p \leqslant 2n \end{cases}$$

Déterminer sa signature.

Solution : *Pour $n=2$, on trouve $\varepsilon(\sigma) = -1$. Pour $n=3$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ et sa signature vaut -1. Pour n quelconque,*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & (n+1) & (n+2) & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5\dots & (2n-1) & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

Soit $i \in [\![1,2n]\!]$, on compte facilement $\sharp\{j > i \mid \sigma(j) < \sigma(i)\} = i-1$ lorsque $i \leqslant n$ et 0 si $i > n$. Par conséquent, le nombre d'inversions de σ vaut $1+2+\dots+(n-1) = (n-1)\times n/2$ et la signature vaut $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 26.2 ♡

1. *Montrer que toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $\tau_{1,i}$ avec $i \in [\![2,n]\!]$.*
2. *Montrer que toute permutation paire peut s'écrire comme produit de cycles de longueur 3.*

Solution :

1. *On sait d'après le cours que toute permutation σ peut s'écrire comme produit de transpositions τ_{ij}. Il suffit donc de montrer qu'une transposition τ_{ij} avec $1 \neq i$, $1 \neq j$ peut s'écrire comme produit de transpositions τ_{1k}. Le calcul suivant montre que c'est le cas :*
$$\tau_{1i}\circ\tau_{1j}\circ\tau_{1i} = \tau_{ij}$$
2. *Soit $\sigma \in \mathscr{A}_n$ une permutation paire. D'après [a], elle s'écrit comme produit d'un nombre pair de transpositions de la forme τ_{1i}. Mais si l'on calcule le produit de deux telles transpositions, on trouve un 3-cycle :*
$$\tau_{1i}\circ\tau_{1j} = (1,\ j,\ a)$$
Par conséquent, notre permutation paire σ s'écrit comme produit de tels 3-cycles.

Exercice 26.3 ♡

Déterminer les permutations σ qui commutent avec une transposition τ_{ij}.

Solution : *Montrons que $\tau_{ij}\circ\sigma = \sigma\circ\tau_{ij}$ si et seulement si $\{i,j\}$ est stable par σ.*
- *$(i) \implies (ii)$: Calculons $\sigma(i) = \sigma\circ\tau_{ij}\circ\sigma(j)$. Si $\sigma(j) \not\in \{i,j\}$, on aurait $\sigma(j) = \sigma(i)$ ce qui est impossible. Donc $\sigma(j) \in \{i,j\}$. De même, $\sigma(i) \in \{i,j\}$.*
- *$(ii) \implies (i)$: Seuls deux cas sont possibles : $\sigma(i) = i$ et $\sigma(j) = j$ ou bien $\sigma(i) = j$ et $\sigma(j) = i$ et dans les deux cas, on vérifie facilement que σ commute avec τ_{ij}.*

Exercice 26.4 ♡♡

On définit le centre *d'un groupe $(\mathrm{G},.)$ comme étant les éléments du groupe qui commutent avec tous les éléments du groupe :*

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \{g \in \mathrm{G} \mid \forall h \in \mathrm{G}, g.h = h.g\}$$

1. *Montrer que $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{G},.)$.*
2. *Déterminer le centre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ lorsque $n \geqslant 3$.*

Solution :

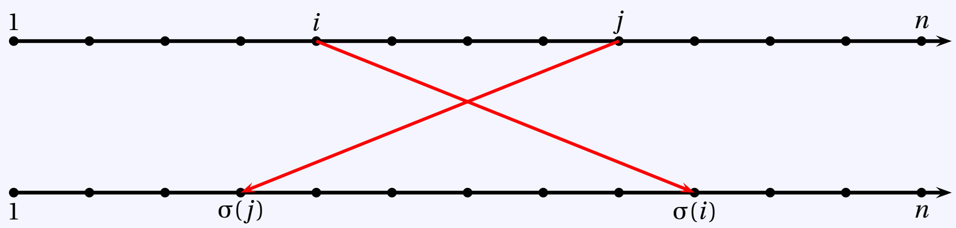
1. – *$e_\mathrm{G} \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ puisque l'élément neutre commute avec tous les éléments.*
   – *Soient $(x,y) \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})^2$. Montrons que $x.y \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$: soit $g \in \mathrm{G}$, en utilisant l'associativité de la loi et le fait que x, y commutent avec g : $(x.y).h = x.(y.h) = x.(h.y) = (x.h).y = (h.x).y = h.(x.y)$.*
   – *Soit $x \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$. Montrons que $x^{-1} \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$. Soit $g \in \mathrm{G}$. Puisque x commute avec tous les éléments du groupe, $x.g^{-1} = g^{-1}.x$. En prenant l'inverse d'un produit, on obtient que $g.x = x.g$.*

2. Considérons une permutation σ qui commute avec toutes les permutations. Elle doit en particulier commuter avec toutes les transpositions τ_{ij}. D'après l'exercice précédent, $\{i,j\}$ doit être stable par σ. Considérons maintenant $k \in [\![1,n]\!]$. Puisque $n \geqslant 3$, on peut trouver trois entiers distincts $\{i,j,k\}$ dans $[\![1,n]\!]$. En considérant la transposition τ_{ik}, $\sigma(k) \in \{i,k\}$ et en considérant la transposition τ_{jk}, $\sigma(k) \in \{j,k\}$ et par conséquent, $\sigma(k) = k$. Nous avons montré que $\sigma = \mathrm{id}$ et que $\mathrm{Z}(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{id}\}$.

Exercice 26.5

Trouver le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ont exactement une inversion.

Solution :



Une inversion c'est une paire de flèches (rouges) qui se coupent. On veut donc qu'il n'y ait que ces deux flèches qui se coupent pour n'avoir qu'une seule inversion.
Pour l'image de 1 on doit avoir 1 sinon on aurait 1 qui serait l'image d'un k et la flèche $1 \to \sigma(1)$ couperait la flèche $k \to 1$.
De même $\forall p \in [\![1, i-1]\!]$, on a $\sigma(p) = p$.
Maintenant on a $\sigma(i) > i$. Donc nécessairement i est l'image d'un $k > i$, dont la flèche $k \to i$ va couper la flèche $i \to \sigma(i)$. Comme il n'y en a qu'une seule qui coupe cette flèche $i \to \sigma(i)$, à savoir la flèche $j \to \sigma(j)$, on en déduit que $k = j$ et $\sigma(j) = i$. De même $\sigma(i+1)$, l'image de $i+1$ est plus grande que $i+1$ (toutes les places $1, 2, \dots, i$ sont déjà prises pour les images). Donc supposons l'espace d'un instant que $i+1 \neq j$, on aurait une flèche $i+1 \to \sigma(i+1)$ différente de $i \to \sigma(i)$ qui couperait $j \to i$, ce qui n'est pas possible par hypothèse. Donc $i+1 = j$.
Par la suite, toujours pour éviter que d'autres flèches se coupent, pour $p > i+1$ (s'il en existe) on a $\sigma(p) = p$.
On a donc $n-1$ possibilités pour i et donc $n-1$ permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ont exactement une inversion.

Exercice 26.6 ♡♡

Dans un groupe G, étant donné un élément $g \in \mathrm{G}$, on considère la conjugaison *:*

$$\varphi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathrm{G} \\ x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que $\forall g \in \mathrm{G}$, l'application φ_g est un automorphisme de G et que l'application*

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathrm{G},.) & \longrightarrow & (\boldsymbol{Aut(G)}, \circ) \\ g & \longmapsto & \varphi_g \end{array} \right.$$

   est un morphisme de groupes.
2. *Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, on considère une transposition $\tau = \tau_{ij}$ et une permutation σ. Calculer le conjugué $\sigma' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \varphi_\sigma(\tau)$.*
3. *Calculer le conjugué d'un cycle $c = (i_1 \ \dots \ i_k)$ par une permutation σ : $\sigma' = \sigma \circ c\sigma^{-1}$.*

Solution :

1. *Vérification sans problème.*
2. *Notons $k = \sigma(i)$ et $l = \sigma(j)$. On calcule $\sigma'(k) = \sigma(j) = l$ et $\sigma'(l) = \sigma(i) = k$. Si $p \notin \{k, l\}$, $\sigma'(p) = \sigma(\sigma^{-1}(p)) = p$. Par conséquent, $\sigma' = \tau_{\sigma(i)\sigma(j)}$.*
3. *Décomposons le cycle en produit de transpositions :*

$$c = \tau_{i_1 i_2} \circ \tau_{i_2 i_3} \circ \dots \circ \tau_{i_{k-1} i_k}$$

   Puisque θ est un morphisme, on a

$$\varphi_c = \varphi_{\tau_{i_1 i_2}} \circ \dots \circ \varphi_{\tau_{i_{k-1} i_k}}$$

   et donc pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varphi_c(\sigma) = \tau_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)} \dots \tau_{\sigma i_{k-1} i_k} = (\sigma(i_1) \dots \sigma i_k)$. Le conjugué d'un cycle par une permutation est encore un cycle.

Exercice 26.7 ♡♡♡

Montrer que la signature est le seul morphisme de groupes non trivial de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ *vers* $(\mathbb{R}^\star, \times)$.

Solution : *Soit* φ *un tel morphisme. On doit avoir*

$$\forall (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}_n^2, \quad \varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varphi(\sigma_1) \times \varphi(\sigma_2)$$

Soit une transposition τ. *Comme* $\tau^2 = \mathrm{id}$, *on doit avoir* $\varphi(\tau)^2 = 1$ *et donc* $\varphi(\tau) = \pm 1$. *Par conséquent, puisque toute permutation se décompose comme produit de transpositions, on en déduit que* $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \{-1, 1\}$.
Supposons que φ *n'est pas triviale. Il existe alors une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *telle que* $\varphi(\sigma) = -1$, *et comme* σ *se décompose en produit de transpositions de la forme* τ_{1i}, *il existe* $i \in [\![1, n]\!]$ *telle que* $\varphi(\tau_{1i}) = -1$. *Mais alors pour* $j \in [\![1, n]\!]$, $j \neq i$, $\tau_{1j} \circ \tau_{1i} = \begin{pmatrix} i & j & 1 \end{pmatrix} = c$, *mais puisque* $c^3 = \mathrm{id}$, $1 = \varphi(c)^3 = \varphi(\tau_{1i})^3 \varphi(\tau_{1j})^3 = -1$, *une absurdité.*
Soit alors une permutation quelconque. Elle se décompose comme un produit de transpositions de la forme τ_{1i} :

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$$

et alors $\varphi(\sigma) = (-1)^k = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 26.8 ♡♡

Montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_5$, *il existe* $k \in [\![1, 6]\!]$ *tel que* $\sigma^k = \mathrm{id}$.

Solution : *Décomposons une permutation* σ *en produit de cycles à supports disjoints. Les cycles possibles sont de longueur* $2, 3, 4, 5$. *Puisque les supports des cycles sont disjoints dans* $[\![1, 5]\!]$, *il n'y a que les possibilités suivantes :* $\sigma = \mathrm{id}$, $\sigma = c_2$, $\sigma = c_3$, $\sigma = c_4$, $\sigma = c_5$, $\sigma = c_2 \circ c_2'$, $\sigma = c_2 \circ c_3$, *où* c_l *désigne un cycle de longueur* l *pour lequel* $c_l^l = \mathrm{id}$. *On vérifie que dans tous les cas,* $\sigma^k = \mathrm{id}$ *pour* $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

26.3.2 Déterminants

Exercice 26.9 ♡♡

1. *Calculer le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *On dit qu'une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *est un* dérangement *lorsque* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i) \neq i$. *Y a-t-il plus de dérangements de signature* $+1$ *que de dérangements de signature* -1 *?*

Solution :

1. *Avec l'opération* $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, *on factorise* $(n-1)$ *dans la première colonne. Ensuite pour* $i \in [\![2, n]\!]$, $C_i \leftarrow C_i - C_1$ *fait apparaître des zéros et on trouve que* $\det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)$.
2. *Avec la formule du déterminant,*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

si σ *n'est pas un dérangement, il existe* $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $\sigma(i) = i$ *et alors* $a_{\sigma(i),i} = 0$. *En notant* $\mathcal{D}_n$ *l'ensemble des dérangements,* d_n^+ *le nombre de dérangements pairs et* d_n^- *le nombre de dérangements impairs,*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \varepsilon(\sigma) = d_n^+ - d_n^-$$

Lorsque n *est impair, comme* $\det(A) > 0$, *il y a plus de dérangements pairs que d'impairs et lorsque* n *est pair, c'est le contraire.*

Exercice 26.10 ♡♡

Trouver les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$$

Solution : *Soit* A *une telle matrice. En prenant* $X = A$, *on obtient que* $\det(2A) = 2\det(A)$ *d'où* $2^{n-1}\det(A) = 0$. *Lorsque* $n \geqslant 2$, *il est nécessaire que* $\det(A) = 0$. *On a donc :*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A + X) = \det(X)$$

Notons r *le rang de* A. *La matrice* A *est équivalente à la matrice* J_r *donc il existe deux matrices inversibles* $P, Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $A = PJ_rQ$. *Si l'on suppose que* $r > 0$, *en prenant* $X = P(Y_{n-r})Q$ *où* Y_{n-r} *désigne la matrice* $\mathrm{Diag}(0,\dots,0,1,\dots,1)$ *avec* $(n-r)$ 1 *sur la diagonale, on trouve que* $\det(PQ) = \det(P)\det(Y_{n-r})\det(Q)$ *ce qui est absurde puisque la matrice* Y_{n-r} *n'est pas inversible. Nécessairement,* $r = 0$ *et donc* $A = 0$. *Réciproquement, la matrice nulle convient.*

Exercice 26.11 ♡

Calculer les déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & & & -1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} (x+1) & 1 & \dots & & 1 \\ 2 & (x+2) & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & (x+3) & \ddots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ n & & \dots & & (x+n) \end{vmatrix}$$

Solution : *Pour* Δ_1, *ajouter toutes les colonnes à la première :*

$$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$$

On trouve alors un déterminant triangulaire : $\Delta_1 = (-1)^{n-1}(n-1)$.
Pour Δ_2, *retrancher la première colonne à toutes les autres :*

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \quad \dots \quad C_n \leftarrow C_n - C_1$$

On remarque ensuite que dans les $n-1$ *dernières colonnes, la somme de tous les éléments vaut* 0. *Ajouter donc toutes les lignes à la première. On se ramène à un déterminant triangulaire :* $\Delta_2 = x^{n-1}\left(x + \dfrac{n(n+1)}{2}\right)$.

Exercice 26.12 ♡♡

Calculer le déterminant tridiagonal

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Solution : *Adopter la méthode classique pour les déterminants tridiagonaux : développer par rapport à la dernière colonne, puis développer le deuxième déterminant par rapport à la dernière ligne. On trouve la relation de récurrence*

$$\forall n \geqslant 2, \quad \Delta_n - (1+x^2)\Delta_{n-1} + x^2\Delta_{n-2} = 0$$

avec $\Delta_1 = (1+x^2)$ *et* $\Delta_2 = (1+x^2)^2 - x^2$, *et la relation de récurrence est vérifiée en posant artificiellement* $\Delta_0 = 1$. *l'équation caractéristique est* $(r-1)(r-x^2) = 0$. *On distingue donc deux cas :*

1. *Si* $x = 1$, 1 *est racine double de l'équation caractéristique, donc* $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}2$ *tq* $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \lambda + \mu n$. *En utilisant les conditions initiales* Δ_0, Δ_1, *on trouve que* $\boxed{\Delta_n = 1 + n}$.
2. *Si* $x \neq 1$, $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \lambda + \mu x^{2n}$. *Avec les conditions initiales, on trouve que*

$$\boxed{\Delta_n = \frac{1}{x^2-1}\left(-1 + x^{2n+2}\right) = 1 + x^2 + \dots + x^{2n}}$$

Exercice 26.13

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice antisymétrique avec* n *impair. Montrer qu'elle n'est pas inversible.*

Solution : *Calculons*

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A) \implies \det(A) = 0$$

Exercice 26.14 ♡

Calculer les déterminants suivants en utilisant un déterminant de Vandermonde :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

Solution : *Supposons dans un premier temps que $abcd \neq 0$. Alors*

$$\Delta_1 = \frac{1}{abcd}\det(aC_1, bC_2, cC_3, dC_4) = \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ abcd & abcd & abcd & abcd \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

c'est un Vandermonde et $\Delta_1 = -(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$.
Si on suppose que $abcd = 0$, considérons $f(\varepsilon) = \Delta_1(a+\varepsilon, b+\varepsilon, c+\varepsilon, d+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \neq 0$. On utilise la formule précédente qui est une fonction continue en ε. Lorsque $\varepsilon \to 0$, on retrouve l'expression de Δ_1. C'est une astuce classique à retenir.
On calcule le Vandermonde

$$P(x) = V(x, a, b, c, d) = (d-x)(d-a)(d-b)(d-c)\dots(a-x)$$

et en développant $P(x)$ par rapport à la première ligne, on s'aperçoit que Δ_2 est le coefficient en x^3 de $P(x)$. On obtient donc $\boxed{\Delta_2 = -(a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)}$.

Indication 26.11 : Pour le deuxième, introduire

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

Exercice 26.15 ♡

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

Solution :

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$. *En développant,*
   $D = \begin{vmatrix} A+B & B+C & C+A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & C & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & C & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & B & A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C & A \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix}$.
   En mettant abc en facteur, on trouve un déterminant de Vandermonde, et donc $D = 2abc(c-a)(c-b)(b-a)$.
2. *On écrit*
   $$\begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On a
   $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(c-a)(c-b)(b-a)$$
   toujours grâce au déterminant de Vandermonde, et
   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

D'où le résultat.

Exercice 26.16 ♡

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i+j > n+1 \implies a_{ij} = 0$$

Calculer $\det(A)$. *Si on suppose de plus que* $a_{ij} > 0$ *lorsque* $i+j \leqslant n+1$, *déterminer le signe de* $\det(A)$.

Solution : *Étudier deux cas :*

1. n *pair :* $n = 2p$. *En effectuant les échanges de colonnes* $C_1 \leftrightarrow C_n, \dots, C_p \leftrightarrow C_{p+1}$, *on trouve une matrice triangulaire supérieure et le déterminant vaut*
$$(-1)^p a_{1,n} a_{2,n-1} \dots a_{n,1}$$
2. n *impair :* $n = 2p+1$. *En effectuant les échanges de colonnes* $C_1 \leftrightarrow C_n, \dots, C_p \leftrightarrow C_{p+2}$ *on trouve également que* $\det(A) = (-1)^p a_{1,n} \dots a_{n,1}$.

Le signe de $\det(A)$ *dépend de* n *modulo* 4 *(parité de* p*).*

Exercice 26.17 ♡

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et on définit la matrice* $A' = ((\ (-1)^{i+j} a_{ij}))$. *Exprimer* $\det(A')$ *en fonction de* $\det(A)$.

Solution : *En utilisant la formule du déterminant,*

$$\det(A') = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)} \dots (-1)^{n+\sigma(n)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Mais $(-1)^{1+\sigma(1)} \dots (-1)^{n+\sigma(n)} = (-1)^{n(n+1)} = 1$ *et donc* $\det(A') = \det(A)$.

Exercice 26.18 ♡

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ *et l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$. *Exprimer* $\det(f)$ *en fonction de* $\det(A)$.

Solution : *Dans la base canonique* c *de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, *la matrice de* f *s'écrit*

$$\operatorname{Mat}_c f = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

On calcule son déterminant (faire apparaître un bloc de 0 *en bas à gauche en étudiant deux cas,* $a_{22} \neq 0$ *et* $a_{22} = 0$*) et on trouve* $\det(f) = \det(A)^2$.

Exercice 26.19 ♡♡

On considère $2n$ *scalaires* $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ *tels que tous les* a_i *sont distincts et* $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i + b_i \neq 0$. *On veut calculer le* déterminant de Cauchy *suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle*
$$R(X) = \frac{(b_1 - X) \dots (b_{n-1} - X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)}$$
2. *Exprimer* Δ_n *en fonction de* Δ_{n-1}.
3. *Calculer* Δ_n.

Solution :

1. *Puisque* $\deg R(X) = -1$*, et tous les pôles* a_i *sont simples, la décomposition s'écrit :*

$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X + a_k} \text{ où } \lambda_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(b_j + a_k)}{\prod_{j\neq k}(a_j - a_k)} \neq 0$$

2. *En effectuant l'opération* $L_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$*, on obtient*

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n}\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_n}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

Mais comme $R(b_1) = \dots = R(b_{n-1}) = 0$*,*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \dots & 0 & R(b_n) \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on tire

$$\Delta_n = \frac{R(b_n)}{\lambda_n} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n - b_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - a_n)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)\prod_{i=1}^{n-1}(a_n + b_i)}\Delta_{n-1}$$

3. *Puisque* $\Delta_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$*, la relation de récurrence précédente donne*

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)\prod_{i<j}(b_j - b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}$$

Exercice 26.20 ♡

Calculer le déterminant de la matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{ii} = 1, a_{1,i} = 1, a_{i1} = 1$ *et* 0 *sinon.*

Solution : *Faire* $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - \dots - C_n$*. On trouve une matrice triangulaire supérieure et le déterminant vaut* $(1-n)$ *pour* $n \geqslant 3$*. Il est nul si* $n = 2$*.*

Exercice 26.21 ♡

Calculer le déterminant de la matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $a_{ij} = \alpha$ *pour* $i \leqslant j$ *et* $a_{ij} = 1$ *pour* $i > j$*.*

Solution : *Faire les opérations* $C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \dots, C_n - C_1 \leftarrow$*, factoriser* $(\alpha - 1)$ *dans la dernière colonne et* $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$*. On trouve* $\det(A) = \alpha(\alpha-1)^{n-1}$*.*

Exercice 26.22 ♡♡

Calculer le déterminant tridiagonal avec $\alpha+\beta$ *sur la diagonale principale,* 1 *en dessous et* $\alpha\beta$ *au dessus.*

Solution : *En appelant* D_n *le déterminant de taille* n*. On a* $D_0 = 1$ *et* $D_1 = \alpha+\beta$*. En développant par rapport à la première colonne :* $D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.
En développant ce dernier déterminant par rapport à la première ligne, on obtient alors $D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$*. La suite* D_n *est solution d'une récurrence linéaire, dont l'équation caractéristique a pour racines* α *et* β*. Donc* $D_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$*. Les conditions initiales donnent* $D_n = \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n + \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^n$*.*

Exercice 26.23 ♡

Calculer le déterminant de la matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{ii} = i$ *et sinon* $a_{ij} = 2$.

Solution : $C_n \leftarrow C_n + C_1 + \cdots + C_{n-1}$, *factoriser* $2n-1$ *dans la dernière colonne et retrancher* $2C_n$ *à toutes les autres colonnes. On trouve* $\det(A) = (-1)^{n-1}(2n-1)$.

Exercice 26.24 ♡

Calculer le déterminant $(2p) \times (2p)$ *suivant :*

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \nearrow & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \nearrow & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

Solution : *Faire apparaître un bloc de* 0 *en bas à gauche avec les opérations* $C_1 \leftarrow C_1 - \dfrac{b}{a}C_{p+1}$ …*On trouve* $\det(A) = (a^2 - b^2)^p$. *Ce résultat est encore valable si* $a = 0$.

Exercice 26.25 ♡

Calculer le déterminant de la matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

Solution : *Deux lignes sont égales si* $n \geqslant 3$. *Il est nul.*

Exercice 26.26 ♡

Soit la matrice $A = ((\inf(i,j))) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer son déterminant.*

Solution : *On considère la matrice triangulaire inférieure* L *comprenant des* 1 *sous la diagonale (incluse) et des* 0 *au-dessus. On a* $A = L\,{}^tL$ *et donc* $\det A = (\det L)^2 = 1$.

Exercice 26.27 ♡

Caluler $D = \det \max(i,j) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & \dots & n \end{vmatrix}$.

Solution : *On soustrait la première ligne à chacune des autres :* $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

On développe par rapport à la première ligne : $D = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k D_k$. *Tous les déterminants extraits ont une dernière colonne nulle et sont donc nuls, sauf* D_n *qui est un déterminant triangulaire inférieur avec des* 1 *sur la diagonale.* $D_n = 1$ *et* $D = (-1)^{n+1} n$.

Exercice 26.28 ♡

Soient $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{R})$ *avec* $n > p$. *Montrer que* $\det(AB) = 0$.

Solution : *Soit considérer les applications linéaires associées et le théorème du rang, soit travailler par blocs :*

$$\begin{vmatrix} A & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B \\ 0 \end{vmatrix} = AB$$

Exercice 26.29 ♡

Calculer le déterminant tridiagonal avec des 1 *partout.*

Solution : *Développer pour trouver la relation* $\Delta_n = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. *Les racines de l'équation caractéristique sont* $-j$ *et* $-j^2$. *Solution :*

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

Exercice 26.30 ♡

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

Solution : $C_j - C_{j-1}$ *pour* $j = 2\dots n$ *puis développer par rapport à la dernière ligne :* $(-1)^{n+1}n!$

Exercice 26.31 ♡

Calculer $\det(ia + jb)$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$.

Solution : *Colle Faire* $C_j - C_{j-1}$ *pour* $j = 2\dots n$. *Si* $n \geqslant 3$ *on trouve* 0.

Exercice 26.32

Calculer $\det(1 + a_i a_j)$ *où* $a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$.

Solution : *Remplacer* C_j *par* $C_j - C_1$ *pour* $j = 2\dots n$ *et mettre* $(a_2 - a_1)\dots(a_n - a_1)$ *en facteur. Faire ensuite* $C_j - C_{j-1}$ *pour* $j = 3\dots n$. *On trouve* 0 *si* $n \geqslant 3$.

Exercice 26.33 ♡

Calculer $\det(|i - j|)$.

Solution : $C_j - C_{j-1}$ *puis ensuite* $C_j - C_{j-1}$ *pour* $j = 3\dots n$. *et développer la première ligne. On trouve* $(-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$

Exercice 26.34 ♡♡♡

Démontrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 167 & 72 & 152 & 396 & 82 & 670 & 742 & 160 \\ 54 & 315 & 116 & 262 & 764 & 128 & 808 & 784 \\ 338 & 146 & 83 & 418 & 804 & 468 & 504 & 312 \\ 658 & 268 & 114 & 203 & 622 & 98 & 580 & 566 \\ 290 & 590 & 258 & 110 & 805 & 58 & 512 & 346 \\ 226 & 994 & 294 & 572 & 744 & 93 & 288 & 8 \\ 392 & 698 & 594 & 372 & 416 & 340 & 343 & 702 \\ 968 & 274 & 110 & 674 & 260 & 646 & 608 & 217 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Solution : *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\1\leqslant j\leqslant 8}}$ *et* $I_8 = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\1\leqslant j\leqslant 8}}$.

On a $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant 8, a_{ij} \equiv a'_{ij} \pmod 2$

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} \equiv \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a'_{\sigma(n),n} \equiv \det(I_8) \equiv 1 \pmod 2.$$

Donc $\det(A)$ *est impair, et donc non nul. Par suite,* A *est inversible.*

Les amateurs de calcul à la main doivent savoir que $\det(A) = -3060949331422362741897$ *avant de s'engager dans cette voie.*

Exercice 26.35 ♡♡♡

Démontrer que les matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\1\leqslant j\leqslant 8}}$ *et* $A' = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 8\\1\leqslant j\leqslant 8}}$ *avec* $a'_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}$ *ont le même déterminant.*

Solution : *On multiplie la colonne* C_i *par* $(-1)^i$ *puis la ligne* L_j *par* $(-1)^j$. *Il y a autant de changement de signe du determinant en lignes qu'en colonnes, donc un nombre pair de changement de signe.*

26.3.3 Exercices théoriques sur les déterminants

Exercice 26.36 ♡

Considérons pour $n \geqslant 2$, l'application

$$\det : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{cases}$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Solution : *Surjective, pas injective.*

Exercice 26.37 ♡

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.

Solution : $\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB)\det(A - iB) = |det(A + iB)|^2$.

Exercice 26.38 ♡

Soit $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction vérifiant* $f \neq 0$ $f(0) = 0$ *et*

$$\forall (A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(AB) = f(A) f(B)$$

Montrer que

$$f(A) = 0 \Longleftrightarrow \det(A) = 0$$

Solution : *Montrer que* $f(I) \neq 0$. *Une implication est simple, pour l'autre utiliser les matrices équivalentes.*

Exercice 26.39 ♡♡

Déterminer toutes les formes p-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$ où $p > n$.

Solution : *Soit f une telle forme p-linéaire alternée. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base naturelle de $\mathbb{R}^n$. Soit φ une application de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. On calcule $f(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(p)})$. D'après le principe des tiroirs, il existe deux indices i et j distincts tels que $\varphi(i) = \varphi(j)$ On en déduit que $f(e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(p)}) = 0$, et ce pour toute application φ de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Par linéarité, f est nulle.*

Exercice 26.40 ♡

Dans $\mathbb{R}^5$, déterminer tous les endomorphismes f vérifiant $f^2 + \mathrm{id} = 0$.

Solution : *On aurait alors* $f^2 = -\mathrm{id}$ *et* $(\det f)^2 = \det(-\mathrm{id}) = -1$ *car* 5 *est impair. Ceci n'est pas possible dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 26.41 ♡

Déterminer le rang de la comatrice $\widetilde{A}$ en fonction du rang de A. (Penser à la caractérisation du rang par les matrices extraites.)

Solution : *Soit n la taille de la matrice A. Si A est de rang n, alors elle est inversible et $\widetilde{A}$ l'est aussi, donc elle est aussi de rang n.*
Si A est de rang $< n-1$, alors tous les déterminants extraits d'ordre $n-1$ sont nuls, donc a fortiori tous les mineurs sont nuls et donc $\widetilde{A}$ est nulle et donc de rang nul.
Reste à voir le cas où le rang de A est $n-1$. Cela entraine que $D = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$ est de dimension 1. Comme on a $A^t\widetilde{A} = 0$, on en déduit que $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t\widetilde{A}X \in D$. Ceci signifie que ${}^t\widetilde{A}$ est de rang inférieur ou égal à 1. Il en est de même pour sa transposée $\widetilde{A}$. Enfin comme A est de rang $n-1$, ele admet au moins un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul. Mais un déterminant extrait d'ordre $n-1$ est nécessairement un mineur. Donc $\widetilde{A}$ admet au moins un élément non nul et est donc de rang $\geqslant 1$. Finalement, si le rang de A est $n-1$, alors le rang de $\widetilde{A}$ est 1.

Exercice 26.42 ♡♡

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On définit à partir des colonnes de A, la matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs colonnes $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ où :

$$B_i = \sum_{j \neq i} A_i$$

Exprimez le déterminant de la matrice B en fonction du déterminant de la matrice A.

Solution : *Qui dit opérations sur les colonnes dit multiplication à droite par une matrice. Quelle matrice ? Il suffit pour cela de prendre* $A = I_n$*. On voit ainsi que* $B = AC$ *avec* $C = J - I_n$ *où* J *est la matrice qui ne comporte que des* 1*.Pour calculer* $\det C$ *le plus simple est de calculer* $P(\lambda) = \det(C - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - n)$ *puis de faire* $\lambda = 1$*. C'est cette méthode qui sera employée l'an prochain lorsqu'on saura calculer les polynômes caractéristiques. En attendant on va utiliser le même principe : "Plus une expression comporte de variables et plus elle est facile à évaluer". Ici on calcule le déterminant de la matrice* M_h *qui comporte des zéros sur la diagonale,* 1 *au-dessus et* $1+h$ *au-dessous. On prendra alors la valeur en* $h = 0$ *de ce polynôme en* h*. Enfin on calcule* $F(x) = \det(M_h - xJ)$ *(on soustrait* x *à tous les éléments).*
D'abord F *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* n*. Maintenant on soustrait la première colonne à toutes les autres. Les* x *disparaissent des* $n-1$ *dernières colonnes. De ce fait* F *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* 1*.* F *est donc déterminé par deux valeurs,* 1 *et* $1+h$*. C'est ça l'idée d'introduire ce* $1+h$*. Donc* $F(1) = (-1)^n$ *comme déterminant d'une matrice triangulaire. De même* $F(1+h) = (-1-h)^n$*. Enfin* $\dfrac{F(1)-F(0)}{1} = \dfrac{F(1+h)-F(1)}{h}$*, d'où* $F(0) = (-1)^n\left(1 - \dfrac{(1+h)^n - 1}{h}\right)$*. On fait ensuite tendre* h *vers* 0*, soit en dérivant soit par la formule du binôme, pour trouver* $F(0) = (-1)^n(1-n)$ *comme annoncé.*

Exercice 26.43 ♡♡

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *à coefficients entiers relatifs. Montrer l'équivalence*

$$\underbrace{\left(A \text{ inversible et } A^{-1} \text{ a ses coefficients dans } \mathbb{Z}\right)}_{(i)} \iff \underbrace{\left(\det(A) = \pm 1\right)}_{(ii)}$$

Démontrer que $Gl_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z})\ ; \det(M) \in \{-1, 1\}\}$ *est un sous-groupe de* $Gl_n(\mathbb{R})$*.*

Solution :

1. $(i) \implies (ii)$*. Comme* $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$*, et que* $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$*, on doit avoir que* $\det(A) = \pm 1$*.*
2. $(ii) \implies (i)$*. En utilisant la formule*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\widetilde{A}$$

comme tous les cofacteurs Δ_{ij} *de* A *sont des entiers, et que* $\det(A) = \pm 1$*, on voit que les coefficients de* A^{-1} *sont entiers.*

Exercice 26.44 ♡♡

Soient deux matrices à coefficients réels $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$*. On suppose qu'elles sont semblables dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*. Montrer qu'elles sont semblables dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*.*

Solution : *Par hypothèse, il existe une matrice* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $B = PAP^{-1}$*. Notons* $P = P_1 + iP_2$ *avec* $(P_1, P_2) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$*. Puisque* $BP = PA$*, on en tire que* $BP_1 + iBP_2 = P_1A + iP_2B$ *d'où en identifiant partie réelle et partie imaginaire de chaque coefficient,* $BP_1 = P_1A$ *et* $BP_2 = P_2B$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Posons* $Q = P_1 + \lambda P_2$*. On a* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*,* $BQ = QA$*. Il suffit donc de trouver un réel* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $Q = P_1 + \lambda P_2$ *soit une matrice inversible. Considérons le polynôme*

$$\pi(\lambda) = \det(P_1 + \lambda P_2)$$

Si l'on avait $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*,* $\pi(\lambda) = 0$*, le polynôme complexe* $\pi(\lambda)$ *serait nul et alors* $\pi(i) = 0$*, ce qui est faux puisque* P *est une matrice inversible dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*. Par conséquent, il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $Q = P_1 + \lambda P_2$ *soit une matrice inversible de* $GL_n(\mathbb{R})$ *et alors* $B = QAQ^{-1}$*.*

Exercice 26.45 ♡♡

On considère un système $(f_1, \dots, f_n)$ *de fonctions de* $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *qui est libre dans* $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. Montrer qu'il existe* n *réels* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *tels que la matrice* $A = ((f_i(x_j))) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *soit inversible.*

Solution : *Par récurrence. Si* $n = 1$*, le résultat est clair. Supposons la propriété vraie pour un système de* $n-1$ *fonctions. Puisque* $(f_1, \dots, f_{n-1})$ *est libre, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe* $n-1$ *réels* $(x_1, \dots, x_{n-1})$ *tels que la matrice* $A_{n-1} = ((f_i(x_j)))_{1 \leqslant i, j \leqslant n-1}$ *soit inversible. Par l'absurde, supposons que* $\forall x \in \mathbb{R}$*, la matrice*

$$A(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x) \end{pmatrix}$$

ne soit pas inversible. En développant $\det(A)$ *par rapport à la dernière colonne, on trouve alors que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_{1n} f_1(x) + \dots + \Delta_{nn} f_n(x) = 0$$

Mais comme $(f_1, \dots, f_n)$ *est libre, on aurait en particulier* $\Delta_{nn} = 0$*, mais* $\Delta_{nn} = \det(A_{n-1}) \neq 0$ *ce qui est absurde.*

Chapitre 27

Produit scalaire, groupe orthogonal

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour bien aborder ce chapitre

On va généraliser dans ce chapitre la notion de produit scalaire étudiée dans les chapitres 2 et 3 aux espaces vectoriels. Cela permettra d'étendre la notion de vecteurs orthogonaux et les notions afférentes (norme, base orthonormale, théorème de Pythagore, projections et symétries orthogonales...) à certains espaces vectoriels de fonctions ou de matrices par exemple. Un des prolongements importants de ce chapitre sera celui consacré aux séries de Fourier en seconde année et qui formera un magnifique exemple d'illustration de la puissance de l'algèbre mise au service de l'analyse.

Nous étudierons dans la seconde moitié de ce chapitre les endomorphismes d'un espace euclidien qui préservent le produit scalaire, ou autrement dit les isométries. Nous verrons que les isométries d'un espace euclidien E donné forment un groupe appelé groupe orthogonal et nous étudierons complètement ce groupe dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ et $E = \mathbb{R}^3$. Nous ferons le lien entre les matrices et ces endomorphismes remarquables et nous introduirons la notion de matrice orthogonale.

27.1 Définitions et règles de calcul

27.1.1 Produit scalaire

DÉFINITION 27.1 ♡♡♡ **produit scalaire**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *produit scalaire* sur E, une application : $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. φ est une *forme bilinéaire* : $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}2$
$$\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z)$$
$$\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(y, z)$$
2. φ est *symétrique* :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$
3. φ est *définie* :
$$\forall x \in E, \quad (\varphi(x, x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0)$$
4. φ est *positive* :
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0$$

Notation 27.1 On note $(x \mid y) = \varphi(x, y)$ le produit scalaire. En géométrie, on utilise également la notation $\overrightarrow{x} . \overrightarrow{y}$.

DÉFINITION 27.2 ♡♡♡ **Espace préhilbertien, Espace euclidien**
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un *espace préhilbertien réel*. Si de plus E est de dimension finie, on dit que E est un *espace euclidien*.

27.1.2 Norme

DÉFINITION 27.3 ♡♡♡ **Norme euclidienne associée à un produit scalaire**
On définit la *norme euclidienne* associée à un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}$$

Remarque 27.1 $\|\cdot\|$ est bien définie car $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire positive et donc pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, $(x \mid x) \geqslant 0$..

THÉORÈME 27.1 ♡ **Règles de calcul**
Pour tout vecteurs $x, y \in \mathrm{E}$, et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|\lambda.x\| = |\lambda|\ \|x\|$;
2. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\left(x \mid y\right) + \|y\|^2$;
3. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\left(x \mid y\right) + \|y\|^2$;
4. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (*égalité du parallélogramme*) ;
5. $\left(x \mid y\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (*identité de polarisation*).

Pour des vecteurs $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in \mathrm{E}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \left(x_i \mid y_j\right)$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j \left(x_i \mid x_j\right)$$

Démonstration *Soient $x, y \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique :*

1. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \mid x)} = |\lambda|\,\|x\|$.
2. $\|x+y\|^2 = \left(x+y \mid x+y\right) = (x \mid x) + 2\left(x \mid y\right) + \left(y \mid y\right) = \|x\|^2 + 2\left(x \mid y\right) + \|y\|^2$.
3. $\|x-y\|^2 = \left(x-y \mid x-y\right) = (x \mid x) - 2\left(x \mid y\right) + \left(y \mid y\right) = \|x\|^2 - 2\left(x \mid y\right) + \|y\|^2$;
4. *En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient l'égalité du parallélogramme.*
5. *Enfin, par soustraction de ces deux mêmes égalités, on obtient l'identité de polarisation.*

Les deux dernières formules sont aussi une conséquence de la bilinéarité du produit scalaire.

THÉORÈME 27.2 ♡♡♡ **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Pour tous vecteurs $x, y \in \mathrm{E}$, on a *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\boxed{\left|\left(x \mid y\right)\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$$

et on a égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires : $\left|\left(x \mid y\right)\right| = \|x\|\,\|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad y = \lambda x(\quad \text{ou} \quad x = \lambda y)$.

Démonstration *Soient $x, y \in \mathrm{E}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons :*

$$\mathrm{P}(\lambda) = \left(x + \lambda y \mid x + \lambda y\right)$$

D'après les règles de calcul précédentes, on obtient :

$$\mathrm{P}(\lambda) = \left(y \mid y\right)\lambda^2 + 2\left(x \mid y\right)\lambda + (x \mid x) = \left\|y\right\|^2 \lambda^2 + 2\lambda\left(x \mid y\right) + \|x\|^2$$

et P est un trinôme du second degré en λ. Par ailleurs $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(\lambda) \geqslant 0$. Donc P admet au plus une racine réel et son discriminant réduit est négatif ou nul, ce qui s'écrit : $\left(\left(x \mid y\right)\right)^2 - \left\|y\right\|^2 \|x\|^2 \leqslant 0$, c'est à dire $\left|\left(x \mid y\right)\right| \leqslant \|x\|\ \|y\|$.
Si x et y sont colinéaires, on vérifie facilement que $\left|\left(x \mid y\right)\right| = \|x\|\,\|y\|$. Réciproquement, si cette égalité est vraie, alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. On a donc : $\left(x + \lambda_0 y \mid x + \lambda_0 y\right) = 0$ ce qui n'est possible que si $x + \lambda_0 y = 0$ c'est à dire que si $x = \lambda_0 y$.

THÉORÈME 27.3 ♡♡♡ **Inégalité de Minkowski**
Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a *l'inégalité de Minkowski*

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

et on a égalité dans la majoration de droite si et seulement si les deux vecteurs x et y se trouvent sur une même demi-droite issue de l'origine : $\exists \lambda \geqslant 0 : \quad y = \lambda x$.

Démonstration *Soient $x, y \in E$.*

- *On applique les régles de calcul avec le produit scalaire 27.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz 27.2 :*

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

  On a donc : $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- *Si x et y se trouvent sur une même demi-droite issue de l'origine, on vérifie facilement que cette dernière inégalité est une égalité. Réciproquement, supposons que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors, en reprenant le calcul précédent, on obtient : $(x \mid y) = \|x\|\,\|y\|$ et on est dans le cas d'égalité de la la formule de Cauchy-Schwarz. Donc x et y sont colinéaires : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad y = \alpha x$. On injecte cette égalité dans celle de départ, on trouve : $(1+\alpha)\,x = \|x\| + \|\alpha x\|$ c'est à dire : $(1+\alpha)\,x = (1+|\alpha|)\,\|x\|$. Si le vecteur x est nul alors il en est de même de y et la propriété est prouvée. Si x est non nul alors : $\alpha = |\alpha|$ et α est bien positif.*
- *Par ailleurs :*

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$$

  et

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\|$$

  et comme $\|y-x\| = \|x-y\|$, on obtient : $\|x-y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$ et $\|x-y\| \geqslant \|y\| - \|x\|$, ce qui s'écrit aussi : $\|x-y\| \geqslant \Big|\|x\| - \|y\|\Big|$.

De manière plus générale :

DÉFINITION 27.4 ♡♡♡ **Norme**
On appelle norme sur E une application : $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0.$
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|.$
3. $\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*Inégalité triangulaire*).

PROPOSITION 27.4 ♡ **Norme associée au produit scalaire**
La norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée à un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur E est une norme sur E.

Démonstration *Les propriétés 2 et 3 ont déjà été prouvées dans les théorèmes 27.1 et 27.3. Démontrons la seconde. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$ alors $(x \mid x) = 0$ mais comme $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire définie, $x = 0$.*

Exemple 27.2 Quelques exemples de produits scalaires et leur norme associée (à retenir) :

- Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}n$: Si $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}n$,

$$(X \mid Y) = x_1 y_1 + \dots x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- Sur l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$, $f, g \in E$

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t) g(t)\, dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt}$$

- Sur l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques, $E = \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $f, g \in E$

$$\left(f \mid g\right) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt}$$

- Sur l'espace des matrices carrées $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$< A, B >= \mathrm{Tr}\,(A^t B)$$

$$\|A\| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^t A)}.$$

Voir l'exercice 25.18 page 989.

DÉFINITION 27.5 ♡ **Vecteur unitaire**
Soit x un vecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$. On dit que x est *unitaire* si et seulement si $\|x\| = 1$.

27.2 Orthogonalité

On considère dans ce paragraphe un espace préhilbertien réel $(E, (.\mid.))$.

DÉFINITION 27.6 ♡ **Vecteurs orthogonaux**
Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* lorsque $\left(x \mid y\right) = 0$.

THÉORÈME 27.5 ♡ **Identité de Pythagore**
Soient x et y deux vecteurs de E. Alors

$$\left(x \mid y\right) = 0 \Longleftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration *Utilisant la formule 27.1 :*

$$\left\|x + y\right\|^2 = \|x\|^2 + 2\left(x \mid y\right) + \left\|y\right\|^2,$$

et il vient immédiatement :

$$\left(x \mid y\right) = 0 \Longleftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

THÉORÈME 27.6 ♡ **Des vecteurs orthogonaux** 2 **à** 2 **forment un système libre**
Soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ un système de vecteurs non-nuls deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \left(x_i \mid x_j\right) = 0$$

Alors le système S est libre.

Démonstration *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Du fait de la bilinéarité du produit scalaire et que les vecteurs de ce système sont deux à deux orthogonaux :*

$$0 = \left(x_i \mid \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \left(x_i \mid x_j\right) = \alpha_i \left(x_i \mid x_i\right)$$

Comme $x_i \neq 0$, $\left(x_i \mid x_i\right) \neq 0$ et il vient que $\alpha_i = 0$. Cette égalité est vraie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On montre ainsi que le système S est libre.

DÉFINITION 27.7 ♡ **Sous-espaces orthogonaux**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont orthogonaux ssi

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad \left(x \mid y\right) = 0$$

DÉFINITION 27.8 ♡ **Orthogonal d'une partie**
Soit $A \subset E$ une partie de E. On définit l'orthogonal de A comme étant le sous-ensemble de E noté $A^\perp$ et donné par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$$

THÉORÈME 27.7 ♡ **Propriétés de l'orthogonal**
Soient $A, B \subset E$ deux parties de E.

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
3. $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$
4. $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$

Démonstration

1. *Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de* A *donc* $0 \in A^\perp$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in A^\perp$ *et* $a \in A$. *Alors :* $\left(\alpha x + \beta y \mid a\right) = \alpha (x \mid a) + \beta \left(y \mid a\right) = 0$ *donc* $\alpha x + \beta y \in A^\perp$. $A^\perp$ *est donc bien un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Supposons que* $A \subset B$. *Soit* $x \in B^\perp$. *Montrons que* $x \in A^\perp$. *Soit* $a \in A$. *Comme* $A \subset B$, $a \in B$ *et* $(x \mid a) = 0$. *Donc* $x \in A^\perp$.
3. *On a* $A \subset \text{Vect}(A)$ *donc d'après la propriété précédente :* $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$. *Réciproquement, si* $x \in A^\perp$ *et si* $y \in Vect(A)$ *montrons que* $\left(x \mid y\right) = 0$. *Il existe* $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *et* $a_1, \dots, a_n \in A$ *tels que :* $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. *Et :*

$$\left(x \mid y\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(x \mid a_i\right) = 0$$

   car $x \in A^\perp$. *Voilà qui termine la démonstration du troisième point.*
4. *Enfin, si* $a \in A$ *et si* $x \in A^\perp$ *alors il est clair que :* $(a \mid x) = 0$ *et donc :* $x \in \left(A^\perp\right)^\perp$ *ce qui prouve la dernière inclusion.*

27.3 Espaces euclidiens

On considère dans toute la suite de ce chapitre un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. On note n la dimension de E.

27.3.1 Bases orthogonales, orthonormales

DÉFINITION 27.9 ♡ **bases orthogonales, orthonormales**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On dit que e est une base

1. *orthogonale* si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est à dire si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \left(e_i \mid e_j\right) = 0.$$

2. *orthonormale* si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et unitaires, c'est à dire si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \left(e_i \mid e_j\right) = \delta_{ij}.$$

Remarque 27.2 Si on se donne un système $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien de dimension n alors d'après la proposition 27.6, ce système est libre. Comme il est libre de rang maximal c'est une base (orthogonale) de E.

Remarque 27.3 La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

THÉORÈME 27.8 ♡ **Calculs dans une base orthonormale**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale sont donnés par les produits scalaires :

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i) e_i}$$

2. Si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$, alors

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

3. Si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

Démonstration *Ces formules se prouvent facilement en utilisant les règles de calcul avec le produit scalaire 27.1 et le fait que :* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad \left(e_i \mid e_j\right) = \delta_{ij}$.

27.3.2 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

BIO 24 Erhard Schmidt, né le 13 janvier 1876 à Dorpat (Estonie), mort le 06 décembre 1959 à Berlin)

Mathématicien allemand. Il fait ses études, comme c'est souvent le cas à l'époque, dans différentes universités allemandes et les termine à Berlin. Il soutient sa thèse en 1905 sous la direction de David Hilbert. Elle porte sur les équations intégrales. Après avoir enseigné successivement dans les universités de Bonn, Zurich, Erlangen et Breslau, il est nommé en 1917 comme professeur à l'Université de Berlin où il occupe le poste laissé vacant par Schwarz. Dans les années 1930, il subit la montée du nazisme et alors que ses collègues juifs (Schur , von Mises) doivent quitter l'Université, il est sommé de prendre des résolutions contre les juifs ce dont. Il s'acquitte de cette tâche avec si peu de zèle que les nazis diront de lui à l'époque qu'« il ne comprend pas le problème juif »et qu'il ne sera pas critiqué par la suite.



Erhard Schmidt est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il a beaucoup contribué à la théorie des espaces de Hilbert que vous découvrirez en spé et a simplifié et généralisé un certain nombre de résultats d'Hilbert. C'est dans un article de 1907 sur les équations intégrales qu'il expose le procédé d'orthonormalisation. Notons que ce procédé avait été découvert au préalable par Laplace mais c'est Schmidt qui su en donner le premier un exposé clair.

THÉORÈME 27.9 ♡ **Théorème de Schmidt**

Soit E un espace euclidien de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. Alors il existe une *base orthonormale* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E vérifiant :

1. $\forall i \in [\![1,n]\!],\quad \varepsilon_i \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_i)$;
2. $\forall i \in [\![1,n]\!],\quad (e_i \mid \varepsilon_i) > 0$.

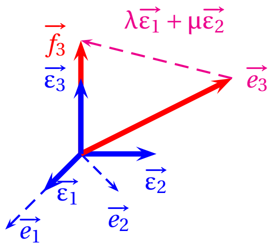


FIGURE 27.1 – Algorithme de Schmidt : redressement de e_3

Démonstration *On va mettre en place un algorithme permettant de construire la base* ε.

- *Au rang 1* *: Comme* e *est une base,* e_1 *est non nul et le vecteur* $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ *est unitaire et vérifie* $\mathcal{V}ect\,(e_1) = \mathcal{V}ect\,(\varepsilon_1)$ *ainsi que* $(e_1 \mid \varepsilon_1) = \|e_1\| > 0$.
- *Au rang* k *Soit* $k \in [\![1, n-1]\!]$. *Supposons les vecteurs* $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ *construits tels que :*

- La famille $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ est orthonormale.
- $\forall i\in[\![1,k]\!],\quad \varepsilon_i\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$;
- $\forall i\in[\![1,k]\!],\quad (e_i\mid\varepsilon_i)>0$.

- *Au rang $k+1$* Construisons un vecteur ε_{k+1} répondant au problème. Les conditions qu'il doit remplir (voir la figure 27.1) nous invitent à le chercher sous la forme $\varepsilon_{k+1}=\alpha_1\varepsilon_1+\dots+\alpha_k\varepsilon_k+e_{k+1}$ où : $\forall i\in[\![1,k]\!],\quad \alpha_i\in\mathbb{R}$. Pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, on a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}\varepsilon_i\perp\varepsilon_{k+1} &\iff (\varepsilon_i\mid\varepsilon_{k+1})=0\\ &\iff \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\left(\varepsilon_i\mid\varepsilon_j\right)+(\varepsilon_i\mid e_{k+1})=0\\ &\iff \alpha_i\|\varepsilon_i\|^2+(\varepsilon_i\mid e_{k+1})=0\\ &\iff \alpha_i=-(\varepsilon_i\mid e_{k+1})\end{aligned}$$

car $\|\varepsilon_i\|=1$. On considère alors le vecteur $\tilde\varepsilon_{k+1}$ donné par

$$\tilde\varepsilon_{k+1}=e_{k+1}-\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i\mid e_{k+1})\varepsilon_i.$$

et soit $\varepsilon_{k+1}=\dfrac{\tilde\varepsilon_{k+1}}{\|\tilde\varepsilon_{k+1}\|}$ Par construction, les vecteurs du système $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k+1})$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires. Cette famille est donc orthonormale. De plus, pour tout $i\in[\![1,k]\!],\quad \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$ et il est clair que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{k+1})=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k+1})$. Enfin, quitte à considérer $-\varepsilon_{k+1}$ plutôt que ε_{k+1}, on peut supposer que $(e_{k+1}\mid\varepsilon_{k+1})>0$.

- *Au rang n* En appliquant cet algorithme jusqu'au rang n, on construit la famille ε proposée.

Remarque 27.4 L'algorithme de construction de la base orthonormale est aussi important que l'énoncé du théorème.

Remarque 27.5 La matrice de passage de e vers ε est triangulaire supérieure.

PLAN 27.1 : **Pour orthonormaliser une famille de vecteurs**

On souhaite appliquer l'algorithme de Schmidt à la base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. Pour ce faire :

1. *On pose* $\varepsilon_1=\dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.
2. *On suppose $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k$ construits. On calcule le vecteur :* $\boxed{\tilde\varepsilon_{k+1}=e_{k+1}-\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i\mid e_{k+1})\varepsilon_i}$ *et on pose :* $\boxed{\varepsilon_{k+1}=\dfrac{\tilde\varepsilon_{k+1}}{\|\tilde\varepsilon_{k+1}\|}}$.
3. *Si $(e_{k+1}\mid\varepsilon_{k+1})<0$ alors on remplace ε_{k+1} par $-\varepsilon_{k+1}$.*

Remarque 27.6
- La troisième étape du procédé d'orthonormalisation est facultative. Si on ne l'effectue pas, la base construite est encore orthonormale.
- On peut aussi ne pas normaliser le vecteur $\tilde\varepsilon_i$ dans la deuxième étape de l'algorithme. Dans ce cas la base construire n'est pas orthonormale mais orthogonale et la formule donnant ε_{k+1} en fonction de e_{k+1}, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k$ est légérement changée (exercice !).

Remarque 27.7 La matrice de passage de e vers ε est triangulaire supérieure.

Exemple 27.3 Soit l'espace $\mathrm{E}=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $e_1=(2,0,0)$, $e_2=(1,1,1)$ et $e_3=(0,1,2)$. Construisons une base orthonormale à partir de $e=(e_1,e_2,e_3)$. D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt :

1. On pose $\boxed{\varepsilon_1=(1,0,0)}$.
2. On a $\tilde\varepsilon_2=e_2-(\varepsilon_1\mid e_2)\varepsilon_1=(0,1,1)$ donc $\boxed{\varepsilon_2=\dfrac{\sqrt2}{2}(1,0,0)}$.
3. De même $\tilde\varepsilon_3=e_3-(\varepsilon_1\mid e_3)\varepsilon_1-(\varepsilon_2\mid e_3)\varepsilon_2=\left(0,-\dfrac12,\dfrac12\right)$ donc $\boxed{\varepsilon_3=\dfrac{\sqrt2}{2}(0,-1,1)}$.

La famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base orthonormale de E.

MAPLE

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
> e1 := vector([1,0,0]);
                        e1 := [1, 0, 0]
> e2 := vector([1,1,1]);
                        e2 := [1, 1, 1]
> e3 := vector([0,1,2]);
                        e3 := [0, 1, 2]
> GramSchmidt([e1,e2,e3],normalized);
[           [   1  (1/2)  1  (1/2)]  [     1  (1/2)  1  (1/2)]]
[[1, 0, 0], [0, - 2     , - 2     ], [0, - - 2     , - 2     ]]
[           [   2        2        ]  [     2        2        ]]
```

27.3.3 Conséquences

COROLLAIRE 27.10 **Théorème de la base orthonormale incomplète**
Toute famille orthonormale $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ d'un espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ de dimension n $(p \leqslant n)$ peut être complétée par des vecteurs $\varepsilon_{p+1},\dots,\varepsilon_n$ de E en sorte que la famille $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ soit une base orthonormale de E.

Démonstration *En appliquant le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille orthonormale (et donc libre)* $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ *par des vecteurs* $e_{k+1},\dots,e_n$ *en une base* $e=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ *de* E*. On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette base , on peut construire des vecteurs* $\varepsilon_{k+1},\dots,\varepsilon_n$ *de* E *tels que la famille* $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ *soit orthonormale et tel que* $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k,e_{k+1},\dots,e_n)=E$*. Cette famille est donc libre et génératrice et forme une base orthonormale de* E*.*

COROLLAIRE 27.11 **Existence d'une base orthonormale**
Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède une base orthonormale.

Démonstration *Soit e une base de* E*. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette famille, on construit une famille orthonormale* ε *telle que* $\mathrm{Vect}(\varepsilon)=\mathrm{Vect}(e)=E$*. Cette famille est donc libre et génératrice. Elle forme une base orthonormale de* E*.*

THÉORÈME 27.12 ♡ **Propriétés de l'orthogonal en dimension finie**
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors

1. $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$
2. $\dim F^\perp = n-p$
3. $(F^\perp)^\perp = F$

Démonstration *Montrons que* F *et* $F^\perp$ *sont supplémentaires dans* E*.*

- *On a :* $F\cap F^\perp=\{0\}$*. En effet, si un vecteur x est à la fois dans* F *et dans l'orthognal de* F*, il vérifie :* $(x\mid x)=0$ *et donc* $x=0$*.*
- *Montrons maitenant que* $E=F+F^\perp$*. Comme* F *est de dimension p, par application du théorème précédent, on peut trouver une base orthonormale* $(e_1,\dots,e_p)$ *de* F*. Soit* $x\in E$ *et soit* $x'=\sum_{k=1}^{p}(x\mid e_k)\,e_k$*. On vérifie facilement que* $x'\in F$ *et que* $x-x'\in F^\perp$*. Donc* $x=x+(x-x')\in F+F^\perp$ *et on a bien* $E=F+F^\perp$*.*

Ainsi : $E=F\oplus F^\perp$*. D'après le théorème 24.17, on obtient :* $\dim F+\dim F^\perp=n$ *d'où vient la première égalité dans le théorème. Enfin, on a prouvé dans la proposition 27.7 que* $F\subset (F^\perp)^\perp$*. Mais comme* $\dim (F^\perp)^\perp = n-\dim F^\perp = n-(n-\dim F)=\dim F$*, on peut affirmer que :* $(F^\perp)^\perp=F$*.*

Remarque 27.8 Un sous-espace vectoriel F d'un espace E de dimension finie possède, en général, une infinité de supplémentaires. Si E est un espace euclidien, F n'admet qu'un et un seul supplémentaire orthogonal : $F^\perp$. Pour cette raison, on dira que $F^\perp$ est $\boxed{\text{le}}$ supplémentaire orthogonal de F dans E.

THÉORÈME 27.13 ♡♡♡ **Théorème de Riesz**
Soit E un espace euclidien et soit $f\in E^\star$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $z_f\in E$ tel que

$$\forall x\in E,\quad f(x)=(z_f\mid x)$$

Démonstration Pour tout $z \in E$, posons :

$$\varphi_z : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (z \mid x) \end{cases}.$$

Pour tout $z \in E$, φ_z est une forme linéaire. En effet, fixons $z \in E$: pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in E$: $\varphi_z(\alpha x + \beta y) = (z \mid \alpha x + \beta y) = \alpha (z \mid x) + \beta (z \mid y) = \alpha \varphi_z(x) + \beta \varphi_z(y)$. L'application Φ donnée par :

$$\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E^* \\ z & \longmapsto & \varphi_z \end{cases}$$

est alors bien définie. Montrons que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- *Φ est linéaire : si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$ alors $\Phi(\alpha x + \beta y) = \varphi_{\alpha x + \beta y} = (\alpha x + \beta y \mid \cdot) = \alpha (x \mid \cdot) + \beta (y \mid \cdot) = \alpha \varphi_x + \beta \varphi_y = \alpha \Phi(x) + \beta \Phi(y)$.*
- *Φ est injective : soit $x \in E$ tel que $\Phi(x) = 0$. Alors : $\forall y \in E$, $(x \mid y) = 0$, et en particulier $(x \mid x) = 0$ ce qui n'est possible, par définition du produit scalaire que si $x = 0$.*
- *Φ est surjective : comme $\dim E = \dim E^*$, d'après le théorème de caractérisation des isomorphismes 24.28, sachant que Φ est injective, il vient que Φ est aussi surjective.*

Toute forme linéaire $f \in E^*$ sur E est donc image d'un vecteur z de E par Φ. Posons $z_f = z$. On a alors : $f = \Phi(z_f) = (z_f \mid \cdot)$ et le théorème est prouvé.

Remarque 27.9 Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, si l'on considère un hyperplan H d'équation :

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Alors cet hyperplan est orthogonal au vecteur $n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: $H = \{n\}^\perp$.

27.4 Projecteurs et symétries orthogonaux

27.4.1 Projecteurs orthogonaux

DÉFINITION 27.10 ♡ **Projecteur orthogonal**
Soit $p \in L(E)$ un projecteur (c'est à dire une endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$). On dit que p est un *projecteur orthogonal* si et seulement si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont deux sous-espaces orthogonaux de E :

$$\forall x \in \operatorname{Ker} p,\ \forall y \in \operatorname{Im} p, \quad (x \mid y) = 0$$

Remarque 27.10
Soit p un projecteur orthogonal et soit $x \in E$. Alors $(p(x) \mid x - p(x)) = 0$. En effet $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} f^\perp$

ε,
Soit

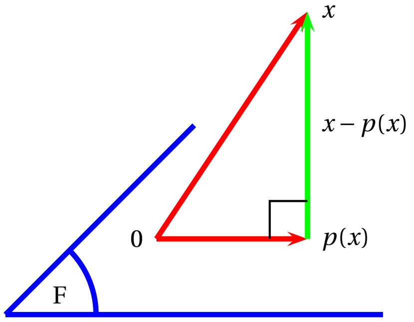


FIGURE 27.2 – Projecteur orthogonal

THÉORÈME 27.14 ♡ **Calcul du projeté orthogonal**
Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $x \in E$. On suppose que :

(H1) $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une base orthonormale de F

alors le projeté orthogonal $p(x)$ du vecteur x sur le sous-espace F vaut :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i).\varepsilon_i$$

Démonstration *D'après le théorème 27.8 appliqué à $p(x) \in \mathrm{F}$ et à la base orthonormale ε de F donnée :*

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{p} \left(p(x) \mid \varepsilon_i\right)\varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(x \mid \varepsilon_i\right)\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{p} \left(x - p(x) \mid \varepsilon_i\right)\varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(x \mid \varepsilon_i\right)\varepsilon_i \end{aligned}$$

car $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = \mathrm{F}^{\perp}$ et donc :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \left(x - p(x) \mid \varepsilon_i\right) = 0.$$

THÉORÈME 27.15 ♡ **Le projeté $p(x)$ réalise la meilleure approximation de x par des vecteurs de** F

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on définit :

$$d(x,\mathrm{F}) = \inf_{f\in\mathrm{F}} \|x - f\|$$

Alors :

1. $d(x,\mathrm{F})$ est bien défini ;
2. $d(x,\mathrm{F}) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F ;
3. Si $f \in \mathrm{F}$, $\|x - f\| \geqslant \|x - p(x)\|$ avec égalité si et seulement si $f = p(x)$.

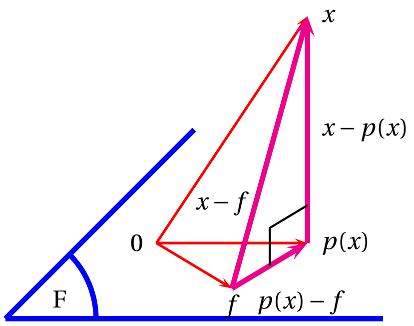


FIGURE 27.3 – Meilleure approximation

Démonstration

1. *Soit $x \in \mathrm{F}$. Notons $\mathscr{F} = \{\|x - f\| \mid f \in \mathrm{F}\}$. $\mathscr{F}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure et $d(x,\mathrm{F})$ est bien défini.*
2. *D'après le théorème de Pythagore 27.5, pour tout $f \in \mathrm{F}$:*

$$\|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \geqslant \|x - p(x)\|^2.$$

Donc $\|x - p(x)\|$ est un minorant de $\mathscr{F}$. Mais comme $p(x) \in \mathrm{F}$, $\|x - p(x)\| \in \mathscr{F}$ et est donc la borne inférieure de $\mathscr{F}$. Il vient alors : $d(x,\mathrm{F}) = \|x - p(x)\|$.

3. *On a de plus montré que si $f \in \mathrm{F}$, alors $\|x - f\| \geqslant \|x - p(x)\|$ et on a égalité si et seulement si $f = p(x)$.*

27.4.2 Symétries orthogonales, réflexions

DÉFINITION 27.11 ♡ **Symétrie orthogonale, réflexion**

Soit $s \in \mathrm{L(E)}$ une symétrie vectorielle (C'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}$).

- On dit que s est une symétrie orthogonale si et seulement si les deux sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(s+\mathrm{id})$ sont orthogonaux.
- On dit de plus que s est une *réflexion* si l'ensemble des vecteurs invariants de s, $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{id})$ est un hyperplan de E.

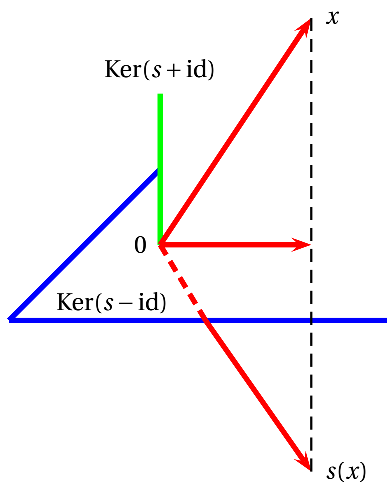


FIGURE 27.4 – Symétrie vectorielle orthogonale

27.5 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

27.5.1 Endomorphismes orthogonaux

On considère dans toute la suite un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(.\,|\,.)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. On note n la dimension de E.

DÉFINITION 27.12 ♡ **Endomorphismes orthogonaux**
Soit $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$. On dit que u est un *endomorphisme orthogonal* (ou *une isométrie*) si

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathrm{O}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

THÉORÈME 27.16 ♡ **Un endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire**
On a l'équivalence :

$$u \in \mathrm{O}(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \big(u(x) \mid u(y)\big) = \big(x \mid y\big)$$

Démonstration
$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que u est un endomorphisme orthogonal de* E*. D'après l'identité de polarisation 27.1, pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$:*

$$\begin{aligned}\big(u(x) \mid u(y)\big) &= \frac{1}{4}\Big(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) \\ &= \big(x \mid y\big)\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons que u préserve le produit scalaire alors :*

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x) \mid u(x))} = \sqrt{(x \mid x)} = \|x\|$$

et donc $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$

PROPOSITION 27.17 **Les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes**
Soit $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ un endomorphisme orthogonal de E alors u est un automorphisme de E et $u^{-1} \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$.

Démonstration *Soit $x \in \operatorname{Ker} u$ alors*

$$\|x\| = \|u(x)\| = 0$$

et d'après les propriétés de la norme 27.4, on peut affirmer que $x = 0$. Donc $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et u est injectif.

D'après la caractérisation des automorphismes d'un espace vectoriel **??***, u est un automorphisme de E. Enfin, considérons $x \in \mathrm{E}$ et notons $y = u(x)$. u étant un endomorphisme orthogonal de E, on a $\|x\| = \|y\|$. Donc, comme : $u^{-1}(y) = x$, il vient que : $\|u^{-1}(y)\| = \|x\| = \|y\|$ et u^{-1} est bien lui aussi un endomorphisme orthonal de E.*

THÉORÈME 27.18 ♡ **Groupe orthogonal**
$(\mathrm{O}(\mathrm{E}), \circ)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$. On l'appelle le *groupe orthogonal* de E.

Démonstration *$\mathrm{O}(\mathrm{E})$ est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{GL}(\mathrm{E})$ car il contient id_E. D'après le théorème 19.6, il suffit de prouver que pour tout $u, v \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$, $u \circ v^{-1} \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$. Mais d'après la proposition précédente, v^{-1} est aussi une isométrie de E et pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a :*

$$\left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \left\|u\left(v^{-1}(x)\right)\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\| = \|x\|$$

ce qui prouve que $u \circ v^{-1} \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$. $(\mathrm{O}(\mathrm{E}), \circ)$ est donc un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(\mathrm{E}), \circ)$.

PROPOSITION 27.19 **Une caractérisation pratique des automorphismes orthogonaux**
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. On a équivalence entre :

1. $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$
2. $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est encore une base orthonormale de E.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ *Si $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$, d'après la proposition 27.16, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:*

$$\left(u(e_i) \mid u(e_j)\right) = \left(e_i \mid e_j\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

ce qui prouve que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Si l'image par u de la base orthonormale $e = (e_1, \dots, e_n)$ est encore orthonomale alors pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathrm{E}$ et par bilinéarité du produit scalaire :*

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= (u(x) \mid u(x)) \\ &= \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} x_i x_j \left(u(e_i) \mid u(e_j)\right) \\ &= \sum_{i \in [\![1,n]\!]} x_i^2 \left(u(e_i) \mid u(e_i)\right) \\ &= \sum_{i \in [\![1,n]\!]} x_i^2 \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

Donc $u \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$.

27.5.2 Matrices orthogonales

DÉFINITION 27.13 ♡ **Matrices orthogonales**
On dit qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si :

$$^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$$

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Remarque 27.11 Une matrice orthogonale est inversible et

$$\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}$$

Ce qui montre qu'elle vérifie également

$$\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$$

THÉORÈME 27.20 ♡ **Caractérisation pratique des matrices orthogonales**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2, \quad p \neq q \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ip} a_{iq} = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$$

Démonstration *Ces formules sont une conséquence directe de la définition du produit matriciel et de l'égalité :* $A^t A = I_n$

THÉORÈME 27.21 ♡ **La matrice d'une isométrie dans une base orthonormale est orthogonale**
On considère une **base orthonormale** $e = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace euclidien E, et un endomorphisme $u \in L(E)$. Notons $A = \text{Mat}_e(u)$. On a équivalence entre :

1. u est un automorphisme orthogonal.
2. A est une matrice orthogonale.

Démonstration *Notons* $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. *Par bilinéarité du produit scalaire, il vient, pour tout* $i, j \in [\![1,n]\!]$ *:*

$$\left(u(e_i) \mid u\left(e_j\right)\right) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} \left(e_i \mid e_j\right) \quad (\star)$$

$\Rightarrow$ *Supposons que* $u \in L(E)$ *est une isométrie de* E. *Alors, comme les isométries conservent le produit scalaire, l'égalité* $(\star)$ *devient, pour tout* $i, j \in [\![1,n]\!]$ *:*

$$\delta_{i,j} = \left(e_i \mid e_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} \left(e_i \mid e_j\right)$$

et donc, d'après 27.20, A *est orthogonale.*

$\Leftarrow$ *Réciproquement, si* A *est orthogonale alors en utilisant à nouveau* $(\star)$ *et la proposition 27.20, on trouve, pour tout* $i, j \in [\![1,n]\!]$ *:*

$$\left(u(e_i) \mid u\left(e_j\right)\right) \quad = \quad \left(e_i \mid e_j\right)$$

et donc la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ *est une base orthonormale de* E. *On applique alors la proposition 27.19, et il vient que* u *est un automorphisme orthogonal.*

Remarque 27.12 Le résultat précédent est faux si la base ε n'est pas orthonormale.

THÉORÈME 27.22 ♡ **Caractérisation des matrices de passage entre bases orthonormales**
Soit e une base orthonormale de E et f une base. Soit $P = P_{e\to f}$ la matrice de passage entre ces deux bases. On a équivalence entre :

1. f est une base orthonormale.
2. P est une matrice orthogonale.

Démonstration

$\Rightarrow$ *Supposons que* f *est orthonormale. Soit* u *l'endomorphisme de* E *donné par :*

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u\left(e_i\right) = f_i.$$

D'après la proposition 27.19, u *est un automorphisme orthogonal de* E. *Mais* $P_{e\to f} = \mathfrak{M}_e\left(f\right) = \mathfrak{M}_e(u)$ *et donc, d'après la dernière proposition,* $P = P_{e\to f}$ *est orthogonale.*

$\Rightarrow$ *De la même façon, si* P *est orthogonale, alors il en est de même de* u *et comme l'image d'une base orthonormale par un élément de* O(E) *est orthonormale,* f *est orthonormale.*

27.6 Etude du groupe orthogonal

Remarque 27.13 Soit $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Comme $A.{}^tA = I_n$ et que $\det(A) = \det\left({}^tA\right)$, il vient que : $\det(A) = \pm 1$.

DÉFINITION 27.14 ♡ **Groupe spécial orthogonal** $O_n^+(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A) = \pm 1$. On définit les sous-ensembles de $O_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = +1\} \quad O_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$$

Les matrices de $O_n^+(\mathbb{R})$ sont appelées *spéciales orthogonales*. L'ensemble $O_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(O_n(\mathbb{R}), \times)$.

Démonstration *Soient $A, B \in O_n^+(\mathbb{R})$ alors $A.B^{-1}$ est encore élement de $O_n(\mathbb{R})$ car ce dernier est un groupe. De plus, avec les propriétés du déterminant $\det\left(A.B^{-1}\right) = 1$ donc $A.B^{-1} \in O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^+(\mathbb{R})$ est bien un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.*

PROPOSITION 27.23 **Critère pour reconnaître les matrices de** $O_n^+(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A \in O_n(\mathbb{R})$. Soit un coefficient $a_{ij} \neq 0$ de la matrice A et Δ_{ij} le cofacteur associé.

1. Si $A \in O_n^+(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = \Delta_{ij}$;
2. si $A \in O_n^-(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = -\Delta_{ij}$.

Démonstration *Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in O_n(\mathbb{R})$. L'inverse de la matrice A est ${}^tA$. Cet inverse est aussi donné par ${}^t(\mathrm{Com}A)/\det A$ où $\mathrm{Com}A$ est la comatrice de A (voir section 25.10.2 page 979). Alors par identification des coefficients dans ces deux matrices, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a : $a_{ij} = \Delta_{ij}/\det A$. Si $A \in O_n^+(\mathbb{R})$, alors $\det A = 1$ et $a_{ij} = \Delta_{ij}$. Si $A \in O_n^-(\mathbb{R})$, alors $\det A = -1$ et $a_{ij} = -\Delta_{ij}$.*

Remarque 27.14 En pratique, pour vérifier qu'une matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$ est spéciale orthogonale, on calcule le déterminant $\Delta_{11} = m_{11}$ et on compare son signe avec celui du coefficient a_{11}.

DÉFINITION 27.15 ♡ **Isométries directes et indirectes**
Soit une isométrie $u \in O(E)$ d'un espace euclidien orienté E. Alors $\det(u) = \pm 1$. On dit que u est une *isométrie directe* de E lorsque $\det(u) = +1$, et une isométrie indirecte lorsque $\det(u) = -1$. On note E l'ensemble des isométries directes, et $O^-(E)$ l'ensemble des isométries indirectes de E. L'ensemble E est un sous-groupe du groupe orthogonal $(O(E), \circ)$.

Remarque 27.15 Si ε est une base orthonormale de E, et si U est la matrice de l'isométrie u dans la base ε, alors

$$\underbrace{\left(u \text{ isométrie directe }\right)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\left(U \in O_n^+(\mathbb{R})\right)}_{(ii)}$$

Remarque 27.16 Dans un espace vectoriel euclidien orienté, une isométrie directe transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe. (et une isométrie directe transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée indirecte.)

Remarque 27.17 Dans un espace vectoriel euclidien orienté, tout endomorphisme qui transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe est une isométrie directe.

27.6.1 Etude du groupe orthogonal en dimension 2.

On considère dans tout ce paragraphe un espace euclidien orienté E de dimension 2.

THÉORÈME 27.24 ♡ **Etude de** $O_2^+(\mathbb{R})$

1. Les matrices de $O_2^+(\mathbb{R})$ sont de la forme
$$R_\theta = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$
où $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $$\boxed{R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}}$$
3. $$\boxed{R_\theta^{-1} = R_{-\theta}}$$
4. L'application
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (O_2^+(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$$
est un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. *On a les équivalences :*

$$\begin{aligned} & A \in O_2^+(\mathbb{R}) \\ \iff & A^t A = 1 \quad \text{et} \quad \det A = 1 \\ \iff & \begin{cases} a^2+b^2 &= 1 \\ c^2+d^2 &= 1 \\ ac+bd &= 0 \\ ad-bc &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Des deux premières équations, on tire l'existence de θ *et* $\theta' \in \mathbb{R}$ *tels que :* $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = \cos\theta'$ *et* $d = \sin\theta'$. *La troisième équation devient alors :* $\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' = 1$ *c'est à dire* $\sin(\theta' - \theta) = 1$ *et la quatrième devient :* $\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0$ *c'est à dire* $\cos(\theta' - \theta) = 0$. *Il vient alors :* $\theta' = \theta + \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *et on obtient :*

$$A \in O_2^+(\mathbb{R}) \iff A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}$$

2. *Cette formule est une conséquence directe du premier point et des formules d'addition pour le cosinus et le sinus.*
3. *D'après la formule précédente, on a :* $R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2$ *donc* $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
4. *Soient* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\varphi(\theta + \theta') = R_{\theta+\theta'} = R_\theta \times R_{\theta'} = \varphi(\theta)\varphi(\theta')$$

donc φ *est bien un morphisme de groupe. On a par ailleurs les équivalences :*

$$\varphi(R_\theta) = I_2 \iff \begin{cases} \cos\theta &= 1 \\ \sin\theta &= 0 \end{cases} \iff \theta = 0\ [2\pi]$$

donc $\operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

THÉORÈME 27.25 ♡ Rotations vectorielles
Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in E$ une isométrie directe. Alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que pour *toute base orthonormale directe* ε de E,

$$\mathrm{Mat}_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On dit que u est la rotation vectorielle d'angle θ et on note $u = r_\theta$.

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème précédent et du théorème 27.21.*

THÉORÈME 27.26 ♡ Angle de deux vecteurs
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $(U, V) \in E^2$ deux vecteurs non-nuls. On définit

$$u = \frac{U}{\|U\|}, \quad v = \frac{V}{\|V\|}$$

Alors il existe une unique rotation $r \in O_2^+(\mathbb{R})$ telle que $v = r(u)$. Si θ est l'angle de la rotation $\theta \in [0, 2\pi[$, on note

$$\widehat{(U, V)} = \theta$$

l'angle orienté des vecteurs (U, V). On a alors :

$$\boxed{\operatorname{Det}(U, V) = \|U\|\,\|V\|\sin\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{(U \mid V) = \|U\|\,\|V\|\cos\theta}$$

Démonstration

Existence *On applique le procédé d'ortonormalisation de Schmidt 27.9 et on complète les vecteurs* u *et* v *en deux bases* $e = (u, u')$ *et* $e' = (v, v')$ *orthonormales directes du plan. D'après la proposition 27.22, la matrice de passage* A *de* e *à* e' *est orthogonale. Comme les bases sont directes, on a de plus* $\det A = 1$. *En résumé :* $A \in O_2^+(\mathbb{R})$. *Considérons alors l'endomorphisme* φ *de* E *tel que* $\mathrm{Mat}_{e' \leftarrow e}(u) = A$. *D'après la propriété précédente,* φ *est une rotation du plan. On a de plus* $\varphi(u) = v$.

Unicité *Si* φ *et* φ' *sont deux rotations du plan envoyant* u *sur* v, *alors, avec les notations précédentes,* $\varphi(u) = \varphi'(u)$ *et comme les rotations conservent le produit scalaire et l'orientation,* $\varphi(u') = \varphi'(u')$. *Comme les endomorphismes* φ *et* φ' *sont égaux sur les vecteurs d'une base de* E, *ils sont égaux sur* E : $\varphi = \varphi'$.

Enfin, si $\theta \in [0,2\pi[$ *est l'angle de la rotation* φ*, dans la base* e *les coordonnées de* u *sont* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *et celles de* $v = \varphi(u)$ *:*

$$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

On vérifie alors facilement que

$$\mathrm{Det}(U,V) = \|U\|\,\|V\|\,\mathrm{Det}(u,v) = \|U\|\,\|V\|\sin\theta$$

et que

$$(U \mid V) = \|U\|\,\|V\|\,(u \mid v) = \|U\|\,\|V\|\cos\theta.$$

Remarque 27.18 On utilise ces formules pour déterminer l'angle entre deux vecteurs. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel, quel est l'angle entre les vecteurs $U = (1,1)$ et $V = (0,1)$?

THÉORÈME 27.27 ♡ **Etude de $O_2^-(\mathbb{R})$**

Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \in O_2^-(\mathbb{R})$. L'application

$$\Delta : \begin{cases} O_2^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O_2^-(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AP \end{cases}$$

est une bijection. Toute matrice de $O_2^-(\mathbb{R})$ est de la forme

$$B = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

Démonstration *Laissée en exercice au lecteur.*

THÉORÈME 27.28 ♡ **Isométries indirectes et réflexion**

Une isométrie indirecte d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, c'est à dire une *réflexion*.

Démonstration *La matrice d'une isométrie indirecte* u *dans une base orthonormale* $e = (e_1, e_2)$ *étant de la forme* $A = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ *et cette matrice vérifiant* $A^2 = A$*, on en déduit que* u *est une symétrie par rapport à* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$ *parallèlement à* $\mathrm{Im}\,(u + \mathrm{id})$*. Déterminons* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$*. On a, dans la base* e *:*

$$\begin{aligned}
& U = xe_1 + ye_2 \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}) \\
\iff & \begin{cases}(\cos\alpha - 1)\,x + \sin\alpha\; y = 0\\ \sin\alpha\; x - (\cos\alpha + 1)\,y = 0\end{cases} \\
\iff & \begin{cases}\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\;x - \cos\frac{\alpha}{2}\;y\right) = 0\\ \cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\;x - \cos\frac{\alpha}{2}\;y\right) = 0\end{cases} \\
\iff & \sin\frac{\alpha}{2}\;x - \cos\frac{\alpha}{2}\;y = 0
\end{aligned}$$

car on ne peut avoir en même temps $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$ *et* $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$*. On en déduit que* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$ *est la droite vectorielle d'équation polaire* $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

On montrerait de même que $U = xe_1 + ye_2 \in \mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id})$ *si et seulement si* $\sin\frac{\alpha}{2}\;x + \cos\frac{\alpha}{2}\;y = 0$*. Les deux droites vectorielles :* $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$ *et* $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id})$ *sont bien orthogonales et* u *est une réflexion du plan.*

THÉORÈME 27.29 ♡ **Décomposition des rotations**

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

1. Toute rotation de E s'écrit comme composée de deux réflexions.
2. Réciproquement, tout produit de réflexion est une rotation.

Démonstration

1. *Soit* r *une rotation et* s *une réflexion de* E*. Posons* $t = s^{-1} \circ r$*.* t *est une isométrie de* E *et* $\det t = \det\left(s^{-1}\right)\det u = -1$*, donc* t *est indirecte. En vertu de la proposition 27.28,* t *est une réflexion et* $r = s \circ t$ *est bien la composée de deux réflexions.*
2. *Réciproquement, si* s *et* t *sont deux réflexions de* E *alors* $s \circ t$ *est une isométrie directe de* E*, c'est à dire une rotation.*

Remarque 27.19 Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E_2)$. Toute isométrie de E_2 s'écrit comme un produit de 1 ou 2 réflexions.

27.6.2 Etude du groupe orthogonal en dimension 3

On considère dans tout ce paragraphe un espace euclidien orienté E de dimension 3.

Produit mixte, produit vectoriel

PROPOSITION 27.30 **Déterminant dans une base orthonormée directe**
Soit u, v, w trois vecteurs. Le déterminant de ces trois vecteurs exprimé dans une base orthonormée directe ne dépend pas de la base orthonormée directe chosie.

Démonstration *On utilise la formule de changement de base :*

$$\det_{e'}(x_1,\dots,x_n) = \det_{e'}(e_1,\dots,e_n) \times \det_{e}(x_1,\dots,x_n)$$

La matrice de passage $P_{e'\leftarrow e}$ de e vers e' est donc aussi la matrice dans la base e de l'endomorphisme qui transforme e en e', donc qui transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe. C'est donc une matrice de $O^+(E)$. Elle a donc un déterminant égal à 1. Donc $\det_{e'}(x_1,\dots,x_n) = \det_e(x_1,\dots,x_n)$. Ce qu'il fallait vérifier.

La propriété précédente permet d'énoncer la

DÉFINITION 27.16 ♡ **Produit mixte**
Soit u, v, w trois vecteurs. On appelle produit mixte de (u, v, w) le déterminant de (u, v, w) exprimé dans une base orthonormée directe. On le note $[u, v, w]$.

Les propriétés du determinant permettent d'énoncer :

PROPOSITION 27.31
Soit $(u, v, w) \in E^3$.

1. $[u, v, w] \neq 0$ si et seulement si (u, v, w) est une base de E.
2. $[u, v, w] = -[v, u, w]$.
3. $w \mapsto [u, v, w]$ est une forme linéaire.

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que $\forall w \in E$, $[u, v, w] = (x \mid w)$. D'où la définition :

DÉFINITION 27.17 ♡ **Produit vectoriel**
Soit u et v deux vecteurs. On appelle produit vectoriel de u et v l'unique vecteur noté $u \wedge v$ vérifiant $\forall w \in E$, $[u, v, w] = (u \wedge v \mid w)$.

Les propriétés du produit mixte permettent d'établir

PROPOSITION 27.32
Soit $(u, v, w) \in E^3$.

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ et $u \wedge u = 0$.
2. $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$.
3. $u \wedge v$ si et seulement si (u, v) est liée.

ainsi que

PROPOSITION 27.33
Soit (i, j, k) une base orthonormée *directe* de E. on a
- $i \wedge j = k, \quad j \wedge k = i, \quad k \wedge i = j,$

et si $u(x_1, y_1, z_1)$ et $v(x_2, y_2, z_2)$, alors $u \wedge v(L, M, N)$ avec

$$L = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad M = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad N = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Sous-espaces stables

LEMME 27.34
Soit u une isométrie de E. Il existe un vecteur non nul $\varepsilon \in E$ tel que soit $u(\varepsilon) = \varepsilon$, soit $u(\varepsilon) = -\varepsilon$.

Démonstration *Intéressons nous au polynôme* $P(X) = \det(u - X\mathrm{id}) = 0$ *et montrons que* 1 *ou* -1 *est une de ses racines.* P *est un polynôme à coefficients réels de degré* 3 *et de coefficient du terme dominant* -1. *Il vérifie donc* $\lim_{X\to-\infty} P = +\infty$ *et* $\lim_{X\to+\infty} P = -\infty$. P *est de plus continue sur* $\mathbb{R}$. *D'après le théorème des valeurs intermédiaires,* P *admet une racine réelle* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On a alors* $\det(u - \alpha\mathrm{id}) = 0$ *et* $\mathrm{Ker}(u - \alpha\mathrm{id})$ *n'est pas réduit au vecteur nul. Il existe donc un vecteur non nul* $\varepsilon \in E$ *tel que* $u(\varepsilon) = \alpha\varepsilon$. *Mais* u *étant une isométrie, il vient :* $\|u(\varepsilon)\| = |\alpha|\,\|\varepsilon\| = \|\varepsilon\|$ *et donc* $\alpha = \pm 1$. *On a ainsi prouvé l'existence d'un vecteur* $\varepsilon \in E$ *tel que* $u(\varepsilon) = \varepsilon$ *ou* $u(\varepsilon) = -\varepsilon$.

LEMME 27.35
Soit u une isométrie de E et soit $\varepsilon \in E$ un vecteur non nul tel que $u(\varepsilon) = \pm\varepsilon$. Considérons $D = \mathrm{V}ect(\varepsilon)$ et soit H un supplémentaire orthogonale à D. Alors :

1. H est un plan vectoriel.
2. $u(H) \subset H$.
3. La restriction du produit scalaire de E à H est un produit scalaire sur H et pour ce produit scalaire, $u_{|H}$ est une isométrie de H.

Démonstration

1. *Comme* $\dim E = 3$, *que* $\dim D = 1$ *et que* H *et* D *sont supplémentaires dans* E, *il est clair que* $\dim H = 2$.
2. u *étant une isométrie, elle préserve le produit scalaire et si* $x \in H$ *alors*
$$(u(x) \mid \varepsilon) = \pm(u(x) \mid u(\varepsilon)) = \pm(x \mid \varepsilon) = 0$$
car H *et* D *sont des sous-espaces orthogonaux et* $u(H) \subset H$.
3. *Il est clair que la restriction du produit scalaire de* E *à* H *est un produit scalaire sur* H. *Notons* $(\cdot \mid \cdot)_{|H}$ *ce produit scalaire sur* H. *Pour tout* $x, y \in H$, *on a :*
$$\left(u_{|H}(x) \mid u_{|H}(y)\right)_{|H} = \left(u(x) \mid u(y)\right) = \left(x \mid y\right) = \left(x \mid y\right)_{|H}$$
et u *est bien une isométrie de* H.

Application 27.4 Avec les notations des deux lemmes précédents, considérons $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|}$. On fixe ainsi une orientation de D et on a encore $u(\varepsilon_3) = \pm\varepsilon_3$. Le vecteur ε_3 induit une orientation du plan H. Considérons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormale directe de H. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale directe de l'espace E. Comme $u_{|H}$ est une isométrie de H, d'après le travail effectué dans le paragraphe 27.6.1, on a deux possibilités pour $u_{|H}$:

- soit c'une réflexion de H par rapport à la droite vectorielle $D_1 = \mathrm{Ker}\left(u_{|H} - \mathrm{id}_H\right) \subset H$ dont un suplémentaire orhogonal dans H est donné par $D_2 = \mathrm{Im}\left(u_{|H} - \mathrm{id}_H\right) \subset H$. On peut prendre dans ce cas pour ε_1 un vecteur unitaire qui engendre D_1 et pour ε_2 un vecteur unitaire qui engendre D_2 en sorte que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit directe.
- soit c'est une rotation de H d'angle $\theta \in \mathbb{R}$

On notera A la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace vectoriel de E des vecteurs invariants par u.

1. Cas 1 : $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$ et $u_{|H}$ est une rotation A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
où $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de la rotation $u_{|H}$ du plan orienté H. On dit que u est une rotation d'angle θ et d'axe orienté D. Si $\theta \neq 0\,[\pi]$, on a : $E(1) = D$ et sinon $u = \mathrm{id}$ et $E(1) = E$.
2. Cas 2 : $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$ et $u_{|H}$ est une réflexion Avec les vecteurs ε_2 et ε_3 précédemment construits, on a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
u est alors une réflexion par rapport au plan $\mathrm{V}ect(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. De plus $E(1) = \mathrm{V}ect(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.
3. Cas 3 : $u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$ et $u_{|H}$ est une rotation
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et u est la composée de la reflexion par rapport au plan $\mathrm{V}ect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et d'une rotation. Dans ce cas $E(1) = \{0\}$

4. Cas 4 : $u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$ et $u_{|H}$ est une réflexion Comme dans le second cas, quitte à bien choisir les vecteurs ε_1 et ε_2, la matrice A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

u est alors une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$. Remarquons que u est aussi une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et d'angle π. Comme dans le premier cas, $E(1) = D$.

Remarque 27.20 Au regard des 4 formes précédentes pour la matrice A, u est une isométrie directe dans les cas 1 et 4 et indirecte dans les cas 2 et 3.

Isométries directes

THÉORÈME 27.36 ♡ **Isométries directes en dimension 3 : rotations vectorielles**
Soit une isométrie directe $u \in E_3$. On note $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous espace vectoriel formé des vecteurs invariants par u. On a montré que :

1. Si $u \neq \mathrm{id}_E$, $E(1)$ est une droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$ où ε_3 est un vecteur de norme 1 ;
2. Pour toute base orthonormée directe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ (le troisième vecteur ε_3 dirigeant l'axe et fixé), la matrice de u dans la base ε s'écrit :

$$\boxed{Mat_e(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On dit que u est la *rotation* d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$ et d'angle θ.

Remarque 27.21 L'angle de la rotation dépend du choix du vecteur d. Si l'on choisit $d' = -d$ pour diriger l'axe, l'angle θ est transformé en son opposé.

Remarque 27.22 Ne pas confondre l'angle θ de la rotation avec l'angle entre les vecteurs x et $r(x)$!

PROPOSITION 27.37 **Détermination de l'angle d'une rotation**
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, r une rotation et ε un vecteur unitaire qui dirige l'axe de cette rotation. Ce vecteur ε définit une orientation du plan $H = \mathrm{Vect}\, d^{\perp}$ et donc de l'angle θ de r. Soit $x \in H$:

$$\boxed{r(x) = \cos\theta . x + \sin\theta . \varepsilon \wedge x}$$

Démonstration *Si $x = 0$ le résultat est évident. Supposons que $x \neq 0$. On peut, sans perdre en généralité, supposer de plus que x est unitaire. Posons $y = \varepsilon \wedge x$. y est un vecteur orthogonal à ε et est donc élément de H. La famille (x, y, ε) forme une base orthonormale directe de E et la matrice de r dans cette base est*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de x par r est donc le vecteur :

$$r(x) = \cos\theta . x + \sin\theta . y = \cos\theta . x + \sin\theta . \varepsilon \wedge x.$$

Remarque 27.23 Cette proposition donne un moyen pratique de déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation :

PLAN 27.2 : Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation

1. *Déterminer l'axe D de la rotation : c'est l'ensemble des vecteurs invariants.*
2. *Chercher un vecteur $d \in D$ unitaire. Il définit une orientation sur le plan $P = \mathrm{Vect}(d)^{\perp}$.*
3. *Déterminer un vecteur $\varepsilon_1 \in P$, vérifiant $(d \mid \varepsilon_1) = 0$.*
4. *Poser $\varepsilon_2 = d \wedge \varepsilon_1$. Alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$ est une base orthonormale directe de l'espace.*
5. *Calculer $r(\varepsilon_1)$ et le décomposer sur ε_1 et ε_2 :*

$$r(\varepsilon_1) = \cos\theta\varepsilon_1 + \sin\theta\varepsilon_2$$

On en tire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et donc l'angle de la rotation.

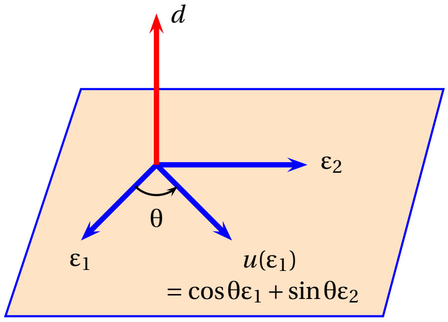


FIGURE 27.5 – Détermination de l'angle θ d'une rotation

Remarque 27.24 On peut également utiliser les remarques suivantes pour étudier une rotation u donnée par sa matrice A dans une base quelconque :

PLAN 27.3 : pour étudier une rotation u donnée par sa matrice A

1. *On vérifie que* $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ *en montrant que la matrice* A *est orthogonale et en montrant que* $\det(A) = +1$ *(il suffit de comparer* a_{11} *et* Δ_{11}*).*
2. *On sait que dans toute base orthogonale directe de la forme* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$,

$$\mathrm{M}at_\varepsilon(u) = \mathrm{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors les matrices A *et* U *sont semblables et par conséquent,* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(U)$ *d'où l'on tire*

$$\boxed{2\cos\theta + 1 = \mathrm{Tr}(A)}$$

3. *On détermine l'axe de la rotation en cherchant les vecteurs invariants :* $\mathrm{Vect}(d)$ *où* d *est un vecteur unitaire. Cela revient à résoudre un système homogène* 3×3.
4. *On détermine un vecteur* ε_1 *unitaire orthogonal à* d *et on calcule*

$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big)$$

Comme ce produit mixte est indépendant de la base orthonormale directe choisie pour le calculer, en introduisant (sans le calculer) ε_2 *tel que* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$ *soit une base orthonormale directe,*

$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta$$

5. *On obtient donc :*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}}, \quad \boxed{\sin\theta = \mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big)}$$

et l'on en tire l'angle θ *de la rotation.*

Exemple 27.5 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère l'endomorphisme de matrice

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On va reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques. On flaire une isométrie : On calcule la norme du premier vecteur colonne $\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}(1+2\sqrt{2}+2+2+2-2\sqrt{2}+1) = 1$. Itou pour le deuxième $\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}(2+4+2) = 1$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs colonnes égale $\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}(-\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}) = 0$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs colonnes a pour coordonnées $\frac{2-2(\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ $\frac{-(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{-2+\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} =$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad \frac{2(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2+2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}.$$

On retrouve bien le troisième vecteur colonne. On a donc une isométrie positive. C'est donc une rotation d'angle θ. Comme la trace égale $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1 = 1+2\cos\theta$. Donc $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour trouver l'axe, on résout le système $\begin{cases} (1+\sqrt{2})\,x - \sqrt{2}\,y + (\sqrt{2}-1)\,z = 2\sqrt{2}\,x \\ \sqrt{2}\,x + 2\,y - \sqrt{2}\,z = 2\sqrt{2}\,y \\ (\sqrt{2}-1)\,x + \sqrt{2}\,y + (1+\sqrt{2})\,z = 2\sqrt{2}\,z \end{cases}$

Soit $\begin{cases} (1-\sqrt{2})\,x - \sqrt{2}\,y + (\sqrt{2}-1)\,z = 0 \\ \sqrt{2}\,x + (2-2\sqrt{2})\,y - \sqrt{2}\,z = 0 \\ (\sqrt{2}-1)\,x + \sqrt{2}\,y + (1-\sqrt{2})\,z = 0 \end{cases}$. On prend, par exemple, $d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Le vecteur $j(0,1,0)$ lui est orthogonal et appartient donc au plan de rotation. Son image est $r(j) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Enfin $j \wedge r(j) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}d$. Donc $\sin\theta d = \frac{\sqrt{2}}{2}d$.

Remarque 27.25 Il n'est pas compliqué de comprendre pourquoi c'est $\sin\theta d$ qui est un invariant de la rotation (et pas $\sin\theta$). Le vecteur d oriente le plan de rotation. Pour faire simple, il donne la direction du "haut". En changeant d en $-d$, on intervertit le "haut" et le "bas", on regarde le plan de l'autre côté, et donc on voit la rotation tourner "dans l'autre sens". Ceci a pour effet de changer $\sin\theta$ en son opposé.

Résumons l'étude précédente :

THÉORÈME 27.38 ♡ **Classification des isométries en dimension 3**
Soit un endomorphisme orthogonal $u \in O(E)$. On note $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace formé des vecteurs invariants. Selon la dimension de $E(1)$, on a la classification suivante :

$\dim E(1)$	$\det(u)$	$u \in$	Nature de u
3	1	$O^+(E)$	id
2	-1	$O^-(E)$	Réflexion s_H
1	1	$O^+(E)$	Rotation autour d'un axe r (dont les demi-tours)
0	-1	$O^-(E)$	Composée d'une rotation et d'une réflexion

Dans le dernier cas, $u = r \circ s_H$, où le plan H invariant par la réflexion est orthogonal à l'axe de la rotation r.

Remarque 27.26 Si $A \in O_3^-(\mathbb{R})$, alors $\det(-A) = -\det(A) = 1$. Donc la matrice $-A$ est spéciale orthogonale. On se ramène à l'étude précédente. On peut également résumer la classification des isométries de E_3 de la façon suivante :

- Isométries directes : ce sont des rotations d'axe une droite vectorielle. (Les symétries orthogonales par rapport à une droite sont des rotations d'angle π, et on convient que id_E est une rotation d'angle 0) ;
- Isométries indirectes : elles sont de la forme $-r_{D,\theta}$ où $r_{D,\theta}$ est une rotation par rapport à une droite vectorielle D (avec l'identité). On a alors $u = -r_{D,\theta} = r_{D,\theta+\pi} \circ s_{D^\perp}$.

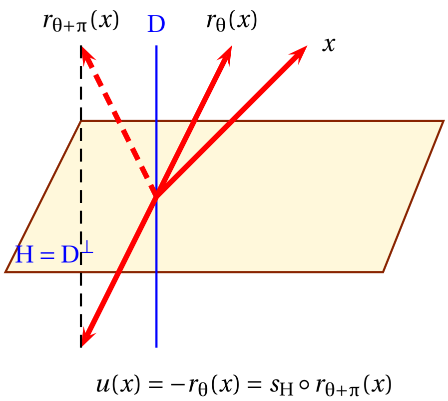


FIGURE 27.6 – Isométrie indirecte avec $E(1) = \{0_E\}$

Remarque 27.27 On montre qu'une rotation vectorielle $r_{D,\theta}$ s'écrit comme produit de deux réflexions s_H et $s_{H'}$ avec $H \cap H' = D$. Alors toute isométrie de E_3 se décompose comme un produit de réflexions. Par conséquent, les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E_3)$.

En résumé

Les différentes définitions données dans ce chapitre doivent être connues avec précision. Il ne faut être préçis et rigoureux quand on vérifie qu'une forme bilinéaire est un produit scalaire et il ne faut bien entendu omettre aucun axiome. Il faut de plus parfaitement connaître :

1. Les inégalités de Schwarz et de Minkowski.
2. Le théorème de Pythagore.
3. La notion de base orthogo(nor)nale et Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
4. Les notions de sous-espaces orthogonaux, de projections et de symétries orthogonales.

27.7 Exercices

27.7.1 Espaces préhilbertiens réels

Exercice 27.1 ♡

Soit l'espace $E = \mathbb{R}_1[X]$ *muni du produit scalaire*

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

1. *Montrer que* $(. \mid .)$ *définit un produit scalaire sur* E
2. *Trouver une base orthonormale* ε *de* E
3. *Trouver les coordonnées du vecteur* $P = X + 1$ *dans* ε.

Solution :

1. *On vérifie facilement les axiomes définissant un produit scalaire. De plus, si* $P = aX + b$ *et si* $Q = a'X + b'$ *alors* $(P \mid Q) = aa'' + ab' + a'b$.
2. *On note* $e_0 = 1$ *et* $e_1 = X$ *les deux vecteurs de la base canonique. On redresse cette base à l'aide du procédé de Schmidt. Il vient tout d'abord* $\varepsilon_0 = e_0$ *puis on calcule* $\tilde{\varepsilon}_1 = e_1 - (\varepsilon_0 \mid e_1)\,\varepsilon_0 = X - 1/2$ *et* $\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1 / \|\tilde{\varepsilon}_1\| = 2/5\,(2X - 1)$.
3. *Comme la base* ε *est orthonormale, on calcule* $(P \mid \varepsilon_0) = 1$ *et* $(P \mid \varepsilon_1) = 1/15$ *donc les coordonnées de* P *dans* ε *sont* $(1, 1/15)$.

Exercice 27.2 ♡

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ *muni de son produit scalaire usuel, on considère les vecteurs* $v_1 = (0,3,1,-1)$ *et* $v_2 = (1,2,-1,1)$. *Soit* F *le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs. Déterminer un système d'équations de* $F^\perp$ *puis une bon de* $F^\perp$.

Solution : *Soit un vecteur* $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. *Alors*

$$X \in F^\perp \iff (X \mid v_1) = (X \mid v_2) = 0 \iff (3y + z - t = 0 \text{ et } x + 2y - z + t = 0)$$

On a donc trouvé un système d'équations de $F^\perp$. *On calcule ensuite une base de* $F^\perp$: $e_1 = (0,0,1,1)$, $e_2 = (-5,1,0,3)$. *On redresse cette base en utilisant l'algorithme de Schmidt :* $\varepsilon_1 = (1/\sqrt{2})(0,0,1,1)$, $\varepsilon_2 = (\sqrt{2}/\sqrt{61})(-5,1,3/2,3/2)$ *et alors* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *est une bon de* $F^\perp$.

Exercice 27.3 ♡

Soit E *un espace préhilbertien réel, et* $B = (e_1, \dots, e_n)$ *un système de vecteurs de* E *de norme* 1 *tels que :*

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)\,.e_k$$

1. *Montrer que si* $i \neq j$, *alors* $\left(e_i \mid e_j\right) = 0$
2. *Montrer que* B *est une base orthonormale de* E.

Solution : *Soit* $i \in [1, n]$. *On écrit*

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} (e_i \mid e_k)\,.e_k \implies (e_i \mid e_i) = \sum_{k \neq i} (e_i \mid e_k)^2 + (e_i \mid e_i)^2 \implies \sum_{k \neq i} (e_i \mid e_k)^2 = 0$$

(car $\|e_i\| = 1$ *). Donc* $\forall i \neq k$, $(e_i \mid e_k) = 0$. *Le système est donc formé de vecteurs orthogonaux deux à deux. Il est donc libre d'après le cours. Par définition, il est générateur, c'est donc une base orthonormale.*

Exercice 27.4 ♡

Soient E *un espace préhilbertien réel et une application* $f : E \mapsto E$ *vérifiant* $f(0) = 0$ *et*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

1. *Montrer que* $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(x)\| = \|x\|$ *et* $\big(f(x) \mid f(y)\big) = \big(x \mid y\big)$.
2. *Calculer* $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2$ *et en déduire que l'application* f *est linéaire.*

Solution :

1. *Faire $x=0$ et utiliser l'identité de polarisation.*
2. *En développant et en utilisant 1. , on trouve que cette quantité est nulle.*

Exercice 27.5 ♡

Pour deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ on définit :

$$(A \mid B) = \operatorname{Tr}(A^tB)$$

1. *Montrer que $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques forment deux sous-espaces orthogonaux pour ce produit scalaire.*
3. *Déterminer la projection orthogonale d'une matrice A sur l'espace des matrices antisymétriques.*

Solution :

1. *Si $A = ((a_{ij}))$ et $B = ((b_{ij}))$, on calcule*
$$(A \mid B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$
Donc $(A \mid A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2$. On en déduit que $(. \mid .)$ est positive et définie. La bilinéarité et la symétrie ne posent pas de problèmes.
2. $(A \mid B) = \operatorname{Tr}(A^tB) = \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}({}^t(A^tB)) = \operatorname{Tr}(B^tA) = \operatorname{Tr}({}^tAB) = -\operatorname{Tr}(AB)$ *et on en tire que $(A \mid B) = 0$. Par conséquent, les sous-espaces formés des matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonaux :*
$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$
3. *On reprend la décomposition d'une matrice quelconque en une somme d'une matrice antisymétrique et d'une matrice symétrique vue en cours :*
$$A = \frac{1}{2}(A - {}^tA) + \frac{1}{2}(A + {}^tA)$$
Alors le projeté orthogonal de la matrice A est la composante antisymétrique : $p(A) = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$.

Exercice 27.6 ♡

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$(\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}), {}^tXMX = 0) \Longleftrightarrow ({}^tM = -M)$$

Solution : *Transposer, et calculer ${}^t(X+Y)M(X+Y)$.*

Exercice 27.7 ♡

Soit E un espace euclidien et $S = (e_1, \dots, e_n)$ un système de vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E \quad \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)^2 = \|x\|^2$$

Montrer que S est une base de E.

Solution : *Soit $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$. On a $\sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)^2 = \|x\|^2$. Comme tous les $(x \mid e_k)$ sont nuls, on a $\|x\|^2 = 0$ et donc $x = 0$. Donc $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{0\}$ et donc $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. S est donc une famille génératrice de E.*
D'autre part, soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On a $\sum_{k=1}^{n} (e_i \mid e_k)^2 = \|e_i\|^2$, donc $\sum_{k\neq i} (e_i \mid e_k)^2 = 0$, donc pour $k \neq i$, $(e_i \mid e_k)^2 = 0$. S est donc orthogonale. A fortiori elle est libre.

Exercice 27.8 ♡

Soit E un espace euclidien, et F, G deux sev de E. Montrer que

1. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

2. $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$
3. $E = F\oplus G \iff E = F^\perp \oplus G^\perp$

Solution :

1. *Soit* $x\in (F+G)^\perp$. *On a* $\forall y\in F, \forall z\in G, (x, y+z) = 0$. *En particulier pour* $z=0$, *ce qui donne* $x\in F^\perp$ *et pour* $y=0$, *ce qui donne* $x\in G^\perp$. *Donc* $x\in F^\perp\cap G^\perp$. *On a donc* $(F+G)^\perp\subset F^\perp\cap G^\perp$.
   Dans l'autre sens, Soit $x\in F^\perp\cap G^\perp$. *Soit* $(x,y)\in F\times G$. *Comme* $x\in F^\perp$, *on a* $(x,y)=0$, *comme* $x\in G^\perp$, *on a* $(x,z)=0$. *En additionnant on a, grâce à la linéarité par rapport à la deuxième variable,* $(x,y+z)=0$. *Donc* $x\in (F+G)^\perp$. *On a donc* $F^\perp\cap G^\perp\subset (F+G)^\perp$.
2. *On pose* $F' = F^\perp$ *et* $G' = G^\perp$. *D'après la propriété précédente, on a* $(F'+G')^\perp = F'^\perp\cap G'^\perp$. *Or* $F'^\perp = F$ *et* $G'^\perp = G$. *Donc* $(F'+G')^\perp = F\cap G$. *En prenant l'orthogonal de cette égalité :* $F'+G' = (F\cap G)^\perp$, *soit* $F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp$.
3. *Supposons* $E = F\oplus G$. *D'après la première question, en écrivant* $E = F+G$, *on a* $F^\perp\cap G^\perp = (F+G)^\perp = E^\perp = \{0\}$.
   D'après la deuxième question, en écrivant $(F\cap G) = \{0\}$, $F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp = \{0\}^\perp = E$.
   Dans l'autre sens, on applique l'implication précédente pour $F' = F^\perp$ *et* $G' = G^\perp$.

Exercice 27.9 ♡

Soit φ *une forme linéaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une matrice* $B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\quad \varphi(A) = \operatorname{Tr}(BA)$$

Solution : *On sait que la forme bilinéaire définie pour tout* $A, B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *par* $(A,B)\mapsto (A\mid B) = \operatorname{Tr}\left(A\,{}^tB\right) = \operatorname{Tr}\left({}^tBA\right)$ *est un produit scalaire. Soit* φ *une forme linéaire sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. *D'après le théorème de Riesz, il existe* $\tilde{B}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *tel que* $\forall A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\quad \varphi(A) = \operatorname{Tr}({}^t\tilde{B}A)$. *Il existe donc bien un matrice* $B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant la propriété indiquée, il s'agit de* $B = {}^t\tilde{B}$.

Exercice 27.10 ♡♡

Soit $\|\bullet\|$ *une norme euclidienne sur* E.

1. *(Re)démontrer l'égalité de la médiane :*
   $\forall x, y\in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.
2. *En déduire que* $\forall x,y,z\in E, \|x+y+z\|^2 + \|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2 = \|y+z\|^2+\|z+x\|^2+\|x+y\|^2$

Solution : *On a* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x.y + \|y\|^2$
et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2x.y + \|y\|^2$, *d'où*
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$. *(1)*
Soit $x,y,z\in E$, *On applique (1) pour* $x+y$ *et* z *:* $\|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2 = 2\|x+y\|^2 + 2\|z\|^2$
De même, en appliquant (1) pour $y+z$ *et* x, $\|x+y+z\|^2 + \|-x+y+z\|^2 = 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2$
De même, en appliquant (1) pour $z+x$ *et* y $\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 = 2\|z+x\|^2 + 2\|y\|^2$
On additionne les six égalités membre à membre,
$3\|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2 + \|-x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2+2\|z\|^2+2\|x+y\|^2+2\|y+z\|^2+2\|z+x\|^2$ *(2)*

De même, en appliquant (1) pour $x-y$ *et* z *:* $\|x-y+z\|^2 + \|x-y-z\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|z\|^2$.
De même, en appliquant (1) pour $y-z$ *et* x *:* $\|x+y-z\|^2 + \|-x+y-z\|^2 = 2\|y-z\|^2 + 2\|x\|^2$.
De même, en appliquant (1) pour $z-x$ *et* y *:* $\|-x+y+z\|^2 + \|-x-y+z\|^2 = 2\|z-x\|^2 + 2\|y\|^2$.
On additionne les six égalités membre à membre, en remarquant que
$\|x+y-z\|^2 = \|-x-y+z\|^2$ *, que*
$\|x-y-z\|^2 = \|-x+y+z\|^2$ *et que*
$\|x-y+z\|^2 = \|-x+y-z\|^2$*, on obtient,*
$2\|x+y-z\|^2 + 2\|-x+y+z\|^2 + 2\|x-y+z\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2+2\|z\|^2+2\|x-y\|^2+2\|y-z\|^2+2\|z-x\|^2$
Soit
$\|x+y-z\|^2 + \|-x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+\|x-y\|^2+\|y-z\|^2+\|z-x\|^2$
Soit, en reportant dans (2)
$3\|x+y+z\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+\|x-y\|^2+\|y-z\|^2+\|z-x\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2+2\|z\|^2+2\|x+y\|^2+2\|y+z\|^2+2\|z+x\|^2$
Soit
$3\|x+y+z\|^2 + \|x-y\|^2+\|y-z\|^2+\|z-x\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+2\|x+y\|^2+2\|y+z\|^2+2\|z+x\|^2$
En additionnant $\|x+y\|^2+\|y+z\|^2+\|z+x\|^2$ *à chaque membre :*
$3\|x+y+z\|^2+\|x-y\|^2+\|x+y\|^2+\|y-z\|^2+\|y+z\|^2+\|z-x\|^2+\|z+x\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+3\|x+y\|^2+3\|y+z\|^2+3\|z+x\|^2$
En appliquant trois fois l'égalité (1) dans le membre de gauche :

$3\|x+y+z\|^2+4\|x\|^2+4\|y\|^2+4\|z\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+\|z\|^2+3\|x+y\|^2+3\|y+z\|^2+3\|z+x\|^2$
Soit $3\|x+y+z\|^2+3\|x\|^2+3\|y\|^2+3\|z\|^2=3\|x+y\|^2+3\|y+z\|^2+3\|z+x\|^2$.
D'où le résultat en divisant par 3.

Exercice 27.11 ♡♡

Soit un espace préhilbertien réel E *et deux vecteurs* $x, y \in \mathrm{E}$.

1. *Développer l'expression*
$$\left\| \|y\|^2.x-(x\mid y).y\right\|^2$$
2. *Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que le cas d'égalité.*

Solution : *En développant, on trouve*

$$\|y\|^4\|x\|^2-2(x\mid y)^2\|y\|^2+(x\mid y)^2\|y\|^2 \geqslant 0$$

Donc si $y\neq 0$, *en divisant par* $\|y\|^2$, *on retrouve Cauchy-Schwarz :*

$$(x\mid y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$$

avec le cas d'égalité qui correspond à $\|y\|^2x=(x\mid y)\,y$, *ce qui implique que* (x,y) *est un système lié.*

Exercice 27.12 ♡♡

Soit E *un espace préhilbertien réel et* $f,g:\mathrm{E}\mapsto\mathrm{E}$ *deux applications telles que :*

$$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2 \quad \big(x\mid f(y)\big)=\big(g(x)\mid y\big)$$

Montrer que f *et* g *sont linéaires.*

Solution : *Soit* $x,x',y\in\mathrm{E},\lambda,\mu\in\mathbb{R}^2$, *on a* $\big(g(\lambda x+\mu x')\mid y\big)=\big(\lambda x+\mu x'\mid f(y)\big)=\lambda\big(x\mid f(y)\big)+\mu\big(x'\mid f(y)\big)=\lambda\big(g(x)\mid y\big)+\mu\big(g(x')\mid y\big)=\big(\lambda g(x)+\mu g(x')\mid y\big)$. *On en déduit donc que* $\big(g(\lambda x+\mu x')-(\lambda g(x)+\mu g(x'))\mid y\big)$ *ceci pour tout* $y\in\mathrm{E}$. *Donc* $g(\lambda x+\mu x')-(\lambda g(x)+\mu g(x'))$ *est orthogonal à tout l'espace* E, *c'est donc le vecteur nul, ceci pour tous* $x,x'\in\mathrm{E},\lambda,\mu\in\mathbb{R}^2$. *C'est bien dire que* g *est linéaire. Idem pour* f.

Exercice 27.13 ♡♡

1. *Soit* E *un espace euclidien et* $f\in\mathrm{L(E)}$ *tel que*
$$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2 \quad (x\mid y)=0 \implies \big(f(x)\mid f(y)\big)=0$$
Montrer qu'il existe $\alpha>0$ *tel que*
$$\forall x,y\in\mathrm{E} \quad \big(f(x)\mid f(y)\big)=\alpha(x\mid y)$$
2. *Si* $f\in\mathrm{GL(E)}$ *vérifie :*
$$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2 \text{ non-nuls} \frac{\big(f(x)\mid f(y)\big)}{\|f(x)\|\,\|f(y)\|}=\frac{(x\mid y)}{\|x\|\,\|y\|}$$
montrer qu'il existe $\alpha>0$ *tel que :*
$$\forall x\in\mathrm{E},\quad \|f(x)\|=\alpha\|x\|$$

Solution : *Soit* u *et* v *deux vecteurs unitaires. On a* $(u+v\mid u-v)=\|u\|^2-\|v\|^2=0$. *On en déduit que* $\big(f(u+v)\mid f(u-v)\big)=0$ *et donc* $\|f(u)\|^2=\|f(v)\|^2$. *Donc tous les vecteurs unitaires* u *ont des images qui ont la même norme. Appelons* β *cette norme commune. Soit* $x\neq 0$, *on pose* $u=\dfrac{x}{\|x\|}$ *on a* $\|u\|=1$, *donc* $\beta=\|f(u)\|=\left\|f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\dfrac{1}{\|x\|}\|f(x)\|$. *D'où* $\|f(x)\|=\beta\|x\|$ *égalité qui reste vraie pour* $x=0$. *Avec la formule de polarisation, on en déduit que* $\big(f(x)\mid f(y)\big)=\dfrac{1}{2}\big(\|f(x+y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\big)=\dfrac{1}{2}\big(\beta^2\|x+y\|^2-\beta^2\|x\|^2-\beta^2\|y\|^2\big)=\beta^2(x\mid y)$. *D'où le résultat en prenant* $\alpha=\sqrt{\beta}$.

Exercice 27.14 ♡♡

Sur l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2, $\mathrm{E}=\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, *on définit*

$$(\mathrm{P}\mid\mathrm{Q})=\mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1)+\mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0)+\mathrm{P}(-1)\mathrm{Q}(-1)$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire, et trouver une base orthogonale pour ce produit scalaire.

Solution : *La seule difficulté consiste à montrer que* $(.\,|\,.)$ *est défini. Si un polynôme* $P \in \mathbb{R}_2[X]$ *vérifie* $(P\,|\,P) = 0$*, alors* $P(1) = P(0) = P(-1) = 0$*, et donc le polynôme* P *admet trois racines distinctes. Comme* $\deg(P) \leqslant 2$, $P = 0$*. Pour trouver une base orthonormale, on utilise l'algorithme de Schmidt en redressant la base canonique* $(1, X, X^2)$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$*. On calcule* $\|1\| = \sqrt{3}$ *et donc* $\varepsilon_1 = 1/\sqrt{3}$*. Ensuite, on cherche* f_2 *sous la forme* $f_2 = X - \lambda\varepsilon_1$ *avec la condition* $(\varepsilon_1 \mid f_2) = 0$*. On trouve que* $\lambda = (X \mid \varepsilon_1) = 1 + 0 - 1 = 0$*, d'où* $f_2 = X$ *et puisque* $\|X\| = \sqrt{2}$*,* $\varepsilon_2 = X/\sqrt{2}$*. Ensuite, on cherche* $f_3 = X^2 - \lambda\varepsilon_1 - \mu\varepsilon_2$ *avec les conditions* $\lambda = (X^2 \mid \varepsilon_1) = 2/\sqrt{3}$ *et* $\mu = (X^2 \mid \varepsilon_2) = 0$ *d'où* $f_2 = X^2 - 2/3$*. En normalisant, on trouve* $\varepsilon_3 = (\sqrt{3}/\sqrt{2})(X^2 - 2/3)$.

Exercice 27.15 ♡♡

Soit $(.\,|\,.)$ *un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^n$*,* e *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* A *la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique.*

1. *Lorsque* $n = 2$*, montrer que* $\operatorname{Tr}(A) > 0$ *et* $\det(A) > 0$.
2. *Lorsque* $n \geqslant 3$*, montrer que* $\operatorname{Tr}(A) > 0$ *et* $\det(A) > 0$.
3. *Montrer que* $\forall p \geqslant 2$, A^p *est une matrice symétrique définie positive (et donc qu'elle définit également un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^n$*). On distinguera les cas* p *pair et impair.*

Solution :

1. $A = \begin{pmatrix} (e_1 \mid e_1) & (e_1 \mid e_2) \\ (e_2 \mid e_1) & (e_2 \mid e_2) \end{pmatrix}$*. Par conséquent*

$$\operatorname{Tr}(A) = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 > 0 \qquad \det(A) = \|e_1\|^2\|e_2\|^2 - (e_1 \mid e_2)^2 > 0$$

   En effet, par Cauchy-Schwarz on obtient $\det(A) \geqslant 0$ *et si* $\det(A) = 0$*, les vecteurs* e_1, e_2 *seraient liés ce qui est faux.*

2. *Utilisons le théorème de Schmidt : il existe une base* ε *orthonormale. Alors la matrice du produit scalaire dans cette base vaut* I_n*. D'après les formules de changement de bases pour les matrices de produits scalaires, en notant la matrice de passage* $P = P_{\varepsilon \mapsto e}$*, on a*

$$A = {}^tPI_nP = {}^tPP$$

   et alors $\det(A) = \det(P)^2 > 0$ *(car* P *est inversible). D'autre part,*

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 > 0$$

3. *La matrice* A^n *est symétrique et inversible : si* $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ *vérifie* $AX = 0$*, alors* ${}^tXAX = 0$ *et donc* $X = 0$ *puisque* A *est définie. Donc* $\det(A^n) = \det(A)^n \neq 0$ *et donc* A^n *est aussi inversible.*

   (a) $p = 2k$ *: Soit* $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

$$\alpha = {}^tXA^{2k}X = {}^t(A^kX)I_n(A^kX)$$

   et donc puisque $(A^kX) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ *et que* I_n *est définie positive,* $\alpha = 0$*. De plus, si* ${}^tXA^{2k}X = 0$*, il vient alors que* $A^kX = 0$ *et puisque on a vu que* A^k *était inversible,* $X = 0$*. Donc* A^{2k} *est définie positive.*

   (b) $p = 2k + 1$ *: soit* $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

$$\alpha = {}^tXA^{2k+1}X = {}^t(A^kX)A(A^kX)$$

   et par le même raisonnement, puisque A *est définie positive, on trouve que* $\alpha \geqslant 0$ *donc que* A^{2k+1} *est positive et que si* ${}^tXA^{2k+1}X = 0$*, alors* $A^kX = 0$ *et que* $X = 0$ *(car* A^k *est inversible). Donc* A^{2k+1} *est également définie.*

Exercice 27.16 ♡♡

Dans un espace euclidien de dimension n*, on dit qu'une famille* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de vecteurs normés est* μ*-presque orthogonale* $(\mu > 0)$ *si et seulement si pour tous réels* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*, on a*

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|^2 \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2$$

1. *Montrer que la famille* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une base orthonormale si et seulement si c'est une suite* 1*-presque orthogonale.*
2. *Montrer qu'une famille* μ*-presque orthogonale est libre.*

Solution :

a. *Si* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est une base orthonormale, alors on a* $\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n (a_i)^2$ *et donc* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est* 1*-presque orthogonale.*

Dans l'autre sens, on suppose que $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est* 1*-presque orthogonale. On a donc* $\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n (a_i)^2$*. En écrivant* $4(x,y) = \|x_i + x_j\|^2 - \|x_i - x_j\|^2 = 1^2 + 1^2 - (1^2 + (-1)^2) = 0$*. Cette famille est donc orthogonale.*

b. *On considère une combinaison linéaire nulle des* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: $\sum_{i=1}^n a_i = 0$*. On en déduit que* $\sum_{i=1}^n (a_i)^2 \leqslant \mu \left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|^2 = 0$*, donc* $\forall i \in \{1,\dots,n\}, a_i = 0$*. La famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est donc libre.*

Exercice 27.17 ♡♡

Dans un espace euclidien E*, montrez qu'il existe une base* $e = (e_1,\dots,e_n)$ *formée de vecteurs unitaires vérifiant :*

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2,\quad i \neq j \implies \|e_i - e_j\| = 1$$

Solution : *On remarque que* $1 = \|e_i - e_j\|^2 = 1 + 1 - 2(e_i \mid e_j)$*, donc on doit avoir nécessairement* $(e_i \mid e_j) = \frac{1}{2}$ *pour* $i \neq j$*.*
On considère une base orthonormale $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$*. On cherche les* e_i *sous la forme* $be_i + \sum_{j\neq i} ae_j$*. Pour* $i \neq j$*, on a* $(e_i \mid e_j) = (n-2)a^2 + 2ab$ *et* $\|e_i\|^2 = (n-1)a^2 + b^2$*. On cherche donc à résoudre en nombres réels* $\begin{cases} (n-2)a^2 + 2ab = \frac{1}{2} \\ (n-1)a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$
Par soustraction on en déduit $b^2 + a^2 - 2ab = \frac{1}{2}$*, donc on peut prendre par exemple* $b = a + \frac{\sqrt{2}}{2}$*, puis* $na^2 + a\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1$ *donc on peut prendre* $a = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{2n+2}}{2}$ *et* $a = \dfrac{\sqrt{2n+2}}{2}$*. Reste à vérifier que ces nombres conviennent.*

Exercice 27.18 ♡♡

Soit E *un espace euclidien, et* $x_1, x_n \in E$*,* $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$*. Montrer que*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)$$

Solution : *On développe :*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j (x_i \mid x_j) \leqslant \sum_{i,j=1}^n |\alpha_i\alpha_j| \left|(x_i \mid x_j)\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^n |\alpha_i\alpha_j| \|x_i\| \|x_j\|,$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Maintenant, soit $S = \{1,\dots,n\}^2$*, on a* $\sum_{i,j=1}^n |\alpha_i\alpha_j| \|x_i\|\|x_j\| = \sum_{\sigma\in S} u_\sigma v_\sigma$ *en posant, pour* $\sigma = (i,j) \in S$*,* $u_\sigma = |\alpha_i| \|x_j\|$ *et* $v_\sigma = |\alpha_j| \|x_i\|$*. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette fois dans* $\mathbb{R}^{n^2}$*, on a* $\sum_{\sigma\in S} u_\sigma v_\sigma \leqslant \left(\sum_{\sigma\in S} u_\sigma^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\sigma\in S} v_\sigma^2\right)^{1/2}$*. Or* $\sum_{\sigma\in S} u_\sigma^2 = \sum_{\sigma\in S} v_\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_i|^2 \|x_j\|^2$*. D'où l'inégalité demandée.*

Exercice 27.19 ♡♡

Soit Φ *une injection de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^*$*. Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)}{k^2} = +\infty.$$

Solution : *On commence par écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*
$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\Phi(k)}}{k} \frac{1}{\sqrt{\Phi(k)}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)}{k^2}\right)^{1/2} \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\Phi(k)}\right)^{1/2}$*. Or* $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\Phi(k)} \leqslant \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$*. En effet les* $\Phi(k), 1 \leqslant k \leqslant n$ *sont plus grands que les* $p, 1 \leqslant p \leqslant n$*. On en déduit* $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(k)}{k^2}\right)^{1/2} \times \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}\right)^{1/2}$*, après simplification par* $\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}\right)^{1/2}$ *et en élevant*

au carré, on obtient le résultat.
La suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(k)}{k^2}$ *est croissante. De plus, comme* $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$*, on en déduit :*
$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$. *D'où le résultat.*

Exercice 27.20 ♡♡

Soit $a_1, \dots, a_m$ m *nombres réels strictement positifs. Démontrer que*

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} n a_n^2}{\left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)^2} > \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Solution : *D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{m} a_n \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{m} n a_n^2 \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}.$$

Ensuite

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^m \frac{dx}{x} \leqslant 1 + \int_1^m \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= 1 + 2\left(\sqrt{m} - 1\right) = 2\sqrt{m} - 1 < 2\sqrt{m}.$$

Exercice 27.21 ♡♡♡

Soit f *une fonction* $[0;1] \to \mathbb{R}$ *continue,* $n > 0$ *un entier naturel fixé tel que* $\int_0^1 (1-x^n) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *Montrer que :*

$$(2n+2)\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Solution : *Sur* $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *on définit un produit scalaire par* $\left(f \mid g\right) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
On veut donc montrer que, si f *satisfait* $\left(1-x^n \mid f\right) = 0$*, alors* $(2n+2)\left(1 \mid f\right)^2 \leqslant \left(f \mid f\right)$.
On note $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}(1, x^n)$. *Si* f *appartient à* $\mathrm{V}^\perp$*, alors le résultat est immédiat. Si* f *appartient à* V*, alors* $f(x) = a + bx^n$.
La condition $\left(1 \mid f\right) = 0$ *se traduit par* $\int_0^1 (1-x^n)(a+bx^n)\,\mathrm{d}x = 0$*, soit* $a + \frac{b}{n+1} - \frac{a}{n+1} - \frac{b}{2n+1} = 0$ *donc* $a\frac{n}{n+1} = b\frac{n+1-2n-1}{(n+1)(2n+1)}$
d'où $b = -(2n+1)a$.
Sous cette condition, $(2n+2)\left(1 \mid f\right)^2 = (2n+2)\left(a - \frac{(2n+1)a}{n+1}\right)^2 = \frac{2a^2 n}{n+1}((n+1)-(2n+1))^2 = \frac{2a^2n^2}{n+1}$ *et*
$\left(f \mid f\right) = a^2\left(1 - 2\frac{(2n+1)}{n+1} + (2n+1)\right) = \frac{a^2}{n+1}((2n+2)(n+1) - 2(2n+1)) = \frac{2a^2n^2}{n+1}$. *Là encore l'inégalité* $(2n+2)\left(1 \mid f\right)^2 \leqslant \left(f \mid f\right)$ *est vérifiée.*
Maintenant $\mathrm{E} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^\perp$*, donc si* f *vérifie* $\left(1-x^n \mid f\right) = 0$*, alors* $f = g + h$ *avec* $g \in \mathrm{V}$ *et* $h \in \mathrm{V}^\perp$*. On a encore* $\left(1 \mid f\right) = \left(1 \mid g\right) + (1 \mid h) = \left(1 \mid g\right)$ *puisque* $h \in \mathrm{V}^\perp$.
Donc $(2n+2)\left(1 \mid f\right)^2 = (2n+2)\left(1 \mid g\right)^2 \leqslant \left(g \mid g\right) \leqslant \left(g \mid g\right) + (h \mid h) \leqslant \left(f \mid f\right)$ *d'après la relation de Pythagore.*

27.7.2 Projections orthogonales

Exercice 27.22 ♡

Trouver le réel a *qui minimise* $\int_1^2 (\ln x - ax)^2\,\mathrm{d}x$.

Solution : *Le plus simple est de développer :* $f(a) = \mathrm{A}a^2 + 2\mathrm{B}a + \mathrm{C}$*, avec* $\mathrm{A} = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$, $\mathrm{B} = -\int_1^2 x \ln x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{4} - 2\ln 2$ *et* $\mathrm{C} = \int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$. *Comme* $\mathrm{A} > 0$, f *présente un minimum pour* $a = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = -\frac{\frac{3}{4} - 2\ln 2}{\frac{7}{3}} = \frac{24\ln 2 - 9}{28}$.

Exercice 27.23 ♡

Soit $(E, (.\mid.))$ *un espace préhilbertien réel, et* p, q *deux projecteurs orthogonaux. Montrer les équivalences :*
(i) $p+q$ *est un projecteur orthogonal*
(ii) $\forall x \in E,\ \big(p(x) \mid q(x)\big) = 0$
(iii) $poq = qop = 0$
(iv) $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Im} q$

Solution : $(p+q)^2 = (p+q) \implies poq + qop = 0$. *On compose par* p *à gauche, et* $poq = qop = 0$*, d'où* $(i) \implies (iii)$. $(iii) \implies (ii)$: $p(x) \in \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$*, et* $q(x) \in \operatorname{Im} q$*. Comme* $\operatorname{Ker} q \perp \operatorname{Im} q$, $\big(p(x) \mid q(x)\big) = 0$. $(ii) \implies (iv)$ *: évident.* $(iv) \implies (i)$: $\big(pq(x) \mid pq(x)\big) = \big(q(x) \mid ppq(x)\big) = 0$*, de même pour* $qop(x)$*. Donc* $poq = qop = 0$*, et* $p+q$ *est un projecteur. Comme* $\big((p+q)(x) \mid y\big) = \big(x \mid (p+q)(y)\big)$*, c'est un proj. orthogonal.*

Exercice 27.24 ♡

Sur l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$*, on définit pour deux polynômes* $(P, Q) \in E^2$*,*

$$(P \mid Q) = \int_0^1 tP(t)Q(t)\,dt$$

1. *Vérifier que c'est un produit scalaire.*
2. *Déterminer une base orthonormale du sous-espace* $F = \mathbb{R}_2[X]$ *pour ce produit scalaire.*
3. *Déterminer le projeté orthogonal du polynôme* $P = X^3$ *sur le sous-espace* F*.*

Solution : *Utilisons l'algorithme de Schmidt pour redresser la base canonique de* F. $e_0 = 1$*,* $e_1 = X$*,* $e_2 = X^2$*. On trouve* $\|e_0\| = 1/\sqrt{2}$ *donc* $\varepsilon_0 = \sqrt{2}$*. Ensuite on trouve* $\varepsilon_1 = 6(X - 2/3)$ *puis* $\varepsilon_2 = 10\sqrt{6}(X^2 - 6/5X + 9/30)$*. On détermine alors* $p(P) = a_2\varepsilon_2 + a_1\varepsilon_1 + a_0\varepsilon_0$ *et les conditions d'orthogonalité donnent :* $a_0 = (P \mid \varepsilon_0) = (\sqrt{2}/5)$*,* $a_1 = (P \mid \varepsilon_1) = 1/5$*,* $a_2 = (P \mid \varepsilon_2) = \sqrt{6}/35$ *et alors le projeté orthogonal vaut*

$$p(P) = \frac{4}{35} - \frac{6}{7}t + \frac{12}{7}t^2$$

Exercice 27.25 ♡

Soit $(E, n, (.\mid.))$ *un espace euclidien et un vecteur* $x \in E$*. Soit un vecteur non-nul* $a \in E$*. On définit la droite vectorielle* $D = \operatorname{V}ect(a)$ *et son orthogonal* $H = D^{\perp}$*. Exprimer les distances* $d(x, H)$ *et* $d(x, D)$ *en fonction de la norme du vecteur* x *et du produit scalaire* $(x \mid a)$*.*

Solution : *Notons* $p(x)$ *le projeté orthogonal du vecteur* x *sur le sous-espace* H*. Alors* $d(x, H) = \|x - p(x)\|$ *et* $d(x, D) = \|p(x)\|$*. Ecrivons que* $x = \lambda.a + p(x)$*. Alors* $(x \mid a) = \lambda\|a\|^2 + \big(p(x) \mid a\big) = \lambda\|a\|^2$*. On tire donc* $\lambda = \dfrac{(x \mid a)}{\|a\|^2}$ *puis successivement*

$$p(x) = x - \frac{(x \mid a)}{\|a\|^2}.a, \quad d(x, D) = \frac{|(x \mid a)|}{\|a\|}, \quad d(x, H) = \frac{\sqrt{\|x\|^2\|a\|^2 - (x \mid a)^2}}{\|a\|}$$

(la quantité sous la racine est positive d'après Cauchy-Schwarz).

Exercice 27.26 ♡

Soit E *un espace préhilbertien réel et* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une famille orthonormale. Soit* $x \in E$*. Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$$

Solution : *On pose* $x = u + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ *avec* $u \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)^{\perp}$*. On a* $\|x\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$ *et* $\left(u + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \mid e_i\right) = 0 + \alpha_i$*. Donc* $\sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \leqslant \|x\|^2$*.*

Exercice 27.27 ♡♡

Soit E *un espace euclidien et* p *un projecteur. Montrer que* p *est un projecteur orthogonal ssi*

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

Solution : *Si p est un projecteur orthogonal, alors on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Im}(p), x_2 \in \operatorname{Ker}(p)$ et donc $(x_1 \mid x_2) = 0$. On a alors $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x_2\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$.*
Pour la réciproque, on considère $x \in \operatorname{Im} p, y \in \operatorname{Ker} p$, $y \neq 0$, et $z = x + ty$. Alors $\|p(z)\|^2 = \|x\|^2$, et $\|z\|^2 = \|x\|^2 + t(2(x \mid y) + t\|y\|^2)$. On a donc, par hypothèse, $\|p(z)\|^2 \leqslant \|z\|^2$ soit $0 \leqslant t(2(x \mid y) + t\|y\|^2)$.
Supposons $(x \mid y) > 0$. On a pour $t = -\dfrac{(x \mid y)}{\|y\|^2}$, $2(x \mid y) + t\|y\|^2 = (x \mid y)$ et donc $t(2(x \mid y) + t\|y\|^2) = -\dfrac{(x \mid y)^2}{\|y\|^2} \leqslant 0$. Contradiction.
Supposons $(x \mid y) > 0$, on a aussi une contradiction avec $t = \dfrac{(x \mid y)}{\|y\|^2}$. Reste une seule possibilité : $(x \mid y) = 0$, ceci pour tous $x \in \operatorname{Im} p, y \in \operatorname{Ker} p$. Donc p est un projecteur orthogonal.

27.7.3 Symétrie orthogonales

Exercice 27.28 ♡
Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère le vecteur $n = (1,1,1)$ et le sous-espace $F = \{n\}^\perp$. Ecrire la matrice du projecteur orthogonal sur F dans la base canonique. Si $x = (3,2,1)$, déterminer $d(x,F)$.

Solution : *On a* $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. *On a $x' = Mx = (1,0,-1)$, $x - x' = (2,2,2)$ et $d(x,F) = \|x - x'\| = 2\sqrt{3}$.*

Exercice 27.29 ♡
Soit $E = \mathscr{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la quantité

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t - (a + b\sin t + c\cos t)\right)^2 dt$$

soit minimale.

Solution : *On se place dans $\mathscr{C}^0[-\pi,\pi]$, muni du produit scalaire $< f,g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et on considère le sous-espace engendré par $u = e^t, e_1 = 1, e_2 = \cos t$ et $e_3 \sin t$. Il est bon de remarquer que la famille e_1,e_2,e_3 est une famille orthogonale avec $\|e_1\|^2 = 2\pi$, $\|e_2\|^2 = Verte_3\|^2 = \pi$. On cherche à minimiser $\|u - (ae_1 + be_2 + ce_3)\|^2$. Autrement dit, $ae_1 + be_2 + ce_3$ doit être la projection orthogonale de u sur le sous-espace engendré par e_1,e_2,e_3. Autrement dit, $u - (ae_1 + be_2 + ce_3)$ doit être orthogonal à chacun des e_k, $1 \leqslant k \leqslant 3$. Ce qui donne :*
$< u - (ae_1 + be_2 + ce_3), e_1 >=< u, e_1 > -a\|e_1\|^2 = 0$ d'où $a = \dfrac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$. De même $< u, e_1 > -b\|e_1\|^2 = 0$. Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+i}\left[e^{(1+i)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1-i}{2}\left(e^\pi - e^{-\pi}\right)$. d'où $b = -\dfrac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$ et $c = \dfrac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$.

Exercice 27.30 ♡
Soit E un espace préhilbertien réel, et $s \in L(E)$ une symétrie vectorielle. Montrer que s est une symétrie orthogonale ssi $\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$.

Solution : *Sens direct : décomposer x sur $\operatorname{Ker}(s - id)$ et $\operatorname{Ker}(s + id)$. Pour la réciproque, Si $x \in Ker(s - \mathrm{id})$ et $y \in \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id})$, Exprimer $(x \mid y)$ et fonction de $\|x + y\|$ et $\|x - y\|$ (identité de polarisation) . On obtient $2(x \mid y) = 0$.*

Exercice 27.31 ♡
Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et F le plan d'équations $x + 2y + z = 0$, $x - z + 2t = 0$. Déterminer une b.o.n. de F, puis écrire la matrice du projecteur orthogonal sur F, et de la symétrie orhogonale par rapport à F dans la base canonique.

Solution : *$e_1 = (2,-1,0,-1)$, $e_2 = (0,-1,2,1)$ est une b.o.n. de F. La projection orthogonale sur F est caractérisée par $(x - p(x) \mid e_1) = (x - p(x) \mid e_2) = 0$, et donc $p(x) = (x \mid e_1).e_1 + (x \mid e_2).e_2$.*

Exercice 27.32 ♡
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $f : E \mapsto E$ une application.

1. *Montrer l'équivalence :*

$$\left(\forall x, y \in E, \left(f(x) \mid y\right) = -\left(x \mid f(y)\right)\right) \Longleftrightarrow \left(f \text{ est linéaire et } \forall x \in E, \left(f(x) \mid x\right) = 0\right)$$

2. *Que peut-on dire de la matrice de f dans une base e orthonormale ?*
3. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont orthogonaux.*
4. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f o f$.

Solution : *Pour 4., calculer* $\|f(x)\|^2 = -\big(x \mid f o f(x)\big)$.

Exercice 27.33 ♡

Soit $E = \mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel et* F *le plan d'équations* $x+2y+z=0$, $x-z+2t=0$. *Déterminer une b.o.n. de* F, *puis écrire la matrice du projecteur orthogonal sur* F, *et de la symétrie orhogonale par rapport à* F *dans la base canonique.*

Solution : $e_1 = (2,-1,0,-1)$, $e_2 = (0,-1,2,1)$ *est une b.o.n. de* F. *La projection orthogonale sur* F *est caractérisée par* $\big(x-p(x) \mid e_1\big) = \big(x-p(x) \mid e_2\big) = 0$, *et donc* $p(x) = (x \mid e_1).e_1 + (x \mid e_2).e_2$.

27.7.4 Groupe orthogonal

Exercice 27.34 ♡

Soit E *euclidien de dimension* n. *Soit* f *une isométrie symétrique et* g *un endomorphisme antisymétrique de* E *vérifiant* $fog = gof$. *Calculer* $\big(f(x) \mid g(x)\big)$ *et montrer que* $f+g$ *et* $f-g$ *sont des isomorphismes.*

Solution : *On utilise la symétrie et l'antisymétrie pour* $\big(f(x) \mid g(x)\big) = 0$. *Ensuite,* $\|(f+g)(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|g(x)\|^2$, *d'où* $f+g$ *est injective.*

Exercice 27.35 ♡

Soit E *un espace préhilbertien réel. Soit* $f : E \mapsto E$ *une application.*

1. *Montrer l'équivalence :* $\forall x, y \in E,\ \big(f(x) \mid y\big) = -\big(x \mid f(y)\big)$ f *est linéaire et* $\forall x \in E,\ \big(f(x) \mid x\big) = 0$
2. *Que peut-on dire de la matrice de f dans une base e ?*
3. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont orthogonaux.*
4. *Montrer que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f o f$.

Solution : *Pour 4., calculer* $\|f(x)\|^2 = -\big(x \mid f o f(x)\big)$.

Exercice 27.36 ♡

Soit M *la matrice d'un produit scalaire dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Montrer que* M^n *définit également un produit scalaire.*

Solution : M^n *est symétrique. Si* $n = 2p$, ${}^tXM^{2p}X = {}^t(M^pX)(M^pX)$ *et si* $n = 2p+1$, ${}^tXM^nX = {}^t(M^pX)M(M^pX)$. *Comme* M *est inversible,* M^p *l'est aussi.*

Exercice 27.37 ♡

Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *une matrice orthogonale. Montrer que*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$$

Solution : *D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,* $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |1.a_{ij}| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{n}$ *puisque* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$. *En sommant,* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{n} \leqslant n\sqrt{n}$.

27.7.5 Produit vectoriel

Exercice 27.38 ♡

Soit E *un espace euclidien de dimension* 3, *et* (u,v) *un système libre de* E. *On définit l'application :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (v \mid x).u + (u \mid x).v \end{array} \right.$$

Montrer que f est un endomorphisme et déterminer son noyau et son image.

Solution : Ker $f = \mathrm{Vect}(u \wedge v)$, Im $u = \mathrm{Vect}(u, v)$.

Exercice 27.39 ♡

Soit u, v, w *trois vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension* 3. *Démontrer :*

1. $(u \wedge v) \wedge w = (u \mid w)\, v - (v \mid w)\, u$. *(double produit vectoriel)*
2. $(w \wedge u) \wedge (u \wedge v) = [u, v, w]\, u$.
3. $[v \wedge w, w \wedge u, u \wedge v] = [u, v, w]^2$.

Solution :

1. *On choisit une base othonormée directe* (i, j, k) *telle que* $u = ai$, $v = bi + cj$, $w = di + ej + fk$. *On trouve* $(u \wedge v) = ack$ *puis* $(u \wedge v) \wedge w = acdj - acei$. *D'autre part :* $(u \mid w)\, v - (v \mid w)\, u = ad(bi + cj) - (bd + ce)ai = acdj - acei$. *Ce qu'il fallait vérifier.*
2. *D'après le double produit vectoriel,* $(w \wedge u) \wedge (u \wedge v) = -(u \wedge v) \wedge (w \wedge u) = -(u \mid w \wedge u)\, v - (v \mid w \wedge u)\, u = -\underbrace{[w, u, u]}_{=0} v + [w, u, v]\, u = [u, v, w]\, u$.
3. $[v \wedge w, w \wedge u, u \wedge v] = (v \wedge w \mid (w \wedge u) \wedge (u \wedge v)) = (v \wedge w \mid [u, v, w]u) = [u, v, w]\,(v \wedge w \mid u) = [u, v, w]^2$.

Exercice 27.40 ♡

Soit u, v, w, t *quatre vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension* 3. *Démontrer :*

1. $(u \wedge v \mid w \wedge t) = (u \mid w)\,(v \mid t) - (u \mid t)\,(v \mid w)$
2. $(u \wedge v) \wedge (w \wedge t) = -[u, v, w]\, t + [u, v, t]\, w$
3. $[t, v, w]\, u + [u, t, w]\, v + [u, v, t]\, w = [u, v, w]\, t$.

Solution :

1. *On utilise la formule du double produit vectoriel :*

$$(u \wedge v \mid w \wedge t) = [u, v, w \wedge t] = [w \wedge t, u, v] = ((w \wedge t) \wedge u \mid v) = ((w \mid u)\, t - (t \mid u)\, w \mid v) = (u \mid w)\,(v \mid t) - (u \mid t)\,(v \mid w)$$

2. *A nouveau avec la formule du double produit vectoriel :*

$$(u \wedge v) \wedge (w \wedge t) = -(w \wedge t) \wedge (u \wedge v) = -(w \mid u \wedge v)\, t + (t \mid u \wedge v)\, w = -[u, v, w]\, t + [u, v, t]\, w$$

3.

Exercice 27.41 ♡♡

Soit (x, y, z) *une base d'un ev euclidien orienté* E *de dimension* 3. *Déterminer* $u, v, w \in \mathrm{E}$ *tels que*

$$v \wedge w = x, \quad w \wedge u = y, \quad u \wedge v = z.$$

Solution : *D'après l'exercice précédent,* $[x, y, z] = [v \wedge w, w \wedge u, u \wedge v] = [u, v, w]^2$. *Donc si* $[x, y, z] < 0$ *autrement dit si* (x, y, z) *est une base indirecte, le problème n'admet pas de solution. Et si* $[x, y, z] > 0$ *autrement dit si* (x, y, z) *est une base directe, on a* $[u, v, w] = \varepsilon\sqrt{[x, y, z]}$ *avec* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
On a $(w \wedge u) \wedge (u \wedge v) = [u, v, w]u = y \wedge z$, *d'où* $u = \varepsilon \dfrac{1}{\sqrt{[x, y, z]}} y \wedge z$, *et ainsi de suite :* $v = \varepsilon \dfrac{1}{\sqrt{[x, y, z]}} z \wedge x$ *et* $w = \varepsilon \dfrac{1}{\sqrt{[x, y, z]}} x \wedge y$. *Lorsque* $\varepsilon = 1$ *la base* (u, v, w) *est directe, et indirecte sinon.*

27.7.6 Étude d'endomorphismes orthogonaux

Exercice 27.42 ♡

Montrer que

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale et calculer A^{-1}.

Solution : *Il est clair que* $A^tA = I_n$. *Utilisant la remarque précédente, on obtient :* $A^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 27.43 ♡

Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ *un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^n$. *On définit la matrice*

$$A = I_n - 2u^t u$$

1. *Montrer que* $A \in O_n(\mathbb{R})$.
2. *Reconnaître* A.

Solution : *Si on remarque que* ${}^t uv = (u \mid v)$, *on voit que* $Au = u - 2\|u\|^2 u = -u$ *et que si* $v \in u^\perp$ *alors* $Av = v - 2(u \mid v)v = v$. A *est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à* $u^\perp$ *dans la base naturelle de* $\mathbb{R}^n$.

Exercice 27.44 ♡

Etudier l'endomorphisme u *de* $\mathbb{R}^3$ *euclidien de matrice* $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-2 & 6 & -3\\ 6 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 6\end{pmatrix}$ *dans la base canonique.*

Solution : M *est symétrique et orthogonale. Par conséquent,* $M^2 = I$ *:* u *est une symétrie vectorielle orthogonale (Comme* ${}^tM = M$, u *est auto-adjoint). Il suffit de déterminer l'ensemble* F *des vecteurs invariants par* u *: on trouve que* F *est le plan vectoriel d'équation*

$$F : 3x - 2y + z = 0$$

Par conséquent, u *est une* réflexion.

Exercice 27.45 ♡

Soit $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-7 & -4 & 4\\ 4 & -8 & -1\\ -4 & -1 & -8\end{pmatrix}$. *Quel endomorphisme* u *de* $\mathbb{R}^3$ *euclidien représente-t-elle ?*

Montrer que u *est la composée d'une rotation et d'une réflexion.*

Solution : *On vérifie que* A *est orthogonale. Puisque* $\Delta_{11} = \dfrac{7}{9} = -a_{11}$, $\det(A) = -1$. *Par conséquent* $A \in O_3^-(\mathbb{R})$. *Considérons* $B = -A$. *Alors* $B \in {}_3\mathbb{R}$ *et donc* B *est la matrice d'une rotation* r *d'axe* $\mathrm{Vect}(d)$ *et d'angle* θ. *Cherchons un vecteur directeur de l'axe normalisé :* $d = (d_1, d_2, d_3)$. *En disant que* d *est invariant par* $-u$ *et en traduisant matriciellement cette condition, on trouve par exemple*

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

On sait qu'il existe une bon directe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *telle que la matrice de* r *dans cette base soit*

$$C = \mathrm{Mat}_\varepsilon(r) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Alors comme B *et* C *sont semblables,* $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(C)$ *d'où l'on tire :*

$$\cos\theta = \frac{7}{9}$$

Cherchons alors un vecteur ε_1 *unitaire et orthogonal à* d. *Par exemple*

$$\varepsilon_1 = (1,0,0)$$

Alors si l'on considère une bon directe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$, *on sait que la matrice de* r *dans cette base s'écrit*

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{Det}(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d) = \det_\varepsilon(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d) = \sin\theta$$

mais également, puisque la base canonique est une bon directe,

$$\mathrm{Det}(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d) = \frac{1}{9\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 7 & 0\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

(on peut vérifier que l'on a bien $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$*) Par conséquent,* $\theta = -\arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9})$
u *est alors la composée de la rotation d'axe* $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(d)$ *et d'angle* $\theta + \pi$ *avec la réflexion d'hyperplan* $\mathrm{D}^\perp$ *(faire un dessin).*

Exercice 27.46 ♡

Dans $\mathbb{R}^3$ *euclidien usuel,* $e = (i, j, k)$ *la base canonique, on considère la rotation* r *d'axe* $\mathrm{Vect}(i + j + k)$ *d'angle* $\frac{\pi}{2}$*. Déterminer la matrice de* r *dans la base canonique.*

Solution : *On trouve finalement :*

$$\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

Vérification sommaire : $n = i + j + k$ *vérifie bien* $\mathrm{A}n = n$ *et la trace fournit bien un cosinus égal à* 0*.*

Exercice 27.47 ♡♡

Dans $\mathbb{R}^2$ *euclidien usuel, trouver une base* i, j *telle que dans cette base, la transformation* $u = xi + yj \mapsto (2x - y)i + (3x - y)j$ *soit une rotation.*

Solution : *Supposons le problème résolu : Nous sommes en présence d'une matrice* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$*. Quel est son déterminant ?* 1 *bon, ça, ça va. Quelle est sa trace ?* 1*. Donc le cosinus égal* $\frac{1}{2}$ *ce qui donne un angle* $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$*. On aurait pu remarquer que* $\mathrm{M}^6 = \mathrm{I}_2$*... Posons* $\mathrm{I} = \|i\|^2, \mathrm{J} = \|j\|^2$ *et* $\mathrm{S} = (i \mid j)$*. En écrivant le carré de la norme du premier vecteur colonne, du deuxième et le produit scalaire des deux on obtient* $\begin{cases}\mathrm{I} = 4\mathrm{I} + 9\mathrm{J} + 12\mathrm{S}\\ \mathrm{J} = \mathrm{I} + \mathrm{J} + 2\mathrm{S}\\ \mathrm{S} = -2\mathrm{I} - 3\mathrm{J} - 5\mathrm{S}\end{cases}$ *Ce qui donne* $\mathrm{I} = -2\mathrm{S} = 3\mathrm{J}$*. Maintenant construisons la solution. Soit* (e_1, e_2) *la base naturelle de* $\mathbb{R}^2$*. On prend* $i = e_1$ *et donc* $\mathrm{I} = 1$*. Grâce à* $\mathrm{S} = -\frac{1}{2}$*, on a* $j = -\frac{1}{2}e_1 + ae_2$*. Comme* $\mathrm{J} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + a^2$ *on en déduit* $a = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$*. En prenant* $a = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$*,* $j = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}e_2$*, on a* $r(i) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$*, et* $r(j) = -i - j = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}e_2$*. On a* $\|i\| = \|r(i)\| = 1$ *et* $\|j\| = \|r(j)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$*. On calcule* $i \wedge r(i) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_3 = \|i\|.\|r(i)\|\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ *et* $j \wedge r(j) = -\frac{\sqrt{3}}{6}e_3 = \|j\|.\|r(j)\|\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$*. C'est bien dire que* r *est la rotation d'angle* $-\frac{\pi}{3}$*.*

Exercice 27.48 ♡♡

On considère un espace euclidien E *de dimension* n *et* e *une base de cet espace. On note* A *la matrice du produit scalaire dans cette base. Trouver une CNS sur la base* e *pour que la matrice* A *soit orthogonale.*

Solution : *Si* A *est orthogonale,* ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$*, mais comme* A *est la matrice d'un produit scalaire, elle est symétrique. Donc* $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$*. L'endomorphisme* u *représenté par la matrice* A *dans la base* e *est donc une symétrie vectorielle. On sait alors que* $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$*. Si l'on avait* $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) \neq \{0_\mathrm{E}\}$*, il existerait un vecteur* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $u(x) = -x$*, et en notant* X *la matrice de* x *dans la base* e*, on aurait* $\mathrm{AX} = -\mathrm{X}$*. En multipliant à gauche par* ${}^t\mathrm{X}$*, on aurait* ${}^t\mathrm{XAX} = -{}^t\mathrm{XX} < 0$*, ce qui est impossible puisque la matrice* A *est positive. Par conséquent,* $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{E}$ *et donc* $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ *et la base* e *est donc orthonormale. Réciproquement, si* e *est orthonormale, la matrice du produit scalaire dans la base* e *est* I_n *qui est une matrice orthogonale.*

Exercice 27.49 ♡♡

Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$$

Trouver une CNS pour que A *soit orthogonale. Caractériser alors l'endomorphisme associé à* A *dans la base canonique.*

Solution : *Le carré de la norme des vecteurs colonnes égale a^2+2b^2. On a donc $a^2+2b^2=1$. Le produit scalaire égale $b(2a+c)$. Donc $b(2a+c)=0$. A part le cas $b=0$ qui donne $\pm I_3$. Sinon, on a $b=-2a$ ce qui donne $9a^2=1$ donc $a=\pm\frac{1}{3}$ et $b=\mp\frac{2}{3}$. En effectuant le produit vectoriel des deux premiers vecteurs colonnes, on trouve bien que l'endomorphisme associé à A dans la base canonique appartient à $O^{\pm}(\mathbb{R}^3)$. Pour $a=-\frac{1}{3}$, on a $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$. Soit $n=(1,1,1)$ on a $An=n$ donc n dirige l'axe de la rotation. On trouve l'angle de la rotation à la trace : c'est π.*
Pour $a=\frac{1}{3}$, on obtient l'opposé de la matrice précédente ce qui donne la symétrie orthogonale par rapport à $n^{\perp}$ c'est-à-dire le plan d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 27.50 ♡♡

Etudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel ayant pour matrice

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&\sqrt{6}\\1&3&-\sqrt{6}\\-\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Solution : *Les deux premiers vecteurs colonnes sont normés, leur produit scalaire est nul. Leur produit vectoriel est égal au troisième vecteur colonne. L'endomorphisme associé à A est donc une rotation. Soit $d=(1,1,0)$. On a $Ad=d$ donc d dirige l'axe. Le vecteur $u=(-1,1,0)\in d^{\perp}$ et $v=Au=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. On a $u\wedge v=\frac{\sqrt{6}}{2}d$. Comme u est de norme $\sqrt{2}$ on a $\sin\theta d=\frac{\sqrt{3}}{2}d$.*

Exercice 27.51 ♡♡

Etude dans $\mathbb{R}^3$ de l'endomorphisme ayant pour matrice A dans la base canonique, où

$$A=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix}a^2+b^2-c^2-d^2&2(bc+da)&2(bd-ca)\\2(bc-da)&a^2-b^2+c^2-d^2&2(cd+ba)\\2(bd+ca)&2(cd-ba)&a^2-b^2-c^2+d^2\end{pmatrix}$$

Solution : *Bien entendu, on prend $(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$. On calcule le carré de la norme du premier vecteur colonne : Or $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(c^2+d^2)^2+4(c^2+d^2)(a^2+b^2-c^2-d^2)=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(c^2+d^2)(a^2+b^2)=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4((bc-da)^2+(bd+ca)^2)$ grâce à l'égalité $(c^2+d^2)(a^2+b^2)=(bc-da)^2+(bd+ca)^2$ qui traduit l'égalité $|(ac+bd)+(bc-ad)i|^2=|a+bi|^2|c-di|^2$. On en déduit que la première colonne est normée. Un calcul analogue montre que la deuxième colonne est elle aussi normée.*
Le produit scalaire de ces deux premières colonne égale (à un coefficient $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ près) $2(bc+da)(a^2+b^2-c^2-d^2)+2(bc-da)(a^2-b^2+c^2-d^2)+4(bd+ca)(cd-ba)=4bc(a^2-d^2)+4ad(b^2-c^2)+4(bcd^2-b^2ad+c^2ad-bca^2)=0$.
Reste à calculer le produit vectoriel $\begin{pmatrix}a^2+b^2-c^2-d^2\\2(bc-da)\\2(bd+ca)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2(bc+da)\\a^2-b^2+c^2-d^2\\2(cd-ba)\end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{pmatrix}2(bd-ca)\\2(cd+ba)\\a^2-b^2-c^2+d^2\end{pmatrix}$ après quelques calculs hilarants.
On est donc en présence de la matrice d'une rotation exprimée dans la base canonique. Le vecteur (b,c,d) est fixe par A. Il dirige donc l'axe de la rotation (si $(b,c,d)=(0,0,0)$, alors $A=I_3$). On obtient ainsi tous les axes possibles. On a $\operatorname{Tr}A=\frac{a^2-b^2-c^2-d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Donc le cosinus de l'angle de la rotation égale $-\frac{b^2+c^2+d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}$

Chapitre 28

Géométrie affine

Pour bien aborder ce chapitre

La boucle est bouclée, tout finit par se mettre en place. Souvenez-vous, au collège vous avez fait de la géométrie avec des points, des droites des cercles, etc et des transformations. Plus tard, au lycée vous avez travaillé avec les vecteurs. Ce n'était pas commode. Souvenez-vous : un vecteur $\overrightarrow{u}$ était défini par son origine A et son extrémité B ce qui vous permettait d'écrire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Mais vous pouviez avoir aussi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CD}$. C'était un peu déroutant mais vous vous y êtes fait. Vous ne le saviez pas , mais vous travailliez alors avec des représentants de classes d'équivalences de bipoints. C'était les fameux bipoints équipollents qui semaient la terreur dans les classes de lycée dans les années 70/80.
L'inconvénient de cette démarche c'est que les axiomes n'apparaissaient pas clairement. Si l'on admettait clairement l'existence de points, de droites, de plans etc., on admettait les propriétés de conservation des isométries. Et puis quoi d'autre ? les axiomes d'incidence ? l'existence des milieux ? et puis ? et puis ? Tout ça était un peu flou.
Cette année, vous avez suivi la démarche inverse. Vous avez défini les vecteurs. Ce sont des éléments d'un espace vectoriel. Ils ne ressemblent pas toujours aux vecteurs d'antan, certains sont des polynômes, d'autres sont des fonctions, plus ou moins dérivables, mais bon gré mal gré on peut calculer avec eux comme avec les bons vieux vecteurs d'autrefois.
Mais les points ? C'est quoi un point ?
Eh bien, un point, c'est un vecteur comme un autre !
Par exemple, si A et B sont deux points d'un espace vectoriel - c'est-à-dire formellement deux vecteurs - le vecteur $\overrightarrow{AB}$ c'est la différence des deux points : $B - A$.
C'est un peu déroutant au départ, mais on retrouve toutes les propriétés de la géométrie plane dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ par exemple.

28.1 Sous-espaces affines

Dans tout ce paragraphe E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

28.1.1 Translations

DÉFINITION 28.1 ♡♡ **Translation**
Soit $u \in E$. On appelle **translation de vecteur** u l'application de E dans E, notée t_u, et donnée par :

$$t_u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & t_u(x) = u + x \end{cases}.$$

PROPOSITION 28.1 ♡ **Les translations sont des automorphismes de** E

1. La composée de la translation de vecteur $u \in E$ par celle de vecteur $v \in E$ est la translation de vecteur $u + v$:

$$\boxed{t_u \circ t_v = t_v \circ t_u = t_{u+v}}.$$

2. $\boxed{t_0 = \mathrm{id}_E}$.
3. Les translations de E sont des automorphismes de E.

Démonstration

1. *Soit $x \in \mathrm{E}$. $t_v \circ t_u(x) = t_v(x+u) = x+u+v = t_{u+v}(x)$. Donc $t_v \circ t_u = t_{u+v}$. On montre de même que $t_u \circ t_v = t_{u+v}$.*
2. *Évident.*
3. *On vérifie facilement que les translations sont linéaires. De plus, si $u \in \mathrm{E}$, en appliquant les deux points précédents, on obtient $t_u \circ t_{-u} = t_{-u} \circ t_u = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et t_u est bien bijective.*

PROPOSITION 28.2 ♡ **L'ensemble des translations de E forme un sous-groupe de $\mathscr{G}l(\mathrm{E})$**
L'ensemble des translations de E forme un sous-groupe commutatif de $\mathscr{G}l(\mathrm{E})$.

Démonstration *Soit t_u et t_v deux translations de E. Il est clair que $t_u \circ (t_v)^{-1} = t_u \circ t_{-v} = t_{u-v}$ est encore une translation de E. Par application du théorème 19.6, on peut affirmer que l'ensemble des translations de E est un sous-groupe de E.*

28.1.2 Sous espaces affines

DÉFINITION 28.2 ♡ **Sous-espace affine**
On appelle **sous-espace affine** de E l'image $\mathscr{F}$ d'un sous-espace vectoriel F de E par une translation de E.

$$\mathscr{F} = t_u(\mathrm{F}) = \{u + x \mid x \in \mathrm{F}\}$$

On note alors $\mathscr{F} = u + \mathrm{F}$. On dit que :
- le sous-espace vectoriel F est la **direction** du sous-espace affine $\mathscr{F}$;
- la dimension du sous-espace affine $\mathscr{F}$ est la **dimension** du sous-espace vectoriel F ;
- une base de F sera appelée **ensemble de vecteurs directeurs** de $\mathscr{F}$.

Exemple 28.1
- Soit u un vecteur de E. Le singleton $\{u\} = t_0(u)$ est un sous-espace affine de E de direction $\{0\}$ et de dimension 0.
- Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, $u = (1,2)$, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,-1))$ et $\mathscr{F} = t_u(\mathrm{F}) = \{u + t(1,-1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 2-t) \mid t \in \mathrm{R}\}$ alors $\mathscr{F}$ est la **droite affine** passant pas $(1,2)$ et dirigée par $(1,-1)$.
- Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, $u = (1,2,3)$, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,2,-4),(1,-1,1))$ et $\mathscr{F} = t_u(\mathrm{F}) = \left\{u + t(1,2,-4) + t'(1,-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{E} \mid \begin{cases} x &= 1+t+t' \\ y &= 2+2t-t' \\ z &= 3-4t+t' \end{cases}\right\}$ alors $\mathscr{F}$ est le **plan affine** passant pas $(1,2,3)$ et de base $((1,2,-4),(1,-1,1))$.
- Avec $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F} = \left\{f \in \mathrm{E} \mid \forall t \in \mathbb{R},\quad f''(t) + f(t) = 1 + t + t^2\right\}$, $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathrm{E} \mid f'' + f = 0\right\}$ et si $u : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -1+t+t^2 \end{cases} \in \mathrm{E}$ alors

$$\mathscr{F} = u + \mathrm{F} = \left\{t \mapsto -1 + t + t^2 + \alpha\cos t + \beta \sin t \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Notation 28.2 Ces exemples nous invitent à considérer :
- les éléments d'un sous-espace affine comme des points. On les notera avec des **lettres majuscules**. (Ex : A, M, ...)
- les éléments de la direction de cet espace affine comme des vecteurs. On les notera avec des **lettres minuscules surmontées d'une flèche**. (Ex : $\vec{u}, \vec{x}$, ...)
- Si A et B sont deux points d'un sous-espace affine (c'est-à-dire des vecteurs a et b de E), on leur fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donné par : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{B} - \mathrm{A}$ $(= b - a)$.
- Si A est un point d'un espace affine (c'est-à-dire un vecteur a de E) et si $\vec{x} \in \mathrm{E}$ est un vecteur de E , on leur fait correspondre le point noté $\mathrm{A} + \vec{x}$ $(= a + \vec{x})$.

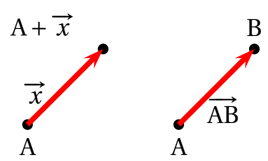


FIGURE 28.1 – Points-vecteurs

On a alors les propriétés évidentes suivantes :

PROPOSITION 28.3 ♡ **Règles de calcul en géométrie affine**

1. $\forall M \in E, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad M + (\vec{x} + \vec{y}) = (M + \vec{x}) + \vec{y}$
2. $\forall (M,P) \in E^2, \quad \exists! \vec{x} \in E : P = M + \vec{x}$.
   En fait : $\vec{x} = P - M$
3. $\forall (M,P) \in E^2, \quad \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad \begin{cases} M + \vec{x} = M + \vec{y} \implies \vec{x} = \vec{y} \\ M + \vec{x} = P + \vec{x} \implies M = P \end{cases}$
4. **Relation de Chasles :**

$$\forall (A,B,C) \in E^3, \quad \boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}.$$

Remarque 28.1 Avec ces nouvelles notations, le sous-espace affine $\mathscr{F}$ de E, image par la translation de vecteur $\vec{u} \in E$ du sous-espace vectoriel $F \subset E$, est :

$$\mathscr{F} = A + F$$

où A représente le vecteur $\vec{u}$. Comme $A \in \mathscr{F}$, on dit que $\mathscr{F}$ est le sous-espace affine de E passant par A et dirigé par F.

Exemple 28.3

- Dans $E = \mathbb{R}^2$, posons $A = (1,2)$ et $\vec{u} = (-1,1)$. La droite affine passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est le sous-espace affine : $A + \mathrm{Vect}(u)$.
- Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons le point $A = (1,4,2)$ et les vecteurs $\vec{u} = (1,0,-1)$ et $\vec{v} = (1,1,0)$. Le plan affine passant par A et de direction les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par : $A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

LEMME 28.4 ♡

Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de direction F, alors pour tout point $A \in \mathscr{F}$, on a :

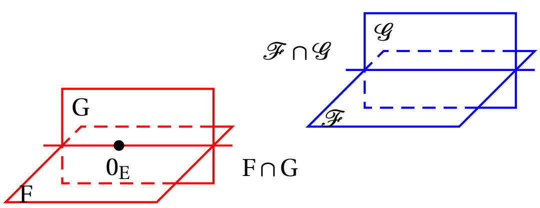
$$\mathscr{F} = A + F \quad \text{et} \quad F = \left\{ \overrightarrow{AM} \mid M \in \mathscr{F} \right\}.$$

Démonstration *Soit* $A \in \mathscr{F}$.

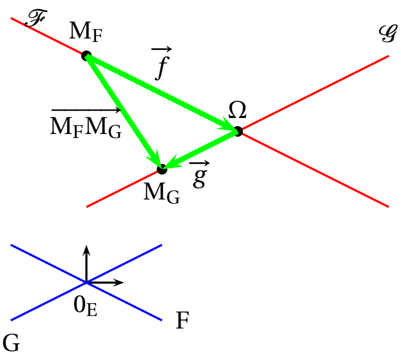
- *Il existe* $A_0 \in E$ *tel que :* $\mathscr{F} = A_0 + F$. *Comme* $A \in \mathscr{F}$, *il existe* $\vec{u} \in F$ *tel que* $A = A_0 + \vec{u}$. *Soit* $M \in \mathscr{F}$. *Il existe* $\vec{v} \in F$ *tel que* $M = A_0 + \vec{v}$. *Donc* $M = A_0 + \vec{v} = A - \vec{u} + \vec{v} \in A + F$ *car* $\vec{v} - \vec{u} \in F$, *ce qui montre que* $A_0 + F \subset A + F$. *On montre de même que* $A + F \subset A_0 + F$ *et donc que* $\mathscr{F} = A + F$.
- *Utilisant le résultat précédent :* $\mathscr{F} = A + F$. *Soit* $M \in \mathscr{F}$. *Il existe* $\vec{u} \in F$ *tel que* $M = A + \vec{u}$. *Autrement dit :* $\overrightarrow{AM} = \vec{u} \in F$ *ce qui prouve que* $\left\{ \overrightarrow{AM} \mid M \in \mathscr{F} \right\} \subset F$. *Réciproquement, si* $\vec{u} \in F$ *alors en notant* M *le point de* $\mathscr{F}$ *tel que* $M = A + \vec{u}$, *on obtient :* $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ *et l'inclusion réciproque est prouvée.*

DÉFINITION 28.3 ♡ **Sous-espaces affines parallèles**

On dit que le sous-espace affine $\mathscr{G}$ de direction G est *parallèle* au sous-espace affine $\mathscr{F}$ de direction F lorsque $G \subset F$.



(a) Sous-espaces affines parallèles



(b) Sous-espaces affines supplémentaires dans le plan

FIGURE 28.2 – Intersection de sous-espaces affines

Remarque 28.2 Dans $\mathbb{R}^3$, une droite peut être parallèle à un plan, mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite.

PROPOSITION 28.5 ♡ **Intersection de deux sous-espaces affines**
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de direction respective F et G. On suppose que :

(H1) $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$

alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine de E de direction $F \cap G$.

Démonstration *Comme $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$, on considère un point $A \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Montrons que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = A + F \cap G$.*

$\subset$ *Soit $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Comme $M \in \mathscr{F}$ alors $\overrightarrow{AM} \in F$ et comme $M \in \mathscr{G}$ alors $\overrightarrow{AM} \in G$. Donc $\overrightarrow{AM} \in F \cap G$ et $M \in A + F \cap G$.vient : $A + u \in \mathscr{F}$ et $A + u \in \mathscr{G}$ ce qui prouve que $A + F \cap G \subset \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$.*

$\supset$ *Réciproquement, si $M \in A + F \cap G$ alors il existe $\vec{u} \in F \cap G$ tel que $M = A + \vec{u}$. Il est alors clair que $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$.existe $\vec{u} \in E$ tel que $B = A + \vec{u}$. Comme $A \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$, nécessairement $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \in F$ et $\vec{u} \in G$ autrement dit $\vec{u} \in F \cap G$. On prouve ainsi que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \subset A + F \cap G$.*

En résumé : $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = A + F \cap G$.

COROLLAIRE 28.6 ♡
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de direction respective F et G. On suppose que :

(H1) F et G sont supplémentaires dans E

alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est constitué d'un et un seul point de E.

Démonstration

Existence *$\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide. En effet, si $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{G}$ alors comme $\overrightarrow{AB} \in E$ et que $E = F \oplus G$ alors il existe un unique couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ tel que : $\overrightarrow{AB} = u + v$. Il vient alors $A + u = B - v$ et le point $M = A + \vec{u} = B - \vec{v}$ est donc élément de $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$.*

Unicité *Appliquant le résultat précédent $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine de E de direction $F \cap G$ mais F et G étant supplémentaires dans E, on a : $F \cap G = \varnothing$ et donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est réduit à un point.*

28.1.3 Barycentres

THÉORÈME 28.7 ♡ **Fonction de Leibniz, Barycentre**
On considère un système de points $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E et n réels $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On forme le **système de points pondérés** :

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

On appelle **poids du système pondéré**, le réel $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. On considère alors la fonction vectorielle :

$$\vec{F} : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ G & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \end{cases}$$

– Si $\alpha = 0$, la fonction $\vec{F}$ est constante ;
– Si $\alpha \neq 0$, il existe un unique point $G \in E$ tel que $\vec{F}(G) = 0$. Cet unique point s'appelle le **barycentre** du système pondéré de points S. Pour un point $\Omega \in E$ quelconque, on a

$$G = \Omega + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i}$$

Démonstration *Soit $O \in E$. En utilisant les règles de calcul dans un espace affine, pour tout $M \in E$:*

$$\begin{aligned} \vec{F}(M) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MO} + \vec{F}(O) \end{aligned}$$

Donc :
- *Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, $\vec{F}$ est constante.*

- *Si* $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, $\overrightarrow{F}$ *est bijective. En effet, si on considère un vecteur* $\vec{u} \in E$, *on a :*

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{F}(M) = \vec{u} \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{F}(O) = \vec{u} \\ \Longleftrightarrow \quad & M = O + \frac{\vec{u} - \overrightarrow{F}(O)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \end{aligned}$$

et il existe un et un seul $M \in E$ *(donné par la dernière égalité) tel que* $\overrightarrow{F}(M) = \vec{u}$*. En particulier, il existe et un seul point* $G \in E$ *tel que* $\overrightarrow{F}(G) = \vec{0}$ *et on a bien :*

$$G = \Omega + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i}.$$

Remarque 28.3

G est le barycentre du système pondéré de points $S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ si et seulement si

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}}.$$

Remarque 28.4

Soit

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

une famille de point pondérés avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ et G le barycentre de cette famille. Alors, G est encore le barycentre de la famille

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha'_1 & \dots & \alpha'_n \end{pmatrix}$$

avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha'_i = \dfrac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$. Compte tenu de cette remarque, on peut toujours supposer que la famille pondérée $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ vérifie $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

THÉORÈME 28.8 ♡ **Associativité des barycentres**

Soit

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p & A_{p+1} & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

un système pondéré de points de barycentre G. On suppose que

$$\beta_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_p \neq 0 \text{ et } \beta_2 = \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n \neq 0$$

Si G_1 est le barycentre de $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}$ et si G_2 est le barycentre de $\begin{pmatrix} A_{p+1} & \dots & A_n \\ \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ alors G est le barycentre de $\begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$.

Démonstration *Soit* $G \in E$. *On a les égalités :*

$$\begin{aligned} \beta_1\overrightarrow{GG_1} + \beta_2\overrightarrow{GG_2} &= \alpha_1\overrightarrow{GG_1} + \dots + \alpha_p\overrightarrow{GG_1} + \alpha_{p+1}\overrightarrow{GG_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{GG_2} \\ &= \alpha_1\left(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1G_1}\right) + \dots + \alpha_p\left(\overrightarrow{GA_p} + \overrightarrow{A_pG_1}\right) + \alpha_{p+1}\left(\overrightarrow{GA_{p+1}} + \overrightarrow{A_{p+1}G_2}\right) + \dots + \alpha_n\left(\overrightarrow{GA_n} + \overrightarrow{A_nG_n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{GA_i} - \underbrace{\sum_{i=1}^p \overrightarrow{G_1A_i}}_{=\vec{0}} - \underbrace{\sum_{i=1}^p \overrightarrow{G_2A_i}}_{=\vec{0}} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème.

DÉFINITION 28.4 ♡ **isobarycentre**
On appelle **isobarycentre** des points $(A_1,\dots,A_n)$, le barycentre du système pondéré

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 28.5 ♡ **Segment**
On note $[A,B]$ (segment AB) l'ensemble des barycentres :

$$[A,B] = \{\mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ t & (1-t) \end{pmatrix} \; ; \; t \in [0,1]\} = \{tA + (1-t)B \mid t \in [0,1]\}$$

On définit le **milieu** d'un segment $[A,B]$ comme étant l'isobarycentre $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ des points A et B.

Application 28.4 Soient A, B et C trois points de E distincts et non alignés. D'après la propriété d'associativité du barycentre, l'isobarycentre G des trois points A, B et C est le barycentre du système pondéré

$$\begin{pmatrix} G_1 & C \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

où G_1 est le milieu de $[A,B]$. C'est donc un point de la médiane issue de C. On effectue le même raisonnement avec les deux autres médianes, on montre que G est à l'intersection des 3 médianes.

DÉFINITION 28.6 ♡ **Partie convexe**
Soit une partie $\mathscr{C}$ de l'espace E. On dit que cette partie est **convexe** si et seulement si $\forall (A,B) \in \mathscr{C}^2$, $[A,B] \subset \mathscr{C}$.

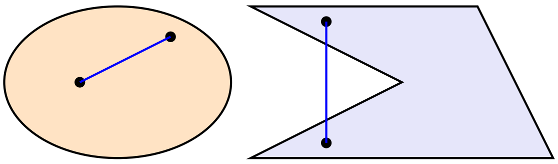

(a) Partie convexe (b) Partie non convexe

FIGURE 28.3 – Parties convexes

Remarque 28.5 On montre qu'une partie $\mathscr{C}$ est convexe si et seulement si : $\forall n \geqslant 1$, $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^+$, $\forall (M_1,\dots,M_n) \in \mathscr{C}^n$, le barycentre G du système $\left(\begin{smallmatrix} M_1 & \dots & M_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{smallmatrix}\right)$ est encore dans $\mathscr{C}$.

28.1.4 Repère cartésien

DÉFINITION 28.7 ♡ **Repère cartésien**
On appelle **repère cartésien** de E la donnée d'un couple $\mathscr{R} = (O, e)$ formé par un point O de E et une base $e = (e_1,\dots,e_n)$ de E.

- O est appelé l'**origine du repère** $\mathscr{R}$.
- e est appelée la **base du repère** $\mathscr{R}$.

PROPOSITION 28.9 ♡ **Coordonnées d'un point dans un repère**
Soit (O, e) un repère de E. L'application :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \end{array} \right.$$

où $\overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ est un isomorphisme d'espaces affines. Le n−uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ représente les **coordonnées** de M dans le repère (O, e).

Démonstration *Laissée en exercice au lecteur.*

28.2 Applications affines

28.2.1 Définitions et propriétés

DÉFINITION 28.8 ♡ **Application affine**
Si E et E′ sont deux espaces vectoriels, $f : E \to E'$ est une application affine si et seulement si il existe une application linéaire $L_f \in \mathscr{L}(E, E')$ telle que

$$\forall (A, \overrightarrow{x}) \in E^2, \quad f(A + \overrightarrow{x}) = f(A) + L_f\left(\overrightarrow{x}\right)$$

L'application linéaire L_f est appelée *application linéaire associée* à l'application affine f. Elle est unique. L'ensemble des applications affines est noté $\mathscr{A}(E, E')$, et $\mathscr{A}(E)$ lorsque $E = E'$.

Remarque 28.6 Si f est une application affine, alors

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad \boxed{\overrightarrow{f(A)f(B)} = L_f(\overrightarrow{AB})}.$$

Cette remarque permet de prouver l'unicité de L_f car L_f est entièrement déterminée par cette relation. Ainsi :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \quad L_f(\overrightarrow{x}) = f(x) - f(0)$$

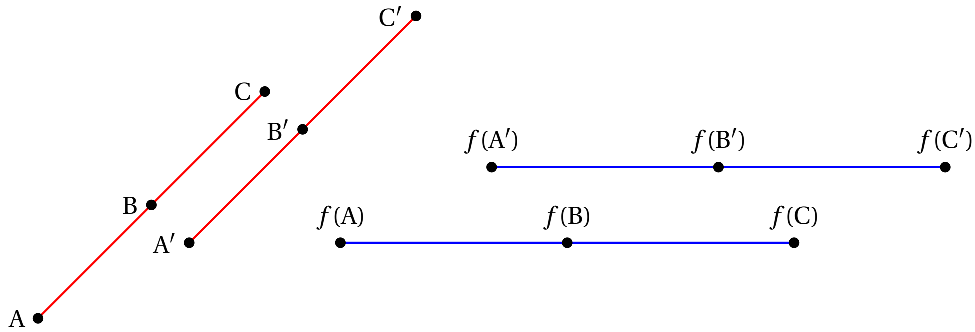


FIGURE 28.4 – Une application affine conserve l'alignement, le parallélisme et les barycentres

THÉORÈME 28.10 ♡ **Une application affine conserve l'alignement et le parallélisme**
Soit $f : E \mapsto E'$ une application affine.

1. Si $\mathscr{F} = M_F + F$ est un sous-espace affine de E, alors $f(\mathscr{F}) = f(M_F) + L_f(F)$: c'est un sous-espace affine de E′.
2. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux sous-espaces affines de E, $\mathscr{F} \parallel \mathscr{G} \implies f(\mathscr{F}) \parallel f(\mathscr{G})$.

Démonstration

1. $\boxed{\subset}$ *Soit* $N \in f(\mathscr{F})$. *Il existe* $M = M_F + \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}$ *tel que* $N = f(M)$. *On a de plus* $\overrightarrow{u} \in F$. *Donc* $N = f\left(M_F + \overrightarrow{u}\right) = f(M_F) + L_f\left(\overrightarrow{u}\right) \in f(M_F) + L_f(F)$.
   $\boxed{\supset}$ *Réciproquement, si* $N \in f(M_F) + L_f(F)$ *alors il existe* $\overrightarrow{u} \in F$ *tel que* $N = f(M_F) + L_f\left(\overrightarrow{u}\right) = f\left(M_F + \overrightarrow{u}\right)$ *et* $N \in f(\mathscr{F})$.
2. *Supposons que* $\mathscr{F} = M_F + F$ *et* $\mathscr{G} = M_G + G$ *où* $M_F, M_G \in E$ *et où* F *et* G *sont les directions respectives de* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$. *Comme* $\mathscr{F}$ *est parallèle à* $\mathscr{G}$, *on a :* $F \subset G$. *Avec la relation précédente, il vient :*

$$f(\mathscr{F}) = f(M_F) + L_f(F) \quad \text{et} \quad f(\mathscr{G}) = f(M_G) + L_f(G)$$

mais comme $F \subset G$ *et que* L_f *est linéaire, on a :* $L_f(F) \subset L_f(G)$ *donc* $f(\mathscr{F})$ *est parallèle à* $f(\mathscr{G})$.

THÉORÈME 28.11 ♡ **Une application affine conserve les barycentres**
Soit $f : E \mapsto E'$ une application affine. Soit $S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ un système pondéré de points de E de poids non-nul. Si G est le barycentre du système pondéré S, alors le point $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $S' = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Autrement dit :

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(A_i)}$$

Démonstration : Cela revient à prouver, d'après la remarque 28.3, que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(G) f(A_i)} = \overrightarrow{0}$. Mais :

$$\begin{aligned}
& \text{G est le barycentre du système pondéré S} \\
\iff & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \\
\iff & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_f\left(\overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{0} \text{ car } L_f \text{ est linéaire} \\
\iff & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f(G) f(A_i)} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 28.12 ♡ **Expression matricielle d'une application affine.**
Soient deux espaces vectoriels réels E et E′. Soit $\mathscr{R} = (\Omega, b)$ un repère cartésien de E et $\mathscr{R}' = (\Omega', b')$ un repère cartésien de E′, et $f : E \mapsto E'$ une application affine de partie linéaire L_f. Si X est la matrice des coordonnées d'un point A dans le repère $\mathscr{R}$ et X′ la matrice des coordonnées du point $f(A)$ dans le repère $\mathscr{R}'$, si L est la matrice de l'application linéaire L_f dans les deux bases b et b' et si T est la matrice des coordonnées du point $f(\Omega)$ dans le repère $\mathscr{R}'$, alors :

$$\boxed{X' = Z + LX}$$

Démonstration *On a :* $f(A) = f(\Omega) + L_f\left(\overrightarrow{\Omega A}\right)$ *ou encore :* $\overrightarrow{f(\Omega) f(A)} = L_f\left(\overrightarrow{\Omega A}\right)$. *Les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{f(\Omega) f(A)}$ *dans la base* b' *sont* $X' - Z$. *Celle de* $L_f\left(\overrightarrow{\Omega A}\right)$ *dans la même base sont :* LX *d'où l'égalité.*

Remarque 28.7 Dans $\mathbb{R}^2$, si $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ et $f(M)\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$, les formules d'une application affine sont de la forme :

$$\begin{cases} X & = \alpha + ax + by \\ Y & = \beta + cx + dy \end{cases}$$

THÉORÈME 28.13 ♡ **Caractérisation des isomorphismes affines par leur partie linéaire**

1. Si $f : E \mapsto E'$ et $g : E' \mapsto E''$ sont deux applications affines, alors $g \circ f$ est une application affine de partie linéaire $L_g \circ L_f$;
2. (f est bijective) $\iff$ (L_f est un isomorphisme) ;
3. Si $f : E \mapsto E'$ est une application affine bijective, alors f^{-1} est une application affine de partie linéaire $L_{f^{-1}} = (L_f)^{-1}$.

DÉFINITION 28.9 ♡ **Isomorphisme affine, automorphisme affine**

1. Si une application affine $f \in \mathscr{A}(E, E')$ est bijective, on dit que c'est un isomorphisme affine.
2. Si $E = E'$, on parlera d'automorphisme affine, l'ensemble des automorphismes affines est un groupe noté $(\mathscr{GA}(E), \circ)$, appelé *groupe affine* de E.

28.2.2 Translations affines

DÉFINITION 28.10 ♡ **Translations affines**
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de E on définit la **translation** $\tau_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$: c'est l'application

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \overrightarrow{u} \end{cases}$$

Une translation est une application affine de partie linéaire id_E.

THÉORÈME 28.14 ♡ **Groupe des translations affines**

1. Une application affine de E vers E est une translation si et seulement si sa partie linéaire est l'identité.
2. $\tau_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{id}_E$.
3. Pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, $\tau_{\overrightarrow{u}}\tau_{\overrightarrow{v}} = \tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$.
4. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.
5. L'ensemble $\mathscr{T}(E)$ des translations est un sous-groupe du groupe affine $(\mathscr{GA}(E), \circ)$.

Démonstration

1. *Le sens direct est clair. Réciproquement, si f est une transformation affine telle que $L_f = \mathrm{id}$ alors, fixant $A \in E$ et notant $B = f(A)$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, on a, pour tout $M = A + \overrightarrow{v} \in E$: $f(M) = f(A) + \overrightarrow{v} = B + \overrightarrow{v} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{v} = M + \overrightarrow{u}$. f est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.*
2. *Facile.*
3. *Pour tout $M \in E$, on a :*
$$\tau_{\overrightarrow{u}} \circ \tau_{\overrightarrow{v}}(M) = \tau_{\overrightarrow{u}}\left(M + \overrightarrow{v}\right) = M + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \tau_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}(M)$$
4. *Utilisant la relation précédente, on a : $\tau_{\overrightarrow{u}} \circ \tau_{-\overrightarrow{u}} = \tau_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{id}_E$. De même $\tau_{-\overrightarrow{u}} \circ \tau_{\overrightarrow{u}} = \mathrm{id}_E$. Donc $\tau_{\overrightarrow{u}}$ est bijective de réciproque : $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.*
5. *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$. On vérifie facilement que*
$$\tau_{\overrightarrow{u}} \circ \tau_{\overrightarrow{v}}^{-1} = \tau_{\overrightarrow{u}} \circ \tau_{-\overrightarrow{u}} = \tau_{\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}} \in \mathscr{T}(E)$$
ce qui prouve que $\mathscr{T}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{GA}(E), \circ)$.

28.2.3 Homothéties

DÉFINITION 28.11 ♡ **Homothétie**
On dit qu'une application affine est une **homothétie affine de rapport** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ si et seulement sa partie linéaire est égale à $\alpha \mathrm{id}$.

THÉORÈME 28.15 ♡ **Groupe des homothéties-translations**

1. Une homothétie affine f de rapport $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ possède un unique point fixe $\Omega \in E$ (centre de l'homothétie) et
$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{\Omega f(M)} = \alpha \overrightarrow{\Omega M}$$
2. L'ensemble des homothéties-translations $\mathscr{HT}(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $(\mathscr{GA}(E), \circ)$.

Démonstration

1. *Soit $A \in E$. Posons $B = f(A)$ et considérons $\Omega = A + \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u} \in E$. On a la série d'équivalence :*
$$\begin{aligned} & \Omega \text{ est un point fixe de } f \\ \iff & f(\Omega) = \Omega \\ \iff & f\left(A + \overrightarrow{u}\right) = A + \overrightarrow{u} \\ \iff & B + \alpha\overrightarrow{u} = A + \overrightarrow{u} \\ \iff & \overrightarrow{u} = \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$
Par suite, f admet un unique point fixe donné par $\Omega = A + \dfrac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{AB}$.
2. *Voir l'exercice 28.2 page 1114.*

28.2.4 Projections et symétries affines

DÉFINITION 28.12 ♡ **Projection affine**
Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F et G un supplémentaire de F dans E. Soit $M \in E$. D'après la proposition 28.6, il existe un unique point $M' \in \mathscr{F} \cap (M + G)$. On appelle projection affine sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G l'application $p : E \to E$ qui à $M \in E$ associe le point M' ainsi construit.
De plus, p est une application affine et son application linéaire associée est la projection de E sur F parallèlement à G.

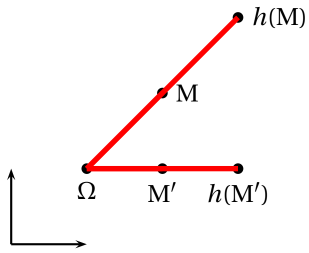


FIGURE 28.5 – Homothétie affine

Démonstration *Montrons que* p *est une application affine. Soient* $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{E}$ *et soit* $\mathrm{M}' = p(\mathrm{M})$ *et* $\mathrm{N}' = p(\mathrm{N})$*. Notons* $\overrightarrow{p}$ *la projection de* E *sur* F *parallèlement à* G*. On a :*

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MM}'} + \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{N}'} + \overrightarrow{\mathrm{N}'\mathrm{M}} = \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{N}'}}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{MM}'} + \overrightarrow{\mathrm{N}'\mathrm{M}}}_{\in \mathrm{G}}$$

donc $\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{p(\mathrm{M})\,p(\mathrm{N})}$ *ce qui prouve le résultat.*

DÉFINITION 28.13 ♡ **Symétrie affine**
Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F et G un supplémentaire de F dans E. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ et p la projection affine de E sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G. Il existe un unique point $\mathrm{M}' \in \mathrm{E}$ tel que $p(\mathrm{M})$ soit le milieu de $[\mathrm{M}, \mathrm{M}']$. On appelle symétrie affine par rapport à $\mathscr{F}$ parallèlement à G l'application $s : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ qui à $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$ associe le point M' ainsi construit. De plus, s est une isométrie affine et son application linéaire associée est la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G.

Démonstration s *est bien définie car* M' *est caractérisée par* $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{M}p(\mathrm{M})}$*. Montrons que* s *est affine : soient* $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{E}$ *et soit* $\mathrm{M}' = s(\mathrm{M})$ *et* $\mathrm{N}' = s(\mathrm{N})$*. Notons* $\overrightarrow{s}$ *la symétrie de* E *par rapport à* F *parallèlement à* G*. On a :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{M}p(\mathrm{M})} + \overrightarrow{p(\mathrm{M})\,p(\mathrm{N})} + \overrightarrow{p(\mathrm{N})\,\mathrm{N}} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{p(\mathrm{M})\,p(\mathrm{N})}}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{M}p(\mathrm{M})} + \overrightarrow{p(\mathrm{N})\,\mathrm{N}}}_{\in \mathrm{G}}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s}\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right) &= -\overrightarrow{\mathrm{M}p(\mathrm{M})} + \overrightarrow{p(\mathrm{M})\,p(\mathrm{N})} - \overrightarrow{p(\mathrm{N})\,\mathrm{N}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{M}'p(\mathrm{M})} + \overrightarrow{p(\mathrm{M})\,p(\mathrm{N})} + \overrightarrow{p(\mathrm{N})\,\mathrm{N}'} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{N}'} \\
&= \overrightarrow{s(\mathrm{M})\,s(\mathrm{N})}
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

28.2.5 Points fixes d'une homothétie affine

LEMME 28.16 **Points fixes d'une application affine**
Soit une application affine $f : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$. On note

$$\mathrm{Fix}(f) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{E} \mid f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\}$$

l'ensemble des points fixes de f. Alors lorsque $\mathrm{Fix}(f)$ n'est pas vide, c'est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}(\mathrm{L}_f - \mathrm{id})$.

Démonstration *Soit* $\Omega \in \mathrm{Fix}(f)$*. Posons* $\mathrm{F} = \left\{\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} \mid \mathrm{M} \in \mathrm{Fix}(f)\right\}$*. Montrons que* F *est un sous-espace vectoriel de* E*. Nous aurons ainsi prouvé que* $\mathrm{Fix}(f) = \Omega + \mathrm{F}$ *est un sous-espace affine de* E*.*

– $\mathrm{F} \neq \varnothing$ *car* $0 = \overrightarrow{\Omega\Omega} \in \mathrm{F}$*.*
– *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et soient* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathrm{F}$*. Il existe alors* $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{Fix}(f)$ *tels que* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$ *et* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{N}}$*. Remarquons que* $\mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{u}\right) = \mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right) = \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} = \overrightarrow{u}$*. De même :* $\mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v}$*. On a :* $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \in \mathrm{F}$*. En effet, posant* $\mathrm{P} = \Omega + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$*,*

$$f(\mathrm{P}) = f(\Omega) + \mathrm{L}_f\left(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}\right) = \Omega + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \mathrm{P}$$

donc $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{P}}$ *avec* $\mathrm{P} \in \mathrm{Fix}(f)$*.*

F *est donc bien un sous-espace vectoriel de* E.

THÉORÈME 28.17 ♡ **Factorisation d'une application affine**
Soit une application affine $f : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$, et un point $\Omega \in \mathrm{E}$. Alors il existe une translation t et une application affine g tels que $f = t \circ g$, avec Ω qui est un point fixe de l'application affine g : $g(\Omega) = \Omega$.

Démonstration *Si f admet un point fixe alors f est la composée d'elle même par la translation de vecteur nul. Si f n'admet pas de point fixe alors en fixant $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ et posant $\mathrm{B} = f(\mathrm{A})$, on a : $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $u = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq 0$. La composée $g = t_{-u} \circ f$ vérifie :*

$$t_{-u} \circ f(\mathrm{A}) = t_{-u}(\mathrm{B}) = \mathrm{B} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \mathrm{A}$$

donc elle admet un point fixe. g est de plus affine comme composée de fonction affine et on a : $f = t_u \circ g$ comme voulue.

28.3 Isométries affines

28.3.1 Définitions et propriétés

On considère un espace euclidien, muni d'un produit scalaire noté $(.\,|\,.)$ et de la norme euclidienne associée notée $\|.\|$. Étant donnés deux points $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$, on définit la *distance* entre ces points par :

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$$

DÉFINITION 28.14 ♡ **Isométrie affine**
Soit $f : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}$ une application. On dit que c'est une *isométrie affine* lorsqu'elle conserve les distances :

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2, \quad d\big(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})\big) = d(\mathrm{A},\mathrm{B})$$

THÉORÈME 28.18 ♡ **Caractérisation des isométries**
Une application f est une isométrie si et seulement si f est affine et sa partie linéaire L_f est un endomorphisme orthogonal.

Démonstration *Fixons $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. Pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, on a : $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{A}) + \mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$ où L_f est donnée par : $\mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})\, f(\mathrm{M})}$. Du fait que f conserve les distances, on tire :*

$$\left\|\mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{f(\mathrm{A})\, f(\mathrm{M})}\right\| = d\big(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{M})\big) = d(\mathrm{A},\mathrm{M}) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\|.$$

Montrons que L_f est linéaire et qu'elle préserve le produit scalaire.

1. *Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{E}$. On peut supposer que $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AN}}$ avec $\mathrm{M},\mathrm{N} \in \mathrm{E}$. On a donc :*

$$\mathrm{L}_f(\vec{u}) - \mathrm{L}_f(\vec{v}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})\, f(\mathrm{M})} - \overrightarrow{f(\mathrm{A})\, f(\mathrm{N})} = \overrightarrow{f(\mathrm{N})\, f(\mathrm{M})}$$

Utilisant l'égalité de polarisation 27.1 :

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{L}_f(\vec{u}) \mid \mathrm{L}_f(\vec{v})\right) &= \frac{1}{2}\left(\left\|\mathrm{L}_f(\vec{u})\right\|^2 + \left\|\mathrm{L}_f(\vec{v})\right\|^2 - \left\|\mathrm{L}_f(\vec{u}) - \mathrm{L}_f(\vec{v})\right\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| - \left\|\overrightarrow{f(\mathrm{N})\, f(\mathrm{M})}\right\|\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| - \left\|\overrightarrow{\mathrm{NM}}\right\|\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| - \|\vec{u} - \vec{v}\|\right)\\
&= (\vec{u} \mid \vec{v})
\end{aligned}$$

Donc L_f préserve le produit scalaire.

2. *Soit $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthogonale de E et soit $\vec{u} \in \mathrm{E}$. Comme L_f préserve le produit scalaire, la famille $\left(\mathrm{L}_f(\vec{e}_k)\right)_{k=1,\dots,n}$ est encore orthogonale en vertu de la proposition 27.6. Soit : $v = \sum_{k=1}^n \vec{v}_k \vec{\to} e_k$ avec pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k = (\vec{v} \mid \vec{e}_k)$. Comme la famille $\left(\mathrm{L}_f(\vec{e}_i)\right)$ est une famille orthogonale :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_f(\vec{v}) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{L}_f(\vec{v}) \mid \mathrm{L}_f(\vec{e}_k)\right) \mathrm{L}_f(\vec{e}_k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (\vec{v} \mid \vec{e}_k)\, \mathrm{L}_f(\vec{e}_k)
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que :

$$\mathrm{L}_f\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mathrm{L}_f\left(\vec{e}_k\right)$$

On en déduit facilement que L_f *est linéaire.*

3 *En résumé* f *est une application affine et sa partie linéaire* L_f *est un automorphisme orthogonal.*

28.3.2 Projections et symétries orthogonales, réflexions

DÉFINITION 28.15 ♡ **Projection, symétrie affine orthogonale, Réflexion**
Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F et G un supplémentaire de F dans E. Soit p et s la projection et la symétrie affine de E sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G. Si G est le supplémentaire orthogonal de F dans E, on dit que :
- p est la **projection affine orthogonale** sur $\mathscr{F}$
- s est la **symétrie affine orthogonale** par rapport à $\mathscr{F}$.

Si de plus, $\mathscr{F}$ est un hyperplan affine de E (c'est-à-dire une droite dans le plan ou plan dans l'espace) alors on appelle **réflexion** la symétrie affine orthogonale par rapport à $\mathscr{F}$.

PROPOSITION 28.19
Une symétrie affine est une isométrie si et seulement si elle est orthogonale.

Démonstration *Supposons que* s *est la symétrie affine par rapport à* $\mathscr{F}$ *de direction* F *parallèlement à* G *(*$\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$*). On a la série d'équivalence :*

$$\begin{aligned}
& s \text{ est une isométrie}\\
\iff & \text{L'application linéaire associée à } s : \mathrm{L}_s \text{ est orthogonale}\\
\iff & \text{F et G sont supplémentaires orthogonaux}\\
\iff & s \text{ est une symétrie orthogonale}
\end{aligned}$$

Remarque 28.8 On en déduit que les réflexions sont des isométries.

DÉFINITION 28.16 ♡ **Hyperplan médiateur d'un segment**
Soient $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathrm{E}$ deux points distincts de E. L'ensemble :

$$\mathscr{H}=\{\mathrm{M}\in\mathrm{E}\mid d(\mathrm{M},\mathrm{A})=d(\mathrm{M},\mathrm{B})\}$$

est un hyperplan affine de E appelée **hyperplan médiateur** du segment $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$.
De plus, $\mathscr{H}$ est orthogonal à $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ et passe par le milieu I de $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$.

Démonstration *Il est clair que* $\mathrm{I}\in\mathscr{H}$. *Notons* $\mathrm{H}=\mathrm{V}ect\overrightarrow{\mathrm{AB}}^{\perp}$. H *est clairement un hyperplan de* E. *Montrons que* $\mathscr{H}=\mathrm{I}+\mathrm{H}$ *ce qui prouvera la proposition.*
Pour tout $\mathrm{M}\in\mathrm{E}$*, on a :*

$$\begin{aligned}
& \left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right\|^2=0\\
\iff & \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MB}}\mid\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)=0\\
\iff & \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\mid 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)=0\\
\iff & \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\mid\overrightarrow{\mathrm{IM}}\right)=0
\end{aligned}$$

Donc :
- ⊂ *Si* $\mathrm{M}\in\mathrm{I}+\mathrm{H}$ *alors* $\overrightarrow{\mathrm{IM}}\in\mathrm{H}$ *et* $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\mid\overrightarrow{\mathrm{IM}}\right)=0$ *donc :* $d(\mathrm{M},\mathrm{A})=d(\mathrm{M},\mathrm{B})$ *et* $\mathrm{M}\in\mathscr{H}$.
- ⊃ *Si* $\mathrm{M}\in\mathrm{H}$ *alors* $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\mid\overrightarrow{\mathrm{IM}}\right)=0$ *et* $\mathrm{M}=\mathrm{I}+\overrightarrow{\mathrm{IM}}\in\mathrm{I}+\mathrm{H}$.

PROPOSITION 28.20
Etant donnés deux points $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathrm{E}$ distincts ; il existe une unique réflexion s telle que $s(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ et $s(\mathrm{B})=\mathrm{A}$.

Démonstration *Soit* $\mathscr{H}$ *l'hyperplan médiateur du segment* $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$. *La réflexion associée* r *échange* A *et* B. *Supposons que* r' *soit une autre réflexion qui échange* A *et* B. *Notons* $\mathscr{H}'$ *son hyperplan. Alors* $\mathscr{H}'$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. *Par unicité du supplémentaire orthogonal, la direction de* $\mathscr{H}'$ *est* $\mathrm{H}=\mathrm{V}ect\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^{\perp}$. *De plus, le milieu* I *de* $[\mathrm{A},\mathrm{B}]\in\mathscr{H}'$. *Donc* $\mathscr{H}'=\mathrm{I}+\mathrm{H}=\mathscr{H}$. *On en déduit que* $r=r'$.

DÉFINITION 28.17 ♡ **Déplacement**
On dit qu'une isométrie affine est un *déplacement* lorsque sa partie linéaire est une isométrie vectorielle directe : $L_f \in SO(E)$.

28.3.3 Déplacements du plan

DÉFINITION 28.18 ♡ **Rotation affine dans l'espace**
On appelle rotation tout déplacement de l'espace admettant au moins un point fixe.

THÉORÈME 28.21 ♡ **Classification des déplacements du plan**
Soit $f : E_2 \mapsto E_2$ un déplacement, alors

1. Si $L_f = \mathrm{id}$, f n'admet aucun point fixe et f est une translation ;
2. Si $L_f \neq \mathrm{id}$, f admet un et un seul point fixe $\Omega \in E_2$ et f est une rotation :
   - L_f est une rotation vectorielle r_θ.
   - $\forall M \in E_2, \quad f(M) = \Omega + r_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$

Démonstration *Les translations et les rotations affines sont des déplacement du plan. Réciproquement, si f est un déplacement du plan, par application du théorème* **??**, *L_f est une rotation vectorielle du plan d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Si $\theta = 0 \ [2\pi]$ alors $L_f = \mathrm{id}$ et en appliquant le théorème 28.17, f est une translation. Sinon, alors montrons que f admet un point fixe. En fixant un repère orthonormal direct dans le plan (O, i, j) et en notant dans ce repère :*

- (x, y) *les coordonnées de* $M \in E_2$
- (x', y') *celles de* $f(M)$
- (α, β) *celles de* $f(O)$

on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

M *est un point fixe de f si et seulement si $f(M) = M$ c'est-à-dire si et seulement si, utilisant la relation matricielle précédente :*

$$\begin{cases} (1-\cos\theta)\,x + \sin\theta\, y &= \alpha \\ -\sin\theta x + (1-\cos\theta)\,y &= \beta \end{cases}$$

mais

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{vmatrix} = 2 - 2\cos\theta \neq 0$$

car $\theta \neq 0\,[2\pi]$. Le système précédent admet donc une et une seule solution et f admet alors bien un point fixe noté A. f est donc de la forme : $\forall M \in E, \quad f(M) = A + r_\theta\left(\overrightarrow{AM}\right)$ et c'est bien une rotation du plan.

COROLLAIRE 28.22 ♡ **Description des rotations affines dans le plan**
f est une rotation affine du plan E_2 si et seulement si :

1. f admet un point fixe $\Omega \in E_2$.
2. $L_f = r_\theta$ où r_θ est la rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, pour tout $M \in E$:

$$\boxed{f(M) = \Omega + r_\theta\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)}$$

28.3.4 Déplacements de l'espace

DÉFINITION 28.19 ♡ **Rotation affine dans l'espace**
On appelle rotation tout déplacement de l'espace admettant au moins un point fixe.

PROPOSITION 28.23 ♡ **Description des rotations affines dans l'espace**
Soit $f : E_3 \mapsto E_3$ une rotation différente de l'identité. Alors :

1. $L_f = r_\theta$ où r_θ est une rotation vectorielle de l'espace d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et d'axe D.
2. $\mathscr{D} = \mathrm{Fix}(f)$ est une droite affine de direction notée D.
3. Soit $\mathscr{H}$ un plan affine de direction $H = D^\perp$. D'après la proposition 28.6, $\mathscr{H} \cap \mathscr{D}$ est un singleton. Notons Ω son élément. Alors : $\mathscr{H}$ est stable par f et $f_{|\mathscr{H}}$ est une rotation affine du plan $\mathscr{H}$ de centre Ω.

Démonstration

1. *Notons* A *un point fixe de* f. f *étant un déplacement de l'espace, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$*, on peut écrire :*

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{A} + \mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right)$$

avec $\mathrm{L}_f \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. *Par application du théorème 27.36, il existe un axe vectoriel* D *de l'espace tel que* L_f *est une rotation vectorielle d'axe* D *d'angle* $\theta \in \mathbb{R}$. *Cet axe* D *est formé de vecteurs invariants pour* L_f.

2. *Plus précisément, si* $f \neq \mathrm{id}$*, on a :* $\mathrm{D} = \mathrm{Ker}(\mathrm{L}_f - \mathrm{id})$. *D'après la proposition 28.16,* $\mathrm{Fix}(f)$ *est un sous-espace affine de* E *de direction* $\mathrm{Ker}(\mathrm{L}_f - \mathrm{id})$*, il vient alors* $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{A} + \mathrm{D} = \mathscr{D}$.

3. *Soit* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur unitaire engendrant* D. *Les points de* $\mathscr{H}$ *sont caractérisées par :*

$$\mathrm{M} \in \mathscr{H} \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} \mid \overrightarrow{u}\right) = 0.$$

On vérifie alors facilement que $f(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H}$ *: Soit* $\mathrm{M} \in \mathscr{H}$. *On a donc :* $(\Omega\mathrm{M} \mid \overrightarrow{u}) = 0$. *Mais*

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\Omega f(\mathrm{M})} \mid \overrightarrow{u}\right) &= \left(\overrightarrow{f(\Omega) f(\mathrm{M})} \mid \overrightarrow{u}\right)\\
&= \left(\mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}\right) \mid \mathrm{L}_f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)\\
&= \left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} \mid \overrightarrow{u}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

car $\mathrm{L}_f \in \mathrm{E}_3$. *Donc* $f(\mathrm{M}) \in \mathscr{H}$ *et* $\mathscr{H}$ *est stable par* f.

Il est clair que, f *étant une isométrie de* E_3, $f_{|\mathscr{H}}$ *est une isométrie de* $\mathscr{H}$. *Montrons qu'elle est directe. Soit* $\overrightarrow{u} \in \mathrm{D}$ *un vecteur unitaire orientant* D. *Ce vecteur étant normal à* $\mathscr{H}$ *il oriente ce plan. Complétons le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *en une base orthonormale directe* $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ *de* E_3 *en sorte que* $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ *forme une base orthonormale directe de* $\mathscr{H}$. *la matrice de* L_f *dans cette base est de la forme :* $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{S} \end{pmatrix}$ *et où* S *est la matrice de* $\mathrm{L}_{f\,|\mathrm{H}}$. *On a donc,* f *préservant l'orientation :* $1 = \det \mathrm{R} = \det \mathrm{S}$ *et* $f_{|\mathscr{H}}$ *est une isométrie directe du plan* $\mathscr{H}$*.D'après le théorème 28.21, on en déduit que :* $f_{|\mathscr{H}}$ *est une rotation affine du plan* $\mathscr{H}$ *de centre* Ω.

LEMME 28.24 ♡
Soit f une rotation d'axe $\mathscr{D}$ de direction D et soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{D}^{\perp}$ alors $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ est encore une rotation d'axe $\mathscr{D}'$ de direction D.

Démonstration *Il suffit pour prouver le lemme de montrer que* $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ *admet au moins un point fixe. Considérons* $\mathscr{H}$ *un plan affine de direction* $\mathrm{H} = \mathrm{D}^{\perp}$. *Comme dit dans la proposition 28.23, si* Ω *est le point d'intersection de* $\mathscr{H}$ *et* $\mathscr{D}$, $f_{|\mathscr{H}}$ *est une rotation affine du plan* $\mathscr{H}$ *de centre* Ω. *Comme* $\overrightarrow{u} \in \mathrm{D}^{\perp}$*, on vérifie facilement que* $t_{\overrightarrow{u}} \circ f_{|\mathrm{H}}$ *est une isométrie directe de* $\mathscr{H}$ *et que ce n'est pas une translation de* $\mathscr{H}$. *D'après le théorème de classification des déplacements 28.21 du plan, on en déduit que* $t_{\overrightarrow{u}} \circ f_{|\mathrm{H}}$ *est une rotation affine du plan* $\mathscr{H}$ *et donc qu'elle admet un point fixe dans* $\mathscr{H}$. *Ce point fixe est aussi un point fixe de* $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ *ce qui prouve le résultat.*

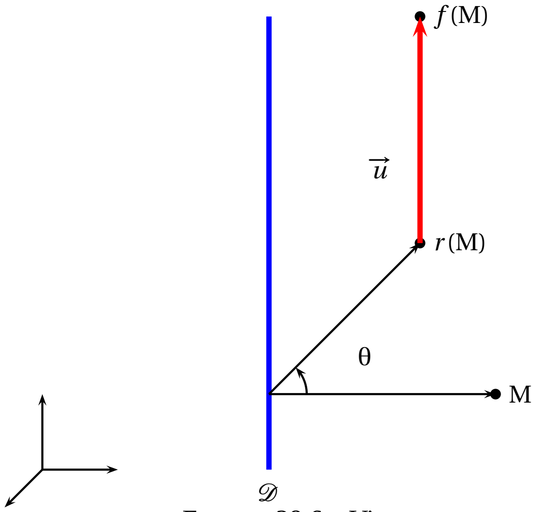


FIGURE 28.6 – Vissage

DÉFINITION 28.20 ♡ **Vissage**
Soit $f : \mathrm{E}_3 \mapsto \mathrm{E}_3$ une application affine, $\mathscr{D}$ une droite affine de E_3 de direction D , $\theta \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathrm{D}$ un vecteur de D. On dit que f est un vissage d'axe $\mathscr{D}$, d'angle θ et de vecteur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si f est la composée de la translation de vecteur u et de la rotation affine d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle θ..

Remarque 28.9 On détermine l'axe $\mathscr{D}$ d'un vissage f par la condition :

$$\mathscr{D} = \{M \in E \mid \overrightarrow{Mf(M)} \in D\}$$

THÉORÈME 28.25 ♡ **Classification des déplacements de l'espace**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ un déplacement de l'espace E_3. On note $\text{Fix}(f)$ l'ensemble des points invariants par f :

$$\text{Fix}(f) = \{M \in E_3 \mid f(M) = M\}$$

1. $L_f = \text{id}$: f est une translation ;
2. $L_f \neq \text{id}$, alors L_f est une rotation vectorielle d'axe $D = \text{Vect}(\overrightarrow{d})$ et d'angle θ ;
   (a) Si $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$ alors $\text{Fix}(f)$ est une droite affine $\mathscr{D}$ de direction la droite vectorielle D. On dit que f est une rotation affine d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle θ,
   (b) Si $\text{Fix}(f) = \emptyset$, alors f est la composée d'une rotation d'axe $\mathscr{D}$ (droite de direction D) et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in D$. On dit que f est un *vissage* d'axe $\mathscr{D}$, d'angle θ et de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Démonstration *Les translations, les rotations et les vissages sont des déplacements du plan. Réciproquement, supposons que f est un déplacement du plan, et montrons que f est une de ces 3 application. Si f admet un point fixe alors f est une rotation. Sinon, si f n'admet pas de point fixe, alors d'après le théorème de factorisation d'une application affine 28.17, il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $g = t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ soit une application affine avec au moins un point fixe. Si $L_g = \text{id}$ est alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Sinon, g est, par définition, une rotation. Notons $\mathscr{D}$ son axe, D la direction de $\mathscr{D}$ et H le supplémentaire orthogonal de D dans E. Il y a deux possibilités :*

- *Soit $\boxed{\overrightarrow{u} \in D}$ dans quel cas $f = t_{-\overrightarrow{u}} \circ g$ est un vissage d'axe $\mathscr{D}$.*
- *Soit $\boxed{\overrightarrow{u} \notin D}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \in D \oplus^{\perp} H$. Il vient $f = t_{-\overrightarrow{u_1}} \circ t_{-\overrightarrow{u_2}} \circ g$ mais d'après le lemme 28.24, $t_{-\overrightarrow{u_2}} \circ g$ est une rotation d'axe $\mathscr{D}'$ de direction D car $\overrightarrow{u_2} \in H = D^{\perp}$. Comme $\overrightarrow{u_1} \in D$, $f = t_{-\overrightarrow{u_1}} \circ t_{-\overrightarrow{u_2}} \circ g$ est une rotation si $\overrightarrow{u_1} = 0$ et un vissage sinon, dans les deux cas d'axe $\mathscr{D}'$.*

28.4 Similitudes

DÉFINITION 28.21 ♡ **Similitude**
On appelle *similitude* une application $f : E \mapsto E$ telle que $\forall (A,B) \in E^2$, $d(f(A), f(B)) = kd(A,B)$ où $k \in \mathbb{R}^{\star}$. Le réel k s'appelle le *rapport* de la similitude.

Remarque 28.10 Une homothétie affine est une similitude, une isométrie affine est une similitude de rapport 1.

Remarque 28.11 On montre que f est une similitude de rapport k si et seulement si f est une application affine de partie linéaire L_f vérifiant :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \ \|L_f(\overrightarrow{x})\| = k\|\overrightarrow{x}\|$$

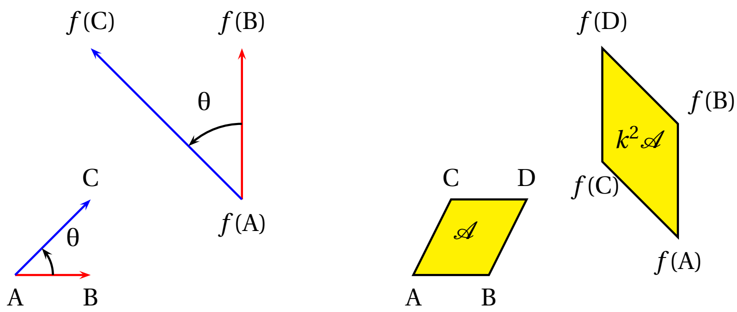
c'est-à-dire que $L_f = ku$ avec $u \in O(E)$.

PROPOSITION 28.26 **Groupe des similitudes**
L'ensemble des similitudes forme un sous-groupe du groupe affine.

DÉFINITION 28.22 ♡ **Similitude directe**
On dit qu'une similitude f est directe (resp. indirecte) si $\det(L_f) > 0$ (resp. $\det(L_f) < 0$). L'ensemble des similitudes directes forme un sous-groupe du groupe des similitudes.

THÉORÈME 28.27 ♡ **Propriétés des similitudes directes**
Soit une similitude directe du plan $\mathscr{E}_2$. Alors :

1. f conserve les angles orientés : Pour trois points (A,B,C) de $\mathscr{E}_2$ avec $A \neq B$, $A \neq C$, l'angle $\measuredangle\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}\right) = \measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
2. f multiplie les aires par k^2 : Si (ABCD) est un parallélogramme, $\mathscr{A}(f(A)f(B)f(C)f(D)) = k^2\mathscr{A}(ABCD)$.



(a) Conservation des angles (b) Multiplication des aires par k^2

FIGURE 28.7 – Similitudes directes

THÉORÈME 28.28 ♡ **Classification des similitudes directes du plan**
Soit une similitude directe du plan $\mathscr{E}_2$ de rapport k.

1. Si $k = 1$, alors f est une isométrie affine (translation ou rotation).
2. Si $k \neq 1$, f possède un unique point fixe Ω et il existe une rotation affine $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω, d'angle θ et une homothétie affine de centre Ω et de rapport k telles que

$$f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}$$

PROPOSITION 28.29 **Représentation complexe d'une similitude directe**
En identifiant le plan avec $\mathbb{C}$, une similitude directe de rapport k et d'angle θ correspond à une application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{cases}$$

où $a = ke^{i\theta}$ et $b \in \mathbb{C}$.

COROLLAIRE 28.30
Étant donnés deux segments du plan, $[A,B]$ et $[C,D]$, il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

28.5 Exercices

28.5.1 Sous-espaces affines

Exercice 28.1

On considère une partie non vide $\mathscr{F}$ d'un espace affine de dimension finie $\mathscr{E}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ si et seulement si pour tous points distincts $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathscr{F}$, la droite (AB) est incluse dans $\mathscr{F}$.

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F. Soient A,B deux points distincts de $\mathscr{F}$ et M un point de (AB). Alors il existe $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Mais alors $\mathrm{M}=\mathrm{A}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}\in\mathscr{F}$ car $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\in\mathrm{F}$. Donc $(\mathrm{AB})\subset\mathscr{F}$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons que pour tout couple (A,B) de points distincts de $\mathscr{F}$, on a $(\mathrm{AB})\subset\mathscr{F}$. Montrons que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. Soit $\mathrm{A}\in\mathscr{F}$ et $\mathrm{F}=\left\{\overrightarrow{\mathrm{AM}}\mid\mathrm{M}\in\mathscr{F}\right\}$. Il faut montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$. Soient $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}\in\mathrm{F}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{P}\in\mathscr{E}$ tel que $\mathrm{P}=\mathrm{A}+\alpha\overrightarrow{u}$. Alors P est élément de la droite (AM) et comme cette droite est incluse dans $\mathscr{F}$, $\mathrm{P}\in\mathscr{F}$. Donc $\alpha\overrightarrow{u}\in\mathrm{F}$. Soit $\mathrm{Q}\in\mathscr{E}$ tel que $\mathrm{Q}=\mathrm{A}+\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. On sait que $\mathrm{M},\mathrm{N}\in\mathscr{F}$ donc $(\mathrm{MN})\subset\mathrm{F}$ et plus particulièrement, le milieu I de $[\mathrm{MN}]$ est élément de $\mathscr{F}$. Mais comme AMQN est un parallélogramme, I est aussi le milieu de $[\mathrm{AQ}]$ Donc $\mathrm{Q}\in(\mathrm{AI})$ et on a bien $\mathrm{Q}\in\mathscr{F}$ ce qui prouve que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\in\mathrm{F}$. Alors F est bien un sous-espace vectoriel de E et $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.*

28.5.2 Applications affines

Exercice 28.2 ♡

On considère un espace affine $\mathscr{E}$. Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport $\alpha\neq 0,1$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Déterminer la nature des applications $t\circ h$ et $h\circ t$.

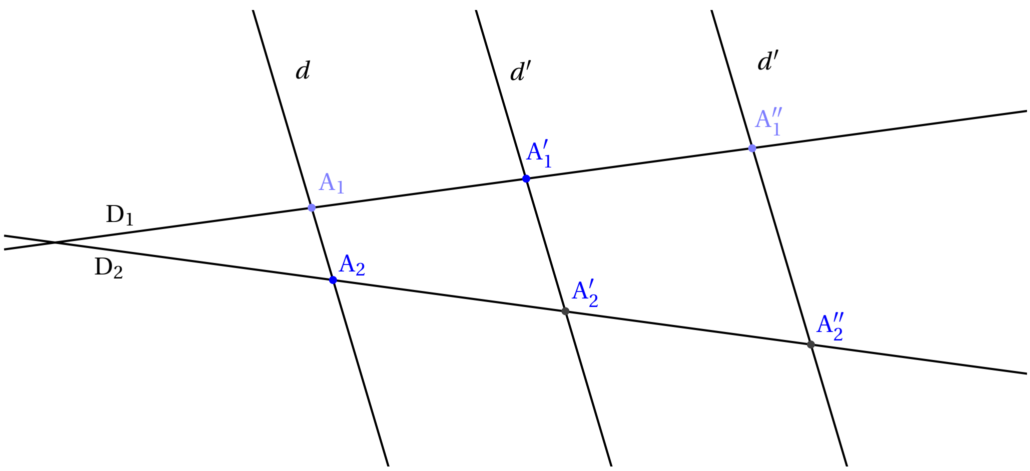
Solution :

- *On note $\psi=t\circ h$. Alors pour tout $\mathrm{M}\in\mathscr{E}$, $\psi(\mathrm{M})=\Omega+k\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}+\overrightarrow{u}$. Cherchons les points fixes de ψ. On a $\psi(\mathrm{M})=\mathrm{M}$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{u}$. Notons alors ω le point de $\mathscr{E}$ vérifiant $\overrightarrow{\Omega\omega}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{u}$. C'est l'unique point fixe de ψ. De plus, la partie linéaire de ψ est donnée pour tout $\overrightarrow{x}\in\mathrm{E}$ par $\overrightarrow{\psi}\left(\overrightarrow{x}\right)=k\overrightarrow{x}$. Donc ψ est l'homothétie de centre ω et de rapport k.*
- *On considère maintenant $\varphi=t\circ h$. Pour tout $\mathrm{M}\in\mathscr{E}$, $\varphi(\mathrm{M})=\Omega+k\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}+k\overrightarrow{u}$. M est un point fixe de φ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}=\frac{k}{1-k}\overrightarrow{u}$. Notons ω le point de $\mathscr{E}$ ainsi défini. La partie linéaire de φ est $\overrightarrow{\varphi}$ donnée pour tout $\overrightarrow{x}\in\mathrm{E}$ par $\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right)=k\overrightarrow{x}$. On reconnaît que φ est l'homothétie de centre ω et de rapport k.*

Exercice 28.3 ♡

1. *Soient A, B et C trois points alignés ($\mathrm{C}\neq\mathrm{A}$) du plan affine. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de la droite qu'ils définissent. Il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\alpha\overrightarrow{u}$. Le réel α est appelé mesure algébrique et est noté $\overline{\mathrm{AB}}$. Il dépend évidemment du choix de $\overrightarrow{u}$. Montrer que ce n'est pas le cas du rapport $\overline{\mathrm{AB}}/\overline{\mathrm{AC}}$.*
2. *Soient d,d',d'' trois droites paralèles du plan affine ($d\neq d'$) et $\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2$ deux droites du plan affine non parallèles à d. Pour $i=1,2$, on pose $\mathrm{A}_i=\mathscr{D}_i\cap d$, $\mathrm{A}'_i=\mathscr{D}_i\cap d'$, $\mathrm{A}''_i\mathrm{S}=\mathscr{D}_i\cap d''$.*
   (a) *Démontrer le **théorème de Thalès** :*

$$\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}''_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}'_1}}=\frac{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}''_2}}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}'_2}}.$$



(b) *Démontrer la* **réciproque du théorème de Thalès** *: Si* $B \in \mathscr{D}_1$ *vérifie*

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$$

alors $B \in d''$ *(et* $B = A_1''$*).*

Solution :

1. *Soit* $\vec{u}'$ *un autre vecteur directeur de la droite définie par les trois points. Il existe* $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$ *tels que* $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} = \alpha'\vec{u}'$ *et* $\overrightarrow{AC} = \beta\vec{u} = \beta'\vec{u}'$*. Comme* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont non nuls et colinéaires, il existe* $\gamma \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $\vec{u}' = \gamma\vec{u}$*. Alors* $\alpha'\gamma = \alpha$ *et* $\beta'\gamma = \beta$*. Il s'ensuit que* $\alpha'/\beta' = \alpha/\beta$ *et on a prouvé que le rapport* $\overline{AB}/\overline{AC}$ *est indépendant du choix de* $\vec{u}$*.*
2. (a) *On considère* p *la projection sur* $\mathscr{D}_2$ *parallèlement à* d*. On note* $\vec{p}$ *la projection vectorielle associée. On sait que comme* A_1*,* A_1' *et* A_1'' *sont alignés, il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\overrightarrow{A_1A_1''} = \alpha\overrightarrow{A_1A_1'}$*. De plus,* $\alpha = \overline{A_1A_1''}/\overline{A_1A_1'}$ *(*$\overline{A_1A_1'} \neq 0$ *car* $d \neq d'$*). Mais comme* d*,* d' *et* d'' *sont parallèles,* $p(A_1) = A_2$*,* $p(A_1') = A_2'$ *et* $p(A_1'') = A_2''$*. De plus*

$$\overrightarrow{A_2A_2''} = \vec{p}\left(\overrightarrow{A_1A_1''}\right) = \alpha\vec{p}\left(\overrightarrow{A_1A_1'}\right) = \alpha\overrightarrow{A_2A_2'}$$

et on a aussi $\alpha = \overline{A_2A_2''}/\overline{A_2A_2'}$ *ce qui prouve le théorème de Thalès.*

(b) *Supposons que* $B \in \mathscr{D}_1$ *vérifie* $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}} = \dfrac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$ *alors avec les notations précédentes*

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}}\overrightarrow{A_1A_1'} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}\overrightarrow{A_1A_1'} = \frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}}\overrightarrow{A_1A_1'} = \overrightarrow{A_1A_1''}$$

et $B = A_1''$*.*

Exercice 28.4 ♡♡

1. *Prouver que la composée de deux homothéties de centres respectifs* A_1 *et* A_2 *(*$A_1 \neq A_2$ *) et de rapports* k_1 *et* k_2 *est une homothétie de rapport* k_1k_2 *et de centre aligné avec* A_1 *et* A_2*.*
2. *En déduire le* **théorème de Menelaüs** *: Soient* ABC *un triangle et* A'*,* B'*,* C' *trois points du plan tels que* $A' \in (BC)$*,* $B' \in (AC)$ *et* $C' \in (AB)$*. Alors* A'*,* B' *et* C' *sont alignés si et seulement si ils vérifient*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Solution :

1. *Soit* M *un point du plan. Alors* $M' = h_1(M) = A_1 + k_1\overrightarrow{A_1M}$ *et*

$$h_2 \circ h_1(M) = h_2(M') = A_2 + k_2\overrightarrow{A_2M'} = A_2 + k_2\left(\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1M'}\right) = A_2 + k_2\overrightarrow{A_2A_1} + k_1k_2\overrightarrow{A_1M}$$

et on reconnaît que $h_1 \circ h_2$ *est l'homothétie de centre* $A_2 + k_2\overrightarrow{A_2A_1}$ *et de rapport* k_1k_2*. Il est clair que* $A_2 + k_2\overrightarrow{A_2A_1}$ *est un point de* (A_1A_2)*.*

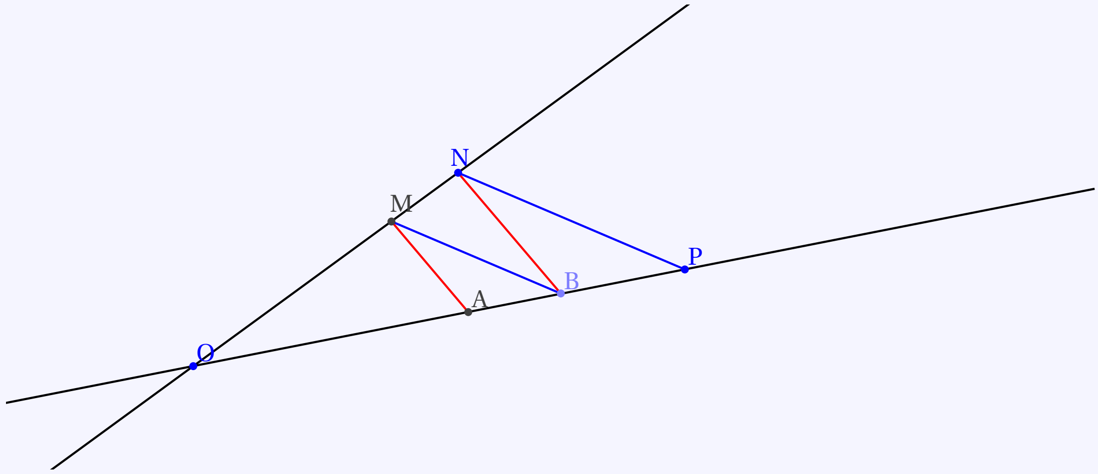
$\boxed{\Rightarrow}$ *On suppose que* A'*,* B' *et* C' *sont alignés. On considère l'homothétie* h_1 *de centre* A' *et de rapport* $\overline{A'B}/\overline{A'C}$*, l'homothétie* h_2 *de centre* B' *et de rapport* $\overline{B'C}/\overline{B'A}$ *et l'homothétie* h_3 *de centre* C' *et de rapport* $\overline{C'A}/\overline{C'B}$*. Alors* $h_1(C) = B$*,* $h_2(A) = C$ *et* $h_3(B) = A$ *donc si* $h = h_3 \circ h_1 \circ h_2$*,* $h(A) = A$*. De plus, d'après la première question,* $h_3 \circ h_1$ *est une homothétie de centre* Ω *sur la droite* $(A'C')$ *et donc* h *est aussi une homothétie de centre sur la droite* $(\Omega B')$*. Comme* A', B', C' *sont alignés, ce centre est sur* $(B'C')$*. Donc il ne peut être égale à* A*. On en déduit que* $h = \mathrm{id}$*. Le rapport de* h *est donc* 1*. Mais il vaut aussi* $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ *d'où l'égalité.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, on considère les mêmes trois homothéties de la question précédentes. Comme* $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$*, on a à nouveau* $h = \mathrm{id}$*. Donc* $h_1 \circ h_2 = h_3^{-1}$*. Mais* h_3^{-1} *est l'homothétie de centre* C' *et de rapport* $\overline{C'B}/\overline{C'A}$ *et le centre de l'homothétie* $h_1 \circ h_2$ *est sur la droite* $(A'B')$*. On en déduit que les points* A'*,* B' *et* C' *sont alignés.*

Exercice 28.5 ♡

Soit D *et* D′ *deux doites sécantes en* O. *Soit* A *et* B *deux points fixés sur* D. *On considère* M *et* N *sur* D′ *tels que* (AM) *et* (BN) *sont parallèles.* (BM) *et* (PN) *sont parallèles.*
Démontrer que le point P *reste fixe lorsque* M *se déplace sur la droite* D *(pivée de* O*).*

Solution : *C'est un exercice emprunté à un manuel de seconde. Il peut se traiter avec le théorème de Thalès.*



Or, avec notre nouveau vocabulaire, le théorème de Thalès s'énonce : Les projections sont des applications affines.
On considère donc p_M *la projection sur* D′ *parallèlement à* (AM) *et* p_B *la projection sur* D′ *parallèlement à* (BM). $p_B \circ p_M$ *est une application affine qui laisse la droite* D *invariante. Donc la (double) restriction* f_M *de* $p_B \circ p_M$ *à* D *est affine. On a* $f_M(A) = B$ *et* $f_M(O) = O$. *Donc toutes les* f_M *sont égales sur un repère affine de* D, *donc elles sont toutes égales entre elles et donc* $f_M(B) = P$ *quelle que soit la position de* M, *ce qu'il fallait démontrer.*

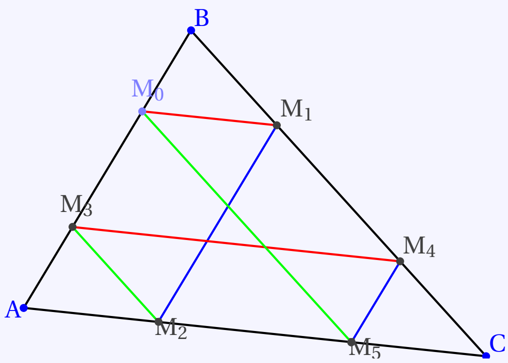
Exercice 28.6 ♡

Soit ABC *un triangle. On choisit un point* M_0 *appartenant à* [AB]*.*

- *La parallèle à* [AC] *passant par* M_0 *coupe* [BC] *en* M_1.
- *La parallèle à* [AB] *passant par* M_1 *coupe* [AC] *en* M_2.
- *La parallèle à* [BC] *passant par* M_2 *coupe* [AB] *en* M_3.
- *La parallèle à* [AC] *passant par* M_3 *coupe* [BC] *en* M_4.
- *La parallèle à* [AB] *passant par* M_4 *coupe* [AC] *en* M_5.
- *La parallèle à* [BC] *passant par* M_5 *coupe* [AB] *en* M_6.

Démontrer que $M_0 = M_6$. *Démontrer que les triangles* $M_1M_3M_5$ *et* $M_2M_4M_6$ *ont la même aire.*

Solution :



On peut démontrer que $M_0 = M_6$ *en utilisant la propriété de Thalès. Il est plus confortable de remarquer que l'application* $M_i \longmapsto M_{i+1}$ *par une projection oblique, donc affine : par composition, l'application* $M_0 \longmapsto M_6$ *est une transformation affine de la droite* (AB). *On vérifie facilement que les points* A *et* B *sont invariants, donc* $M_0 \longmapsto M_6$ *est l'identité.*
Il est simple de démontrer que les triangles $M_1M_3M_5$ *et* $M_2M_4M_6$ *ont la même aire dans le cas où* $A_0B_0C_0$ *est un triangle isocèle rectangle en* A_0. *Il suffit de regarder la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de* [BC]. *Maintenant il existe une (unique) transformation affine qui tansforme le repère affine* (A_0, B_0, C_0) *en* (A, B, C). *Cette transformation multiplie les aires par un facteur constant : la valeur absolue du déterminant de l'application vectorielle associée. C'est le jacobien. Donc en fin de compte, les aires sont égales.*

Exercice 28.7 ♡

On considère une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = \mathrm{id}$. Montrer que f admet un point fixe.

Solution : *Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$. Notons G l'isobarycentre des points A, $f(\mathrm{A})$, …, $f^{n-1}(\mathrm{A})$. Alors $f(\mathrm{G})$ est l'isobarycentre des points $f(\mathrm{A})$, $f^2(\mathrm{A})$, …, $f^n(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et donc $f(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$.*

Exercice 28.8 ♡♡

Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Montrer que :

1. *f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$.*
2. *f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}$.*

Solution :

1. *On note $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée à f, F la direction de $\mathrm{Im}\,\mathrm{F}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}\,\overrightarrow{f}$.*

   $\boxed{\Rightarrow}$ *Si f est une projection affine alors $\overrightarrow{f}$ est une projection vectorielle sur F parallèlement à G. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{F}$ (donc $\mathrm{A} = f(\mathrm{A})$) et $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ alors*

   $$\overrightarrow{\mathrm{A}f^2(\mathrm{M})} = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f^2(\mathrm{M})} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{M})}\right) = \overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{M})}$$

   car $\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{M})} \in \mathrm{F}$ et donc $f^2(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M})$. On a montré que $f^2 = f$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, on suppose que $f^2 = f$. Montrons que $\overrightarrow{f}$ est la projection sur F parallèlement à G. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \overrightarrow{u}$. Alors*

   $$\overrightarrow{f}^2(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f}^2\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \overrightarrow{f^2(\mathrm{A})f^2\mathrm{M}} = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{M})} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

   et donc $\overrightarrow{f}^2 = \overrightarrow{f}$ ce qui permet d'affirmer que $\overrightarrow{f}$ est un projecteur et que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. Comme $f^2(\mathrm{A}) = f(\mathrm{A})$, $f(\mathrm{A})$ est un point fixe de f. Mais si $\mathscr{F} = f(\mathrm{A}) + \mathrm{F}$ alors f prend la même valeur en $f(\mathrm{A})$ et à la même application linéaire associée que la projection affine sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G. Donc f est la projection affine sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G.

2. *On note $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée à f, F la direction de $\mathrm{Im}\,f$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}\,\overrightarrow{f}$.*

   $\boxed{\Rightarrow}$ *On suppose que f est une symétrie affine alors $\overrightarrow{f}$ est une symétrie vectorielle. Soit $\mathrm{A}_0 \in \mathscr{E}$ et A le milieu de $[\mathrm{A}_0 f(\mathrm{A}_0)]$. Alors $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$*

   $$f^2(\mathrm{M}) = s\left(s(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\right) = s\left(\mathrm{A} + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\right) = \mathrm{A} + \overrightarrow{f}^2\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \mathrm{M}$$

   donc $f^2 = \mathrm{id}$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ *Si $f^2 = \mathrm{id}$, on vérifie que $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \mathrm{id}$. En effet, si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$ alors*

   $$\mathrm{B} = f^2(\mathrm{B}) = f\left(f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right) = f^2(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}^2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \mathrm{A} + \overrightarrow{f}^2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

   et $f^2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donc $\overrightarrow{f}^2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_\mathrm{E}\right)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} + \mathrm{id}_\mathrm{E}\right)$. On sait donc que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans E. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et I le milieu de $[\mathrm{A}f(\mathrm{A})]$. Comme $f^2(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, $f(\mathrm{I})$ est le milieu de $[f(\mathrm{A})f^2(\mathrm{A})] = [\mathrm{A}f(\mathrm{A})]$ donc $f(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$ et I est un point fixe de f. Posons alors $\mathscr{F} = \mathrm{I} + \mathrm{F}$. Alors f est la symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ parallèlement à G car elle prend la même valeur en I et admet la même partie linéaire.

Exercice 28.9 ♡

Reconnaître les applications suivantes :

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(-x + 2y - 2z - 2, -3y + 2z + 6, -4y + 3z + 6\right) \end{cases}$
2. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \frac{1}{6}\left(3y - 3z + 4, -6x + 9y - 3z + 4, -6x + 3y + 3z + 4\right) \end{cases}$.

Solution :

1. f_1 est de la forme $AX+Y$ avec $A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\0&-3&2\\0&-4&3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}-2\\6\\6\end{pmatrix}$ donc c'est bien une application affine. On résout l'équation $f_1(x,y,z)=(x,y,z)$ pour trouver l'ensemble des points fixes de f_1. Cet ensemble est donné par le système $\begin{cases}x-y+z&=-1\\-2y+z&=-3\end{cases}$. On reconnaît la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(2,1,-1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}=(1,-1,-2)$. Comme $A^2=I_3$, $\overrightarrow{f}$ est une symétrie parallèlement à $G=\operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f}+\operatorname{id}\right)$. Ce plan est engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ et admet donc comme équation cartésienne : $y-z=0$. En conclusion, f_1 est la symétrie par rapport à la droite $\mathscr{D}$ et parallèlement à G.
2. f_2 est de la forme $AX+Y$ avec $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&2&-2\\0&-3&2\\0&-4&3\end{pmatrix}$ et $Y=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc c'est bien une application affine. On résout l'équation $f_2(x,y,z)=(x,y,z)$ pour trouver l'ensemble des points fixes de f_2 et on trouve le plan affine $\mathscr{F}$ d'équation $6x-3y+3z-4=0$. Comme $A^2=A$, $\overrightarrow{f}_2$ est une projection vectorielle parallèlement à la direction $G=\operatorname{Ker}\overrightarrow{f}_2=\operatorname{V}ect(1,1,1)$. En conclusion, f_2 est la projection sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G.

Exercice 28.10 ♡

Soit $E=\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. Écrire l'expression analytique de la réflexion r échangeant les points $A\begin{vmatrix}1\\2\\0\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$.

Solution : r est une réflexion par rapport au plan $\mathscr{P}$ passant par le milieu $(1,3/2,1/2)$ de $[AB]$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. Une équation cartésienne de ce plan est $-y+z+1=0$. Si $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on note (x',y',z') les coordonnées de $M'=r(M)$. Le milieu de $[Mr(M)]$ est un point de $\mathscr{P}$ donc

$$-\frac{y+y'}{2}+\frac{z+z'}{2}+1=0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{Mr(M)}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases}x'-x&=0\\y'-y&=-\alpha\\z'-z&=\alpha\end{cases}$$

et donc $-(y'-y)+(z'-z)=2\alpha$ ce qui donne grâce à la première relation $\alpha=1+y-z$. On reporte dans le système et on trouve une expression analytique de r :

$$\begin{cases}x'&=x\\y'&=-2+z\\z'&=1+y\end{cases}.$$

Exercice 28.11 ♡

Déterminer l'expression analytique de la réflexion par rapport au plan

$$\mathscr{P}: x+y-z=1$$

Solution : Soit r la réflexion par rapport au plan $\mathscr{P}$. Si $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on note (x',y',z') les coordonnées de $M'=r(M)$. Le milieu de $[Mr(M)]$ est un point de $\mathscr{P}$ donc

$$\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}-\frac{z+z'}{2}=1$$

Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{u}=(1,1,-1)$. Comme r est la symétrie par rapport à $\mathscr{P}$ selon $\overrightarrow{u}$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MM'}=\alpha\overrightarrow{u}$ et on a

$$\begin{cases}x'-x=\alpha\\y'-y&=\alpha\\z'-z&=\alpha\end{cases}$$

ce qui donne $(x'-x)+(y'-y)-(z'-z)=3\alpha$ et en utilisant la première équation, il vient que $\alpha = 3/2(1-x-y+z)$. On en tire l'expression de r :

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{1}{2}(3-x-3y+3z) \\ y' &= \dfrac{1}{2}(3-3x-y+3z) \\ z' &= \dfrac{1}{2}(-3+3x+3y-z) \end{cases}.$$

Exercice 28.12 ♡

Déterminer l'expression analytique de la projection p sur le plan affine

$$\mathscr{P} : x+y+z=-1$$

parallèlement à la droite vectorielle $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$.

Solution : Soit $\mathrm{M} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, et (x',y',z') les coordonnées de $\mathrm{M}' = p(\mathrm{M})$. Comme $\mathrm{M}' \in \mathscr{P}$, $x'+y'+z'+1=0$ et comme $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x'-x &= \alpha \\ y'-y &= 0 \\ z'-z &= 0 \end{cases}$$

et donc, en additionnant ces 3 égalités, $(x'-x)+(y'-y)+(z'-z)=\alpha$, ce qui amène, compte tenu du fait que $\mathrm{M}' \in \mathscr{P}$, $\alpha = -x-y-z-1$. On reporte dans le système et on trouve l'expression analytique de p :

$$\begin{cases} x' &= -y-z-1 \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}.$$

28.5.3 Isométries affines

Exercice 28.13 ♡

Reconnaître les applications

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x+2y-1,-2x+y+2) \end{cases}$.
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{5}(3x-4y+20,4x+3y-20) \end{cases}$.

Solution :

1. L'application f_1 est de la forme $\mathrm{AX}+\mathrm{B}$ avec $\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$ donc c'est une application affine. On vérifie facilement que f_1 admet un unique point fixe $\Omega(1/2, 1/4+\sqrt{5}/4)$. De plus, comme ${}^t\mathrm{A}.\mathrm{A} = \mathrm{A}.{}^t\mathrm{A} = \mathrm{I}_3$, A est une matrice orthogonale directe et $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle d'angle $-\arctan 2$. Donc f_1 est la rotation de centre Ω et d'angle $-\arcsin 2/\sqrt{5}\ [2\pi]$.
2. L'application f_1 est de la forme $\mathrm{AX}+\mathrm{B}$ avec $\mathrm{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = 4\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ donc c'est une application affine. De plus, f_1 admet un unique point fixe $\Omega(6,2)$. Comme ${}^t\mathrm{A}.\mathrm{A} = \mathrm{A}.{}^t\mathrm{A} = \mathrm{I}_3$, A est une matrice orthogonale directe et $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle d'angle $-\arctan 2$. Donc f_1 est la rotation de centre Ω et d'angle $\arccos -2/5$.

Exercice 28.14 ♡♡

Reconnaître l'application affine f donnée par

$$\begin{vmatrix}\mathrm{X}\\ \mathrm{Y}\\ \mathrm{Z}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-z+1\\ -x\\ y-2\end{vmatrix}$$

Solution : *L'application f est bien affine car elle est de la forme $AX+B$ avec $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$. Quand on recherche ses points fixes, on aboutit à un système incompatible donc f n'a pas de point fixe. Comme $A^tA={}^tAA=I_3$ et que $\det(A)=1$, $A\in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est un déplacement de l'espace. Comme la partie linéaire de f n'est pas l'identité et que f n'a pas de point fixe, c'est un vissage. On cherche l'axe de la rotation vectorielle. Il faut résoudre $AX=X$ et le sous-espace solution est $Vect(d)$ ou $\overrightarrow{d}=\frac{\sqrt3}{3}(-1,1,1)$ est unitaire. Le vecteur $\overrightarrow{\varepsilon_1}=\frac{\sqrt2}{2}(1,1,0)$ est unitaire et orthogonale à d. Si θ est l'angle de la rotation, on sait que*

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\operatorname{Tr}(A)-1}{2}\\ \sin\theta=\det\left(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}\right),\overrightarrow{d}\right)\end{cases}$$

donc $\cos\theta=-1/2$ et $\sin\theta=-\sqrt3/2$, c'est-à-dire $\theta=-2\pi/3$. On recherche maintenant l'axe Δ du vissage. On sait qu'il est dirigé par $\overrightarrow{d}$. Un point M de l'espace est élément de Δ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{d}$ ce qui amène le système :

$$\begin{cases}x+z-1&=\lambda\\-x-y&=\lambda\\y-z-2&=\lambda\end{cases}.$$

On somme ces trois équations et on trouve $\lambda=-1$. On en déduit le vecteur $\overrightarrow{u}$ du vissage qui est $-\overrightarrow{d}$ ainsi qu'une équation cartésienne de Δ $\begin{cases}x+y&=1\\y-z&=1\end{cases}$ puis une équation paramétrée :

$$\begin{cases}x&=t\\y&=t+1\\z&=-t\end{cases}.$$

Finalement, $f=t_{\overrightarrow{u}}\circ r_{\Delta,-2\pi/3}$.

Exercice 28.15 ♡♡

Reconnaître l'application affine f donnée par

$$\left|\begin{matrix}X\\Y\\Z\end{matrix}\right.=\frac19\left|\begin{matrix}x-8y-4z+2\\-8x+y-4z+2\\-4x-4y+7z+1\end{matrix}\right..$$

Solution : *L'application f est bien affine car elle est de la forme $AX+B$ avec $A=\frac19\begin{pmatrix}1&-8&-4\\-8&1&-4\\-4&-4&7\end{pmatrix}$ et $B=\frac19\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. On remarque que $A^2=A$. Pour rechercher les points fixes de f, on résout le système $AX+B=X$ et l'ensemble solution admet comme équation $4x+4y-2z-1=0$. On reconnaît l'équation d'un plan affine $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}=(2,2,1)$. Enfin, pour $M=(x,y,z)$, on calcule le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}=-1/9\left(4x+4y+2z-1\right)\overrightarrow{n}$. On reconnaît alors une réflexion de plan $\mathscr{P}$.*

Exercice 28.16 ♡♡

Reconnaître l'application affine f donnée par

$$\begin{cases}x'&=\frac13\left(-2x-2y+z+1\right)\\y'&=\frac13\left(-2x+y-2z+2\right)\\z'&=\frac13\left(x-2y-2z+1\right)\end{cases}$$

Solution : *L'application f est bien affine car elle est de la forme $AX+B$ avec $A=\frac13\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$ et $B=\frac13\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Comme $A.{}^tA=I_3$ et que $\det(A)=1$, A est la matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ. Comme $\cos\theta=(\operatorname{Tr}A-1)/2=$*

-1, *l'angle de cette rotation est* $\pi\ [2\pi]$. *L'axe de la rotation est dirigée par un vecteur solution de* $AX = X$, *par exemple* $\overrightarrow{d} = (1, -2, 1)$. *On cherche les points fixes de* f *en résolvant le système* $AX + B = X$ *et on s'aperçoit qu'il n'est pas compatible. Donc* f *n'a pas de point fixe et c'est un vissage de l'espace. Pour déterminer l'axe* Δ *de ce vissage, on cherche les point* $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tels que* $\overrightarrow{Mf(M)}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{d}$. *On considère un tel point* M. *Il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{cases} -5x - 2y + z + 1 & = 3\alpha \\ -2x - 2y - 2z + 2 = -6\alpha \\ x - 2y - 5z + 1 & = 3\alpha \end{cases}$$

qu'on résout et on trouve que Δ *admet comme équation cartésienne* $\begin{cases} x & = z \\ y & = 2/3 - 2z \end{cases}$ *et donc le vecteur du vissage est* $\overrightarrow{u} = -1/9\overrightarrow{d}$. *Finalement,* $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ r_{\Delta,\pi}$.

Exercice 28.17 ♡♡

Reconnaître l'application affine f *donnée par*

$$\begin{cases} x' & = z - 2 \\ y' & = x + 1 \\ z' & = y + 1 \end{cases}$$

Solution : *L'application* f *est bien affine car elle est de la forme* $AX + B$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Comme* $A.{}^tA = I_3$ *et que* $\det(A) = 1$, A *est la matrice d'une rotation vectorielle* $\overrightarrow{f}$ *d'angle* θ. *La résolution du système* $AX = X$ *permet de trouver le vecteur unitaire* $\overrightarrow{d} = -1/\sqrt{3}(1, 1, 1)$ *qui dirige l'axe de* $\overrightarrow{f}$. *Le vecteur* $\overrightarrow{\varepsilon_1} = 1\sqrt{2}(1, -1, 0)$ *est unitaire et orthogonal à* $\overrightarrow{d}$. *Comme* $\overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}\right) = 1/\sqrt{2}(0, 1, -1)$, *on trouve que*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \det\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}\right), \overrightarrow{d}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

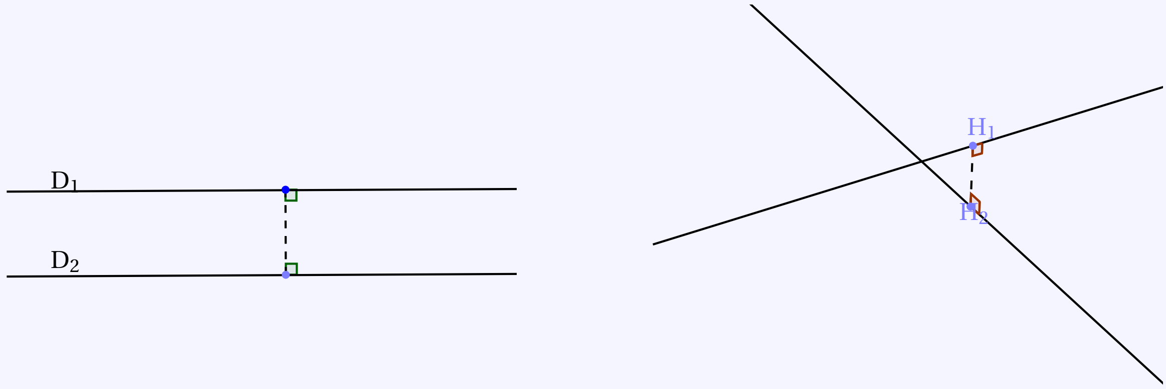
donc $\theta = -2\pi/3\ [2\pi]$. *On recherche maintenant les points fixes d* f *en résolvant* $AX + B = X$ *et on trouve comme ensemble solution la droite* Δ *d'équation cartésienne* $\begin{cases} y - z & = -1 \\ x - z & = -2 \end{cases}$. *L'application affine* f *est donc la rotation affine d'axe* Δ *et d'angle* $-2\pi/3$: $f = r_{\Delta,-2\pi/3}$.

Exercice 28.18 ♡♡

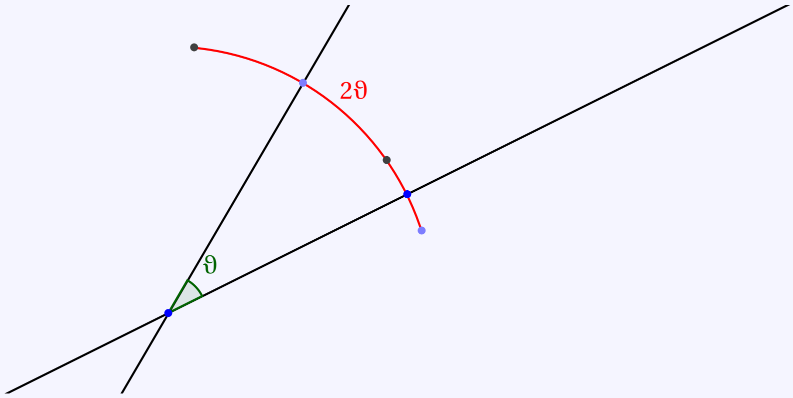
Démontrer que si trois droites de l'espace admettent une perpendiculaire commune, alors la composée des trois demi-tours correspondants est un demi-tour.

Étudier la réciproque.

Solution : *Supposons le problème résolu. On aurait* $s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s$ *soit* $s_2 \circ s_1 = s_3 \circ s$. *On s'intéresse donc à la composée de deux demi-tours. C'est une isométrie directe donc un vissage, une rotation ou une translation. On prend* D_1 *et* D_2 *deux droites et on considère les demi-tours correspondants* s_1 *et* s_2. *Or deux droites de l'espace admettent une perpendiculaire commune (unique si les deux droites ne sont pas coplanaires). Une telle perpendiculaire commune coupe* D_1 *en* H_1 *et* D_2 *en* H_2. (H_1H_2) *est globalement invariante par* $s_2 \circ s_1$. *Sa (double) restriction est la translation de vecteur* $2\overrightarrow{H_1H_2}$. *C'est le vecteur nul si* D_1 *et* D_2 *sont sécantes.*



En projetant sur un plan contenant les directions de D_1 *et* D_2 *:*



On obtient une rotation d'angle 2ϑ *où* ϑ *désigne l'angle entre* D_1 *et* D_2.
On trouve donc (avec les notations précédentes)

- *Si* D_1 *et* D_2 *ne sont pas coplanaires : un vissage d'axe* (H_1H-2), *de vecteur* $2\overrightarrow{H_1H_2}$ *et d'angle* 2ϑ.
- *Si* D_1 *et* D_2 *sont sécantes : une rotation d'axe perpendiculaire à* D_1 *et* D_2, *passant par leur point d'intersection et d'angle* 2ϑ.
- *Si* D_1 *et* D_2 *sont parallèles : une translation de vecteur* $2\overrightarrow{H_1H_2}$.

Maintenant, si D_1, D_2 *et* D_3 *admettent une perpendiculaire commune* Δ, *cette perpendiculaire commune est globalement invariante par* $s_3 \circ s_2 \circ s_1$. *Sa (double) restriction est la composée d'une translation et d'une symétrie, donc une symétrie. Soit* A *le centre de cette symétrie. Dans le plan passant par* A *et perpendiculaire à* Δ, *on a la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale. C'est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Appelons-la* D. $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ *est donc le demi-tour autour de* D.
Réciproquement si $s_2 \circ s_1 = s_3 \circ s$, *on a l'égalité de deux vissages/rotations en général. Comme il y a unicité de l'axe, et que cet axe est une perpendiculaire commune à* D_2 *et* D_1 *d'une part et* D_3 *et* D *d'autre part, cet axe est une perpendiculaire commune à* D_3, D_2 *et* D_1.
Reste le cas où l'on a une égalité entre deux translations, et là ça ne va plus. Si on prend

- D_1 *parallèle à* D_2
- D_3 *parallèle à* D
- $d(D_1, D_2) = d(D_3, D)$
- *les plans engendrés par* D_1 *et* D_2 *d'une part et* D_3 *et* D *d'une part sont strictement parallèles.*

alors on a $s_2 \circ s_1 = s_3 \circ s$ *(ou* $s_2 \circ s_1 = s \circ s_3$*) sans avoir de perpendiculaire commune à* D_1, D_2 *et* D_3.
Donc en résumé, on a l'existence d'une perpendiculaire commune sauf dans le cas où les trois droites sont parallèles et non coplanaires.

Exercice 28.19

On considère T *un tétraèdre régulier, c'est-à-dire quatre points* $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ *d'un espace affine euclidien* E *de dimension* 3, *vérifiant pour* $i \neq j$, $M_iMj = a$, *a étant un réel positif fixé.*
On appelle $\mathscr{T}$ *l'ensemble des isomorphismes affines* f *qui conservent* T *dans le sens suivant :* $f(T) = T$.

1. *Démontrer que* $\mathscr{T}$ *est un sous groupe de* $Is(E)$.
2. *Démontrer que* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_4$, $\exists! f_\sigma \in \mathscr{T}$ *telle que* $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $f_\sigma(M_i) = M_{\sigma(i)}$. *Démontrer que* $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_4 & \longrightarrow & \mathscr{T} \\ \sigma & \longmapsto & f_\sigma \end{array}$ *est un isomorphisme de groupes.*
3. *Démontrer que tous les éléments de* $\mathscr{T}$ *sont des isométries affines.*

4. *Démontrer que* $\mathscr{T} \cap Is^+(\mathrm{E})$ *est isomorphe au groupe* $\mathfrak{A}_4$.

Solution :

1. *Il est clair que* $\mathrm{id_E}$ *est un isomorphisme affine de* E *qui conserve* T. *La composée de deux isomorphismes affines de* E *qui conservent* T *est un isomorphisme affine de* E *et il conserve* T. *Soit* $f \in \mathscr{T}$. *L'isomorphisme affine* f *est inversible et* $f^{-1}(\mathrm{T}) = f^{-1}(f(\mathrm{T})) = \mathrm{T}$.
2. *Existence et unicité :* T *est un repère affine de* E *et une application affine est entièrement déterminée par ses images des points d'un repère affine. De plus comme l'image par n'importe quel élément de* $\mathscr{T}$ *d'un repère affine est un repère affine, toute application affine qui conserve* T *est un isomorphisme affine. De ce fait,* Φ *est une application.*

   De plus Φ *est une surjection. En effet, si* $f \in \mathscr{T}$, *alors la (double) restriction de* f *à* T *est une bijection de* T *et définit donc une permutation* σ *sur les indices des points de* T.

   Enfin Φ *est une injection. En effet deux applications affines qui coïncident sur un repère affine sont égales.*

   Reste à voir que Φ *est un morphisme. On se donne* σ *et* τ *deux éléments de* $\mathfrak{S}_4$. *Il s'agit de démontrer que* $\Phi(\sigma\circ\tau) = \Phi(\sigma)\circ\Phi(\tau)$ *c'est-à-dire que* $f_{\sigma\circ\tau} = f_\sigma \circ f_\tau$. *Or ces deux applications affines coïncident sur le repère affine* T *puisque* $f_{\sigma\circ\tau}(\mathrm{M}_i) = f_\sigma\circ f_\tau(\mathrm{M}_i) = \mathrm{M}_{\sigma\circ\tau(i)}$. *On a donc l'égalité sur* E *tout entier.*
3. *Jusqu'ici, on ne s'était pas servi du fait que* T *est un tétraèdre régulier. On n'avait simplement utilisé le fait que* T *est un repère affine.*

   Si σ *est la transposition* $(i\ \ j)$ *alors* f_σ *est la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de* M_i *et* M_j.

   Maintenant, les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$. *Si* σ *est le produit de transpositions* $\sigma = \tau_1\circ\ldots\circ\tau_k$ *alors, d'après la question précédente,* $f_\sigma = f_{\tau_1}\circ\ldots\circ f_{\tau_k}$ *est une isométrie affine comme produit d'isométries affines.*
4. *À nouveau, si* σ *est une transposition, alors* f_σ *est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, donc un anti-déplacement et l'application linéaire associée a pour déterminant* -1. *Si* σ *est le produit de transpositions* $\sigma = \tau_1\circ\ldots\circ\tau_k$ *alors, la signature de* σ *égale* $(-1)^k$ *alors que le déterminant de l'application linéaire associée à* f_σ *vaut aussi* $(-1)^k$. *On a donc* $(\sigma\in\mathfrak{A}_4) \Longleftrightarrow (f_\sigma \in Is^+(\mathrm{E}))$.

28.6 Similitudes

Exercice 28.20 ♡

Soient A *et* B , A′, B′ *quatre points du plan complexe tels que* $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ *et* $\mathrm{A}'\neq\mathrm{B}'$. *Montrer qu'il existe une unique similitude directe* s *tel que* $s(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ *et* $s(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$.

Solution : *On considère la translation* $t_{\overrightarrow{\mathrm{AA}'}}$ *qui envoie* A *sur* A′ *et* B *sur un point* B_1, *puis la rotation* $r_{\mathrm{A}',\theta}$ *de centre* A′ *et d'angle* $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}_1},\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}}\right)$ *qui envoie* B_1 *sur un point* B_2 *de la droite* $(\mathrm{A}'\mathrm{B}')$ *puis finalement l'homothétie* $h_{\mathrm{A}',k}$ *de centre* A′ *et de rapport* $k = \mathrm{A}'\mathrm{B}'/\mathrm{A}'\mathrm{B}_2$ *(bien défini car* $\mathrm{A}'\mathrm{B}_2 = \mathrm{A}'\mathrm{B}_1 = \mathrm{AB}\neq 0$*) qui envoie* B_2 *sur* B′. *L'application* $s = h_{\mathrm{A}',k}\circ r_{\mathrm{A}',\theta}\circ t_{\overrightarrow{\mathrm{AA}'}}$ *est une similitude directe comme composée de similitudes directes. De plus, on a bien* $s(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ *et* $s(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$.
Si S *est une autre similitude directe telle que* $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ *et* $\mathrm{S}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ *alors* $s\circ\mathrm{S}^{-1}$ *est une similitude qui envoie* A *sur* A *et* B *sur* B. *Autrement dit,* $s\circ\mathrm{S}^{-1}$ *est une similitude qui possède deux points fixes, ce qui n'est possible que si* $s\circ\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{id}$ *et donc* $\mathrm{S} = s$. *On prouve ainsi l'unicité de* s.

Exercice 28.21 ♡

On dit que deux triangles ABC *et* A′B′C′ *du plan euclidien sont semblables si leurs angles sont deux à deux égaux, c'est-à-dire si on a, quitte à échanger le nom des sommets,* $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$, $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}}'$ *et* $\widehat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{C}}'$[1]. *Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.*

1. *Les triangles* ABC *et* A′B′C′ *sont semblables*
2. *Les triangles* ABC *et* A′B′C′ *ont leurs côtés proportionnels.*
3. *Il existe une similitude directe qui envoie* ABC *sur* A′B′C′.
4. $\mathrm{AB}/\mathrm{A}'\mathrm{B}' = \mathrm{AC}/\mathrm{A}'\mathrm{C}'$ *et* $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$.

Solution :

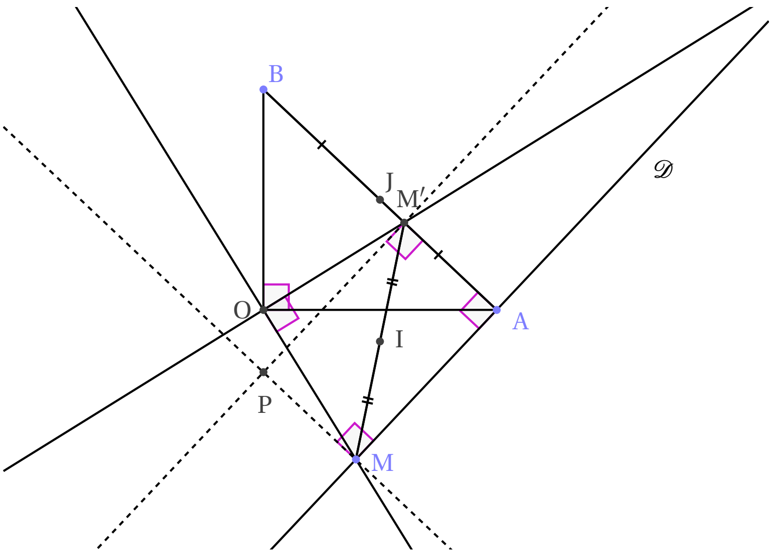
1. Remarquons qu'il suffit que deux couples angles soient égaux pour que ce soit le cas du troisième

1. $\boxed{1. \implies 2.}$ *Supposons que les triangles* ABC *et* $\mathrm{A'B'C'}$ *sont semblables. Donc* $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}'}$, $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{C}'}$. *En effectuant une translation suivi d'une rotation, on peut supposer que* $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ *et que* $\mathrm{B}' \in (\mathrm{AB})$. *Comme ces deux transformations conservent (les longueurs et) les angles orientés, on a toujours* $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}'},\overrightarrow{\mathrm{AC}'}}\right)$ *donc* $\mathrm{C}' \in (\mathrm{AC})$. *De plus, comme* $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{C'A}},\overrightarrow{\mathrm{CB}'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}}}\right)$, *les droites* $(\mathrm{B'C'})$ *et* (BC) *sont parallèles. Le théorème de Thalès permet alors d'écrire que* $\mathrm{AB}'/\mathrm{AB} = \mathrm{AC}'/\mathrm{AC} = \mathrm{B'C'}/\mathrm{BC}$ *et les triangles* ABC *et* $\mathrm{A'B'C'}$ *ont leurs côtés proportionnels.*
2. $\boxed{2. \implies 1.}$ *Si les triangles* ABC *et* $\mathrm{A'B'C'}$ *ont leurs côtés proportionnels et que* $k = \mathrm{AB}'/\mathrm{AB} = \mathrm{AC}'/\mathrm{AC} = \mathrm{B'C'}/\mathrm{BC}$ *alors par une homothétie de rapport* k, *on transforme le triangle* ABC *en un triangle ayant des côtés de même longueur que ceux de* ABC *ce qui n'affecte pas les angles orientés* $\widehat{\mathrm{A}'}$, $\widehat{\mathrm{B}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{C}'}$. *On nomme encore* $\mathrm{A'B'C'}$ *le triangle obtenu. En utilisant les relations d'Al Kashi (voir l'exercice 2.26 page 98), on montre que les cosinus de angles* $\widehat{\mathrm{A}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{B}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\mathrm{C}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{C}}$ *sont égaux. Comme la mesure principale de ces angles est élément de* $]0,\pi[$, *on en déduit qu'ils sont égaux :* $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}'}$, $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{C}'}$.
3. $\boxed{1. \implies 3.}$ *On suppose que* ABC *et* $\mathrm{A'B'C'}$ *sont semblables. On sait alors que leurs côtés sont proportionnels (on suppose que* $k = \mathrm{A'B'}/\mathrm{AB} = \mathrm{A'C'}/\mathrm{AC} = \mathrm{B'C'}/\mathrm{BC}$*) et que leurs angles sont deux à deux égaux. On considère la translation* t *qui envoie* A *sur* A'. *On note* $t(\mathrm{B}) = \mathrm{B}_1$ *et* $t(\mathrm{C}) = \mathrm{C}_1$. *On considère ensuite la rotation* r *d'angle* $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}_1},\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\right)$ *et de centre* A *et on note* $\mathrm{B}_2 = r(\mathrm{B}_1)$ *et* $\mathrm{C}_2 = r(\mathrm{C}_1)$. *Par construction* $\mathrm{B}_2 \in (\mathrm{A'B'})$ *et comme les triangles* $\mathrm{AB_1C_1}$, $\mathrm{AB_2C_2}$ *et* $\mathrm{A'B'C'}$ *ont des angles deux à deux égaux, on sait que* $\mathrm{C}_2 \in (\mathrm{A'C'})$. *Enfin, comme les translation et les rotations conservent les longueurs, on a* $k = \mathrm{A'B'}/\mathrm{AB_2} = \mathrm{A'C'}/\mathrm{AC_2} = \mathrm{B'C'}/\mathrm{B_2C_2}$. *On considère finalement l'homothétie* h *de rapport* k *et de centre* A. *Elle envoie alors* B_2 *sur* B' *et* C_2 *sur* C'. *La composée* $h \circ r \circ t$ *est une similitude directe qui envoie* ABC *sur* $\mathrm{A'B'C'}$.
4. $\boxed{3. \implies 1.}$ *et* $\boxed{3. \implies 2.}$ *Réciproquement, les similitudes conservent les angles et les rapports de longueur.*
5. $\boxed{1. \implies 4.}$ *Comme* $1. \implies 2.$, *il est clair que* $1. \implies 4.$ *aussi.*
6. $\boxed{4. \implies 2.}$ *Supposons que* $k = \mathrm{AB}/\mathrm{A'B'} = \mathrm{AC}/\mathrm{A'C'}$ *et* $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}'}$ *alors grâce à la formule d'Al Kashi*

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 + 2\mathrm{ABAC}\cos\widehat{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad \mathrm{B'C'}^2 = \mathrm{A'B'}^2 + \mathrm{A'C'}^2 + 2\mathrm{A'B'A'C'}\cos\widehat{\mathrm{A}'}$$

donc $\mathrm{BC}^2 = k^2\left(\mathrm{A'B'}^2 + \mathrm{A'C'}^2 + 2\mathrm{A'B'A'C'}\cos\widehat{\mathrm{A}'}\right) = k^2\mathrm{B'C'}^2$ *et* $\mathrm{BC}/\mathrm{B'C'} = k$. *Donc les côtés de* ABC *et* $\mathrm{A'B'C'}$ *sont proportionnels.*

Exercice 28.22 ♡



Dans le plan affine euclidien, on considère un triangle OAB *direct et rectangle en* O. *Soit* M *est un point de la droite* $\mathscr{D}$ *perpendiculaire en* A *à* (AB). *La perpendiculaire en* O *à* (OM) *coupe* (AB) *en* M'. *On note par* J *le milieu de* $[\mathrm{AB}]$.

1. *Soit* s *la similitude de centre* O *telle que* $s(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$.
   (a) *Montrer que, pour tout point* M *de* $\mathscr{D}$, $s(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$.
   (b) *En déduire que, lorsque* M *décrit* $\mathscr{D}$, *le triangle* OMM' *reste semblable*[2] *à un triangle fixe que l'on précisera.*

2. On rappelle que des triangles sont semblables s'ils ont des côtés proportionnels

2. *(a) Montrer que, pour tout point* M *de* $\mathscr{D}$*, le point* I *milieu de* $[MM']$ *est l'image de* M *par une similitude* S *de centre* O *dont on précisera le rapport et l'angle.*

   (b) Si H *est le projeté orthogonal de* O *sur* $\mathscr{D}$*, déterminer* S(H.

   (c) Déterminer le lieu géométrique du point I *lorsque* M *décrit* $\mathscr{D}$.

3. *Pour tout point* M *de* $\mathscr{D}$ *distinct de* A*, on désigne par* P *e point du plan tel que* $MAM'P$ *est un rectangle. Déterminer le lieu géometrique du point* P *lorsque* M *décrit* $\mathscr{D}\setminus\{A\}$.

Indication 28.4 : On n'hésitera pas à utiliser les résultats de l'exercice 28.21.

Solution :

1. *(a) Comme* ABC *est rectangle en* O*, l'angle de la similitude* s *est* $\pi/2$ *et comme les similitudes directes préservent les angles, elle envoie une droite sur une droite perpendiculaire à la première. En particulier :*
   – s *envoie la droite* (AM) *sur la droite perpendiculaire à* (AM) *et passant par* $s(A)=B$*, donc* $s((AM))=(AB)$.
   – s *envoie la droite* (OM) *sur la droite perpendiculaire à* (OM) *et passant par* $s(O)=P$ *donc* $s((OM))=OM'$.
   Le point $s(M)$ *se trouve donc à l'intersection de* (AB) *et* (OM') *et il s'ensuit que* $M'=s(M)$.

   (b) Si $\alpha\in\mathbb{R}$ *désigne le rapport de la similitude* s *alors on a* $OB/OA=\alpha$ *et comme* $M'=s(M)$*, on a aussi que* $OM'/OM=\alpha$*. De plus,* $\widehat{MOA}=\widehat{AOM}=\pi/2\ [2\pi]$ *donc en vertu du 4. de l'exercice 28.21, les triangles* OAB *et* OMM' *sont donc semblables.*

2. *(a) On sait que les triangles* OAB *et* OMM' *sont semblables donc. Soit* $\tilde{s}$ *la similitude telle que* $\tilde{s}(O)=O$, $\tilde{s}(A)=M$ *et* $\tilde{s}(B)=M'$*. Comme* $\tilde{s}([AB])=[MM']$ *et que les similitudes conservent les rapports de longueur,* $\tilde{s}(J)=I$ *et les triangles* OAJ *et* OMI *sont aussi semblables, en conséquence de quoi les angles* $\widehat{MOI}$ *et* $\widehat{AOJ}$ *sont égaux ainsi que les rapports* OJ/OA *et* OI/OM*. Donc la similitude* S *qui envoie* A *sur* I *envoie aussi* M *sur* I*. Le rapport de* S *est donc* OJ/OA *et d'angle* $\widehat{AOJ}$.

   (b) Si $M=H$ *est le projeté orthogonal de* O *sur* $\mathscr{D}$*, alors* $OMAM'$ *est rectangle et ses diagonales se coupent en leurs milieux. Donc dans ce*$S(M)=I$ *cas est le milieu* K *du segment* [OA].

   (c) Si M *décrit* $\mathscr{D}$ *alors* $I=S(M)\in S(\mathscr{D})$*. Mais comme* S *est une similitude* $\mathscr{D}'=S(\mathscr{D})$ *est une droite qui passe par* $S(A)=J$ *car* $A\in\mathscr{D}$*. De plus,* $\mathscr{D}'$ *passe par* $s(H)$ *le milieu* K de [OA] *et* $\mathscr{D}'=(KJ)$*. Cette droite passe par les milieux de deux côtés du triangle* OAB*, elle est donc parallèle au troisième* (OB)*. On en déduit que* $\mathscr{D}'$ *est la médiatrice de* [OA].

3. *On remarque que* $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AI}$ *donc si* h *est l'homothétie de rapport* 2 *et de centre* A *alors* $P=h\circ S(M)$*. Comme* $h\circ S$ *est une similitude, elle envoie la droite* $\mathscr{D}$ *sur une droite* $\mathscr{D}''$*. Mais* $h\circ S(A)=B$ *et* $h\circ S(H)=O$ *donc* $\mathscr{D}''=(OB)$ *et* P *décrit* $(OB)\setminus\{B\}$

Exercice 28.23

On considère un carré ABCD *direct. Soient* M *un point de* (BC) *et* M' *le point d'intersection de la droite* (CD) *et de la perpendiculaire menée de* A *à la droite* (AM)*. Déterminer le lieu géométrique du milieu* I *de* $[MM']$.

Solution : *Soit* r *la rotation de cente* A *et d'angle* $\pi/2$*. On vérifie que* $r((AM))=(AM')$*, que* $r(B)=D$ *et que* $r((BC))=(CD)$*. Comme* M *est le point d'intersection des droites* (AM) *et* (BC) *et que* M' *est celui d'intersection des droites* $((AM')$ *et* (CD)*, on sait que* $M'=r(M)$ *et* $AM'M$ *est rectangle isocèle en* A *et direct. Si* I *est le milieu de* $[MM']$ *alors* $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AI}}\right)=\pi/4\ [2\pi]$ *et* $AI=\sqrt{2}/2AM$*. Donc* I *est l'image de* M *par la similitude directe* s *de centre* A*, de rapport* $\sqrt{2}/2$ *et d'angle* $\pi/4$*. Le lieu de* I *est alors l'image de la droite* (BC) *par cette similitude, c'est-à-dire la droite* (BD).

Annexe A

Techniques de démonstration

Bien sûr que ma moustache est vraie !
Elle appartient même à mon frère Zeppo.
Groucho Marx

A.1 Logique des propositions

Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques notions de logique qui permettent de mieux comprendre ce qu'est une démonstration mathématique. Vous pouvez laisser de côté l'aspect formel et retenir uniquement quelques idées, en particulier concernant l'implication.
On considère une collection de *variables propositionnelles* $\mathcal{V}$, et on définit de façon inductive les *propositions* logiques à partir de ces variables.

1. Si $x \in \mathcal{V}$ est une variable propositionnelle, $P = x$ est une proposition logique.
2. Étant données deux propositions P, Q déjà construites, on définit de nouvelles propositions à l'aide de *connecteurs logiques* :
   (a) $\neg P$ (lire non P) est une nouvelle proposition,
   (b) $P \wedge Q$ (lire P et Q) est une nouvelle proposition,
   (c) $P \vee Q$ (lire P ou Q) est une nouvelle proposition,
   (d) $P \implies Q$ (lire P implique Q) est une nouvelle proposition,
   (e) $P \iff Q$ (lire P équivaut Q) est une nouvelle proposition.

Par exemple, à partir de deux variables propositionnelles x et y, on peut construire les propositions logiques suivantes : $P_1 = x \vee y$, $P_2 = (x \vee y) \implies x$, $P_3 = (x \vee y) \wedge ((x \vee y) \implies x) \dots$
Dans la pratique, une variable propositionnelle représente un énoncé qui peut être vrai ou faux. Voici des exemples de variables :
– x : « mon chien est blanc » ,
– y : « toute fonction dérivable est continue » ,
– z : « il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres entiers » ;
En mathématiques, on s'intéresse surtout aux relations existantes entre les énoncés. Par exemple si f est une fonction définie sur $[a,b]$, on peut considérer les variables propositionnelles suivantes :
– x : « la fonction f est continue sur $[a,b]$ »
– y : « $f(a) \leqslant 0$ » ,
– z : « $f(b) \geqslant 0$ » ,
– t : « il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$ » .
Chaque variable peut prendre la valeur logique V (pour vrai) ou F (pour faux). Par exemple, il existe des fonctions qui ne sont pas continues, donc x peut prendre la valeur V ou F, il en est de même pour y, z et t. Nous pouvons construire à partir de ces variables une proposition logique $P = (x \wedge y \wedge z) \implies t$ et citer le théorème des valeurs intermédiaires en affirmant que la proposition P est vraie.
Formellement, on définit un *environnement* comme une application $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow \{V, F\}$ qui assigne une valeur V (vrai) ou F (faux) à chaque variable propositionnelle et on définit de façon inductive *l'évaluation* $V_\sigma(P)$ d'une proposition P dans l'environnement σ de la façon suivante.

1. Si $P = x$ est une variable, la valeur de vérité de la proposition P est la même que celle de la variable : $V_\sigma(P) = \sigma(x)$.

2. Si $\tilde{P} = \neg P$ où P est une proposition, $V_\sigma(\tilde{P}) = V$ lorsque $V_\sigma(P) = F$ et $V_\sigma(\tilde{P}) = F$ lorsque $V_\sigma(Q) = V$. On résume cette règle dans une *table de vérité* :

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(\neg P)$
V	F
F	V

3. Si $\tilde{P} = P \wedge Q$ où P et Q sont deux propositions, $V_\sigma(\tilde{P}) = V$ uniquement lorsque $V_\sigma(P) = V$ et $V_\sigma(P) = V$. Il y a quatre possibilités pour $V_\sigma(P)$ et $V_\sigma(Q)$ que l'on résume dans une *table de vérité* :

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(Q)$	$V_\sigma(P \wedge Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

4. Si $\tilde{P} = P \vee Q$, $V_\sigma(\tilde{P})$ est définie par la table de vérité :

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(Q)$	$V_\sigma(P \vee Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5. Si $\tilde{P} = P \implies Q$,

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(Q)$	$V_\sigma(P \implies Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

6. Si $\tilde{P} = P \Longleftrightarrow Q$,

$V_\sigma(P)$	$V_\sigma(Q)$	$V_\sigma(P \Longleftrightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On dit que deux propositions P et Q sont *logiquement équivalentes* et on note $P \equiv Q$, lorsque pour tout environnement σ, $V_\sigma(P) = V_\sigma(Q)$. En d'autres termes, deux propositions sont logiquement équivalentes si, quelles que soient les valeurs de vérité affectées aux variables, les deux propositions s'évaluent de la même manière. Pour montrer que deux propositions sont logiquement équivalentes, il suffit de dresser les tables de vérité des deux propositions et de vérifier qu'elles sont identiques.

Si P et Q sont deux propositions logiques, les propositions $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ sont logiquement équivalentes (on note P à la place de $V_\sigma(P)$ désormais) :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

De la même façon, on vérifie que $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$. Ces équivalences logiques s'appellent les lois de DeMorgan.

A.1.1 L'implication

En mathématiques, on part d'un très petit nombre de faits que l'on suppose vrais (les *axiomes*) et, à l'aide de règles logiques, on *démontre* de nouveaux résultats appelés *théorèmes*, *lemmes*, *propositions*, *corollaires*, ...

Les énoncés mathématiques utilisent souvent l'implication logique. Une des raisons de son importance est la suivante : on connaît déjà un résultat représenté par une proposition P (on sait que $V_\sigma(P) = V$) et par un raisonnement, on montre que la proposition $P \implies Q$ est vraie : ($V_\sigma(P \implies Q) = V$). En examinant la table de vérité de l'implication, la seule ligne où simultanément $V_\sigma(P) = V$ et $V_\sigma(P \implies Q) = V$ est la première ligne dans laquelle $V_\sigma(Q) = V$. On en déduit ainsi que la proposition Q est vraie.

Remarque 1.1 Examinez attentivement la table de vérité de l'implication : *une proposition* $P \implies Q$ *est toujours vraie, sauf lorsque* P *est vraie et* Q *est fausse*. Un exemple surprenant : considérons les propositions
– x : « tous les entiers sont pairs »,
– y : « tous les entiers sont impairs »,
– P : « si tous les entiers sont pairs, alors tous les entiers sont impairs ».
La proposition x est fausse : $\sigma(x) = F$, ainsi que la proposition y : $\sigma(y) = F$. La proposition P s'écrit en logique $P = x \implies y$. Cette proposition est vraie : $V_\sigma(P) = V$! En effet, c'est la quatrième ligne de la table de vérité. Ce résultat est surprenant car nous avons l'habitude de considérer une implication $P \implies Q$ uniquement dans le cas où P est vraie !

Pour montrer qu'une implication $P \implies Q$ est vraie, on utilise deux méthodes importantes.

1. *Le raisonnement direct :* il consiste à montrer que la deuxième ligne de la table de vérité de l'implication $P \implies Q$ est impossible. On suppose que P est vraie : $V_\sigma(P) = V$ et on justifie que nécessairement Q est vraie : $V_\sigma(Q) = V$. On peut affirmer alors que $V_\sigma(P \implies Q)$ est vraie. En effet, lorsque $V_\sigma(P) = F$, quelle que soit la valeur de vérité de Q, on a toujours $V_\sigma(P \implies Q) = V$ et on a exclu le cas où $V_\sigma(P) = V$ et $V_\sigma(Q) = F$.
2. *Le raisonnement par contraposée :*il consiste également à éliminer la deuxième ligne de la table de vérité. On suppose que Q est fausse ($V_\sigma(Q) = V$ correspond aux lignes 2 et 4 puisqu'aux lignes 1 et 3, on a $V_\sigma(P \implies Q) = V$), et on justifie que $V_\sigma(P) = F$.

Remarque 1.2 Une autre façon de comprendre le raisonnement par contraposée consiste à vérifier que les deux propositions $P \implies Q$ et $\neg Q \implies \neg P$ sont logiquement équivalentes :

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

On montre alors que $\neg Q \implies \neg P$ est vraie avec un raisonnement direct : on suppose que $\neg Q$ est vraie (c'est-à-dire Q fausse) et on justifie que $\neg P$ est vraie (c'est-à-dire P fausse).

Exemple 1.1 Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$(f \text{ impaire }) \implies \big(f(0) = 0\big).$$

Utilisons un raisonnement direct. On suppose que f est impaire : pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$. En particulier pour $x = 0$, on obtient $f(0) = -f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

Exemple 1.2 Soit x un réel positif. Montrer que

$$\big(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon\big) \implies (x = 0).$$

Raisonnons par contraposée : si $x \neq 0$, alors on a $x > 0$. En prenant $\varepsilon = x/2$, on a $\varepsilon > 0$ et $x > \varepsilon$ ce qui montre que la première proposition est fausse.

Remarque 1.3 On utilise souvent le *raisonnement par l'absurde* en mathématiques. On veut montrer qu'une proposition Q est vraie. On suppose Q fausse et on aboutit à une absurdité.
Formellement, on utilise une suite d'implications $\neg Q \implies Q_1$, $Q_1 \implies Q_2, \dots, Q_{n-1} \implies Q_n$ toutes vraies, avec la proposition Q_n qui est fausse.

Exemple 1.3 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel : il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = p/q$. En élevant au carré, $2q^2 = p^2$, mais alors 2 apparaîtrait à une puissance paire dans la décomposition en facteurs premiers de $2q^2$, alors qu'il apparaît avec une puissance paire dans la décomposition de p^2. On aboutit à une contradiction avec l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier(voir le théorème 20.18 page 757). On généralise cette preuve pour montrer que si un nombre p est premier, le réel $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Remarque 1.4 N'abusez pas des raisonnements par contraposée ou par l'absurde ! Un raisonnement direct est *toujours* plus clair et plus simple à rédiger. On se lance dans un raisonnement par contraposée uniquement lorsqu'on n'a pas réussi à trouver une preuve directe.

On vérifie l'équivalence logique

$$P \implies Q \equiv \neg P \vee Q.$$

P	Q	P $\implies$ Q	$\neg$P	$\neg$P $\vee$ Q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

En utilisant les lois de DeMorgan, on obtient alors une technique standard pour nier une implication :

$$\neg(\text{P} \implies \text{Q}) \equiv \text{P} \wedge (\neg\text{Q}).$$

En pratique, pour montrer qu'une implication P $\implies$ Q est fausse, on vérifie que P est vraie, alors que Q est fausse.
Une autre équivalence logique importante :

$$(\text{P} \iff \text{Q}) \equiv [(\text{P} \implies \text{Q}) \wedge (\text{Q} \implies \text{P})].$$

P	Q	P $\implies$ Q	Q $\implies$ P	(P $\implies$ Q) $\wedge$ (Q $\implies$ P)	P $\iff$ Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Ce résultat aura une conséquence importante en mathématiques : pour montrer qu'une équivalence P $\iff$ Q est vraie, on montre séparément que les deux implications P $\implies$ Q et Q $\implies$ P sont vraies.

A.2 Ensembles

La quasi-totalité des énoncés mathématiques s'exprime à l'aide de notations ensemblistes. La théorie précise des ensembles est compliquée et inutile pour nous. Il suffit de comprendre quelques notations et règles intuitives pour pouvoir traiter convenablement tout le programme des classes préparatoires.

À faire : reprendre note historique du cours

Un *ensemble* peut être compris intuitivement comme une collection d'objets appelés *éléments*. Lorsqu'un objet x *appartient* à l'ensemble E, on notera $x \in \text{E}$. S'il n'appartient pas à l'ensemble, on notera $x \not\in \text{E}$.
On dit qu'un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F et on note $\text{E} \subset \text{F}$ lorsque tous les éléments de E sont également éléments de F. On dit alors que l'ensemble E est une *partie* de l'ensemble F.
Un axiome de la théorie des ensembles affirme qu'il existe un ensemble particulier, *l'ensemble vide* qui ne contient aucun élément et qui est noté $\varnothing$. Cet ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.
On dit que deux ensembles E et F sont égaux et on note $\text{E} = \text{F}$ lorsque $\text{E} \subset \text{F}$ et $\text{F} \subset \text{E}$. Cela signifie que les deux ensembles ont les mêmes éléments.
Nous supposerons connus quelques ensembles fondamentaux, comme l'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$ ... : $(0 \in \mathbb{N}, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \ldots)$.
Nous allons définir les ensembles de deux façons :

1. En listant un nombre fini de ses éléments, par exemple : $\text{F} = \{1, 2, 3\}$. Les éléments d'un ensemble peuvent être eux-mêmes des ensembles. On peut par exemple définir l'ensemble $\text{G} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ formé de deux éléments qui sont eux-mêmes des ensembles (on a par exemple $\varnothing \subset \text{G}$, $\varnothing \in \text{G}$, $\{\varnothing\} \subset \text{G}$, $\{\varnothing\} \in \text{G}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \not\in \text{G}$).
2. En utilisant un ensemble E déjà construit et une proposition $\mathscr{P}(x)$ qui dépend d'un élément $x \in \text{E}$. On peut définir l'ensemble formé des éléments de E pour lesquels la propriété $\mathscr{P}$ est vraie :

$$\text{F} = \{x \in \text{E} \mid \mathscr{P}(x)\}.$$

   On peut par exemple définir l'ensemble des réels strictement positifs de cette façon : $\text{F} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Exemple 1.4 On peut définir les ensembles suivants :
- $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) = 0\}$: l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 = 0\}$: cet ensemble est formé de deux éléments $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
- $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$: l'ensemble des racines cubiques de l'unité.

Remarque 1.5 Il est nécessaire à notre niveau d'utiliser toujours un ensemble E connu pour définir un nouvel ensemble sous peine d'aboutir rapidement à des paradoxes inextricables ! Par exemple, peut-on considérer l'ensemble F de tous les ensembles qui ne se contiennent pas ? Si on note E l'ensemble formé de tous les ensembles (à supposer qu'un tel ensemble existe), on pourrait définir F par :

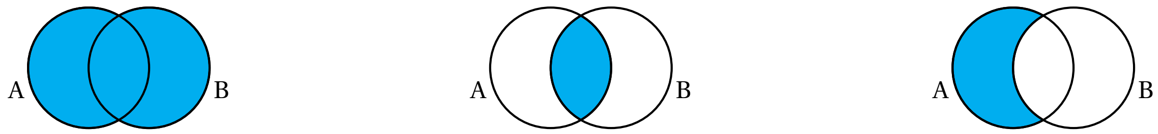
$$\text{F} = \{x \in \text{E} \mid x \not\in x\}.$$

Mais que penser de l'objet F ?

– Si $F \in F$, alors par définition de F, on aurait $F \notin F$ ce qui est contradictoire,
– Si $F \notin F$, alors par définition de F, $F \in F$ ce qui est aussi contradictoire.
On voit qu'on ne peut pas parler de l'ensemble E formé de tous les ensembles !

À partir d'ensembles E et F déjà définis, nous pouvons construire de nouveaux ensembles :

1. *L'union* de deux ensembles est un nouvel ensemble noté $E \cup F$. Ses éléments sont les éléments qui sont dans E ou dans F.
2. *L'intersection* de deux ensembles est un nouvel ensemble noté $E \cap F$. Ses éléments sont les éléments qui sont à la fois dans E et dans F.
3. *La différence* d'un ensemble E et d'un ensemble F noté $E \setminus F$ est un nouvel ensemble. Ses éléments sont les éléments de E qui ne sont pas dans F.
4. *Le complémentaire* d'une partie $A \subset E$, notée A^c est un nouvel ensemble formé des éléments de E qui ne sont pas dans A : $A^c = E \setminus A$.



$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$

À partir de deux ensembles E et F, on définit un nouvel ensemble noté $E \times F$ qui s'appelle le *produit cartésien* des ensembles E et F. Pour deux éléments $x \in E$ et $y \in F$, on définit le *couple* (x, y) et $E \times F$ est l'ensemble dont les éléments sont tous les couples de cette forme.

Remarque 1.6 Attention, les couples (x, y) et (y, x) sont deux objets distincts, contrairement à l'ensemble $\{x, y\} = \{y, x\}$ où l'ordre des éléments est indifférent. On dit que deux couples $(x, y) \in E \times F$ et $(x', y') \in E \times F$ sont égaux lorsque $x = x'$ et $y = y'$.

On définit par exemple $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ comme étant l'ensemble formé des couples de réels. On généralise cette notion à des produits cartésiens d'un nombre fini d'ensembles : $E_1 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble formé des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.
Si E est un ensemble, on peut également définir l'ensemble des *parties* de E noté $\mathscr{P}(E)$. Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont les sous-ensembles de E. Par exemple, si $E = \{0, 1, 2\}$, $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$. Les ensembles $\emptyset$ et E sont toujours des éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

Exemple 1.5 Si $E = \mathbb{N}$, les notations suivantes sont correctes : $\emptyset \subset \mathscr{P}(E)$, $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$, $1 \notin \mathscr{P}(E)$, $\{1\} \notin E$, $\{1\} \subset E$, $\{1\} \in \mathscr{P}(E) \ldots$

A.3 Quantificateurs

On étend la logique des propositions en ajoutant l'utilisation de *quantificateurs* $\forall$ et $\exists$ qui se lisent respectivement *quel que soit* et *il existe*. Nous pourrons parler de propositions de la forme
– $P : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x \leqslant y$
– $Q : \exists x \in \mathbb{R} :\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant y$
Si $\mathscr{P}(x)$ est un *prédicat*, c'est-à-dire une proposition dépendant d'un élément x appartenant à un ensemble E,
– la proposition
$$P : \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$$
est vraie lorsque *pour tout* élément $x \in E$, la proposition $\mathscr{P}(x)$ prend la valeur V,
– la proposition
$$Q : \exists x \in E :\ \mathscr{P}(x)$$
est vraie lorsqu'*il existe* au moins un élément $x \in E$ pour lequel la proposition $\mathscr{P}(x)$ prend la valeur V.

Exemple 1.6
– La proposition $P : \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x + 1$ est vraie.
– La proposition $P : \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = 0$ est fausse, car pour $x = 0$, la propriété $\mathscr{P}(x) : x^2 - 1 = 0$ n'est pas vraie.
– La proposition $P : \exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 1 = 0$ est vraie car la propriété $\mathscr{P}(x) : x^2 - 1 = 0$ est vérifiée pour $x = 1$ par exemple.

Remarque 1.7 La proposition « $P : \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ » utilise une lettre x, mais ne dépend pas d'un élément particulier $x \in E$. On dit que x est une *variable muette*. On peut écrire la même proposition avec une autre variable muette : $P : \forall y \in E,\ \mathscr{P}(y)$.

Remarque 1.8 On note $\exists! x \in E :\ \mathscr{P}(x)$ pour dire qu'il existe *un unique* élément $x \in E$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}(x)$. Pour montrer une unicité en mathématiques, on suppose que deux éléments $x \in E$ et $x' \in E$ vérifient $\mathscr{P}(x)$ et $\mathscr{P}(x')$ et on montre qu'alors $x = x'$.

Il est très important de savoir nier une proposition avec quantificateurs. Si P est la proposition

$$P\ :\ \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x),$$

la négation de la proposition P, $\neg P$ s'écrit à l'aide du quantificateur $\exists$:

$$\neg P :\ \exists x \in E :\ \ \neg \mathscr{P}(x).$$

En Français : « il existe au moins un élément x de E pour lequel la propriété $\mathscr{P}(x)$ est fausse ».
De même, la négation de la proposition

$$Q\ : \exists x \in E :\ \mathscr{P}(x)$$

s'écrit à l'aide du quantificateur $\forall$

$$\neg Q :\ \forall x \in E,\ \neg \mathscr{P}(x)$$

En Français : « Pour tous les éléments x de E, la propriété $\mathscr{P}(x)$ est fausse.

Remarque 1.9 La négation de la proposition $P\ : \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ n'est pas $\forall x \in E,\ \neg\ \mathscr{P}(x)$.
Par exemple, si P est la proposition « tous les chats sont noirs », sa négation n'est pas « tous les chats ne sont pas noirs », mais « il existe au moins un chat qui n'est pas noir ».

On peut alors écrire de façon automatique la négation d'une proposition faisant intervenir plusieurs quantificateurs.
- $P : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ : \alpha < \varepsilon$ se nie en $\neg P\ : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \alpha \geqslant \varepsilon$.
- $P : \exists x \in \mathbb{R} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x = ny$ se nie en $\neg P :\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} :\ \forall y \in \mathbb{R}, x \neq ny$
- En se rappelant que la négation de la proposition $P \implies Q$ est logiquement équivalente à $(\neg P \wedge Q)$, on nie la proposition :

$$P\ : \forall x \in \mathbb{R}, \left[(\exists n \in \mathbb{N} :\ n \leqslant x) \implies (\forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant x)\right]$$

$$\neg P\ : \exists x \in \mathbb{R} :\ (\exists n \in \mathbb{N} :\ n \leqslant x) \wedge (\exists p \in \mathbb{N} :\ p < x)$$

Multimédia : Exerciseur pour nier une prop. à quantificateurs

A.4 Plans de démonstration

On réserve en mathématiques l'usage de quantificateurs pour l'énoncé des définitions et des théorèmes. Pour *prouver* un résultat, on écrit une *démonstration* qui se base sur une démarche logique.
Pour montrer par exemple qu'une proposition $P\ :\ \forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ est vraie, il faut vérifier que la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie *pour tout* élément x dans l'ensemble E. On considère pour cela un élément $x \in E$ *quelconque* et une fois cet élément donné, on vérifie que la propriété $\mathscr{P}(x)$ est vraie. Le fait de considérer un élément $x \in E$ quelconque se traduit dans une preuve par le mot clé *soit* : Soit $x \in E$. Il est indispensable de bien comprendre le sens de ce mot « soit » en mathématiques. Méditez les deux images suivantes :

1. Une personne extérieure vous donne un élément $x \in E$ *de son choix* : vous n'avez pas le droit de choisir vous même un élément x qui vous arrange ! Vous devez démontrer que la propriété $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour cet élément x qu'on vous a imposé. Imaginez que la personne extérieure doute de votre preuve, elle peut choisir un élément x le plus embêtant pour vous. Vous devez être capable de la convaincre que votre raisonnement fonctionne pour tous les x qu'elle choisira.

2. Imaginez que vous deviez écrire un programme informatique. Ce programme utilise des *paramètres*. Les utilisateurs vont utiliser votre programme avec des valeurs de leur choix pour le paramètre. Pour convaincre votre employeur que votre programme fonctionne, vous devrez prouver qu'il renvoie le bon résultat *pour toute valeur* du paramètre.

Pour montrer qu'une proposition $P :\ \exists x \in E :\ \mathscr{P}(x)$ est vraie, il vous suffit *d'exhiber* un élément x *de votre choix* dans l'ensemble E pour lequel la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie. On utilise souvent pour cela le mot clé « *Posons* $x =$ ».

Exemple 1.7 Montrer que la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x < y^2$$

est vraie. Voici un exemple de démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$, étudions plusieurs cas qui recouvrent toutes les possibilités.

1. Si $x < 0$, posons $y = 0$ et on a bien $x < y^2 = 0$.
2. Si $0 \leqslant x < 1$, posons $y = 1$ et on a bien $x < y^2 = 1$.
3. Si $x > 1$, posons $y = x$, on a bien $x < x^2 = y^2$.

On peut également utiliser une propriété connue Q pour justifier l'existence d'un élément : « *d'après* Q, *il existe* $x \in E$ vérifiant $\mathscr{P}(x)\dots$ ».

Exemple 1.8 Montrer l'implication :

$$\underbrace{\forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ n \leqslant y < n+1}_{(i)} \implies \underbrace{\forall \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} :\ n\alpha \leqslant x < (n+1)\alpha}_{(ii)}.$$

Faisons un raisonnement direct en supposant la propriété (i) vraie et montrons (ii).

Soit $\alpha > 0$,

soit $x \in \mathbb{R}$,

d'après (i), en prenant $y = x/\alpha$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant y < n+1$

par conséquent, puisque $\alpha > 0$, $n\alpha \leqslant x < (n+1)\alpha$.

Il est important de réfléchir à *l'ordre des quantificateurs* dans une proposition logique.
– On peut inverser deux quantificateurs $\forall$ successifs,
– On peut inverser deux quantificateurs $\exists$ successifs,
– On ne peut pas inverser deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemple 1.9

1. La proposition P : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R} :\ z \geqslant x$ et $z \geqslant y$ signifie que si l'on se donne deux réels x et y, alors il existe un réel *z qui dépend de* x et y plus grand à la fois que x et y.
2. La proposition Q : $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R} :\ z \geqslant x$ et $z \geqslant y$ signifie la même chose : qu'on vous donne d'abord x puis y revient à vous donner d'abord y puis x. Les propositions P et Q sont logiquement équivalentes (ici elles sont vraies toutes les deux).
3. La proposition R : $\exists z \in \mathbb{R} :\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\ , z \geqslant x$ et $z \geqslant y$ signifie qu'il existe un réel z *universel* (c'est-à-dire qu'il ne dépend de rien) tel que pour tous réels x et y, z soit plus grand que x et y. Cette proposition est fausse, alors qu'elle ne diffère de P et Q que par l'ordre des quantificateurs.

Remarque 1.10 L'ordre des quantificateurs dans une proposition induit des *dépendances* entre les objets. C'est une source fréquente d'erreurs de raisonnement. Nous verrons quelques exemples typiques plus tard.

L'essentiel de votre travail en mathématiques cette année va consister à écrire des preuves de résultats. Ces démonstrations vont utiliser les définitions du cours qu'il faudra comprendre de façon précise. Ces définitions sont écrites à l'aide de quantificateurs, mais on les retient comme un *plan de démonstration* : « que dois-je faire pour montrer que ... ».

Exemple 1.10 On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'elle est *paire* lorsque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. On dit qu'elle est *impaire* lorsque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$. On dit que f est la fonction nulle lorsque $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Montrons en utilisant ces définitions l'équivalence :

$$\underset{(i)}{\big(f \text{ paire et impaire}\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(f \text{ est la fonction nulle}\big)}$$

Commençons par écrire un plan de démonstration correspondant à la propriété à démontrer. Pour montrer une équivalence, on montre deux implications. L'ébauche de plan commence donc par :

$(i) \implies (ii)$:

$(ii) \implies (i)$:

Pour montrer $(i) \implies (ii)$, on fait un raisonnement direct. On suppose la proposition (i) vraie (on s'en servira comme *hypothèse* dans la démonstration), et il faut démontrer la proposition (ii) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. Le plan devient :

$(i) \implies (ii)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\dots f(x) = 0$

$(ii) \implies (i)$:

De même pour l'implication $(ii) \implies (i)$, on suppose (ii) vraie (hypothèse) et on veut montrer (i) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$. Le plan complet s'écrit donc :

$(i) \implies (ii)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\dots f(x) = 0$

$(ii) \implies (i)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\dots f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$.

Complétons maintenant ce plan pour écrire une preuve complète :

$(i) \implies (ii)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

puisque f est paire, $f(-x) = f(x)$ et puisque f est impaire, $f(-x) = -f(x)$.

En retranchant ces deux égalités, on obtient $2f(x) = 0$ d'où $f(x) = 0$.

$(ii) \implies (i)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Puisque f est la fonction nulle, $f(-x) = 0$ et $f(x) = 0$.

Par conséquent, $f(-x) = -f(x) = f(x) = 0$.

On a vu sur cet exemple la démarche à effectuer pour écrire une preuve.

1. Écrire au brouillon le *plan de démonstration* correspondant au résultat à montrer.
2. On complète au brouillon la démonstration en utilisant aux différents endroits les *hypothèses*. Remarquez que l'on cite précisément les hypothèses utilisées dans la démonstration finale : ce n'est pas à la personne qui vous lit de deviner d'où viennent les propriétés que vous utilisez, c'est à vous de l'indiquer clairement.
3. On rédige au propre la démonstration finale en mettant en évidence le plan de démonstration suivi. On a numéroté les deux propositions (i) et (ii), on indique clairement ce qu'on montre : $(i) \implies (ii)$... On passe souvent à la ligne pour rendre la preuve plus lisible...

Exemple 1.11 Une définition très importante en analyse : on dit qu'une suite réelle (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on utilise donc le plan suivant :

PLAN 1.1 : Convergence d'une suite

1. Soit $\varepsilon > 0$
2. Posons $N = ...$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$
4. Supposons $n \geqslant N$
5. *On a* $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Que signifie ce plan ?

1. *Soit* $\varepsilon > 0$: vous demandez à une personne extérieure de vous donner un $\varepsilon > 0$ de *son* choix (aussi petit qu'elle veut !)
2. *Posons* $N = \dots$: en fonction de cet $\varepsilon > 0$ qu'elle vous a donné, vous devez *construire* un entier N (qui dépend bien sûr de ε).
3. *Phase de vérification :* vous ne pouvez pas définir n'importe quel entier N, il faut qu'il satisfasse la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies |u_n - l| \leqslant \varepsilon$. Pour vérifier que cette propriété à quantificateur est vraie :
   (a) *Soit* $n \in \mathbb{N}$: vous demandez un entier n à la personne extérieure.
   (b) En utilisant l'entier n qu'elle vous a donné, vous devez démontrer l'implication $(n \geqslant N) \implies |u_n - l| \leqslant \varepsilon$ Pour cela, on utilise le raisonnement direct. On suppose que la propriété $(n \geqslant N)$ est vraie : *On prend* $n \geqslant N$. On vérifie alors que le choix de notre N permet de conclure que la propriété $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ est également vraie.

Montrons que la suite $(1/n)$ converge vers 0 en utilisant le plan de démonstration qui découle de la définition.

1. *Soit* $\varepsilon > 0$.
2. *Posons* $N = E(1/\varepsilon)+1$ (où $E(1/\varepsilon)$ désigne la partie entière du réel $1/\varepsilon$, à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à $1/\varepsilon$).
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $n \geqslant N$.
4. Avec la définition de la partie entière, $E(1/\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < E(1/\varepsilon)+1$ d'où $\frac{1}{\varepsilon} < N$ et, puisque $n \geqslant N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ et finalement on conclut : $|u_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.

Remarquez que l'entier N que vous avez construit dépend explicitement du « paramètre » ε que la personne vous a donné. Votre démonstration peut se traduire par un programme informatique : l'utilisateur entre le $\varepsilon > 0$ de son choix et votre programme renvoie l'entier N calculé à partir de la formule ci-dessus. Vous avez justifié que le programme renvoie toujours un entier N vérifiant la propriété souhaitée.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons apprendre à traduire des définitions à quantificateurs par des plans de démonstration et nous entraîner à écrire des preuves en utilisant ces plans. Nous avons choisi des exemples portant sur les ensembles et les applications car ils sont simples et instructifs. La démarche suivie s'étend à tout le cours d'algèbre et d'analyse avec des définitions plus compliquées.

Multimédia : l'utilisateur choisit des quantificateurs et variables et le programme écrit le plan de démonstration correspondant. Inverse : on propose une phrase à quantifica et il faut écrire le plan.

A.4.1 Plans de preuves ensemblistes

Voici deux définitions ensemblistes et les plans de preuve associés.

DÉFINITION 1.1 **Inclusion d'ensembles**
Un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F si et seulement si $\forall x \in E, x \in F$

PLAN 1.2 : Inclusion d'ensemble

1. Soit $x \in E$
2. ...
3. $x \in F$

DÉFINITION 1.2 **Égalité d'ensembles**
On dit que deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

PLAN 1.3 : Égalité d'ensembles

1. *Montrons que* $E \subset F$ *:*
   (a) Soit $x \in E$,
   (b) ... $x \in F$.
2. *Montrons que* $F \subset E$ *:*
   (a) Soit $x \in F$,
   (b) ... $x \in E$.

Exemple 1.12 Soient trois ensembles A, B, C. Montrer que

$$\underbrace{(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C)}_{(i)} \implies \underbrace{(B \subset C)}_{(ii)}.$$

Supposons la proposition (i) vraie et montrons que la proposition (ii) est vraie (raisonnement direct).

Soit $x \in B$

Puisque $x \in B$, Étudions deux cas complémentaires
– Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ donc d'après (i), $x \in A \cap C$ et donc $x \in C$.
– Si $x \notin A$, alors puisque $x \in B$, $x \in A \cup B$ donc d'après (i), $x \in A \cup C$. Puisque $x \notin A$, $x \in C$.

Dans les deux cas, on a montré que $x \in C$.

Exemple 1.13 Soient trois ensembles A, B, C. Montrer que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1. Montrons que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Soit $x \in A \cap (B \cup C)$

   On sait que $x \in A$ et que $x \in B \cup C$. Puisque $x \in B \cup C$, il y a deux cas possibles :
   – si $x \in B$, alors à fortiori, $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   – si $x \in C$, alors à fortiori, $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Dans les deux cas, on aboutit à la conclusion que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Montrons que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

   Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Puisque x appartient à une union, on étudie les deux cas :
   – $x \in (A \cap B)$, alors comme $x \in B$, à fortiori, $x \in B \cup C$ et comme $x \in A$, finalement $x \in A \cap (B \cup C)$.
   – $x \in (A \cap C)$, $x \in C$ d'où $x \in B \cup C$ et comme $x \in A$, $x \in A \cap (B \cup C)$.

   Dans les deux cas, on aboutit à la conclusion que $x \in A \cap (B \cup C)$.

Remarque 1.11 Remarquez comment nous avons respecté les plans correspondant aux définitions. Dites-vous bien que si vous voulez montrer que $E \subset F$ et que vous écrivez :

Posons $x = \dots$,

$x \in E$

$x \in F$

votre professeur ne prendra pas la peine de lire votre copie : vous êtes *hors sujet*. Ce que vous écrivez peut être intéressant, mais *ne démontre pas* que $E \subset F$. Vous n'avez pas suivi le plan de démonstration correspondant à la propriété à montrer. Il est très important d'écrire au brouillon (au moins dans un premier temps), le plan de démonstration et de bien comprendre *ce que vous devez faire* pour montrer le résultat. Avec un peu d'habitude, le brouillon deviendra inutile et vous aurez en tête ce plan à tout moment.

Exercice 1.1 ♡

Soient trois ensembles A, B, C. *Montrer que*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Solution :

$\subset$: *soit* $x \in A \cup (B \cap C)$. *Étudions deux cas :*
– $x \in A$, *alors* $x \in A \cup B$ *et* $x \in A \cup C$ *et donc* $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
– $x \in B \cap C$: *comme* $x \in B$, $x \in A \cup B$ *et comme* $x \in C$, $x \in A \cup C$. *Par conséquent,* $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Dans les deux cas, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$\supset$: *soit* $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

On a $x \in A \cup B$ *et* $x \in A \cup C$. *Étudions deux cas complémentaires :*
– $x \in A$, *alors* $x \in A \cup (B \cap C)$.
– $x \notin A$, *alors comme* $x \in A \cup B$, $x \in B$. *De même, puisque* $x \in A \cup C$, $x \in C$. *Par conséquent,* $x \in (B \cap C)$ *et donc* $x \in A \cup (B \cap C)$.
Dans les deux cas, on a montré que $x \in A \cup (B \cap C)$.

Exercice 1.2 ♡

Soient A *et* B *deux ensembles. On définit leur* différence symétrique *par :*

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

a. *Comparer les ensembles* $A \triangle (B \cup C)$ *et* $(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.

b. *Soient* $A, B, C \subset E$ *trois parties d'un ensemble* E. *Montrer que*

$$\underbrace{\big(A \triangle B = A \triangle C\big)}_{(i)} \iff \underbrace{\big(B = C\big)}_{(ii)}.$$

Solution :

a. – *Montrons que* $A\triangle(B\cup C)\subset(A\triangle B)\cup(A\triangle C)$.

Soit $x\in A\triangle(B\cup C)$, *par définition de la différence symétrique,* $x\in A\cup(B\cup C)$ *et* $x\not\in A\cap(B\cup C)$. *Puisque* $x\in A\cup B\cup C$, *étudions trois cas :*
– *si* $x\in A$ *: puisque* $x\not\in B\cup C$, $x\not\in B$, *donc* $x\in A\triangle B$.
– *si* $x\in B$ *:* $x\not\in A$ *d'où* $x\in A\triangle B$.
– *si* $x\in C$ *:* $x\not\in A$ *d'où* $x\in A\triangle C$.
Dans les trois cas, on obtient que $x\in(A\triangle B)\cup(A\triangle C)$.

– *Montrons qu'en général, l'inclusion réciproque est fausse. Il suffit pour cela* d'exhiber un contre-exemple. *Considérons quatre entiers distincts* a,b,c,d *et posons* $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c\}$ *et* $C=\{d\}$. *On calcule* $A\triangle(B\cup C)=A\triangle\{b,c,d\}=\{a,c,d\}$ *alors que* $(A\triangle B)\cup(A\triangle C)=\{a,c\}\cup\{a,b,d\}=\{a,b,c,d\}$.

b. *Pour montrer une équivalence, on montre deux implications :*

$(ii)\implies(i)$ *est évidente.*

$(i)\implies(ii)$ *: supposons* (i) *vraie et montrons que* (ii) *est vraie (raisonnement direct).*

Montrons que $B\subset C$ *:*

Soit $b\in B$, *étudions deux cas complémentaires :*

si $b\in A$, *alors* $b\not\in A\triangle B$ *donc d'après* (i), $x\not\in A\triangle C$ *et donc* $b\in C$.

si $b\not\in A$, *alors* $b\in A\triangle B=A\triangle C$ *d'où* $b\in C$.

Montrons que $C\subset B$ *: la preuve est similaire.*

Exercice 1.3 ♡

Soient deux ensembles E *et* F. *Quelle relation y a-t-il*

a. *entre les ensembles* $\mathscr{P}(E\cup F)$ *et* $\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)$ *?*

b. *entre les ensembles* $\mathscr{P}(E\cap F)$ *et* $\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$ *?*

c. *entre les ensembles* $\mathscr{P}(E\times F)$ *et* $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(F)$ *?*

Solution :

a. *Montrons que* $\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)\subset\mathscr{P}(E\cup F)$.

Soit $A\in\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)$. *Étudions les deux cas possibles :*
– *Si* $A\in\mathscr{P}(E)$, *cela signifie que* $A\subset E$ *et donc que* $A\subset E\cup F$. *Par conséquent,* $A\in\mathscr{P}(E\cup F)$.
– *De même si* $A\in\mathscr{P}(F)$.

L'inclusion réciproque est fausse, comme le montre l'exemple $E=\{e\}$, $F=\{f\}$ *(avec* $e\neq f$*) :* $\mathscr{P}(E\cup F)=\{\varnothing,\{e\},\{f\},\{e,f\}\}$ *et* $\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)=\{\varnothing,\{e\},\{f\}\}$.

b. *Montrons que* $\mathscr{P}(E\cap F)=\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$.
– $\mathscr{P}(E\cap F)\subset\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$.

Soit $A\in\mathscr{P}(E\cap F)$. *On a* $A\subset E\cap F$.

Puisque $A\subset E$, $A\in\mathscr{P}(E)$

Puisque $A\subset F$, $A\in\mathscr{P}(F)$.

Par conséquent, $A\in\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$.

– $\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)\subset\mathscr{P}(E\cap F)$.

Soit $A\in\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$.

Comme $A\in\mathscr{P}(E)$, $A\subset E$.

De même puisque $A\in\mathscr{P}(F)$, $A\subset F$.

Donc $A\subset E\cap F$ *et donc* $A\in\mathscr{P}(E\cap F)$.

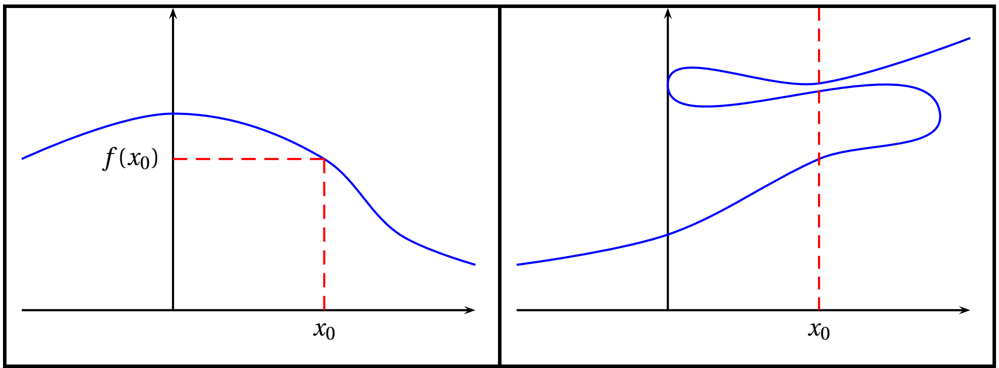
c. *Il n'y a aucune inclusion entre les deux ensembles, comme le montre le contre-exemple suivant :* $E=\{e\}$ *et* $F=\{f\}$. $E\times F=\{(e,f)\}$, $\mathscr{P}(E\times F)=\{\varnothing,\{(e,f)\}\}$. *D'autre part,* $\mathscr{P}(E)=\{\varnothing,\{e\}\}$, $\mathscr{P}(F)=\{\varnothing,\{f\}\}$ *et* $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(F)=\{(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{f\}),(\{e\},\varnothing),(\{e\},\{f\})\}$.

A.4.2 Plans de démonstrations pour les applications

Applications

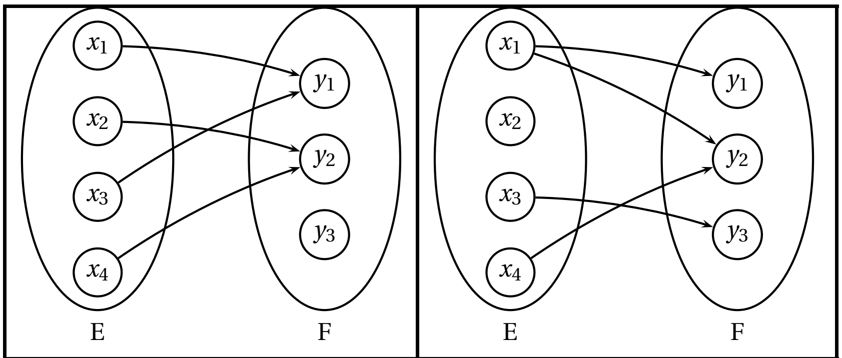
DÉFINITION 1.3 ♡♡ **Application**
On considère deux ensembles E et F. Une *application* $f : E \longrightarrow F$ est une correspondance qui à tout élément $x \in E$ associe *un unique* élément noté $f(x)$ de l'ensemble F.

Remarque 1.12 On définit plus formellement une application $f : E \longrightarrow F$ par son *graphe*. C'est une partie $G \subset E \times F$ vérifiant la propriété : $\forall x \in E,\ \exists!\ y \in F : \quad (x, y) \in G$. On dit que cet unique élément $y = f(x)$ est *l'image* de l'élément x par l'application f. Pour une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, son graphe est une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout réel $x_0 \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = x_0$ rencontre le graphe en un unique point (x_0, y_0).



Un graphe de fonction	Pas un graphe de fonction

Exemple 1.14 Lorsque les ensembles E et F sont finis, on peut représenter une application $f : E \longrightarrow F$ par un diagramme sagittal. On trace une flèche partant de chaque élément $x \in E$ vers son *image*, l'unique élément $y = f(x) \in F$.



Une application	Pas une application

Le premier diagramme sagittal représente une application. Par exemple $f(x_3) = y_1$, $f(x_4) = f(x_2) = y_2$. Le graphe de f s'écrit $G = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_2)\}$. La deuxième figure ne représente pas une application pour deux raisons : l'élément x_1 possède deux images et l'élément x_2 n'a pas d'image.

Remarque 1.13 On définit l'*application identité* d'un ensemble E par $\mathrm{id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$.

DÉFINITION 1.4 ♡♡ **Égalité de deux applications**
On dit que deux applications $f, g : E \longrightarrow F$ sont égales lorsque

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$$

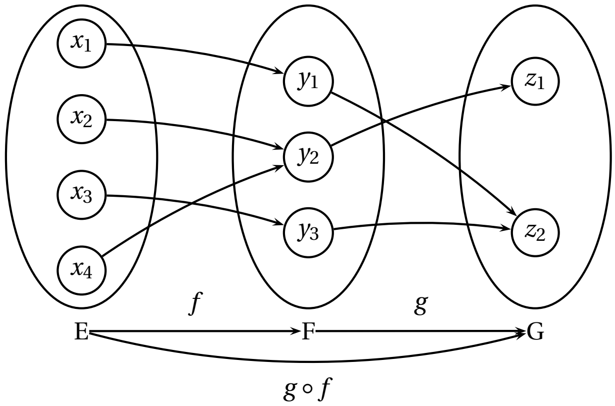
PLAN 1.4 : Égalité de deux applications

1. Soit $x \in E$,
2. ...
3. $f(x) = g(x)$.

Composée d'applications

DÉFINITION 1.5 ♡♡ **Composée d'applications**
Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux applications. On définit une nouvelle application notée $g \circ f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G}$ en posant $\forall x \in \mathrm{E},\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Exemple 1.15 Sur le diagramme sagittal ci-dessous, on a par exemple $(g \circ f)(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g(y_1) = z_2$



Remarque 1.14 À chaque fois que vous voyez une composée d'applications, assurez-vous que l'ensemble d'arrivée de la première est inclus dans l'ensemble de départ de la seconde. Il est conseillé de faire des *schémas de composition*

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G}$$

Remarque 1.15 La composée est « associative » : si $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G} \xrightarrow{h} \mathrm{H}$ sont trois applications, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Remarque 1.16 Si $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$, $f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{E}} = f$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{F}} \circ f = f$.

Applications injectives, surjectives

DÉFINITION 1.6 ♡♡♡ **Injectivité**
On dit qu'une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est *injective* lorsque

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$$

On en déduit le plan de démonstration important

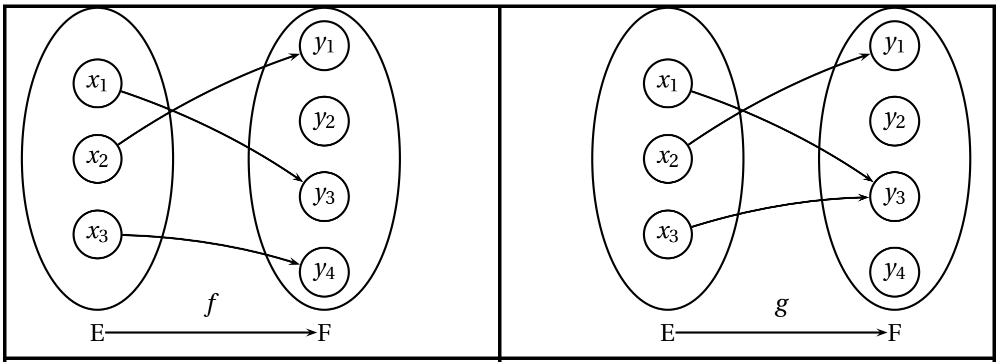
PLAN 1.5 : Injectivité

1. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$.
2. Supposons que $f(x) = f(y)$,
3. ...
4. $x = y$.

Remarque 1.17 La définition précédente n'est pas très intuitive. Pour la comprendre, traduisons ce que signifie le fait qu'une fonction n'est *pas* injective en niant la proposition à quantificateurs :

$$\exists (x, y) \in \mathrm{E}^2 : \quad [f(x) = f(y)] \wedge [x \neq y]$$

Une fonction n'est pas injective lorsqu'il existe deux éléments distincts x, y ayant la même image. Une autre façon de traduire que f est injective consiste à dire que tout élément $y \in \mathrm{F}$ possède *au plus* un antécédent.



f injective	g non injective

L'application g de l'exemple ci-dessus n'est pas injective puisque $x_1 \neq x_3$ et pourtant $g(x_1) = g(x_3) = y_3$. L'application f est elle injective. Remarquons que tout élément de F possède au plus un antécédent par f (l'élément y_2 n'en possède pas).
Pourquoi choisir comme définition de l'injectivité $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y$? Simplement parce que cette définition se prête le mieux aux démonstrations directes ! En supposant que $f(x) = f(y)$, on dispose d'une hypothèse intéressante dans la preuve : il suffit de résoudre cette équation et montrer que $x = y$.

Exemple 1.16 Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x+2y) \end{cases}$ est injective.

Soient $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

On suppose que $f(X) = f(X')$, c'est-à-dire (égalité de deux couples) $\begin{cases} x+y & = x'+y' \\ x+2y & = x'+2y' \end{cases}$.

En retranchant la première ligne à la deuxième, on obtient $y = y'$ puis $x = x'$.

On a donc $X = (x, y) = (x', y') = X'$.

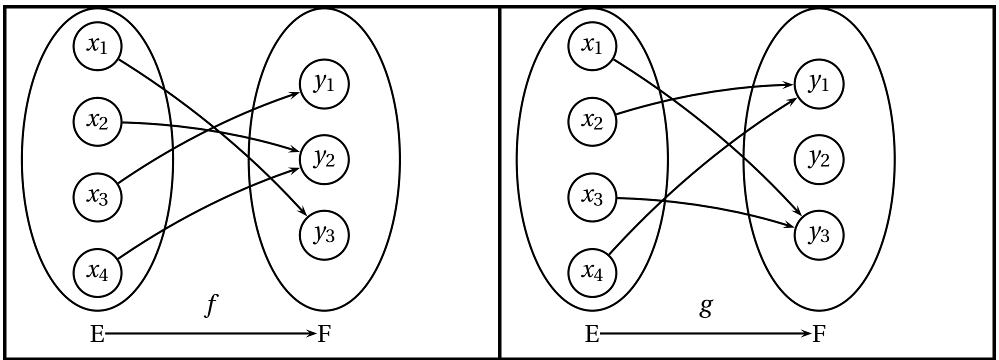
DÉFINITION 1.7 ♡♡♡ **Application surjective**
On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est *surjective* lorsque

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E : \ y = f(x).$$

PLAN 1.6 : Application surjective

1. Soit $y \in F$.
2. Posons $x = \dots$
3. $y = f(x)$.

Remarque 1.18 Une application est surjective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F possède au moins un antécédent.



f surjective	g non surjective

L'application g du schéma n'est pas surjective car y_2 n'a pas d'antécédent.

Exemple 1.17 Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x + 2y) \end{cases}$ est surjective.

Soit $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Posons $X = (2y_1 - y_2, y_2 - y_1)$.

Alors $f(X) = \big(2y_1 - y_2 + y_2 - y_1, 2y_1 - y_2 + 2(y_2 - y_1)\big) = (y_1, y_2) = Y$.

Remarque 1.19 Il arrive souvent dans les démonstrations qu'on ait à construire un objet, sans qu'on voit de façon évidente comment le définir. On utilise alors un raisonnement d'*analyse-synthèse* :
– dans une partie *analyse*, on suppose que l'objet qu'on cherche vérifie les propriétés voulues,
– on trouve que nécessairement l'objet doit être d'une forme particulière,
– on rédige une partie *synthèse* en *posant* l'objet qu'on a trouvé et on vérifie qu'il convient.
Sur notre exemple, on pourrait rédiger la preuve de la façon suivante.

Soit $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Analyse : supposons que $X = (x_1, x_2)$ vérifie $f(X) = Y$. On doit avoir

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = y_1 & : L_1 \\ x_1 + 2x_2 & = y_2 & : L_2 \end{cases}$$

En faisant $L_2 - L_1$, on trouve que nécessairement $x_2 = y_2 - y_1$ et ensuite que $x_1 = 2y_1 - y_2$ d'où $X = (2y_1 - y_2, y_2 - y_1)$.

Synthèse : Posons $X = (2y_1 - y_2, y_2 - y_1)$. On a bien $f(X) = \big(2y_1 - y_2 + y_2 - y_1, 2y_1 - y_2 + 2(y_2 - y_1)\big) = (y_1, y_2) = Y$.

Cette façon de rédiger permet d'expliquer comment on a abouti à la démonstration. Remarquez que si l'on supprime la partie analyse, on a respecté scrupuleusement le plan de preuve de la surjectivité.

Exemple 1.18 Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que

$$\underset{(i)}{\big(f \text{ injective}\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(f \text{ surjective}\big)}$$

Pour montrer l'équivalence, montrons deux implications :

1. $(i) \implies (ii)$: en supposant (i) vraie, montrons que f est surjective.

   Soit $y \in E$,

   puisque $f \circ f \circ f = f$, on a $f\big(f \circ f(y)\big) = f(y)$, mais puisque f est injective, $f \circ f(y) = y$.

   Posons $x = f \circ f(y)$,

   On a bien $y = f(x)$.

2. $(ii) \implies (i)$:

   Soit $(x, y) \in E^2$.

   Supposons que $f(x) = f(y)$.

   Puisque f est surjective, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$ et il existe $y' \in E$ tel que $y = f(y')$. Alors $f \circ f(x') = f \circ f(y')$. En appliquant f, on obtient $f \circ f \circ f(x') = f \circ f \circ f(y')$ et puisque $f \circ f \circ f = f$, on trouve que $f(x') = f(y')$

   On a donc $x = f(x') = f(y') = y$.

Exercice 1.4 ♡

Soit E *un ensemble non vide et* $A \subset E$ *une partie de* E. *On définit l'application*

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{cases}.$$

a. *Déterminer l'application* φ_A *lorsque* $E = \{a, b\}$ *et* $A = \{a\}$. *Dans ce cas, l'application* φ_A *est-elle injective, surjective ?*

b. *Montrer que* $(\varphi_A \text{ injective}) \implies (A = E)$.

c. *Montrer que* $(\varphi_A \text{ surjective}) \implies (A = E)$.

Solution :

a. *On peut ici lister les éléments de* $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. *Il suffit de calculer l'image de chacun de ces éléments :* $\varphi_A(\varnothing) = \varnothing$, $\varphi_A(\{a\}) = \{a\}$, $\varphi_A(\{b\}) = \varnothing$, $\varphi_A(\{a,b\}) = \{a\}$. *On voit que l'application n'est pas injective puisque* $\varphi_A(\{a,b\}) = \varphi_A(\{a\})$ *alors que* $\{a,b\} \neq \{a\}$ *et que* φ_A *n'est pas surjective puisque* $\{a,b\}$ *n'a pas d'antécédent.*

b. *Montrons le résultat par contraposée :*

   Supposons $A \neq E$, *il existe* $b \in E \setminus A$.

   Posons $A' = A \cup \{b\}$, *on a* $A \neq A'$

   et $\varphi_A(A') = A' \cap A = A = \varphi_A(A)$.

c. *Montrons le résultat par contraposée :*

   Supposons $A \neq E$, *il existe* $b \in E \setminus A$.

   Posons $B = \{b\} \in \mathscr{P}(E)$,

   Montrons que $\forall X \in \mathscr{P}(E)$, $\varphi_A(X) \neq B$.

   Soit $X \in \mathscr{P}(E)$, $\varphi_A(X) = X \cap A \subset A$ *ce qui entraîne que* $b \notin \varphi_A(X)$. *Par conséquent,* $\varphi_A(X) \neq B$.

   On aurait pu également utiliser une démonstration directe : puisque φ_A *est surjective, il existe* $X \in \mathscr{P}(E)$ *tel que* $\varphi_A(X) = E$, *c'est-à-dire* $X \cap A = E$. *On en déduit que* $E \subset A$ *et donc que* $A = E$.

THÉORÈME 1.1 ♡♡ **Composée et injections, surjections**

On considère deux applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. On a les propriétés suivantes :

1. f, g injectives $\implies$ $g \circ f$ injective.
2. f, g surjectives $\implies$ $g \circ f$ surjective.
3. $g \circ f$ injective $\implies$ f injective.
4. $g \circ f$ surjective $\implies$ g surjective.

Démonstration

1. *Montrons que* $g \circ f$ *est injective.*

   Soient $(x, x') \in E^2$ *tels que* $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

   Puisque g *est injective et que* $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, *on en déduit* $f(x) = f(x')$.

   Puisque f *est injective, on a* $x = x'$.

2. *Montrons que* $g \circ f$ *est surjective.*

   Soit $z \in G$.

   Puisque g *est surjective, il existe* $y \in F$ *tel que* $z = g(y)$.

   Puisque f *est surjective, il existe* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$.

   Alors $z = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$

3. *Montrons que* f *est injective.*

   Soient $(x, x') \in E^2$ *tels que* $f(x) = f(x')$.

   En prenant l'image par g *des deux membres, on obtient :* $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, *soit* $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

   Puisque $(g \circ f)$ *est injective, il vient que* $x = x'$.

4. *Montrons que* g *est surjective.*

   Soit $z \in G$.

   Puisque $(g \circ f)$ *est injective, il existe* $x \in E$ *tel que* $z = (g \circ f)(x)$.

   On a donc $z = g\big(f(x)\big)$ *et, en posant* $y = f(x)$, *cela donne* $z = g(y)$ *ce qui montre que* g *est surjective.*

Exercice 1.5 ♡

Soient E, F, G *trois ensembles et deux applications* $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$.

a. *Montrer que si* $g \circ f$ *est injective et* f *surjective, alors* g *est injective.*
b. *Montrer que si* $g \circ f$ *est surjective et* g *injective, alors* f *est surjective.*

Solution :

a. *Montrons que* g *est injective.*

   Soit $(y, y') \in F^2$ *vérifiant* $g(y) = g(y')$.

   Puisque f *est surjective, il existe* $(x, x') \in E^2$ *tels que* $y = f(x)$ *et* $y' = f(x')$.

On a donc $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$, c'est-à-dire $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$.

Puisque $(g\circ f)$ est injective, il vient que $x = x'$.

En appliquant f, on a $f(x) = f(x')$, c'est-à-dire $y = y'$.

b. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in F$.

Puisque $g(y) \in G$ et que $(g\circ f)$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(y) = (g\circ f)(x)$.

On a alors $g(y) = g\big(f(x)\big)$ mais comme g est injective, on a $y = f(x)$.

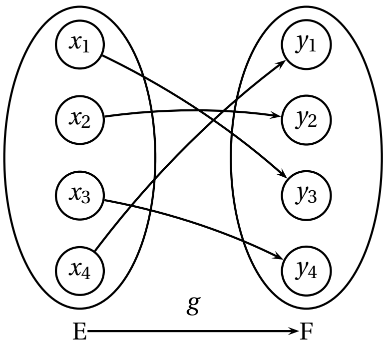
Bijections

DÉFINITION 1.8 ♡♡♡ **Bijection**
On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est *bijective* lorsque f est injective et surjective.

PLAN 1.7 : Pour montrer que f est bijective

1. *Montrons que f est injective.*
2. *Montrons que f est surjective.*

Remarque 1.20 Une application est bijective lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée possède exactement un antécédent.



THÉORÈME 1.2 ♡♡ **Bijection réciproque**
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Il existe une unique application $g : F \longrightarrow E$ vérifiant

$$\begin{cases} g\circ f = \mathrm{id}_E \\ f\circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}.$$

On dit que l'application g est la *bijection réciproque* de la bijection f et on note $g = f^{-1}$.

Démonstration

– *Montrons l'unicité d'une telle application g. Soit $(g_1, g_2) \in \mathscr{F}(F,E)^2$ vérifiant $f\circ g_1 = f\circ g_2 = \mathrm{id}_F$ et $g_1\circ f = g_2\circ f = \mathrm{id}_E$.*

Soit $y \in F$,

puisque $f\circ g_1(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$, en appliquant g_2, on a $g_2\big(f\circ g_1(y)\big) = g_2(y)$,

d'où $(g_2\circ f)\big(g_1(y)\big) = g_2(y)$,

Or $g_2\circ f = \mathrm{id}_E$, $\mathrm{id}_E\big(g_1(y)\big) = g_1(y)$ et finalement $g_1(y) = g_2(y)$.

– *Montrons l'existence d'une telle application g. Considérons $G = \{(x,y) \in E\times F \mid y = f(x)\}$ le graphe de l'application f. Posons $\widetilde{G} = \{(y,x) \in F\times E \mid y = f(x)\}$. On vérifie que G est un graphe fonctionnel :*

Soit $y \in F$,

puisque f est bijective, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire tel que $(y,x) \in \widetilde{G}$.

Le graphe $\widetilde{G}$ définit donc une application $g : F \longrightarrow E$. Montrons que $f\circ g = \mathrm{id}_F$.

Soit $y \in F$, $f\circ g(y) = f\big(g(y)\big)$.

Il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et on a alors $g(y) = x$, d'où $f\circ g(y) = f(x) = y$.

On montre de même que $g\circ f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 1.6 ♡

On considère trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$. *Montrer que*

$$g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ bijectives } \implies f, g, h \text{ bijectives}$$

Solution : *Puisque $g \circ f$ est surjective, d'après le théorème 1.1 page 1141, g est surjective. De même, puisque $h \circ g$ est injective, g est injective. Par conséquent, g est bijective et on peut introduire sa bijection réciproque $g^{-1} : G \longrightarrow F$. Puisque $g \circ f$ et g^{-1} sont bijectives, toujours d'après le théorème 1.1, $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective. Par conséquent, f est bijective. On démontre avec les mêmes arguments que h est aussi bijective.*

On peut aussi résoudre cet exercice en utilisant les résultats de l'exercice 1.5 page 1141. Puisque $g \circ f$ est injective, f est injective d'après le théorème 1.1 page 1141 et, d'après l'exercice 1.5, f est surjective car g est injective. On prouve de même que h est surjective.

THÉORÈME 1.3 ♡♡♡ **Bijection réciproque d'une composée**

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections. On note $g^{-1} : G \longrightarrow F$ et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ leurs bijections réciproques. La composée $(g \circ f)$ est également bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration *D'après le théorème 1.1 page 1141, la composée de deux bijections est une bijection, donc $g \circ f$ est bijective. Posons $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. On a $h \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et de même, $(g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_G$. Par le théorème 1.2 page 1142, l'application h est la bijection réciproque de l'application $g \circ f$.*

Image directe, image réciproque

DÉFINITION 1.9 ♡♡♡ **Image réciproque d'une partie**

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ et une partie $B \subset F$. On définit *l'image réciproque* de la partie B par l'application f :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

PLAN 1.8 : Pour montrer que $x \in f^{-1}(B)$

Soit $x \in E$.

Vérifions que $f(x) \in B$.

Remarque 1.21 Ne pas confondre la notation $f^{-1}(B)$ lorsque $B \subset F$ est une partie de F et la notation $f^{-1}(y)$ lorsque $y \in F$ qui n'a de sens que lorsque l'application f est bijective.

Exemple 1.19 Soit une application $f : E \longrightarrow F$ et deux parties $B_1, B_2 \subset F$. Montrer que

a. $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
b. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
c. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

a. Raisonnement direct. Supposons (i) : $B_1 \subset B_2$ vraie et montrons (ii) : $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$:

Soit $x \in f^{-1}(B_1)$.

Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B_1$ et, puisque $B_1 \subset B_2$, $f(x) \in B_2$.

Par définition de l'image réciproque $x \in f^{-1}(B_2)$ car $f(x) \in B_2$.

b. Montrons deux inclusions :

$\subset$:

soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$,

Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B_1 \cap B_2$.

Puisque $f(x) \in B_1$, $x \in f^{-1}(B_1)$ et, puisque $f(x) \in B_2$, $x \in f^{-1}(B_2)$.

On a donc $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

$\supset$:

Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Puisque $x \in f^{-1}(B_1)$, $f(x) \in B_1$ et, comme $x \in f^{-1}(B_2)$, $f(x) \in B_2$.

Ainsi $f(x) \in B_1 \cap B_2$ et $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

c. $\subset$:

Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Étudions deux cas :

Si $f(x) \in B_1$, alors par définition de l'image réciproque, $x \in f^{-1}(B_1)$ et à fortiori, $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Si $f(x) \in B_2$, alors $x \in f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Dans les deux cas, $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

$\supset$:

Soit $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

Étudions deux cas :

Si $x \in f^{-1}(B_1)$, alors $f(x) \in B_1$ d'où $f(x) \in B_1 \cup B_2$ et $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Si $x \in f^{-1}(B_2)$, alors $f(x) \in B_2$ d'où $f(x) \in B_1 \cup B_2$ et $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

Dans les deux cas, on a montré que $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

DÉFINITION 1.10 ♡♡♡ **Image directe d'une partie**

Soit une application $f : E \longrightarrow F$ et une partie $A \subset E$. On définit *l'image directe* de la partie A par l'application f :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A : \ y = f(x)\}$$

PLAN 1.9 : Pour montrer que $y \in f(A)$

Posons $x = \dots$

$x \in A$ *et* $y = f(x)$.

Exemple 1.20 Soit une application $f : E \longrightarrow F$ et $A_1, A_2 \subset E$ deux parties de l'ensemble E. Montrer que :

a. $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$

b. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

c. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ et que l'inclusion réciproque est fausse en général.

a. Supposons $A_1 \subset A_2$ et montrons que $f(A_1) \subset f(A_2)$.

Soit $y \in f(A_1)$,

d'après la définition de l'image directe, il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $A_1 \subset A_2$, $x \in A_2$ d'après la définition de l'image directe,

$y \in f(A_2)$.

b. Montrons deux inclusions :

$\subset$:

Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$,

d'après la définition de l'image directe, il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$. Étudions deux cas :

Si $x \in A_1$, alors $y = f(x) \in f(A_1)$ et, à fortiori, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Si $x \in A_2$, alors $y = f(x) \in f(A_2)$ et donc $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Dans les deux cas, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

$\supset$:

soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$,

Étudions deux cas :

Si $y \in f(A_1)$, d'après la définition de l'image directe, il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$ et puisque $x \in A_1 \subset A_1 \cup A_2$, $y = f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$.

Si $y \in f(A_2)$, on a de même $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

c. Montrons $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$:

Soit $x \in f(A_1 \cap A_2)$,

d'après la définition de l'image directe, il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$.

Puisque $x \in A_1$ et $y = f(x)$, on a $y \in f(A_1)$ et, puisque $x \in A_2$ et $y = f(x)$, on a $y \in f(A_2)$.

Finalement, $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Montrons qu'en général, l'inclusion $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ est fausse. Essayons tout d'abord de la prouver :

Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Puisque $y \in f(A_1)$, il existe $x_1 \in A_1$ tel que $y = f(x_1)$.

Puisque $y \in f(A_2)$, il existe $x_2 \in A_2$ tel que $y = f(x_2)$.

On est bloqué, car il nous faut trouver $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$. On dispose de $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$, mais comment construire x à partir de x_1 et x_2 ? On se rend compte que si l'on ajoute l'hypothèse que la fonction f est *injective*, alors puisque $f(x_1) = f(x_2)$, on aurait $x_1 = x_2$ et alors $x = x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$. Dans le cas où f n'est pas injective, on ne voit pas comment conclure.

Nous allons chercher un contre-exemple en définissant une fonction f et deux parties A_1, A_2 pour lesquelles l'inclusion est fausse. On a vu que pour trouver un contre-exemple, il fallait nécessairement choisir une fonction f qui n'est pas injective. Essayons par exemple avec $E = \{a, b\}$, $F = \{c\}$, et $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(a) = f(b) = c$. En prenant $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$, $f(A_1 \cap A_2) = f(\varnothing) = \varnothing$ alors que $f(A_1) = f(A_2) = \{c\}$ d'où $f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\}$.

Exercice 1.7 ♡

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto \quad (x + y, xy) \end{cases}$.

a. *On considère un élément* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*. Déterminer l'ensemble* $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big)$ *(les notations sont-elles correctes ?)*
b. *Déterminer* $f(\mathbb{R}^2)$.
c. *L'application* f *est-elle injective ? Surjective ?*

Solution :

a. *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, on traduit la notation* $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big)$ *avec la définition de l'image réciproque :*

$$X = (x, y) \in f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big) \iff \begin{cases} x + y & = a \\ xy & = b \end{cases}$$

Par conséquent, $X \in f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big)$ *si et seulement si* x *et* y *sont racines du trinôme* $P = X^2 - aX + b$.
– *Si* $\Delta = a^2 - 4b < 0$*, le trinôme* P *ne possède pas de racines réelles et* $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big) = \varnothing$.
– *Si* $\Delta = a^2 - 4b = 0$*, le trinôme possède une racine double* $a/2$*, d'où* $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big) = \{(a/2, a/2)\}$.
– *Si* $\Delta = a^2 - 4b > 0$*, le trinôme possède deux racines réelles distinctes* $x_1 \neq x_2$ *et* $f^{-1}\big(\{(a, b)\}\big) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$.

b. *On a* $(x, y) \in f(\mathbb{R}^2)$ *si et seulement s'il existe* $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ *vérifiant* $f(x', y') = (x, y)$*. D'après a., c'est le cas si et seulement si* $x^2 - 4y \geqslant 0$*. Par conséquent,*

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y \geqslant 0\}$$

(représenter graphiquement cet ensemble dans $\mathbb{R}^2$*).*

c. *Puisque* $f(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{R}^2$*, l'application* f *n'est pas surjective et, puisque* $f((1, 2)) = f((2, 1))$*, elle n'est pas injective.*

Exercice 1.8 ♡

Soit $f : E \longrightarrow F$ *une application et* $A \subset E$, $B \subset F$ *deux parties. Montrer que*

a. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
b. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$.

Solution :

a. *Soit* $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$,

par définition de l'image directe, il existe $x \in f^{-1}(B)$ *tel que* $y = f(x)$.

Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B$.

On a donc $y = f(x) \in B$.

b. *Soit* $x \in \mathrm{A}$,

Par définition de l'image directe, $f(x) \in f(\mathrm{A})$.

Par définition de l'image réciproque, $x \in f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$.

Cherchez des contre-exemples pour montrer qu'en général les inclusions réciproques sont fausses.

Exercice 1.9 ♡

Soit une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *et deux parties* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. *Montrer que*

a. f injective $\implies f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big) = \mathrm{A}$.

b. f surjective $\implies f\big(f^{-1}(\mathrm{B})\big) = \mathrm{B}$.

Solution :

a. *Faisons un raisonnement direct en supposant* f *injective. Nous allons montrer l'égalité des deux ensembles en prouvant deux inclusions.*
   - $\supset$ *: est vraie même si* f *n'est pas injective : Soit* $x \in \mathrm{A}$, *par définition de l'image directe,* $f(x) \in f(\mathrm{A})$ *et, par définition de l'image réciproque,* $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$.
   - $\subset$ *:*

     Soit $x \in f^{-1}(f(\mathrm{A}))$,

     par définition de l'image réciproque, $f(x) \in f(\mathrm{A})$.

     Par définition de l'image directe, il existe $x' \in \mathrm{A}$ *tel que* $f(x) = f(x')$.

     Puisque f *est injective,* $x = x'$

     Et, puisque $x' \in \mathrm{A}$, $x = x' \in \mathrm{A}$.

b. *Même technique :*
   - $\subset$ *: Cette inclusion est vraie, même si* f *n'est pas surjective. Soit* $y \in f(f^{-1}(\mathrm{B}))$, *par définition de l'image directe, il existe* $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$ *tel que* $y = f(x)$. *Par définition de l'image réciproque, puisque* $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$, $f(x) \in \mathrm{B}$ *et* $y = f(x) \in \mathrm{B}$.
   - $\supset$ *: Soit* $y \in \mathrm{B}$. *Puisque* f *est surjective, il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $y = f(x)$. *Puisque* $f(x) \in \mathrm{B}$, *par définition de l'image réciproque,* $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$ *et, puisque* $y = f(x)$ *avec* $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$, *par définition de l'image directe,* $y \in f(f^{-1}(\mathrm{B}))$.

A.4.3 Familles

DÉFINITION 1.11 ♡ **Famille**

Soit I un ensemble (les *indices*) et E un ensemble. On appelle *famille* d'éléments de E indexée par l'ensemble I, une application $\varphi : \begin{cases} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ i & \longmapsto & x_i \end{cases}$. On note $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ cette application.

Exemple 1.21 Une *suite* de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels indexée par l'ensemble $\mathrm{I} = \mathbb{N}$.

DÉFINITION 1.12 ♡ **Famille de parties**

Soit E un ensemble et I un ensemble d'indices. On considère une famille de parties de E, c'est-à-dire une application $\mathrm{I} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{E})$ notée $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$. On définit :

1. *L'intersection* de la famille de parties $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ par :

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E} \mid \forall i \in \mathrm{I},\ x \in \mathrm{A}_i\}.$$

2. *L'union* de la famille de parties $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ par :

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E} \mid \exists i \in \mathrm{I} :\ x \in \mathrm{A}_i\}.$$

PLAN 1.10 : Pour montrer que $x \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$

1. Soit $i \in \mathrm{I}$,

2. $\ldots x \in \mathrm{A}_i$

PLAN 1.11 : Pour montrer que $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

1. Posons $i = \dots$
2. $\dots x \in A_i$.

Remarque 1.22 Ces définitions généralisent les unions ou intersections finies à des unions ou intersections infinies. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = [-k, k]$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{R}$ et $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{0\}$.

Exemple 1.22 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Montrer que

a. $E \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i)$

b. $E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus A_i)$

a. Montrons deux inclusions :
   - $\subset$:

     Soit $x \in E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$.

     Soit $i \in I$.

     Montrons que $x \in E \setminus A_i$. Par l'absurde, si $x \in A_i$, on a $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, ce qui est faux.
   - $\supset$:

     Soit $x \in \bigcap_{i\in I}(E \setminus A_i)$.

     Montrons que $x \in E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$. Par l'absurde, si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, par définition de l'union d'une famille de parties, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_i$, mais alors $x \notin E \setminus A_i$ ce qui est absurde puisque pour tout $i \in I$, $x \in E \setminus A_i$.

b. La démonstration est similaire.

Exercice 1.10 ♡

Soit E *un ensemble et* $f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ *une application croissante pour l'inclusion :*

$$\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A \subset B \implies f(A) \subset f(B).$$

On note

$$\mathscr{P} = \{X \in \mathscr{P}(E) \,;\, f(X) \subset X\}$$

1. *Montrer que* $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ X \in \mathscr{P} \implies f(X) \in \mathscr{P}$.
2. *Soit* $X_0 = \bigcap_{X\in\mathscr{P}} X$. *Montrer que* $f(X_0) = X_0$.

Solution :

a. *Soit* $X \in \mathscr{P}$. *Montrons que* $f(X) \in \mathscr{P}$. *Comme* $X \in \mathscr{P}$, $f(X) \subset X$. *Comme* f *est croissante,* $f\big(f(X)\big) \subset f(X)$ *ce qui montre que* $f(X) \in \mathscr{P}$.

b. – *Montrons que* $f(X_0) \subset X_0$.

   Soit $X \in \mathscr{P}$.

   Comme $X_0 \subset X$ *et que* f *est croissante,* $f(X_0) \subset f(X)$.

   Puisque $X \in \mathscr{P}$, $f(X) \subset X$.

   On a donc $f(X_0) \subset X$.

   Comme $\forall X \in \mathscr{P}$, $f(X_0) \subset X$, *par définition de l'intersection d'une famille,* $f(X_0) \subset \bigcap_{X\in\mathscr{P}} X = X_0$.

   – $\supset$: *On vient de montrer que* $X_0 \in \mathscr{P}$ *et, d'après la première partie, on a donc également* $f(X_0) \in \mathscr{P}$ *d'où* $X_0 = \bigcap_{X\in\mathscr{P}} X \subset f(X_0)$.

A.5 Fautes de raisonnements classiques

`Multimédia : Un “forum” où les élèves peuvent proposer des démonstrations fausses et où l’on doit trouver l’erreur`

A.5.1 Bien analyser les notations

Une grande partie des erreurs de raisonnement provient d'une mauvaise compréhension des définitions du cours ou des notations de l'énoncé.

Exemple 1.23 Soit deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Soit $B \subset F$. Comparer $g \circ f\big(f^{-1}(B)\big)$ et $g(B)$.
Voici une démonstration trouvée dans une copie :

$$\begin{aligned} g \circ f(f^{-1}(B)) &= g\big(f(f^{-1}(B))\big) \quad (\text{ définition de la composée }) \\ &= g\big(B\big) \quad (\text{ car } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}) \end{aligned}$$

Que pensez-vous de cette « preuve » ? C'est l'exemple typique d'écriture formelle (une suite d'égalités) écrites sans donner un sens à ce que l'on écrit. Il y a plusieurs confusions dues à un manque d'analyse des objets manipulés. Cerise sur le gâteau, le résultat est faux et en raison de son manque de rigueur, l'étudiant ne s'en est pas aperçu !

– L'élève écrit $g \circ f(A) = g\big(f(A)\big)$. Pour lui, c'est la définition de la composée de deux applications. Il faut toujours avoir en tête le *type d'objet* que l'on manipule. Si $x \in E$ est un *élément* de l'ensemble E, on a effectivement $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$ où $f(x) \in F$ est un *élément* de l'ensemble F. Mais ici, A n'est pas un élément de E, c'est une *partie* de E : $A \subset E$. La notation $f(A)$ n'a rien à voir avec l'image d'un élément de E par l'application f, mais représente l'image directe de la partie A par f et il faut utiliser la définition précise de l'image directe. Le résultat est vrai, mais *nécessite une preuve qui s'appuie sur les définitions* :

  Montrons que $g \circ f(A) \subset g\big(f(A)\big)$.

  Soit $z \in g \circ f(A)$ (z est un élément de l'ensemble G).

  D'après la définition de l'image directe $g(C)$ (où $C = f(A)$ est une partie de F), il existe $y \in f(A)$ tel que $z = g(y)$.

  D'après la définition de l'image directe $f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

  On a donc $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ d'après la définition de la composée de deux applications.

  Puisque $z = (g \circ f)(x)$ avec $x \in A$, d'après la définition de l'image directe, $z \in (g \circ f)(A)$.

  Montrez de la même façon l'inclusion réciproque.

– Il y a une autre incompréhension des notations : $f(f^{-1}(B)) = f \circ f^{-1}(B)$. Pour écrire $f \circ f^{-1}$, il faudrait que l'*application* f^{-1} existe (on parle de *composée d'applications* uniquement) et ce n'est le cas que lorsque f est bijective. La notation $f^{-1}(B)$ désigne ici l'image réciproque d'une partie de B par l'application f.

Écrivons une preuve rigoureuse en analysant les notations et en suivant les plans de démonstration :

– $\subset$:

  Soit $z \in \big(g \circ f\big)(f^{-1}(B))$.

  Par définition de l'image directe, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $z = (g \circ f)(x)$.

  Puisque $x \in f^{-1}(B)$, par définition de l'image réciproque, $f(x) \in B$.

  Puisque $f(x) \in B$ et $z = g\big(f(x)\big)$, par définition de l'image directe, $z \in g(B)$.

– $\supset$:

  Soit $z \in g(B)$,

  Par définition de l'image directe, il existe $y \in B$ tel que $z = g(y)$.

  Il nous faut trouver $x \in f^{-1}(B) \subset E$ pour écrire $z = (g \circ f)(x)$. On ne voit pas comment à partir de y trouver ce x (ce serait possible si on supposait f *surjective*).

  L'inclusion réciproque semble fausse. Cherchons donc un contre-exemple. On a vu que le problème se posait lorsque f n'était pas surjective. Essayons donc $E = \{a\}$, $F = \{b, c\}$, $G = \{d\}$ et les applications définies par $f(a) = b$, $g(b) = g(c) = d$. Pour $B = \{c\}$, on a $f^{-1}(B) = \varnothing$ d'où $(g \circ f)(f^{-1}(B)) = \varnothing$ alors que $g(B) = \{d\}$.

Remarque 1.23 Avant d'écrire une formule mathématique, vous devez vous demander *quel type d'objet vous manipulez* (est-ce un élément d'un ensemble, une partie, une application ?...). Pour cela, il est utile de faire des schémas au brouillon. Dans l'exemple précédent, on écrit :

$$\underset{f^{-1}(B)\subset E}{E} \xrightarrow{f} \underset{B\subset F}{F} \xrightarrow{g} \underset{g(B)\subset G,\ (g\circ f)(f^{-1}(B))\subset G}{G}$$

Remarquez également le choix judicieux des notations de notre preuve : nous avons décidé de noter les éléments de E $x, x', \ldots$, ceux de F $y, y' \ldots$ et ceux de G, $z, z', \ldots$. Lors de notre démonstration, nous notons également sur le schéma les éléments utilisés :

$$\underset{x\in E}{E} \xrightarrow{f} \underset{y\in F}{F} \xrightarrow{g} \underset{z=g(y)\in G}{G}$$

Un bon étudiant fait cela intuitivement et comprend ce qu'il doit démontrer. En cas de doute, n'hésitez pas à faire une pause pour revoir la nature de chaque objet manipulé.

A.5.2 Plan de démonstration incorrect

Il faut bien connaître les définitions exactes du cours et les utiliser pour démontrer des résultats en suivant les plans correspondants.

Exemple 1.24 On note $\mathscr{F}(E,F)$ l'ensemble des applications d'un ensemble E vers un ensemble F . On considère deux ensembles E et F. Soit $g : F \longrightarrow E$ une application injective. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{F}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E,E) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{cases}$$

est injective.
Voici une « démonstration » trouvée dans une copie :

Soit $(x, x') \in E^2$.

Supposons que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.

D'après la définition de la composée, $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$.

Puisque g est injective, $f(x) = f(x')$.

Toutes les lignes ci-dessus sont correctes, mais qu'a-t-on montré ? Détaillons la démarche préliminaire à effectuer avant d'écrire une preuve. Il faut d'abord comprendre les notations : si $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,E)$,

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} E.$$

La composée $g \circ f$ est bien définie et c'est une application $g \circ f : E \longrightarrow E$. L'application φ est donc bien définie. On veut montrer que φ est injective. L'ensemble de départ de φ est $\mathscr{F}(E,F)$. Le plan de démonstration correspondant s'écrit

Soit $(f, f') \in (\mathscr{F}(E,F))^2$.

Supposons que $\varphi(f) = \varphi(f')$.

On prouve que $f = f'$.

On s'aperçoit que l'élève n'a pas suivi ce plan et que ce qu'il écrit n'a aucun sens... Écrivons une preuve correcte. Nous voulons montrer que les deux applications f et f' sont égales. La définition de l'égalité de deux applications impose le plan suivant.

Soit $x \in E$,

$f(x) = f'(x)$.

Écrivons la preuve complète.

Soient $(f, f') \in (\mathscr{F}(E,F))^2$.

Supposons $\varphi(f) = \varphi(f')$, c'est-à-dire $g \circ f = g \circ f'$.

Soit $x \in E$.

On a $g \circ f(x) = g \circ f'(x)$.

Puisque $g\big(f(x)\big) = g\big(f'(x)\big)$ et que l'application g est injective, $f(x) = f'(x)$.

Par conséquent, $f = f'$.

A.5.3 Fautes de logique

Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques fautes de logique qui illustrent les notions introduites au paragraphe A.1 page 1126.

Exemple 1.25 Un élève affirme dans sa copie que pour deux parties A, B d'un ensemble E, l'application

$$f : \begin{cases} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cup B) \end{cases}$$

est injective et il justifie ce résultat par la « démonstration » suivante.

Soit $(X, X') \in (\mathscr{P}(E))^2$.

Supposons $f(X) = f(X')$ et montrons que $X = X'$.

Montrons que $X \subset X'$:

Soit $x \in X$, étudions deux cas :
– si $x \in A$, alors $x \in X \cap A = X' \cap A$ d'où $x \in X'$,

– si $x \notin B$, alors $x \in X \cup B = X' \cup B$ et donc $x \in X'$.
Dans les deux cas on a montré que $x \in X'$.

On montre que $X' \subset X$ de la même façon.

Le problème vient de l'étude de cas *non-exhaustive* : il peut exister des éléments $x \in E$ tels que $x \notin A$ et $x \in B$. Ce cas n'a pas été traité (et le résultat est faux en général).

Exemple 1.26 Voici un exemple tiré de l'algèbre linéaire qui illustre la même erreur très courante. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $E = F \oplus G$. On suppose que $\forall x \in F,\ u(x) = x$ et $\forall x \in G,\ u(x) = x$. Montrer que $u = \mathrm{id}_E$. On rencontre souvent le « raisonnement » suivant :

Soit $x \in E$, étudions deux cas :
– Si $x \in F$, alors $u(x) = x$.
– Si $x \in G$, alors $u(x) = x$.

Donc $\forall x \in E,\ u(x) = x$ et $u = \mathrm{id}_E$.

C'est une confusion typique entre *supplémentaires* et *complémentaires*. Dire que $E = F \oplus G$ n'est pas la même chose que $E = F \cup G$. Les deux cas étudiés ne sont pas exhaustifs : il peut exister des vecteurs x qui n'appartiennent ni à F ni à G. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}(1,0)$ et $G = \mathrm{Vect}(0,1)$, on a bien $E = F \oplus G$ et pourtant $(1,1) \notin F$ et $(1,1) \notin G$. La démonstration correcte utilise la définition exacte de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires :

Soit $x \in E$.

Puisque $E = F \oplus G$, il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.

Comme u est linéaire, $u(x) = u(x_F) + u(x_G) = x_F + x_G = x$.

Donc $u = \mathrm{id}_E$.

Exemple 1.27 Considérons une suite (u_n). Un élève montre que si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 0, alors la suite (u_n) converge vers 0. Il écrit :

Considérons deux cas :
– si n est pair, ...alors (u_n) converge vers 0.
– si n est impair, ...alors (u_n) converge vers 0.

Dans les deux cas, nous avons montré que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Il n'a pas compris que la proposition $P : u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *ne dépend pas de* n. Dire qu'une suite converge vers 0 ne fait pas intervenir n. On peut écrire de façon équivalente $P : u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. La lettre est muette dans un quantificateur $\forall$. La proposition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n| \leqslant \varepsilon$$

est logiquement équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N} :\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant K \implies |u_k| \leqslant \varepsilon.$$

Il étudie donc deux cas en fonction de n et démontre dans ces deux cas qu'une propriété indépendante de n est vraie. Au mieux il a écrit deux démonstrations correctes identiques. Au pire, il a écrit n'importe quoi ...

Exemple 1.28 Pour montrer une proposition de type

$$P : \forall n \in \mathbb{N}\ \mathscr{P}(n)$$

on utilise souvent le principe de récurrence.
– On vérifie la propriété au rang $n = 0$: $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
– On montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Pour rédiger une récurrence, vous devez d'abord mettre en évidence la propriété $\mathscr{P}(n)$. Par exemple, pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

on écrit :

$$\mathscr{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On utilise ensuite le plan suivant :

$\mathscr{P}(0) : \sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \times 1}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ d'après } \mathscr{P}(n).$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Une erreur courante consiste à citer la propriété $\mathscr{P}(n)$ avec le quantificateur $\forall$:

$$\mathscr{P}(n)\ : \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarquons que cette propriété *ne dépend pas* de n : elle est logiquement équivalente à la propriété

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Exemple 1.29 On considère une suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant x$. On veut montrer que la suite (u_n) est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$. Écrivons une récurrence :

$$\mathscr{P}(n)\ : u_{n+1} \leqslant u_n.$$

$\mathscr{P}(0) : u_1 = f(u_0) \leqslant u_0$.

$\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1) : u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$.

Ce que nous avons écrit est correct, mais à quel endroit avons-nous utilisé la propriété $\mathscr{P}(n)$ pour montrer $\mathscr{P}(n+1)$? La récurrence est inutile. Il suffit d'écrire :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

Remarque 1.24 Les étudiants ont tendance à abuser de la récurrence. Pour montrer une propriété qui commence par $\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$, ils se lancent automatiquement dans une récurrence. On écrit une récurrence uniquement lorsqu'on a essayé une démonstration directe qui n'aboutit pas et qu'on repère un lien intéressant entre $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. Si l'on décide d'écrire une récurrence, il est important

– d'écrire *précisément* la propriété $\mathscr{P}(n)$,
– dans la preuve de $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ d'indiquer précisément à quel endroit on a utilisé que $\mathscr{P}(n)$ est supposée vraie.

Exemple 1.30 Réfuter la démonstration suivante : Dans une boîte de crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur.

Par récurrence : Soit n le nombre de crayons. pour $n = 1$ c'est évident. Passons de n à $n+1$: on enlève le premier crayon c_1. Il reste n crayons $c_2, \ldots, c_{n+1}$ qui sont de la même couleur, par "hypothèse" de récurrence. De même $c_1, \ldots, c_n$ sont de la même couleur. Les deux "sous-boîtes" sont donc de la même couleur que $c_i (1 < i < n+1)$. Ainsi tous les crayons ont la même couleur.

Bien entendu, comme le résultat est faux pour $n = 2$, c'est qu'on ne peut pas passer de $n = 1$ à $n = 2$. L'intersection entre les deux "sous-boîtes" est vide.

Exemple 1.31 Soit une application $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ une partie de E. On demande de comparer $f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$ et A. Un étudiant voulait démontrer que l'inclusion $f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big) \subset \mathrm{A}$ était fausse. Il écrit :

Soit $x \in f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$, montrons que $x \not\in \mathrm{A}$

et il n'aboutit pas. Il essaie de montrer que $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \subset \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, ce qui n'est pas la même chose que $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \not\subset \mathrm{A}$. Un autre traduit correctement que $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \subset \mathrm{A}$ est faux.

Montrons qu'il existe $x \in f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$ tel que $x \not\in \mathrm{A}$

et n'aboutit pas non plus. Ces deux élèves voulaient montrer que la propriété est *toujours fausse*, quels que soient l'ensemble E, l'application f et la partie A. Il y a des exemples où la propriété est vraie et d'autres pour lesquels elle est fausse. Il s'agit de montrer que la propriété *n'est pas toujours vraie* et, pour cela, il suffit *d'exhiber un contre-exemple* où l'on construit E, f, A pour lesquels la propriété est fausse. Il faut bien comprendre la distinction entre : « une propriété est toujours fausse » et « il existe des cas où la propriété est fausse ».

A.5.4 Utilisation d'objets non-définis

Il important de relire une démonstration pour s'assurer que tous les objets utilisés ont été bien définis.

Exemple 1.32 Un élève écrit

Soit $y \in f\big(f^{-1}(A)\big)$.

Puisque $x \in f^{-1}(A) \dots$

Pour lui, la nature de l'objet x est évidente, mais il n'a pas introduit cet objet avant de l'utiliser. La preuve peut être correcte, mais est mal rédigée. Il aurait du écrire

Soit $y \in f(A)$.

Par définition de l'image directe, *il existe* $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Exemple 1.33 Un élève veut montrer que si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications surjectives, l'application $(f+g)$ est également surjective. Pour cela, il écrit

Soit $z \in \mathbb{R}$.

Posons $x \in \mathbb{R}$ tel que $z/2 = f(x)$ et $z/2 = g(x)$

Alors $z = z/2 + z/2 = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

Le problème dans cette « preuve » est qu'un tel réel x n'existe pas forcément. Par exemple, si $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $g = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, f et g sont surjectives alors que $(f+g)$ est l'application nulle qui n'est pas surjective. Pour $z = 1$, essayez de trouver un réel x tel que $f(x) = 1/2$ et $f(x) = -1/2 \dots$

Remarque 1.25 Méfiez-vous d'une phrase « Posons $x \dots$ tel que $\dots$ ». Bien que l'existence d'un tel objet x vous arrange pour terminer votre preuve, il y a souvent un problème !

A.5.5 Ordre des objets introduits

En analyse, de nombreuses fautes proviennent d'un problème de dépendance d'objets introduits. Plutôt que d'analyser des erreurs, nous allons voir deux exemples importants qui illustrent ce propos.

Exemple 1.34 Voyons un exercice classique d'analyse, le théorème de Césaro. Soit (u_n) une suite, on définit sa moyenne de Césaro comme étant la suite (S_n) où $S_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \implies S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
Commençons par comprendre intuitivement pourquoi ce résultat est vrai. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, approximons u_n par l en écrivant $u_n = l + r_n$ avec $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors

$$S_n = \frac{l + \cdots + l}{n} + \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n} = l + \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}$$

Il suffit donc de montrer que $R_n = \dfrac{r_1 + \cdots + r_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, à partir d'un certain rang N_1, $|r_n|$ est petit : $|r_n| \leqslant \varepsilon$. Majorons en valeur absolue pour $n \geqslant N_1$

$$|R_n| \leqslant \frac{|r_1| + \cdots + |r_n|}{n} \leqslant \frac{|r_1| + \cdots + |r_{N_1-1}|}{n} + \frac{|r_{N_1}| + \cdots + |r_n|}{n} \leqslant \frac{C}{n} + \frac{n - N_1}{n}\varepsilon$$

où $C = |r_1| + \cdots + |r_{N_1-1}|$ est une constante indépendante de n. Lorsque n est grand, C/n est petit : $C/n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_2$ et comme $(n - N_1) \leqslant n$, on a $|R_n| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ pour n plus grand que N_1 et que N_2.
Il s'agit maintenant de rédiger une preuve rigoureuse en utilisant la définition d'une suite qui converge vers 0. Pour montrer que $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il nous faut suivre le plan de démonstration suivant.

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $N = \dots$.

Soit $n \geqslant N$,

$|R_n| \leqslant \varepsilon$.

Réfléchissons à *l'ordre* dans lequel nous allons introduire les objets utiles à la démonstration. Au brouillon, nous avons pris $n \geqslant N_2$ où N_2 est défini tel que $C/n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_2$, mais la constante $C = r_1 + \cdots + r_{N_1-1}$ *dépend* de N_1. Il faut donc avoir introduit N_1 *avant* N_2. Pour vérifier notre calcul, il faut prendre $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$. L'entier N que nous devons construire doit donc dépendre à la fois de N_1 et de N_2. L'ordre d'introduction des objets est donc le suivant :

On vous donne ε.

Construire N_1 à partir de ε.

Construire N_2 à partir de ε et N_1.

Construire N à partir de N_1 et N_2.

Vérifier que le N construit convient.

Voici la preuve complète :

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $|r_n| \leqslant \varepsilon/2$.

Posons $C = (|r_1| + \cdots + |r_{N_1-1}|)$. Puisque la suite (C/n) converge vers 0, il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $C/n \leqslant \varepsilon/2$.

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$,

Nous pouvons découper la somme en deux. Majorons en valeur absolue :

$$\begin{aligned}|R_n| &= \left|\frac{r_1 + \cdots + r_{N_1-1}}{n} + \frac{r_{N_1} + \cdots + r_n}{n}\right| \\ &\leqslant \frac{|r_1| + \cdots + |r_{N_1-1}|}{n} + \frac{|r_{N_1}| + \cdots + |r_n|}{n} \\ &\leqslant \frac{C}{n} + \frac{(n - N_1)\varepsilon}{2n} \\ &\leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Si on avait écrit :

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $C = |r_1| + \cdots + |r_{N_1} - 1|$.

Puisque $C/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $C/n \leqslant \varepsilon/2$.

Puisque $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|r_n| \leqslant \varepsilon/2$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$ ...

nous aurions fait une erreur de dépendance. L'objet C dépend de N_1 qui n'a pas encore été introduit dans la démonstration.

Exemple 1.35 Dans le cours d'analyse, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *uniformément continue* si par définition :

$$\exists \alpha > 0 : \ \forall \varepsilon > 0, \ \forall (x, y) \in I^2, \ |x - y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que la fonction f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point $x \in I$ ce qui se traduit avec les quantificateurs par

$$\forall x \in I, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : \ \forall y \in I, \ |x - y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

En voyant la définition d'une fonction uniformément continue, vous devez vous demander quelle est la différence avec celle d'une fonction continue. Ayant écrit les deux définitions avec des quantificateurs, on s'aperçoit qu'elles se ressemblent beaucoup, l'unique différence concerne l'ordre de deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Pour comprendre l'impact de cette différence, étudions les plans de démonstration correspondant aux deux définitions.

1. Pour montrer que f est continue sur I :

   Soit $x \in I$, soit $\varepsilon > 0$.

   Posons $\alpha =$.

   Soit $y \in I$ tel que $|x - y| \leqslant \alpha$,

   $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

En pratique :
- On vous donne un x et un ε que vous ne pouvez pas choisir.
- À partir de x et ε, vous devez construire un réel α *qui dépend à la fois* de x et ε et qui vérifie la propriété.

Pour montrer que f est *uniformément* continue, le plan s'écrit

Soit $\varepsilon > 0$

Posons $\alpha =$

Soit $x \in I$, soit $y \in I$, tels que $|x - y| \leqslant \alpha$

$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

En pratique :
- On vous donne un $\varepsilon > 0$ que vous ne pouvez pas choisir.
- À partir de cet ε, vous devez construire un α_ε *qui ne dépend que de* ε vérifiant la propriété.

On comprend alors la différence entre ces deux définitions : c'est un problème de *dépendance* dans la construction de α. Dans le premier cas, vous pouvez construire α qui dépend de ε *et* x alors que dans le deuxième cas, vous devez construire un α qui ne dépend que de ε et qui convient pour tout $x \in \mathrm{I}$, ce qui est plus difficile.
Pour comprendre réellement une telle définition, vous devez prendre l'habitude de chercher par vous même des exemples et contre-exemples. C'est le meilleur moyen de bien assimiler un cours de mathématiques. Voyons un exemple de réflexion sur le cours. Un théorème affirme que f uniformément continue sur I $\implies$ f continue sur I. Un autre théorème (Heine) affirme que si I est un *segment*, f continue sur I $\iff$ f uniformément continue sur I. Pour trouver un contre-exemple de fonction continue qui n'est pas uniformément continue, il est donc nécessaire de choisir un intervalle I qui n'est pas un segment. Écrivons la négation de l'uniforme continuité de f :

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \alpha > 0, \ \exists x \in \mathrm{I} : \ \exists y \in \mathrm{I} : \ |x - y| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Prenons $\mathrm{I} = [0, +\infty[$ et $f(x) = x^2$. Cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$. Montrons qu'elle n'est pas uniformément continue sur I. Formons pour $0 \leqslant x < y$, $|f(x) - f(y)| = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$. On voit que si $|x - y| \leqslant \alpha$ avec le cas limite $y = x + \alpha$, $|f(x) - f(y)| = \alpha(y + x)$ donc la quantité $|f(x) - f(y)|$ devient arbitrairement grande en choisissant x et y grands. Montrons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue.

Posons $\varepsilon = 1$.

Soit $\alpha > 0$,

posons $x = 1/\alpha$ et $y = 1/\alpha + \alpha$

on a $|x - y| = \alpha$ et $|f(x) - f(y)| = 2\alpha x + \alpha^2 \geqslant 2 + \alpha^2 \geqslant 1$.

Exercice 1.11 ♡♡

Quelles sont les liens entre les notions suivantes : « f est uniformément continue sur I » *et « f est lipschitzienne sur* I » *?*

Solution : *On a les implications :*

$$f \text{ lipschitzienne } \implies f \text{ uniformément continue } \implies f \text{ continue}$$

et aucune des implications réciproques n'est vraie en général. Montrons que f lipschitzienne entraîne f uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$

Puisque f est lipschitzienne, il existe $k > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

Posons $\alpha = \varepsilon / k$.

Soit $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ *tel que* $|x - y| \leqslant \alpha$,

$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \leqslant k\alpha \leqslant \varepsilon$.

Montrons que l'implication réciproque est fausse en général. Dire que f est lipschitzienne revient à dire qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathrm{I}$, $x \neq y$, $\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant k$ *: les pentes de toutes les cordes sont bornées. Considérons la fonction* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \sqrt{x}$. *Elle est continue sur le* segment $[0, 1]$, *donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Vérifions qu'elle n'est pas lipschitzienne. Par l'absurde, s'il existe $k > 0$ tel que* $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$, *on a pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, $(f(2/n) - f(1/n)) \leqslant 1/n$, *c'est-à-dire* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} \leqslant 1$ *ce qui est faux.*

Annexe B

Techniques d' algèbre

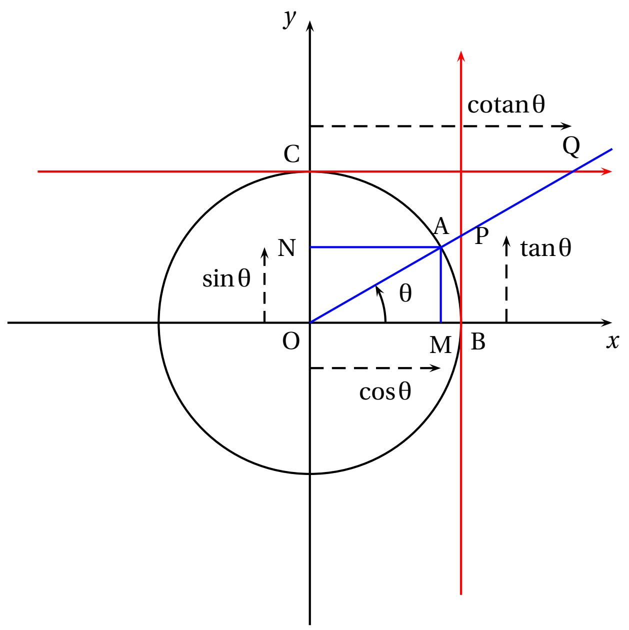
sans techniqu',un don n'est rien qu'un' sal' manie.
Georges Brassens (1921-1981)

B.1 Trigonométrie

Dans ce paragraphe, nous allons voir les formules de trigonométrie à connaître par cœur ou à savoir retrouver rapidement. Il est aussi important de comprendre à quoi servent ces formules.

B.1.1 Lecture du cercle trigonométrique

Il faut savoir interpréter pour un angle θ, son sinus, son cosinus, sa tangente et sa cotangente géométriquement sur le cercle trigonométrique :



Multimédia : animation avec l'angle qui varie

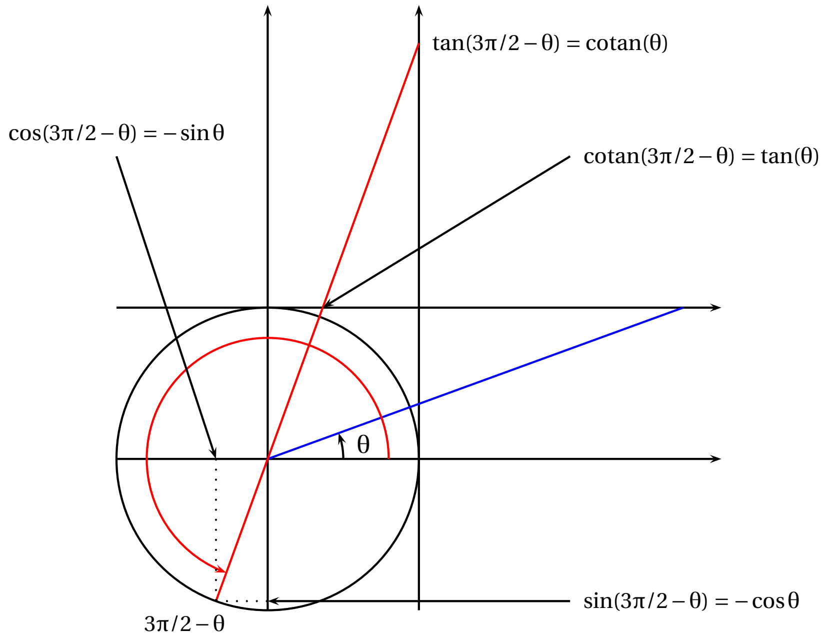
On représente une demi-droite issue de l'origine faisant un angle θ avec l'axe (Ox), cette demi-droite coupe le cercle unité en un point A, coupe la tangente au cercle au point $B = (1,0)$ en un point P et la tangente au cercle au point $C = (0,1)$ en un point Q. On interprète $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\text{cotan}\,\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ comme des mesures algébriques :

- En notant M la projection orthogonale du point A sur l'axe (Ox), $\sin\theta = \overline{OM}$.
- En notant N la projection orthogonale du point A sur l'axe (Oy), $\cos\theta = \overline{ON}$.
- $\tan\theta = \overline{BP}$.
- $\text{cotan}\,\theta = \overline{CQ}$.

On a $\cos(\pi/2-\theta) = \sin(\theta)$, $\sin(\pi/2-\theta) = \cos(\theta)$, $\tan(\pi/2-\theta) = \text{cotan}(\theta)$ et $\text{cotan}(\pi/2-\theta) = \tan(\theta)$. Pour retrouver d'autres simplifications, remarquons que si l'on choisit sur le dessin un angle θ petit et positif, $\sin\theta$ est petit positif, $\cos\theta$ est proche de 1 positif, $\tan\theta$ est petit positif et $\text{cotan}\,\theta$ est grand et positif.

On retrouve sans calculs les simplifications de $\sin(k\pi \pm \theta)$, $\sin(k\pi + \pi/2 \pm \theta)$, $\cos(k\pi \pm \theta)$, $\cos(k\pi + \pi/2 \pm \theta)$ en fonction de $\sin\theta$ ou $\cos\theta$ et les simplifications de $\tan(k\pi \pm \theta)$, $\tan(k\pi + \pi/2 \pm \theta)$, $\text{cotan}(k\pi \pm \theta)$, $\text{cotan}(k\pi + \pi/2 \pm \theta)$ en fonction de $\tan\theta$ ou $\text{cotan}\,\theta$.

Exemple 2.1 Simplifier $\sin(3\pi/2 - \theta)$, $\cos(3\pi/2 - \theta)$, $\tan(3\pi/2 - \theta)$ et $\text{cotan}(3\pi/2 - \theta)$. On prend sur le dessin un angle θ petit positif et on représente l'angle $3\pi/2 - \theta$:



On voit que $\cos(3\pi/2 - \theta)$ est petit et négatif et on retrouve sans calculs que $\cos(3\pi/2 - \theta) = -\sin\theta$. De même, $\sin(3\pi/2 - \theta)$ étant proche de -1, il vaut $-\cos\theta$. Puisque $\tan(3\pi/2 - \theta)$ est grand et positif, il vaut $\text{cotan}\,\theta$ et de même $\text{cotan}(3\pi/2 - \theta) = \tan\theta$.

Exemple 2.2 Simplifier en utilisant le cercle trigonométrique, $\sin(7\pi/2+\theta)$, $\cos(5\pi/2+\theta)$, $\tan(\pi/2+\theta)$, $\text{cotan}(7\pi/2+\theta)$. $\sin(7\pi/2 + \theta) = -\cos\theta$, $\cos(5\pi/2 + \theta) = -\sin\theta$, $\tan(\pi/2 + \theta) = -\text{cotan}\,\theta$, $\text{cotan}(7\pi/2 + \theta) = -\tan\theta$.

On remarque que $\cos(\theta + k\pi) = \pm\cos(\theta)$, $\sin(\theta + k\pi) = \pm\sin(\theta)$ en fonction de la parité de l'entier k. On vérifie la formule utile :

♡ **2.1**
$$\sin(\theta + k\pi) = (-1)^k \sin\theta \qquad \cos(\theta + k\pi) = (-1)^k \cos(\theta).$$

B.1.2 Les quatre formules fondamentales de la trigonométrie

Il n'y a que peu de formules à retenir vraiment par cœur en trigonométrie. Comme les méthodes que nous allons voir sont similaires en trigonométrie hyperbolique, nous les inscrivons en parallèle.
On sait exprimer $\cos^2 x$ en fonction de $\sin^2 x$ grâce à la formule fondamentale :

♡ **2.2**
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1.$$

Lorsqu'on rencontre un groupement $\sqrt{1-y^2}$ (avec $|y| \leqslant 1$), il est souvent intéressant de poser $y = \sin x$ ou $y = \cos x$ pour éliminer la racine : $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$. De même pour un groupement $\sqrt{1+y^2}$, il est intéressant de poser $y = \text{sh}\,x$ puisque $\sqrt{1+\text{sh}^2 x} = \sqrt{\text{ch}^2 x} = \text{ch}\,x$ et pour un groupement $\sqrt{y^2-1}$ de poser $y = \pm\text{ch}\,x$ puisque $\sqrt{\text{ch}^2 x - 1} = \sqrt{\text{sh}^2 x} = |\text{sh}\,x|$.
Il faut connaître par cœur les quatre formules d'addition :

♡ **2.3**
$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \text{ch}(a+b) &= \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b + \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & \text{ch}(a-b) &= \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b - \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b\\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b & \text{sh}(a+b) &= \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b + \text{ch}\,a\,\text{sh}\,b\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b & \text{sh}(a-b) &= \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b - \text{ch}\,a\,\text{sh}\,b.
\end{aligned}$$

Elles permettent, en prenant $b = a$, de trouver les deux formules importantes :

♡ **2.4**

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \qquad \operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \qquad \operatorname{sh} 2a = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a.$$

Ces formules servent en particulier à *linéariser* $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$:

♡ **2.5**

$$\cos^2 a = \frac{\cos 2a + 1}{2} \qquad \operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a + 1}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \qquad \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch} 2a - 1}{2}.$$

Remarque 2.1 Ces formules de linéarisation sont surtout utilisées en trigonométrie classique. Pour la trigonométrie hyperbolique, les signes changent. On peut vérifier facilement une formule hyperbolique en prenant $a = 0$ et en faisant $a \to +\infty$. Par exemple, la formule suivante est fausse :

$$\operatorname{ch}(2a) = 1 - 2\operatorname{sh}^2 a$$

($a \to +\infty$ ne va pas !)

Remarque 2.2 Ces formules servent également à exprimer $1 + \cos a$ ou $1 - \cos a$ comme un carré :

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \quad 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Lorsqu'on rencontre un groupement $\sqrt{1+\cos\theta}$ ou $\sqrt{1-\cos\theta}$, il faut donc penser à l'angle moitié :

$$\sqrt{1+\cos\theta} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|, \quad \sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.$$

B.1.3 Comment retrouver les autres

Pour *linéariser* un produit de cosinus et de sinus, il suffit d'additionner ou de retrancher deux lignes des quatre formules fondamentales. Par exemple, si l'on veut retrouver la linéarisation de $\cos a \cos b$, on part des deux premières lignes :

$$\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

et on fait $L_2 + L_1$ pour obtenir $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]$. On retrouve ainsi rapidement les trois formules suivantes :

♡ **2.6**

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big] \quad \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\big]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big] \quad \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\big]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big] \quad \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) = \frac{1}{2}\big[\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\big].$$

On sait également transformer une somme de cosinus ou une somme de sinus en un produit. Par exemple, pour exprimer $\cos p + \cos q$, on part des deux premières lignes

$$\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

et, en les sommant,

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

Il suffit de choisir a et b pour que $\begin{cases} a+b &= p \\ a-b &= q \end{cases}$ i. e. $\begin{cases} a &= \frac{p+q}{2} \\ b &= \frac{p-q}{2} \end{cases}$. On obtient de cette façon les deux formules suivantes :

♡ **2.7**

$$\cos p + \cos q = 2\cos\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\cos\Big(\frac{p-q}{2}\Big) \quad \operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch}\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\operatorname{ch}\Big(\frac{p-q}{2}\Big)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\cos\Big(\frac{p-q}{2}\Big) \quad \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\operatorname{ch}\Big(\frac{p-q}{2}\Big).$$

Remarque 2.3 On ne sait pas transformer $\cos p + \sin q$ en un produit simple, sauf si $p = q$:

$$\cos p + \sin p = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4)\cos(p) + \sin(\pi/4)\sin(p)\big) = \sqrt{2}\cos(p - \pi/4)$$

Plus généralement,

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\mathrm{A}}\cos\theta + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\mathrm{B}}\sin\theta\Big).$$

Mais puisque $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = 1$, il existe $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $\mathrm{A} = \cos\varphi$ et $\mathrm{B} = \sin\varphi$ d'où finalement

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\varphi + \sin\varphi\sin\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \varphi).$$

On retient le lien simple qui existe entre $\tan x$ et $\cos x$:

♡ **2.8**

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Pour les tangentes, on a les formules suivantes qui proviennent de la définition et des formules fondamentales.

♡ **2.9**

$$\begin{array}{rlrl}
1+\tan^2 x = & \dfrac{1}{\cos^2 x} & 1-\mathrm{th}^2 x = & \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \\
\tan(a+b) = & \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \mathrm{th}(a+b) = & \dfrac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b} \\
\tan(a-b) = & \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} & \mathrm{th}(a-b) = & \dfrac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b} \\
\tan(2a) = & \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} & \mathrm{th}(2a) = & \dfrac{2\,\mathrm{th}\, a}{1 + \mathrm{th}^2 a}.
\end{array}$$

Terminons par des formules qui permettent d'exprimer les fonctions trigonométriques comme fractions rationnelles en $t = \tan(x/2)$. Ces formules nous serviront pour calculer des primitives.

♡ **2.10**

$$\begin{array}{rlrl}
t = & \tan(\dfrac{x}{2}) & t = & \mathrm{th}(\dfrac{x}{2}) \\
\sin x = & \dfrac{2t}{1+t^2} & \mathrm{sh}\, x = & \dfrac{2t}{1-t^2} \\
\cos x = & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \mathrm{ch}\, x = & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\
\tan x = & \dfrac{2t}{1-t^2} & \mathrm{th}\, x = & \dfrac{2t}{1+t^2}.
\end{array}$$

Démonstration *Utilisons la formule* $\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$ *et la relation entre* $\cos$ *et* $\tan$ *:* $\cos^2(x/2) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x/2)}$ *pour écrire :*

$$\sin(x) = 2\tan(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

De même,

$$\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Il suffit de former le quotient pour trouver $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

B.2 Calculs de sommes

B.2.1 Comprendre les notations

On considère un ensemble I *fini* (indices) et une famille de réels $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$. On note la *somme* de cette famille : $\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i$ et le *produit* de cette famille : $\prod_{i\in\mathrm{I}} a_i$.

Par exemple, si $\mathrm{I} = [\![1, n]\!]$, $\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et $\prod_{i\in\mathrm{I}} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$. Lorsque l'ensemble d'indices est un

intervalle d'entiers : $I = [\![p, q]\!]$, on note

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i\in I} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

Il est important de comprendre que la lettre i utilisée dans la notation $\sum_{i\in I}$ est *muette* (elle prend les différentes valeurs dans I) et on peut la remplacer par une autre lettre :

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{j=p}^{q} a_j = a_p + \cdots + a_q.$$

On sait calculer certaines sommes fondamentales, comme la somme des n premiers entiers (ainsi que la somme de leurs carrés et de leurs cubes) :

♡ **2.11**

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

♡ **2.12**

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

♡ **2.13**

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Pour la somme S des n premiers entiers, une démonstration simple consiste à écrire les termes en ordre inverse :

$$\begin{cases} S &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{cases}$$

et, en remarquant que $1 + n = 2 + (n-1) = \cdots = n + 1$ puis en additionnant ces deux lignes, on obtient $2S = n(n+1)$ d'où le résultat. On montre les deux autres formules par récurrence sur n.
La formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

s'écrit avec nos notations :

♡ **2.14**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Les *sommes géométriques* sont très importantes. Si $x \neq 1$,

$$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

En effet,

$$\begin{cases} S &= 1 + x + \cdots + x^n \\ xS &= x + \cdots + x^n + x^{n+1} \end{cases}$$

et, en soustrayant, on obtient $(1-x)S = 1 - x^{n+1}$ d'où le résultat. Lorsque $x = 1$, on somme 1 $(n+1)$ fois : $S = (n+1)$. Cette formule s'écrit avec nos notations :

♡ **2.15**

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

B.2.2 Changement d'indices, télescopage

Considérons deux entiers $n < p$ et une somme

$$S = \sum_{k=n}^{p} a_k = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_p.$$

On peut également écrire

$$S = \sum_{i=0}^{p-n} a_{n+i} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+(p-n)}.$$

Formellement, on effectue un *changement d'indice de sommation* en posant $i = k - n$ et en modifiant les bornes de l'intervalle de sommation : lorsque $k = n$, $i = 0$ et, lorsque $k = p$, $i = p - n$. Dans le terme générique à sommer a_k, on remplace toutes les occurrences de k par $(n+i)$.
On peut également effectuer le changement d'indices $j = p - k$: lorsque k parcourt l'intervalle $[\![n, p]\!]$, j parcourt l'intervalle $[\![0, p-n]\!]$. En remplaçant k par $p - j$, on obtient alors :

$$S = \sum_{j=0}^{p-n} a_{p-j} = a_p + a_{p-1} + \cdots + \underbrace{a_{p-(p-n)}}_{a_n}.$$

Ce changement d'indice consiste à sommer les termes de la famille dans l'ordre inverse. La formule du binôme peut s'écrire :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Il suffit d'échanger les rôles de a et b ou d'effectuer le changement d'indice $j = n - k$.
Si dans les termes à sommer, on a en facteur un terme *qui ne dépend pas de l'indice de sommation*, on peut le factoriser dans la somme :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha \times a_i = (\alpha a_1) + (\alpha a_2) + \cdots + (\alpha a_n) = \alpha(a_1 + \cdots + a_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Par exemple, pour calculer une somme géométrique avec l'indice qui ne commence pas à 0, on peut utiliser deux techniques :

$$S = \sum_{i=p}^{q} x^i = \sum_{i=0}^{q} x^i - \sum_{i=0}^{p-1} x^i = \frac{1-x^{q+1}}{1-x} - \frac{1-x^p}{1-x} = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}$$

ou, en posant $j = i - p$,

$$S = \sum_{i=p}^{q} x^i = \sum_{j=0}^{q-p} x^{j+p} = \sum_{j=0}^{q-p} x^p x^j = x^p \sum_{j=0}^{q-p} x^p = x^p \frac{1-x^{q-p+1}}{1-x}.$$

En pratique, il vaut mieux utiliser la deuxième méthode car elle donne un résultat factorisé dans des calculs de sommes plus compliqués.

Exemple 2.3 Pour calculer la somme $S = \sum_{i=0}^{n} (n-i)^2$, on peut développer :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n} n^2 - \sum_{i=0}^{n} 2ni + \sum_{i=0}^{n} i^2 \\ &= (n+1)n^2 - 2n \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} i^2 \\ &= (n+1)n^2 - 2n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Mais il vaut bien mieux effectuer le changement d'indices $k = n - i$:

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Voyons maintenant une technique courante dans les calculs de sommes, le télescopage. Considérons :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right).$$

Si l'on écrit les termes successifs de cette somme,

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right),$$

on s'aperçoit que tous les termes se simplifient sauf $1/1$ et $1/(n+1)$: $S = \dfrac{1}{n+1} - 1$. Utilisons les changements d'indices pour rédiger ce calcul :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad (i = k+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad \text{(les indices sont muets)} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{1}\right) \text{(on sort des sommes les termes qui ne sont pas communs)} \\
&= \frac{1}{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

Exemple 2.4 Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Commençons par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}.$$

pour écrire

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

On utilise souvent des changements d'indice pour calculer des sommes où tous les indices sont pairs ou impairs. Par exemple, on veut calculer la somme des premiers entiers pairs inférieurs à un entier n :

$$S_n = 0 + 2 + 4 + \cdots = \sum_{\substack{i=0 \\ i\,pair}}^{n} i.$$

Puisque les indices i de cette somme sont pairs, on peut les écrire sous la forme $i = 2k$ où k est un entier. Comme $0 \leqslant i = 2k \leqslant n$, il vient $0 \leqslant k \leqslant n/2$ et le nouvel indice k varie donc dans l'intervalle entier $[\![0, E(n/2)]\!]$. Si $n = 2p$, $k \in [\![0, p]\!]$ et si $n = 2p+1$, $k \in [\![0, p]\!]$. Par conséquent,

$$S_n = \sum_{k=0}^{p} (2k) = 2\sum_{k=0}^{p} k = 2\frac{p(p+1)}{2} = p(p+1).$$

Nous voulons calculer maintenant la somme des coefficients binomiaux

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \sum_{\substack{i=0 \\ i\,pair}}^{n} \binom{n}{i}.$$

L'idée consiste à utiliser la formule du binôme donnant la somme de tous les coefficients binomiaux :

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

On introduit la somme des coefficients binomiaux où les indices sont impairs :

$$\mathrm{T}_n = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{i}.$$

Nous avons alors $\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = 2^n$. Il nous faut une autre relation pour calculer S_n et T_n. Formons la différence :

$$\mathrm{S}_n - \mathrm{T}_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0.$$

On en déduit que $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n = 2^{n-1}$. Nous avons calculé les deux sommes en développant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$. On remarque que 1 et -1 sont les racines carrées de l'unité.
On peut généraliser cette idée en utilisant les racines n-ièmes de l'unité. Par exemple, si nous voulons calculer les sommes

$$\begin{cases} \mathrm{U}_n &= \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}, \\ \mathrm{V}_n &= \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}, \\ \mathrm{W}_n &= \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}, \end{cases}$$

on calcule à l'aide du binôme les trois sommes

$$\begin{cases} (1+1)^n &= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \mathrm{U}_n + \mathrm{V}_n + \mathrm{W}_n, \\ (1+j)^n &= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = \mathrm{U}_n + j\mathrm{V}_n + j^2\mathrm{W}_n, \\ (1+j^2)^n &= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} = \mathrm{U}_n + j^2\mathrm{V}_n + j\mathrm{W}_n. \end{cases}$$

Nous avons utilisé les relations $j^k = 1$ lorsque $k \equiv 0\ [3]$, $j^k = j$ lorsque $k \equiv 1\ [3]$ et $j^k = j^2$ lorsque $j \equiv 2\ [3]$. En utilisant la propriété $1 + j + j^2 = 0$, il suffit d'additionner les trois lignes précédentes pour trouver

$$\mathrm{U}_n = \frac{2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3}.$$

On peut également avec la combinaison linéaire $\mathrm{L}_1 + j^2\mathrm{L}_2 + j\mathrm{L}_3$ calculer V_n et de même avec $\mathrm{L}_1 + j\mathrm{L}_2 + j^2\mathrm{L}_3$ calculer W_n.
Cette technique permet de calculer plus généralement des sommes de la forme

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv l\,[p]}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Il suffit de développer $(1+\omega_k)^n$ pour les n racines n-ièmes de l'unité ω_k.

B.2.3 Sommes doubles

Lorsque l'ensemble d'indices est une partie finie formée de couples, on dit qu'on a une *somme double*. Par exemple, si $\mathrm{I} = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,2)\}$ et $a_{(i,j)} = i + j$,

$$\mathrm{S} = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = a_{(1,2)} + a_{(3,1)} + a_{(2,1)} + a_{(1,1)} = (1+2) + (1+3) + (2+2) + (3+2) = 16.$$

Un cas courant est lorsque I est un produit d'intervalles d'entiers :

$$\mathrm{I} = [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!] = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,q),(2,1)\ldots,(2,q),\ldots,(p,q)\}$$

En notant $a_{ij} = a_{(i,j)}$, on a la formule *d'interversion de sommes* :

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\Big)}_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{q} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\Big)}_{\beta_j}.$$

Remarquons que $\alpha_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}$ ne dépend pas de j (l'indice de sommation est muet), mais de i. De même, β_j ne dépend pas de i. La formule précédente permet donc d'exprimer une somme double à l'aide de sommes simples.
Pour comprendre cette formule, considérons l'exemple suivant : $I = \{1, 2\}$ et $J = \{1, 2, 3\}$:

$$\sum_{i=1}^{2}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\Big) = \underbrace{(a_{11} + a_{12} + a_{13})}_{i=1} + \underbrace{(a_{21} + a_{22} + a_{23})}_{i=2},$$

$$\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\Big) = \underbrace{(a_{11} + a_{21})}_{j=1} + \underbrace{(a_{12} + a_{22})}_{j=2} + \underbrace{(a_{13} + a_{23})}_{j=3}.$$

Ces deux sommes sont bien égales puisque le résultat d'une sommation ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les sommes (en algèbre, on dit que la loi + est commutative).
Lorsque $a_{ij} = \alpha_i \times \beta_j$, la somme double s'écrit comme un produit de deux sommes simples :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \alpha_i \beta_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{q} \beta_j\Big)}_{\gamma} \quad (\alpha_i \text{ ne dépend pas de } j) \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{q} \beta_j\Big) \times \Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\Big) \quad (\gamma \text{ ne dépend pas de } i). \end{aligned}$$

Exemple 2.5 Calculons la somme $S = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} i \binom{n}{j} (\sqrt{2})^j$:

$$\begin{aligned} S &= \Big(\sum_{i=0}^{p} i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sqrt{2}^j\Big) \\ &= \frac{p(p+1)}{2}(1+\sqrt{2})^n. \end{aligned}$$

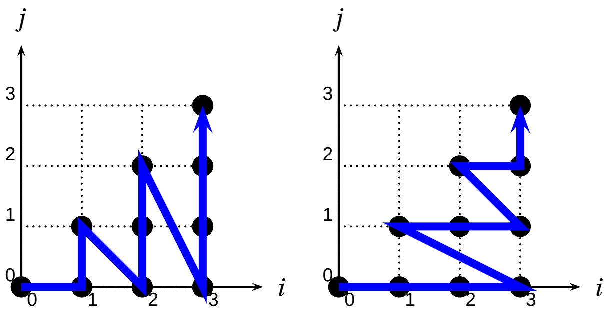
Exemple 2.6 Calculons la somme $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j)^2$. En développant cette somme,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big) + n\sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= 2n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2 \quad (\text{ indices muets }) \\ &= \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}. \end{aligned}$$

Un exemple plus compliqué d'interversion de signes sommes, lorsque les bornes ne sont pas indépendantes :

$$S = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i} a_{ij}\Big) = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=j}^{n} a_{ij}\Big).$$

Ici, $S = \sum_{(i,j)\in I} a_{ij}$ où $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n\}$. On peut représenter chaque couple $(i,j) \in I$ par un point sur un quadrillage ($n = 3$ sur la figure) :



Si on commence par sommer sur l'indice i variant de 0 à n, à i fixé, j varie entre 0 et i. Sur le dessin, cela correspond à sommer verticales par verticales :

$$S = \underbrace{(a_{00})}_{i=0} + \underbrace{(a_{10}+a_{11})}_{i=1} + \underbrace{(a_{20}+a_{21}+a_{22})}_{i=2} + \underbrace{(a_{30}+a_{31}+a_{32}+a_{33})}_{i=3}.$$

Mais on peut également sommer horizontale par horizontale :

$$S = \underbrace{(a_{00}+a_{10}+a_{20}+a_{30})}_{j=0} + \underbrace{(a_{11}+a_{21}+a_{31})}_{j=1} + \underbrace{(a_{22}+a_{32})}_{j=2} + \underbrace{(a_{33})}_{j=3}.$$

Exemple 2.7 Calculer la somme $S = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$. En inversant les signes sommes :

$$S = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j = (1+2)^n = 3^n$$

B.3 Trigonométrie et nombres complexes

Nous allons voir dans ce paragraphe des techniques de calcul trigonométrique utilisant la notation $\sum$ et les exponentielles imaginaires.

B.3.1 Transformation de $\cos(n\theta)$

Il s'agit de transformer une combinaison linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ en produits de la forme $\cos^p a \sin^q a$. Ce procédé s'avérera utile pour résoudre des équations trigonométriques. La formule de Moivre est à la base du procédé de factorisation. Commençons par un exemple. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on veut transformer en produits $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$. On a, par application de la formule de Moivre :

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^5 = e^{5i\theta} = \cos 5\theta + i\sin 5\theta.$$

Développons le membre de gauche de cette égalité avec la formule du binôme :

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^5 &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta\\ &= \left(\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\right) + i\left(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\right).\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle et imaginaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta.\end{aligned}$$

Calculons maintenant une formule générale qui permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$. Écrivons avec la formule de Moivre

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right]$$

et développons à l'aide de la formule du binôme :

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[1+(-1)^k\right]i^k\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta.$$

Puisque $[1+(-1)^k] = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$, $\cos(n\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k pair}}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta$. Tous les indices de cette somme étant pairs, on peut les écrire $k = 2p$ avec $0 \leqslant 2p \leqslant n$, c'est-à-dire $p \in [\![0, \mathrm{E}(n/2)]\!]$. Par conséquent,

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}\theta \sin^{2p}\theta = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta (1-\cos^2\theta)^p = \mathrm{T}_n(\cos\theta)$$

où T_n est un polynôme appelé n-ième *polynôme de Tchebychev* (de première espèce) :

$$\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \binom{n}{2p} (-1)^p \mathrm{X}^{n-2p} (1-\mathrm{X}^2)^p.$$

Le calcul précédent est fondamental. Les polynômes de Tchebychev jouent un rôle important en algèbre et en analyse et il est courant de trouver cette question de cours dans les premières questions d'un problème de concours. Vous devez avoir bien compris et savoir refaire rapidement ce calcul.
Effectuons le calcul similaire pour $\sin(n\theta)$:

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n - (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right],$$

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [1-(-1)^k]\, i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta = \frac{1}{i} \sum_{\substack{k=0 \\ kimpair}}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta.$$

Tous les indices de cette somme étant impairs, on peut les écrire sous la forme $k = 2p+1$ où $0 \leqslant 2p+1 \leqslant n$, c'est-à-dire $-1/2 \leqslant p \leqslant (n-1)/2$ et p varie donc dans l'intervalle d'entiers $[\![0, \mathrm{E}(\frac{n-2}{2})]\!]$.

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2p+1} i^{2p+1} \cos^{n-2p-1}\theta \sin^{2p+1}\theta = \sin\theta \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \cos^{n-2p-1}\theta (1-\cos^2\theta)^p = \sin\theta\, \mathrm{U}_n(\cos\theta)$$

où $\mathrm{U}_n(\mathrm{X}) = \sum_{p=0}^{\mathrm{E}(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \mathrm{X}^{n-2p-1} (1-\mathrm{X}^2)^p$ est un polynôme.
Pour terminer, voyons un complément important sur les polynômes de Tchebychev. Utilisons la formule de trigonométrie

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour écrire $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant 2$,

$$\cos\left[(n+1)\theta\right] + \cos\left[(n-1)\theta\right] = 2\cos\theta\cos(n\theta).$$

Puisque tout réel $x \in [-1,1]$ peut s'écrire $\cos(\theta)$, il vient

$$\forall x \in [-1,1], \quad \mathrm{T}_{n+1}(x) + \mathrm{T}_{n-1}(x) = 2x\mathrm{T}_n(x)$$

et on utilise une technique importante sur les polynômes : le polynôme $\mathrm{Q} = \mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1} - 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n$ admet une infinité de racines, il est donc nul. On obtient ainsi une relation de récurrence qui permet de calculer de proche en proche les T_n :

$$\mathrm{T}_0 = 1, \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{T}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1}.$$

On obtient $\mathrm{T}_2(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^2 - 1$, $\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$ et on retrouve les formules de trigonométrie $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

et ainsi de suite. On se sert souvent de cette formule de récurrence pour introduire plus simplement les polynômes de Tchebychev. Elle permet en particulier de montrer simplement par récurrence que le terme dominant du polynôme T_n vaut $2^{n-1}\mathrm{X}^n$.

B.3.2 Problèmes de linéarisation

L'objectif de ce paragraphe est de montrer comment transformer un produit $\cos^p\theta\sin^q\theta$ en une combinaison linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$. Cette opération s'avérera très utile pour les problèmes de calcul de primitive. Les formules d'Euler sont

également à la base du processus de linéarisation. Commençons par un exemple. Nous souhaitons linéariser $\sin^6\theta$. On a :

$$\begin{aligned}
\sin^6\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^6\\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}-6e^{i5\theta}e^{-i\theta}+15e^{i4\theta}e^{-i2\theta}-20e^{i3\theta}e^{-i3\theta}+15e^{i2\theta}e^{-i4\theta}-6e^{i\theta}e^{-i5\theta}+e^{-i6\theta}\right)\\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}-6e^{i4\theta}+15e^{i2\theta}-20+15e^{-i2\theta}-6e^{-i4\theta}+e^{-i6\theta}\right)\\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6\theta}+e^{-i6\theta}-6\left(e^{i4\theta}+6e^{-i4\theta}\right)+15\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)-20\right)\\
&= -\frac{1}{32}\left(\cos 6\theta-6\cos 4\theta+15\cos 2\theta-10\right).
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la formule du binôme et avons regroupé les termes symétriques pour retrouver des cosinus. Maple permet d'effectuer ces linéarisations trigonométriques à l'aide de la fonction `combine` :

MAPLE
```
> A:=(cos(t))^4;
                                       4
                              A := cos(t)
> combine(A);
                   1             1             3
                   - cos(4 t) + - cos(2 t) + -
                   8             2             8
```

Il est alors facile de déterminer une primitive, $\int \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\sin(4t)+\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{3}{8}t+\mathrm{C}$.
Attaquons-nous maintenant à la linéarisation générale :

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^n}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}.$$

En s'inspirant de l'exemple précédent, nous souhaitons regrouper le terme $k=0$ avec le terme $k=n$, le terme $k=1$ avec le terme $k=n-1$ ... Il faut distinguer les cas n pair et n impair pour pouvoir compter précisément le nombre de termes dans la somme.

– Si $n=2p+1$ est impair, il y a $2p+2$ termes dans la somme que l'on sépare en deux :

$$2^n\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}+\sum_{k=p+1}^{2p+1}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}.$$

  Effectuons alors un changement d'indice dans la deuxième somme pour inverser l'ordre des termes : $k'=n-k$. On remarque que $\binom{n}{n-k'}=\binom{n}{k'}$ et que $(n-2(n-k'))=-(n-2k')$ d'où

$$2^n\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}+\sum_{k'=0}^{p}\binom{n}{k'}e^{-i(n-2k')}=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\left[e^{i(n-2k)\theta}+e^{-i(n-2k)\theta}\right]$$

  et finalement,

$$\cos^{2p+1}\theta = \frac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\cos[(2p-2k+1)\theta].$$

– Si $n=2p$ est pair, il y a $2p+1$ termes dans la somme et on doit sortir le terme médian : les $(p-1)$ premiers termes correspondent à $k\in[\![0,p-1]\!]$, le terme médian à $k=p$ et les $(p-1)$ derniers termes à $k\in[\![p+1,2p]\!]$:

$$2^n\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}+\binom{2p}{p}+\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)\theta}$$

  et avec le changement d'indice $k'=n-k$ dans la deuxième somme puis en regroupant les sommes, on trouve finalement

$$\cos^{2p}\theta = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}+\frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos\big(2(p-k)\theta\big).$$

B.3.3 Utilisation des sommes géométriques complexes

L'idée fondamentale de ce paragraphe est qu'il est souvent plus facile de calculer une somme complexe qu'une somme trigonométrique, grâce aux propriétés de l'exponentielle imaginaire.
Pour calculer la somme

$$S_n = 1+\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\cdots+\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta),$$

introduisons la somme correspondante avec des sinus :

$$T_n = 0+\sin(\theta)+\sin(2\theta)+\cdots+\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$$

et la somme des exponentielles imaginaires associées :

$$U_n = S_n + iT_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}\left[e^{i\theta}\right]^k.$$

Si on sait calculer U_n, on en déduit S_n et T_n en prenant les parties réelles et imaginaires : $S_n = \mathrm{Re}(U_n)$ et $T_n = \mathrm{Im}(U_n)$.
On reconnaît pour U_n une somme géométrique de raison $e^{i\theta}$. Distinguons deux cas :

1. Si $e^{i\theta}\neq 1$, c'est-à-dire $\theta \neq 2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, alors

$$U_n = \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}.$$

   Nous voulons extraire la partie réelle et imaginaire. Utilisons la factorisation de l'angle moitié :

$$U_n = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} = e^{in\frac{\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

   d'où

$$S_n = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad T_n = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

2. Si $e^{i\theta}=1$, c'est-à-dire $\theta = 2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, alors $U_n = n+1$ d'où $S_n = (n+1)$ et $T_n = 0$.

Vous devez penser par vous-même à introduire la somme complexe correspondante. Par exemple, pour calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(\alpha+k\beta)$$

où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, introduisez la somme des exponentielles imaginaires correspondante :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(\alpha+k\beta)}$$

puisque $S_n = \mathrm{Re}(U_n)$. Le calcul de U_n se ramène au calcul d'une somme binômiale :

$$U_n = e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[e^{i\beta}\right]^k = e^{i\alpha}\left[e^{i\beta}+1\right]^n.$$

Il suffit alors de factoriser l'angle moitié :

$$U_n = e^{i\alpha}\left[2\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\beta}{2}}\right]^n = 2^n\cos^n\frac{\beta}{2}e^{i(\alpha+\frac{n\beta}{2})}$$

et de prendre la partie réelle :

$$S_n = 2^n\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\cos^n\frac{\beta}{2}.$$

Un dernier exemple : nous voulons calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)$$

Nous ne pouvons pas ici introduire de somme d'exponentielles imaginaires associés. Si par exemple $U_n = \sum_{k=0}^{n}[e^{ik\theta}]^2$, nous n'avons pas $S_n = \mathrm{Re}(U_n)$! Pour calculer cette somme, il suffit de linéariser $\cos^2(k\theta) = \frac{1}{2}\left[\cos(2k\theta)+1\right]$ et on a alors

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)+\frac{(n+1)}{2}.$$

Vous pouvez terminer le calcul en introduisant la somme complexe $U_n = \sum_{k=0}^{n}e^{2ik\theta}$.

B.4 Calculs sur des polynômes

B.4.1 Les trinômes

Le but de ce paragraphe est de rappeler les principales propriétés des trinômes qui doivent être parfaitement connues.

Discriminant réduit

On considère un polynôme du second degré

$$P = aX^2 + bX + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

On sait calculer ses deux racines complexes x_1, x_2 à l'aide du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double donnée par $x = -\dfrac{b}{a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, le trinôme possède deux racines complexes distinctes. On commence par calculer une racine carrée complexe de Δ, c'est-à-dire un complexe δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$ et on obtient

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{-b-\delta}{2a}, \\ x_2 &= \dfrac{-b+\delta}{2a}. \end{cases}$$

- Si $\Delta < 0$ est un réel strictement négatif, on sait que les deux racines complexes sont conjuguées : $x_2 = \overline{x_1}$.

Lorsque le trinôme s'écrit

$$P = aX^2 + 2bX + c$$

(utile lorsque b est entier), on peut utiliser directement le *discriminant réduit* $\Delta' = b^2 - ac$ et exprimer les racines à l'aide d'une racine carrée complexe de Δ' ($\delta'^2 = \Delta'$) :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{-b-\delta'}{a}, \\ x_2 &= \dfrac{-b+\delta'}{a}. \end{cases}$$

Cela évite la simplification par 2 dans les expressions ...

Exemple 2.8 Pour résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$, on écrit $\Delta' = 2^2 - 3 = 1$ et les deux racines sont $x_1 = 2 + 1 = 3$ et $x_2 = 2 - 1 = 1$.

Exemple 2.9 Une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilise le discriminant réduit. Soit E un espace euclidien et $x, y \in E$ deux vecteurs, considérons (lorsque $x \neq 0_E$) le trinôme

$$T(\lambda) = \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \left(x \mid y\right) + \|y\|^2.$$

Puisqu'une norme ne prend que des valeurs positives, ce trinôme ne prend que des valeurs positives et ne possède donc au plus qu'une racine réelle. Son discriminant réduit est négatif ou nul :

$$\Delta' = \left(x \mid y\right)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$$

d'où $|\left(x \mid y\right)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.

Relations entre coefficients et racines

En notant x_1, x_2 les deux racines complexes du polynôme $P = aX^2 + bX + c$, on a

$$P = a(X - x_1)(X - x_2) = a\left[X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2\right].$$

En identifiant les coefficients de P, on déduit la somme et le produit des racines sans avoir à les calculer explicitement :

♡ **2.16**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 &= \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Exemple 2.10 Déterminons l'expression logarithmique de $\text{argsh}(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, notons $y = \text{argsh}(x)$:

$$x = \text{sh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

En notant $Y = e^y$, Y est racine d'un trinôme : $x = \dfrac{Y - 1/Y}{2} = \dfrac{Y^2 - 1}{2Y}$. On en déduit que

$$Y^2 - 2xY - 1 = 0.$$

Le discriminant réduit vaut $\Delta' = x^2 + 1 > 0$ et le trinôme possède deux racines réelles distinctes

$$\begin{cases} Y_1 &= x + \sqrt{x^2+1} > 0, \\ Y_2 &= x - \sqrt{x^2-1} < 0. \end{cases}$$

En effet, puisque $Y_1 Y_2 = -1 < 0$, l'une des racines est positive, l'autre est négative et puisque de façon évidente $Y_1 > 0$, il vient que $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ d'où

$$\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Déterminons de même l'expression logarithmique de $y = \text{argch}(x)$ pour $x \geqslant 1$. Avec les mêmes notations,

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{Y + 1/Y}{2} = \frac{Y^2+1}{2}$$

et

$$Y^2 - 2xY + 1 = 0.$$

Le discriminant réduit $\Delta' = x^2 - 1 \geqslant 0$ est toujours positif d'où les deux racines

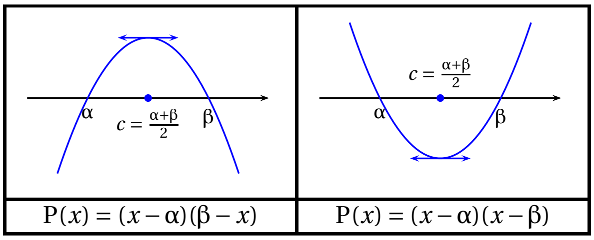
$$\begin{cases} Y_1 &= x + \sqrt{x^2-1}, \geqslant 1 \\ Y_2 &= x - \sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

Puisque $Y_1 Y_2 = 1$, les deux racines ont même signe (> 0), l'une est supérieure et l'autre inférieure à 1. Puisque $Y_1 \geqslant x \geqslant 1$, et que $y = \text{argch}(x) = \ln Y \geqslant 0$, il vient $Y \geqslant 1$ d'où $Y = Y_1$ et $\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Extrémum d'un trinôme

La courbe représentative d'un trinôme $y = P(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole.

1. $a > 0$: la parabole est convexe et atteint son maximum en $c = -\dfrac{b}{a}$: le milieu des racines de P (lorsque P possède deux racines réelles).
2. $a < 0$: la parabole est concave et atteint son minimum en $c = -\dfrac{b}{a}$: le milieu des racines de P (lorsque P possède deux racines réelles).



Il suffit d'étudier les variations de P : $P'(x) = 2ax + b$ et P' s'annule en $-b/a$.

Exemple 2.11 $\sup_{x \in [0,1]} x(1-x) = \dfrac{1}{4}$ Le trinôme admet un maximum atteint en $x = 1/2$ (milieu des racines 0, 1) et la valeur du maximum vaut $1/4$.

Exercice 2.1 ♡♡

On considère la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$$

a. *Montrer que* $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

b. *Déterminer un équivalent simple de u_n.*

Solution :

a. *Le trinôme* $P = X(n-X)$ *a pour racines* 0 *et* n *et atteint son maximum sur* $[0,n]$ *en* $c = n/2$. *Le maximum vaut* $n^2/4$. *On majore facilement :*

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^3} n \times \sqrt{n^2/4} = \frac{1}{2n}$$

et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b. *Écrivons*

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}\right] = \frac{S_n}{n}$$

où S_n *est une somme de Riemann qui converge vers* $L = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$ *Mais la courbe d'équation* $y = \sqrt{x(1-x)}$ *a pour équation* $y^2 = x - x^2$ *et on reconnaît un demi-cercle centré en* $(1/2, 0)$ *de rayon* $1/2$. *L'intégrale* L *est l'aire d'un demi-disque de rayon* $1/2$ *et vaut donc* $L = \pi/8$. *Finalement,* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{8n}$.

B.4.2 Développement de polynômes

Pour développer un produit de polynômes, il est indispensable de mener les calculs en une seule ligne. Par exemple, pour développer

$$P(X) = (X^2 + 3X - 2)(X^3 + 2X^2 - 3X + 1)$$

il est très maladroit d'écrire :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^2(X^3 + 2X^2 - 3X + 1) + 3X(X^3 + 2X^2 - 3X + 1) - 2(X^3 + 2X^2 - 3X + 1) \\ &= X^5 + 2X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X^4 + 6X^3 - 9X^2 + 3X - 2X^3 - 4X^2 + 6X - 2 \\ &= X^5 + 5X^4 + X^3 - 12X^2 + 9X - 2. \end{aligned}$$

En effet, recopier mécaniquement des termes mène à une perte d'attention, source fréquente d'erreurs.
La bonne méthode pour mener ce calcul consiste à :
- déterminer le degré d du polynôme produit (somme des degrés),
- déterminer pour $k \in [\![0,d]\!]$ d'où vient le terme en X^k et sommer les coefficients sélectionnés,
- écrire *en une seule ligne* le résultat.

`Multimédia : Coefficients entiers de 2 (ou 3) polynômes choisis au hasard, pour calculer le coefficient de X^k, griser dynamiquement les termes du produit et collecter les coefficients en bas. Exerciseur ?`

Détaillons cette technique sur notre exemple. Les opérations suivantes se font de tête et ne nécessitent qu'une seule ligne !
Le degré du polynôme P vaut 5.
- Le terme en X^5 ne provient que du produit de X^2 avec X^3 et le coefficient de X^5 vaut donc 1 :

$$(\boxed{X^2} + 3X - 2)(\boxed{X^3} + 2X^2 - 3X + 1).$$

- Le terme en X^4 provient du produit de X^2 avec $2X^2$ (coefficient 2)

$$(\boxed{X^2} + 3X - 2)(X^3 + \boxed{2X}^2 - 3X + 1),$$

  du produit de $3X$ avec X^3 (coefficient 3)

$$(X^2 + \boxed{3X} - 2)(\boxed{X^3} + 2X^2 - 3X + 1)$$

  et le coefficient de X^4 vaut donc $2 + 3 = 5$.
- Le terme en X^3 provient du produit de X^2 avec $-3X$,

$$(\boxed{X^2} + 3X - 2)(X^3 + 2X^2 \boxed{-3X} + 1),$$

  du produit de $3X$ avec $2X^2$

$$(X^2 + \boxed{3X} - 2)(X^3 + \boxed{2X^2} - 3X + 1)$$

et du produit de -2 avec X^3

$$(X^2+3X\boxed{-2})(\boxed{X^3}+2X^2-3X+1).$$

Le coefficient vaut donc $-3+6-2=1$.

– Le terme en X^2 a pour coefficient $1-9-4=-12$:

$$(\boxed{X^2}+3X-2)(X^3+2X^2-3X\boxed{+1}),$$
$$(X^2+\boxed{3X}-2)(X^3+2X^2\boxed{-3X}+1),$$
$$(X^2+3X\boxed{-2})(X^3+\boxed{2X^2}-3X+1).$$

– Le terme en X a pour coefficient $3+6=9$

$$(X^2+\boxed{3X}-2)(X^3+2X^2-3X\boxed{+1}),$$
$$(X^2+3X\boxed{-2})(X^3+2X^2\boxed{-3X}+1).$$

– Le terme constant provient du produit des deux constantes et vaut -2.

$$(X^2+3X\boxed{-2})(X^3+2X^2-3X\boxed{+1}).$$

Il faut impérativement adopter cette technique de calcul. Dans un premier temps, vous pouvez utiliser le brouillon pour noter les coefficients que vous récoltez et ensuite les sommer. Avec un peu d'habitude, ce calcul se fait de tête immédiatement.

Exercice 2.2

Développer les polynômes suivants :

1. $(X^3+X^2-X+2)(2X^2+X-1)$;
2. $(2X^4+3X^2-6X-1)(X^3-2X^2+X+1)$;
3. $(X^5+X^4-2X^2+3)(2X^3-X^2+X-1)$.

Solution :

1. $2X^5+3X^4-2X^2+3X-2$;
2. $2X^7-4X^6+5X^5-10X^4+14X^3-X^2-7X-1$;
3. $2X^8+X^7-4X^5+X^4+4X^3-X^2+3X-3$.

Exercice 2.3

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 *en* 0 *de :*

a. $\sin(x)\exp(x)$;

b. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Solution :

a.

$$\begin{aligned}e^x\sin(x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &= x\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &= x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3).\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1+x} &= x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\left(1-x+x^2-x^3+o(x^3)\right)\\ &= x\left(1-\frac{3}{2}x+\frac{11}{6}x^2-\frac{25}{12}x^3+o(x^3)\right)\\ &= x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

Pour développer un produit de trois polynômes, on peut utiliser la même technique et chercher directement d'où provient le terme X^d.

Exemple 2.12 Développer
$$P(X) = (X^2 + X - 1)(X^2 + 3X - 1)(X - 5).$$

Le degré du produit vaut 5.

– Le terme en X^5 provient uniquement du produit
$$(\boxed{X^2} + X - 1)(\boxed{X^2} + 3X - 1)(\boxed{X} - 5)$$
et vaut X^5.

– Le terme en X^4 provient des produits :
$$(\boxed{X^2} + X - 1)(\boxed{X^2} + 3X - 1)(X\boxed{-5}),$$
$$(\boxed{X^2} + X - 1)(X^2 + \boxed{3X} - 1)(\boxed{X} - 5),$$
$$(X^2 + \boxed{X} - 1)(\boxed{X^2} + 3X - 1)(\boxed{X} - 5)$$
et le coefficient de X^4 vaut donc $-5 + 3 + 1 = -1$.

– Terminer le calcul de cette façon.

Si vous n'êtes pas à l'aise avec cette méthode, vous pouvez effectuer le calcul en deux lignes en ne faisant que des multiplications de *deux* polynômes en utilisant la méthode précédente (une multiplication par ligne) :
$$\begin{aligned} P = P(X) &= (X^2 + X - 1)(X^2 + 3X - 1)(X - 5) \\ &= (X^2 + X - 1)(X^3 - 2X^2 - 16X + 5) \\ &= X^5 - X^4 - 19X^3 - 9X^2 + 21X - 5. \end{aligned}$$

B.4.3 Factorisation de polynômes

Il est tout aussi important de savoir factoriser un polynôme. Rappelons que Maple permet de développer et de factoriser les polynômes :

MAPLE
```
> P := (x+1)*(x^2-3*x+2);
                                         2
                     P := (x + 1) (x  - 3 x + 2)
> expand(P);
                           3      2
                          x  - 2 x  - x + 2
> Q := X^4 + 2*X^3 - 11*X^2 - 12*X + 36;
                         4      3       2
                  Q := X  + 2 X  - 11 X  - 12 X + 36
> factor(Q);
                                 2        2
                          (X + 3)  (X - 2)
```

La factorisation d'un polynôme revient à déterminer ses racines (complexes). On se heurte ici à l'un des principaux problèmes des mathématiques. Depuis l'antiquité, on connaît un algorithme pour trouver les racines d'un polynôme de degré 2 et on sait également déterminer les racines d'un polynôme de degré 3 et de degré 4.

À faire : Manu : note historique + précise avec photo?

On a cherché longtemps un algorithme similaire permettant d'exprimer les racines d'un polynôme de degré 5 à l'aide de radicaux faisant intervenir les coefficients du polynôme. Abel puis Galois ont montré que ce problème était insoluble.

Cette obstruction au calcul de racines d'un polynôme se retrouve dans toutes les branches des mathématiques :

Exemple 2.13 On sait *en théorie* primitiver une fraction rationnelle. *En pratique*, il faut être capable de la décomposer en éléments simples. Pour cela, la première étape consiste à factoriser le polynôme au dénominateur. Dès que le degré du dénominateur est supérieur à 5 on est bloqué. Voici une réponse de Maple pour le calcul de $\int \frac{dx}{x^6 + x^5 + 1}$:

MAPLE

```
int( 1/(x^6+x^5+1), x);
   -----
    \              336657046555205   5   43328897320370   4
     )    _R ln(x - --------------- _R  - -------------- _R
    /                363446734701          363446734701
   -----
  _R = %1
          7892189829980   3   408178287515   2   2020667424601
        - ------------- _R  - ------------ _R  + ------------- _R
          363446734701        121148911567       363446734701

          43796810471
        + ------------)
          363446734701
                      6         4        3        2
                      % 1 := RootOf(43531 _Z + 540 _Z + 80 _Z + 10 _Z
                      % + _Z + 1)
```

Ce n'est pas tout à fait ce que l'on appelle une primitive explicite …

On est souvent confronté à cette obstruction fondamentale en calcul scientifique et le seul choix possible consiste à utiliser des méthodes numériques pour déterminer des valeurs approchées des racines d'un polynôme. Heureusement, on dispose d'algorithmes très efficaces pour trouver ces valeurs approchées (vous connaissez déjà la méthode de Newton par exemple ...). Voici un calcul avec Maple qui illustre l'impossibilité de trouver les valeurs exactes des racines d'un polynôme. Une méthode numérique permet cependant de trouver des racines réelles approchées :

Exemple 2.14

```
P := x^10 -2*x - 1;
                                10
                          P := x   - 2 x - 1
> factor(P);
                             10
                            x   - 2 x - 1
> solve(P = 0, x);
                                10
                       RootOf(_Z   - 2 _Z - 1)
> fsolve(P=0, x);
                      -.4995164207, 1.125099677
```

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons voir quelques techniques qui permettent de factoriser de façon explicite un polynôme dans certains cas très particuliers.

Factoriser à partir d'une racine connue

On veut factoriser un polynôme P de degré d. Si l'on connaît une racine α de ce polynôme, on se ramène à la factorisation d'un polynôme Q de degré $(d-1)$ en factorisant $(X-\alpha)$ dans P. Considérons le polynôme

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

On voit que $\alpha = 1$ est racine évidente de P puisque $1 - 5\times 1 + 7\times 1 - 3 = 0$. On peut donc écrire

$$P = (X-1)Q(X)$$

Il faut savoir écrire *en une seule ligne* le polynôme Q en utilisant la méthode suivante :
– $P = X^3 - 5X^2 + 7X - 3$
– Le degré du polynôme Q vaut 2 : $P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
– On détermine le coefficient a puisque le produit de X avec aX^2 doit donner le terme en X^3 de P : $a = 1$

$$P = (X-1)(X^2 + ?X + \dots).$$

– On cherche le coefficient de X dans Q en examinant le terme X^2 du produit : $(-1+?)X^2 = -5X^2$ d'où $? = -4$:

$$P = (X-1)(X^2 - 4X + ?).$$

– On s'intéresse ensuite au terme en X dans le développement : $(? + 4)X = 7$ d'où $? = 3$.

$$P = (X-1)(X^2-4X+3).$$

– On vérifie notre calcul en calculant le terme constant du produit : $(-1) \times 3 = -3$ qui est bien le coefficient constant de P.
Voici un autre exemple. Nous détaillons ici les calculs en plusieurs étapes afin d'illustrer la méthode, mais vous devez mener ce calcul de tête *en une seule ligne* !

$$P = 2X^5 - X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X - 2.$$

On voit immédiatement que 1 est racine évidente de P (la somme des coefficients est nulle) et on factorise en une seule ligne P en suivant les étapes suivantes :
– $P = (X-1)(2X^4 \ldots)$,
– $P = (X-1)(2X^4 + X^3 \ldots)$,
– $P = (X-1)(2X^4 + X^3 - 2X^2 \ldots)$,
– $P = (X-1)(2X^4 + X^3 - 2X^2 - X \ldots)$,
– $P = (X-1)(2X^4 + X^3 - 2X^2 - X + 2)$,
– On vérifie le coefficient constant.
Multimédia : Applet exerciseur

Trouver toutes les racines rationnelles

La méthode précédente permet de factoriser $(X-\alpha)$ où α est une racine de P. Encore faut-il être capable de trouver une racine « évidente » du polynôme P ! Pour un polynôme quelconque, c'est impossible comme nous l'avons vu dans l'introduction. Il existe tout de même quelques méthodes à connaître.
D'abord des remarques évidentes :
– Si le coefficient constant est nul, on peut factoriser X !

$$X^5 + 4X^2 - 5X = X(X^4 + 4X - 5) = X(X-1)(X^3 + X^2 + X + 5)$$

$$X^6 - 4X^5 + 3X^3 = X^3(X^3 - 4X^2 + 3) = X^3(X-1)(X^2 - 3X - 3) = X^3(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$$

où $\alpha = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ et $\beta = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$.
– Examiner les coefficients du polynôme : si leur somme vaut 0 alors 1 est racine évidente. Regarder de même si $P(-1) = 0$.
Il existe un algorithme pour déterminer les racines *rationnelles* d'un polynôme à *coefficients rationnels*. Voir exercice 21.54 p. 804 Considérons par exemple le polynôme

$$P = X^3 - \frac{7}{6}X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{3}{2}.$$

1. On peut supposer que le coefficient constant a_0 est non-nul, sinon on peut factoriser X^k dans P et se ramener à chercher les racines d'un polynôme de degré inférieur.
2. On peut se ramener à chercher les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients *entiers* en réduisant les fractions au même dénominateur :

$$P = \frac{a_d}{b_d}X^d + \cdots + \frac{a_1}{b_1}X + \frac{a_0}{b_0} = \frac{\alpha}{\beta}(b_{d-1} \ldots b_0 X^d + \cdots + b_d \ldots b_1).$$

   Sur notre exemple,

$$P = \frac{1}{6}(6X^3 - 7X^2 - 9X + 9).$$

   On se ramène ainsi à chercher les racines du polynôme

$$Q = 6X^3 - 7X^2 - 9X + 9.$$

3. Supposons que $\alpha = p/q$ soit une racine rationnelle du polynôme $Q = a_d X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ où $a_i \in \mathbb{Z}$. On suppose que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et que les entiers p et q sont premiers entre eux : $p \wedge q = 1$. On doit avoir :

$$0 = Q(\alpha) = a_d \frac{p^d}{q^d} + a_{d-1}\frac{p^{d-1}}{q^{d-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0$$

   et, en réduisant au même dénominateur,

$$a_d p^d + a_{d-1} q p^{d-1} + \cdots + a_1 q^{d-1} p + a_0 q^d = 0.$$

   On obtient ainsi une relation *entre entiers* et on peut utiliser le cours d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

4. Écrivons en factorisant p :
$$p(-a_d p^{d-1} - \cdots - a_1 q^{d-1}) = a_0 q^d.$$
On en déduit que l'entier p doit diviser l'entier $a_0 q^d$ et puisque $p \wedge q = 1$, on a aussi $p \wedge q^d = 1$ d'où en utilisant le *théorème de Gauss* :
$$\begin{cases} p \mid a_0 q^d \\ p \wedge q^d = 1 \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Gauss}} p \mid a_0.$$
L'entier p doit diviser le coefficient a_0. L'entier p ne peut donc prendre qu'un *nombre fini* de valeurs, les diviseurs de a_0. Sur notre exemple, $p \in \{1, 3, 9, -1, -3, -9\}$.
5. De façon symétrique, puisque
$$a_d p^d = q(-a_{d-1} p^{d-1} - \cdots - a_0 q^{d-1}),$$
on a $q \mid a_d p^d$ et, puisque $q \wedge p = 1$, il vient $q \mid a_d$ et q ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Sur notre exemple, $q \in \{1, 2, 3, 6\}$
6. On ne peut donc avoir qu'un *nombre fini* de racines rationnelles de P, sur notre exemple
$$\alpha \in \left\{1, 3, 9, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -1, -3, -9, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right\}.$$
7. Il suffit, pour chacun de ces rationnels, de tester si $\mathrm{P}(\alpha) = 0$. On en déduit toutes les racines rationnelles de P. Sur notre exemple, $\alpha = 3/2$ est la seule racine rationnelle de P.

B.4.4 Polynômes particuliers

Polynômes bicarrés

Si un polynôme s'écrit $\mathrm{P} = \mathrm{Q}(\mathrm{X}^k)$, il suffit, pour trouver les racines de P, de déterminer les racines de Q. En effet, si $\mathrm{P}(\alpha) = 0$, alors α^k est une racine de Q et on sait déterminer les racines k-ièmes d'un nombre complexe. Par exemple,
$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^6 - 3\mathrm{X}^3 + 2 = (\mathrm{X}^3)^2 - 3(\mathrm{X}^3) + 2 = \mathrm{Q}(\mathrm{X}^3) \text{ où } \mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$$
Les racines de P sont donc $\{1, j, j^2, \sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{2}, j^2\sqrt[3]{2}\}$.
Un polynôme *bicarré* est un polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{Q}(\mathrm{X}^2)$ où Q est un polynôme du second degré : $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$. Par exemple,
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^4 - 3\mathrm{X}^2 + 2 = \mathrm{Q}(\mathrm{X}^2) \text{ où } \mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$$
Dans le chapitre 21.6.7, on a vu que les polynômes irréductibles normalisés dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ étaient :
– les polynômes du premier degré $(\mathrm{X}-\alpha)$,
– les polynômes du second degré sans racines réelles : $\mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$ avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$.
Un polynôme bicarré n'est donc jamais irréductible et on peut toujours le factoriser ! On peut évidemment déterminer les racines complexes α, β de Q et les 4 racines complexes de P seront les racines carrées complexes de α et β. Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il suffit alors de grouper ces racines conjuguées deux à deux. Cette méthode est souvent lourde et il faut connaître l'algorithme suivant qui permet d'obtenir directement la factorisation de P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sans passer par les complexes.

1. Si le polynôme $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ possède deux racines réelles, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}^2 - a)(\mathrm{X}^2 - b)$, selon le signe de a et b, on obtient directement la factorisation de P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Par exemple,
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}^2-1)(\mathrm{X}^2-2) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-\sqrt{2})(\mathrm{X}+\sqrt{2}),$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}^2+3)(\mathrm{X}^2-1) = (\mathrm{X}^2+3)(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1).$$
2. Si le polynôme Q ne possède pas de racines réelles, travailler directement sur le polynôme P *en groupant le terme en* X^4 *avec le terme constant* et en faisant apparaître un début de carré et en utilisant la factorisation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:
$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 + 1 = (\mathrm{X}^4+1) + \mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^2+1)^2 - \mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1),$$
$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 + 1 = (\mathrm{X}^2+1)^2 - 2\mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^2 - \sqrt{2}\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 + \sqrt{2}\mathrm{X} + 1),$$
$$\begin{aligned}\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^2 + 2 &= (\mathrm{X}^4+2) + 2\mathrm{X}^2 = (\mathrm{X}^2+\sqrt{2})^2 + (2-2\sqrt{2})\mathrm{X}^2 \\ &= (\mathrm{X}^2 - \sqrt{2-2\sqrt{2}}\mathrm{X} + \sqrt{2})(\mathrm{X}^2 + \sqrt{2-2\sqrt{2}}\mathrm{X} + \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Racines de l'unité

Certains polynômes font intervenir les racines n-ièmes de l'unité et se factorisent facilement.

> *Exemple 2.15* Le polynôme $P = 1+X+X^2$ a pour racines j et j^2 : $P = (X-j)(X-j^2)$. Il faut le reconnaître et le factoriser sans calculer son discriminant !

> *Exemple 2.16* Le polynôme $Q = X^2 - X + 1$ a pour racines $-j$ et $-j^2$ puisque $Q(-X) = P(X)$.

Plus généralement, considérons le polynôme $P = X^n - 1$. Ses racines complexes sont les n racines n-ièmes de l'unité : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a l'identité remarquable $X^n - 1 = (X-1)(1+X+X^2+\cdots+X^{n-1})$. Il en découle que le polynôme

$$Q = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$$

a pour racines les racines n-ièmes de l'unité sauf 1.
On sait également écrire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $P = X^n - 1$ en groupant les racines n-ièmes de l'unité avec leurs conjugués. On a toujours $P(1) = 0$ et selon la parité de n :

- si $n = 2p$ est pair, $P(-1) = 0$ et -1 est une racine n-ième de l'unité. Les $(2p-2)$ autres racines ne sont pas réelles et puisque le conjugué de ω_k est ω_{2p-k}, on peut écrire

$$X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X-\omega_k)\left(X-\overline{\omega_k}\right) = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right).$$

- si $n = 2p+1$ est impair, -1 n'est pas une racine de l'unité et en groupant les $2p$ racines différentes de 1, on trouve

$$X^{2p+1} - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1\right).$$

Polynômes réciproques

Cette technique est beaucoup moins importante que les précédentes. Vous pouvez la sauter en première lecture.
Un polynôme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ est dit *réciproque* lorsque ses coefficients sont symétriques : $\forall i \in [\![0, d]\!]$, $a_i = a_{d-i}$. Par exemple, le polynôme

$$P = 6X^4 + 5X^3 - 38X^2 + 5X + 6$$

est réciproque ($a_4 = a_0$, $a_3 = a_1$, $a_2 = a_2$).

- Une remarque importante : un polynôme est réciproque si et seulement si

$$\forall x \neq 0, \quad P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^d}.$$

  Sur notre exemple,

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x^4} + \frac{5}{x^3} - \frac{38}{x^2} + \frac{5}{x} + 6 = \frac{6 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6}{x^4} = \frac{P(x)}{x^4}.$$

  On en déduit que si $x \neq 0$ est une racine de P, alors $1/x$ est également une racine de P. Il suffit donc de trouver deux racines de P pour les connaître toutes.

- Voyons une technique pour calculer les racines de P qui réduit le problème à chercher les racines d'un polynôme de degré $d/2$ lorsque d est pair. Nous allons illustrer la technique sur notre exemple. Une fois l'idée comprise, elle se généralise sans problème à tous les polynômes à coefficients symétriques. Soit $x \neq 0$ une racine de P, en divisant par x^2, on obtient

$$0 = 6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38.$$

  Posons $y = x + \frac{1}{x}$, calculons

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \text{ d'où } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

  et y doit donc être racine d'un polynôme de degré 2 :

$$0 = 6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 6y^2 + 5y - 50 = 0.$$

On cherche les racines de ce trinôme. On trouve $y = 5/2$ ou $y = -10/3$ et il suffit ensuite de résoudre deux équations du second degré en x :

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}, \\ x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{10}{2}, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1 = 0, \\ x^2 + \dfrac{10}{3}x + 1 = 0. \end{cases}$$

On trouve finalement $x \in \{2, 1/2, -3, -1/3\}$, d'où la factorisation de notre polynôme, $P = (X-2)(X-1/2)(X+3)(X+3)(X+1/3)$.

Lorsque le degré d est impair, il est facile de voir que $P(-1) = 0$ et, en factorisant $(X+1)$ dans P, on se ramène à un polynôme de degré $(d-1)$ qui est encore réciproque. En effet, $P(X) = (X+1)Q(X)$,

$$\frac{(X+1)Q(X)}{X^d} = \frac{P(X)}{X^d} = P(1/X) = (1/X+1)Q(1/X) = \frac{X+1}{X}Q(1/X),$$

d'où l'on tire $Q(1/X) = \dfrac{Q(X)}{X^{d-1}}$ et on en déduit que Q est réciproque.

Exercice 2.4

Factoriser le polynôme $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$.

Solution : *On factorise* $(X+1)$, $P = (X+1)(X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1)$ *et on se ramène à factoriser le polynôme réciproque* $Q = X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1$. *Soit* $x \in \mathbb{C}$ *une racine de* Q, *en divisant par* x^2, *on obtient*

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

et en posant $y = x + 1/x$, y *vérifie l'équation du second degré* $y^2 + 2y - 3 = 0$, *d'où* $y = 1$ *ou* $y = -3$. *On résout alors* $x + 1/x = 1$, *soit* $x^2 - x + 1 = 0$ *d'où* $x_1 = -j$ *et* $x_2 = -j^2$, *puis* $x + 1/x = -3$ *et on trouve* $x_3 = (-3+\sqrt{5})/2$ *et* $x_4 = (-3-\sqrt{5})/2$ *(on vérifie à l'aide des quantités conjuguées que* $1/x_3 = x_4$*). Finalement,*

$$P = (X+1)(X+j)(X+j^2)\left(X + \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

B.4.5 Relations entre coefficients et racines

Le but de ce paragraphe est de présenter de façon plus élémentaire, avec des exemples, les relations entre coefficients et racines d'un polynôme et de montrer des applications en calcul algébrique.

Commençons par l'exemple élémentaire d'un trinôme ayant pour racines (complexes) α et β. Il peut s'écrire sous forme développée et sous forme factorisée :

$$P = a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

$$P = a_2(X-\alpha)(X-\beta) = a_2\left[X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta\right].$$

En identifiant les coefficients, on trouve les relations coefficients racines bien connues :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha + \beta & = -\dfrac{a_1}{a_2} \\ \sigma_2 = \alpha\beta & = \dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}.$$

Pour un polynôme de degré 3, ayant trois racines complexes (pas nécessairement distinctes) α, β, γ, le même calcul donne :

$$P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

et

$$\begin{aligned} P &= a_3(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \\ &= a_3\left[X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma\right], \end{aligned}$$

d'où les relations entre coefficients et racines :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha+\beta+\gamma & = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ \sigma_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma & = \dfrac{a_1}{a_3} \\ \sigma_3 = \alpha\beta\gamma & = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}.$$

Un polynôme de degré n

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

s'écrit sous forme factorisée dans $\mathbb{C}$

$$P = a_n (X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_n)$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont ses racines (pas nécessairement distinctes). En développant cette forme factorisée et en identifiant les coefficients, on trouve les relations coefficients racines générales :

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + \dots + x_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sigma_2 = x_1 x_2 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_n & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \quad\vdots & \vdots \\ \sigma_n = x_1 \dots x_n & = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Ces relations sont importantes car on a vu qu'on ne savait pas exprimer en général les racines d'un polynôme de degré $\geqslant 5$ à l'aide des coefficients. Par contre, certaines expressions faisant intervenir les racines du polynôme peuvent s'exprimer à l'aide des coefficients. Par exemple, la somme ou le produit des racines et plus généralement tous les σ_i s'expriment à l'aide des coefficients. Il est bon de connaître le résultat suivant (hors programme).
Si l'on prend l'expression des σ_i, par exemple lorsque $n = 3$, $\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$, on s'aperçoit que cette expression est invariante par permutation des racines (on peut par exemple échanger les indices 1 et 2, on retrouve la même expression). L'expression

$$N_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

et, plus généralement, les sommes de Newton

$$N_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$$

sont invariantes par permutation des racines. L'expression

$$E = x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1^2$$

par contre n'est pas invariante.
Il existe un théorème d'algèbre qui dit que toute expression polynomiale en $(x_1, \dots, x_n)$ (c'est-à-dire une somme-produit des x_i) invariante par permutation des racines peut s'exprimer comme un polynôme en $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.
Prenons par exemple la somme de Newton N_2 et exprimons-la explicitement à l'aide de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Calculons

$$\sigma_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

On trouve donc $N_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Calculons ensuite

$$\begin{aligned} \sigma_1 N_2 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= N_3 - x_1 x_2 (x_1 + x_2) - x_1 x_3 (x_1 + x_3) - x_2 x_3 (x_2 + x_3) \\ &= N_3 - x_1 x_2 (x_1 + x_2 + x_3) - x_1 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) - x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) + 3 x_1 x_2 x_3 \\ &= N_3 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$N_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Exercice 2.5 ♡♡

Soit $P(X) = X^3 + X - 1 \in \mathbb{C}[X]$. *On note* x_1, x_2, x_3 *ses trois racines complexes.*

a. Vérifier (sans chercher à les calculer) que les trois racines sont distinctes.

b. *Effectuer la division euclidienne de* X^5 *par* P.

c. *En déduire la valeur de la somme*

$$N_5 = \sum_{k=1}^{3} x_k^5.$$

Solution :

a. *Par l'absurde, si x est une racine double de* P*, alors* $P(x) = P'(x) = 0$*. Mais* $P'(x) = 0 \implies 3x^2+1 = 0 \implies x = \pm\frac{i}{\sqrt{3}}$*, qui ne sont pas des racines de* P*. Donc toutes les racines complexes de* P *sont simples.*

b. *On trouve* $X^5 = (X^2-1)P(X) + X^2 + X - 1$.

c. *Si* x_k *est une racine de* P*, alors* $x_k^5 = (x_k^2-1)P(x_k) + x_k^2 + x_k - 1 = x_k^2 + x_k - 1$*. On peut alors exprimer la somme cherchée en fonction des fonctions symétriques élémentaires des racines de* P *:*

$$N_5 = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 + \sigma_1 - 3 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1 - 3 = -2-3 = -5.$$

Exercice 2.6 ♡♡

Soient trois complexes $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ *de module* 1 *vérifiant* $a+b+c = 1$*. Montrer que l'un de ces trois complexes vaut* 1.

Solution : *Comme* $|a| = 1$, $\frac{1}{a} = \overline{a}$ *et* $\overline{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ *d'où* $\sigma_1 = 1$ *et* $\sigma_2 = ab+ac+bc = abc = \alpha$*. Donc* (a,b,c) *sont les racines du polynôme*

$$P = X^3 - X^2 + \alpha X - \alpha.$$

Puisque $P(1) = 0$*, l'une des racines vaut* 1.

Exercice 2.7

Montrer qu'il n'existe pas de réels (u,v,w) *vérifiant :*

$$u+v+w = 3 \quad \text{et} \quad uv+vw+wu = 6.$$

Solution : u,v,w *seraient racines du polynôme* $P(X) = X^3 - 3X^2 + 6X + c$ *avec* $c = uvw \in \mathbb{R}$*. Mais d'après le théorème de Rolle,* P' *posséderait alors deux racines réelles distinctes, ce qui est faux.*

B.5 Calculs en algèbre linéaire

B.5.1 Symbole de Kronecker

Dans un corps $\mathbb{K}$, pour deux indices $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on définit le symbole de Kronecker :

♡ **2.17**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}} & \text{si } i = j \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Il apparaît souvent dans les calculs matriciels. La principale utilisation de ce symbole consiste à simplifier les sommes. Dans une somme $S = \sum_{i\in I} \delta_{ip} a_i$, tous les termes de la somme sont nuls, sauf celui correspondant à l'indice $i = p$: $S = a_p$.

Exemple 2.17

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{i1} a_{ii} = a_{11},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

B.5.2 Utilisation des matrices E_{pq} en calcul matriciel

Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques utilisations pratiques des matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

DÉFINITION 2.1 ♡♡ **Matrices** E_{pq}
Pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, on définit la matrice

$$E_{pq} = \left(\delta_{ip}\delta_{iq}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

Les coefficients de cette matrice sont tous nuls, sauf le coefficient à la ligne p et à la colonne q qui vaut $1_{\mathbb{K}}$.

Dans le chapitre 25, on montre que la famille constituée de ces n^2 matrices $(E_{pq})_{1\leqslant p,q\leqslant n}$ forme une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose en une combinaison linéaire de ces matrices :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Le produit de deux matrices de la base canonique est simple à retenir :

♡ **2.18**
$$E_{pq} \times E_{kl} = \delta_{qk}E_{pl}$$

Ces matrices fournissent des exemples simples en algèbre linéaire. Par exemple, si $p \neq q$, $E_{pq}^2 = E_{pq}E_{pq} = 0$: la matrice E_{pq} est nilpotente d'indice 2. Pour $n \geqslant 2$, l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif : $E_{12}E_{21} = E_{11}$ alors que $E_{21}E_{12} = E_{22}$ ...

Exemple 2.18 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculer $\operatorname{Tr}(AE_{pq})$. Décomposons la matrice A sur la base canonique :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

En utilisant la formule du produit $E_{ij}E_{pq}$, la linéarité de la trace et la trace d'une matrice de la base canonique : $\operatorname{Tr}(E_{iq}) = \delta_{iq}$,

$$\operatorname{Tr}(AE_{pq}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\operatorname{Tr}(E_{ij}E_{pq}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jp}\operatorname{Tr}(E_{iq}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jp}\delta_{iq} = a_{qp}.$$

Exemple 2.19 Déterminer les formes linéaires $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Soit φ une telle forme linéaire. Si l'on considère deux matrices quelconques A et B, on a $2n^2$ coefficients arbitraires et le calcul est pénible. Remarquons que si l'on connaît $\varphi(E_{ij})$ pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, φ étant linéaire, on connaîtra $\varphi(A)$ pour toute matrice A : il suffit de décomposer A sur la base canonique. Utilisons cette idée :
Puisque φ vérifie la propriété pour deux matrices quelconques, elle la vérifie en particulier pour deux matrices de la base canonique E_{pq} et E_{kl}, $\varphi(E_{pq}E_{kl}) = \varphi(E_{kl}E_{pq})$ et on doit donc avoir :

$$\forall \left(p,q,k,l\right) \in [\![1,n]\!]^4, \quad \delta_{qk}\varphi(E_{pl}) = \delta_{lp}\varphi(E_{kq})$$

Soient $\left(i,j\right) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$.

– En prenant $p = i$, $l = j$, $q = k = i$, on trouve que $\varphi(E_{ij}) = \delta_{ji}\varphi(E_{ii}) = 0$.
– En prenant $p = l = i$ et $q = k = j$, on trouve que $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$, c'est-à-dire que φ prend la même valeur sur toutes les matrices E_{ii}.

En notant $\alpha = \varphi(E_{11}) = \cdots = \varphi(E_{nn})$ cette valeur commune, on a donc $\varphi(E_{ij}) = \alpha\delta_{ij}$. Pour une matrice A quelconque,

$$\varphi(A) = \varphi(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\alpha\delta_{ij} = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha\operatorname{Tr}(A)$$

Nous avons montré qu'il existait $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \alpha\operatorname{Tr}$. Réciproquement, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, en posant $\varphi = \alpha\operatorname{Tr}$, φ vérifie la propriété.

Exercice 2.8 ♡
Soit deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On suppose que*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \quad \operatorname{Tr}(AX) = \operatorname{Tr}(BX).$$

Montrer que $A = B$.

Solution : *Si* $A = (a_{ij})$ *et* $X = (x_{ij})$*, on calcule*

$$\operatorname{Tr}(AX) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{ki}.$$

En prenant $X = E_{pq}$, $x_{ki} = \delta_{kp}\delta_{iq}$, $\operatorname{Tr}(AX) = a_{qp}$ *et* $\forall (q,p) \in [\![1,n]\!]$, $a_{qp} = b_{qp}$ *d'où* $A = B$.

Exercice 2.9 ♡♡

Soit une sous-algèbre $\mathscr{A}$ *de l'algèbre* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*. On suppose que*

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\quad M^2 \in \mathscr{A} \implies M \in \mathscr{A}$$

Montrer que $\mathscr{A} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution : *Supposons que* $\mathscr{A}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *vérifiant* $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ M^2 \in \mathscr{A} \implies M \in \mathscr{A}$*. Il suffit de montrer que toute matrice* E_{ij} *de la base canonique appartient à* $\mathscr{A}$*. Comme* $\mathscr{A}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*,* $0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})} \in \mathscr{A}$*. Or si* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{ij}^2 = E_{ij}E_{ij} = \delta_{ij}E_{ij}$*. Par conséquent, si* $i \neq j$, $E_{ij}^2 \in \mathscr{A}$ *et* $E_{ij} \in \mathscr{A}$*. Soit maintenant* $i \in [\![1,n]\!]$*. Soit* $j \neq i$*. On sait que* $E_{ij}, E_{ji} \in \mathscr{A}$ *et, puisque* $\mathscr{A}$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*, le produit* $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$ *est encore dans* $\mathscr{A}$*. Comme* $\mathscr{A}$ *contient toutes les matrices de la base canonique et que c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*,* $\mathscr{A} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$*.*

Regardons ce que donne la multiplication à gauche et à droite d'une matrice par une matrice de la base canonique :

À faire : Dessins

1. Lorsqu'on pose la multiplication $E_{pq}A$, on remarque que toutes les lignes du produit sont nulles sauf la ligne p où l'on retrouve les coefficients de la ligne L_q de la matrice A.
2. Lorsqu'on pose la multiplication AE_{pq}, toutes les colonnes du produit sont nulles sauf la colonne q où l'on retrouve les coefficients de la colonne C_p de la matrice A.

Un premier exemple illustre l'utilisation de ces matrices :

Exemple 2.20 Déterminer les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit A une telle matrice. Puisqu'elle commute avec toutes les matrices, *elle commute en particulier avec les matrices de la base canonique :*

$$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\quad E_{pq}A = AE_{pq}.$$

Mais on a calculé $E_{pq}A$ et AE_{pq} ci-dessus et on en déduit que $\forall j \neq q$, $a_{qj} = 0$ et, en examinant le coefficient à la ligne p et à la colonne q de ces deux produits, on obtient : $\forall p,q \in [\![1,n]\!]$, $a_{qq} = a_{pp}$. En notant $\alpha = a_{11} = \cdots = a_{nn}$, on a nécessairement $A = \alpha I_n$: A est une matrice scalaire. Réciproquement, toute matrice scalaire commute avec toutes les matrices.

Exercice 2.10 ♡

Déterminer les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *qui commutent avec toutes les matrices symétriques.*

Solution : *A doit commuter avec toutes les matrices symétriques* E_{pp} *et on trouve que A doit nécessairement être diagonale. Ensuite, A doit commuter avec toutes les matrices* $S_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ *et, en effectuant le calcul, on trouve que A doit être une matrice scalaire.*

B.5.3 Calcul de déterminants

Faire apparaître des zéros

C'est, peu ou prou, la méthode de Gauss. La méthode est plus souple : on peut travailler sur les lignes et sur les colonnes.

Exercice 2.11

Calculer

$$D = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & -10 & -7 \\ -2 & -7 & 4 & -9 \\ -5 & -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solution : *On est en présence d'une matrice à coefficients entiers. On utilise la méthode du pivot de Gauss. On utilise des petits pivots (en valeur absolue) pour éviter les quotients.*

$$\begin{vmatrix} -8 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & -10 & -7 \\ -2 & -7 & 4 & -9 \\ -5 & -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 7L_4 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 9L_4 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 & 0 \\ -36 & -20 & -24 & 0 \\ -47 & -43 & -14 & 0 \\ -5 & -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

On fait apparaître un pivot égal à 1 : $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3$.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 \\ -36 & -20 & -24 \\ -47 & -43 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -36 & 4 & -24 \\ -47 & -29 & -14 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 29L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -44 & 0 & -52 \\ 7 & 0 & 175 \end{vmatrix}.$$

D'où $D = -(-44 \times 189 - (-52) \times 11) = 7744$.

Factorisation

C'est l'hygiène du calcul de déterminants. Repérer un facteur commun sur une ligne ou une colonne et mettre en facteur simplifie le travail. En particulier lorsque la somme des lignes est constante, un bon réflexe est d'additionner toutes les lignes dans première, de mettre en facteur (on n'a plus que des 1 sur la première ligne) puis on peut soustraire la première colonne de toutes les autres...

Exercice 2.12

Soit a, b, c, x *quatre complexes. Factoriser*

$$D = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Solution : *En additionnant toutes les lignes dans la première, on fait apparaître* $x + a + b + c$ *:*

$$D = \begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

La présence des 1 *sur la première ligne incite à soustraire par exemple la dernière colonne dans les autres :*

$$D = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a-b & x-b & c-b & b \\ b-a & c-a & x-a & a \\ c-x & b-x & a-x & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \times (-1) \times \begin{vmatrix} a-b & x-b & c-b \\ b-a & c-a & x-a \\ c-x & b-x & a-x \end{vmatrix}$$

On additionne la deuxième ligne dans la première :

$$D = -(x+a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & x-b+c-a & x-a+c-b \\ b-a & c-a & x-a \\ c-x & b-x & a-x \end{vmatrix} = -(x+a+b+c)(x-a-b+c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & x-a \\ c-x & b-x & a-x \end{vmatrix}$$

On soustrait la troisième colonne dans la deuxième, on développe ensuite suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} D &= -(x+a+b+c)(x-a-b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-a & c-x & x-a \\ c-x & b-a & a-x \end{vmatrix} \\ &= -(x+a+b+c)(x-a-b+c) \begin{vmatrix} b-a & c-x \\ c-x & b-a \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-a-b+c)\left[(c-x)^2 - (b-a)^2\right] \\ &= (x+a+b+c)(x-a-b+c)(x-c-b+a)(x-c+b-a). \end{aligned}$$

Exercice 2.13

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *trois réels. Calculer*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \tan\frac{\alpha_1}{2} \\ 1 & \cos\alpha_2 & \tan\frac{\alpha_2}{2} \\ 1 & \cos\alpha_3 & \tan\frac{\alpha_3}{2} \end{vmatrix}.$$

Démontrer que si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ *alors* $D = 0$.

Solution : *Soit* $t_k = \tan\frac{\alpha_k}{2}$, *on a*

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2} & t_1 \\ 1 & \frac{1-t_2^2}{1+t_2^2} & t_2 \\ 1 & \frac{1-t_3^2}{1+t_3^2} & t_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1+t_1^2 & 1-t_1^2 & t_1(1+t_1^2) \\ 1+t_2^2 & 1-t_2^2 & t_2(1+t_2^2) \\ 1+t_3^2 & 1-t_3^2 & t_3(1+t_3^2) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1+t_1^2 & 2 & t_1+t_1^3 \\ 1+t_2^2 & 2 & t_2+t_2^3 \\ 1+t_3^2 & 2 & t_3+t_3^3 \end{vmatrix}$$

en soustrayant la première colonne dans la deuxième. Maintenant on soustrait la première ligne dans les deux autres :

$$\mathrm{D} = \frac{1}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1+t_1^2 & 2 & t_1+t_1^3 \\ t_2^2-t_1^2 & 0 & t_2-t_1+t_2^3-t_1^3 \\ t_3^2-t_1^2 & 0 & t_3-t_1+t_3^3-t_1^3 \end{vmatrix} = \frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} 1+t_1^2 & 2 & t_1+t_1^3 \\ t_2+t_1 & 0 & 1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2 \\ t_3+t_1 & 0 & 1+t_3^2+t_1^2+t_1t_3 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la deuxième colonne,

$$\mathrm{D} = -2\frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} t_2+t_1 & 1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2 \\ t_3+t_1 & 1+t_3^2+t_1^2+t_1t_3 \end{vmatrix} = -2\frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} t_2+t_1 & 1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2 \\ t_3-t_2 & t_3^2-t_2^2+t_1(t_3-t_2) \end{vmatrix}$$

$$= -2\frac{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)} \begin{vmatrix} t_2+t_1 & 1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2 \\ 1 & t_3+t_2+t_1 \end{vmatrix} = 2\frac{(t_2-t_1)(t_1-t_3)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}\left[(t_2+t_1)(t_3+t_2+t_1)-(1+t_2^2+t_1^2+t_1t_2)\right]$$

$$= 2\frac{(t_2-t_1)(t_1-t_3)(t_3-t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1-1)$$

Comme $\tan(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3) = \dfrac{\tan\vartheta_1+\tan\vartheta_2+\tan\vartheta_3}{1-\tan\vartheta_1\tan\vartheta_2-\tan\vartheta_2\tan\vartheta_3-\tan\vartheta_3\ tan\vartheta_1}$, *en prenant* $\vartheta_k = \frac{\alpha_k}{2}$, *comme* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \pi$, *on en déduit que le dénominateur* $1-\tan\vartheta_1\tan\vartheta_2-\tan\vartheta_2\tan\vartheta_3-\tan\vartheta_3\tan\vartheta_1$ *s'annule, autrement dit* $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1-1=0$ *et par suite* $\mathrm{D}=0$.
Cela signifie que les points de paramètres α_k *avec* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ *sont alignés sur la courbe* $x=\cos t; y=\tan\frac{t}{2}$.

Techniques polynomiales

Lorsque les coefficients sont des polynômes, le déterminant est lui-même un polynôme.

Exercice 2.14 ♡♡

Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}^n$, *soit* $x \in \mathbb{C}$.
Calculer

$$\mathrm{D}(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1}-x \end{vmatrix}.$$

Solution : *On développe par rapport à la dernière colonne :*

$$\mathrm{D}(x) = (-1)^{n-1} \times (-a_0) \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^n \times (-a_1) \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + (-1)^{n+k-1} \times (-a_k) \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -x & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} + \dots + (-a_{n-1} - x) \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -x \end{vmatrix}$$

En développant les déterminants par blocs (triangulaires)

$$\mathrm{D}(x) = (-1)^{n-1} \times (-a_0) \times 1 + (-1)^n \times (-a_1) \times (-x) + \dots + (-1)^{n+k-1} \times (-a_k) \times (-x)^k + \dots + (-1)^{n+n-2-1} \times (-a_{n-2}) \times (-x)^{n-2}$$
$$+ (-1)^{n+n-1-1} \times (-a_{n-1} - x) \times (-x)^{n-1}$$

Puis, en effectuant les calculs,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(x) &= (-1)^n a_0 + (-1)^n a_1 x + \dots + (-1)^n a_k x^k + \dots + (-1)^n a_{n-2} x^{n-2} + (-1)^n (a_{n-1} + x) x^{n-1} \\ &= (-1)^n \left(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n\right). \end{aligned}$$

On peut reprendre un exercice précédent en simplifiant les calculs ... à condition d'avoir le bon coup d'œil et de connaître ses déterminants de Vandermonde :

Exercice 2.15 ♡♡

Calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + t_1^2 & 1 - t_1^2 & t_1(1 + t_1^2) \\ 1 + t_2^2 & 1 - t_2^2 & t_2(1 + t_2^2) \\ 1 + t_3^2 & 1 - t_3^2 & t_3(1 + t_3^2) \end{vmatrix}.$$

Solution : *Comme précédemment,*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + t_1^2 & 2 & t_1(1 + t_1^2) \\ 1 + t_2^2 & 2 & t_2(1 + t_2^2) \\ 1 + t_3^2 & 2 & t_3(1 + t_3^2) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 + t_1^2 & 1 & t_1(1 + t_1^2) \\ 1 + t_2^2 & 1 & t_2(1 + t_2^2) \\ 1 + t_3^2 & 1 & t_3(1 + t_3^2) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} t_1^2 & 1 & t_1(1 + t_1^2) \\ t_2^2 & 1 & t_2(1 + t_2^2) \\ t_3^2 & 1 & t_3(1 + t_3^2) \end{vmatrix}.$$

En utilisant la multilinéarité du déterminant :

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} t_1^2 & 1 & t_1 \\ t_2^2 & 1 & t_2 \\ t_3^2 & 1 & t_3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} t_1^2 & 1 & t_1^3 \\ t_2^2 & 1 & t_2^3 \\ t_3^2 & 1 & t_3^3 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est le déterminant de Vandermonde $\mathrm{V}_3(t_1, t_2, t_3) = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)$ *et le second est le coefficient de* x *dans* $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \end{vmatrix} = \mathrm{V}_4(x, t_1, t_2, t_3)$.

Or $\mathrm{V}_4(x, t_1, t_2, t_3) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)\mathrm{V}_3(t_1, t_2, t_3)(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)$.
Ainsi le coefficient de x *égale* $-(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)\mathrm{V}_3(t_1, t_2, t_3)$.
Finalement, $\Delta = -2\mathrm{V}_3(t_1, t_2, t_3)(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 - 1)$.

L'avantage d'être un polynôme, c'est qu'il est déterminé par un nombre fini de valeurs.

Exercice 2.16 ♡♡

1. *Soit* a, b *deux réels distincts,* $x_1, \dots, x_n$*,* n *nombres réels.*

En ajoutant x à chacun des éléments, calculer

$$\mathrm{D}_{a,b} = \begin{vmatrix} x_1 & b & \dots & b & b \\ a & x_2 & \dots & \dots & b \\ a & a & x_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & \dots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

2. *Soit a un réel, $x_1, \dots, x_n$, n nombres réels.*
   Calculer

$$\mathrm{D}_{a} = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a & a \\ a & x_2 & \dots & \dots & a \\ a & a & x_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & x_n \end{vmatrix}.$$

Solution :

1. *Cet exercice illustre l'adage : Plus une égalité comporte de variables, plus elle est facile à démontrer !*
   Ici on cherche à calculer $\mathrm{D}_{a,b} = \mathrm{D}_{a,b}(0)$ avec

$$\mathrm{D}_{a,b}(x) = \begin{vmatrix} x_1+x & b+x & \dots & b+x & b+x \\ a+x & x_2+x & \dots & \dots & b+x \\ a+x & a+x & x_3+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & \dots & a+x & x_n+x \end{vmatrix}.$$

   $\mathrm{D}_{a,b}(x)$ est un polynôme en x.
   En retranchant la première colonne à toutes les autres puis en développant par rapport à la première colonne (ou en dérivant deux fois par rapport à x le déterminant $\mathrm{D}_{a,b}(x)$), on voit que $\mathrm{D}_{a,b}(x)$ est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire une fonction affine. $\mathrm{D}_{a,b}(x) = \alpha x + \beta$.
   Maintenant, il suffit de déterminer la valeur de $\mathrm{D}_{a,b}(x)$ en deux points distincts. Par exemple en $-a$ et $-b$ on voit alors qu'on a à calculer le déterminant d'une matrice triangulaire.

$$\mathrm{D}_{a,b}(-a) = \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_{a,b}(-b) = \prod_{k=1}^{n}(x_k - b).$$

   D'où

$$\alpha = \frac{\mathrm{D}_{a,b}(-a) - \mathrm{D}_{a,b}(-b)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left(\prod_{k=1}^{n}(x_k-a) - \prod_{k=1}^{n}(x_k-b)\right).$$

   En posant $\Pi_t = \prod_{k=1}^{n}(x_k - t)$, la valeur qui nous intéresse est $\beta = \mathrm{D}_{a,b}(0) = \Pi_a + a\dfrac{\Pi_b - \Pi_a}{b-a}$.

2. *a étant fixé, la fonction $\mathrm{D} : b \longmapsto \mathrm{D}_{a,b}$ est continue puisque c'est un polynôme en b.*
   Donc $\mathrm{D}_a = \mathrm{D}(a) = \lim_{b\to a} \mathrm{D}(b) = \Pi_a + a\Pi'_a = \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) - \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq i}} (x_k - a)$.

Un exercice déjà vu :

Exercice 2.17 ♡♡

Soit a, b, c, x quatre complexes. Factoriser

$$\mathrm{P}_{a,b,c}(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Solution : *$\mathrm{P}_{a,b,c}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4. Le coefficient de x^4 ne peut être obtenu qu'en prenant les x de la diagonale principale. Donc ce coefficient égale 1.*

En additionnant toutes les lignes dans la première, on trouve $x+a+b+c$:

$$\mathrm{P}_{a,b,c}(x)=\begin{vmatrix}x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c\\ a & x & c & b\\ b & c & x & a\\ c & b & a & x\end{vmatrix}=(x+a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\ a&x&c&b\\ b&c&x&a\\ c&b&a&x\end{vmatrix}.$$

Autrement dit, le polynôme $\mathrm{X}+a+b+c$ divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$.
Cette fois nous allons multiplier la deuxième et la quatrième ligne par -1. Nous additionnons le tout dans la première ligne et nous pouvons factoriser $x-a+b-c$. Cette fois, c'est $\mathrm{X}-a+b-c$ qui divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$.
En multipliant la deuxième et la troisième ligne par -1, on trouve $\mathrm{X}-a-b+c$ divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$ et en multipliant la troisième et la quatrième ligne par -1, on trouve que $\mathrm{X}+a-b-c$ divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$.
Lorsque les quatre nombres $a+b+c$, $-a+b-c$, $-a-b+c$, $a-b-c$ sont distincts deux à deux, alors les quatre polynômes $\mathrm{X}+a+b+c$ sont premiers entre eux, donc leur produit divise $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$. Comme $\mathrm{P}_{a,b,c}(\mathrm{X})$ et $(\mathrm{X}+a+b+c)(\mathrm{X}-a+b-c)(\mathrm{X}-a-b+c)(\mathrm{X}+a-b-c)$ sont deux polynômes de degré 4, que le deuxième divise le premier et qu'ils sont tous deux unitaires, on a

$$\forall x\in\mathbb{C},\ \mathrm{P}_{a,b,c}(x)=(x+a+b+c)(x-a+b-c)(x-a-b+c)(x+a-b-c).$$

Dans le cas où au moins deux des nombres $a+b+c$; $-a+b-c$; $-a-b+c$ et $a-b-c$ sont égaux, on remplace b par $b'=b+h$ et c par $c'=c+2h$. La fonction $h\longmapsto \mathrm{P}_{a,b',c'}(x)=(x+a+b'+c')(x-a+b'-c')(x-a-b'+c')(x+a-b'-c')$ est un polynôme en h donc une application continue, qui est nulle d'après ce qui précède pour $h>0$ assez petit pour que les $a+b'+c'$, $-a+b'-c'$, $-a-b'+c'$ et $a-b'-c'$ soient tous distincts. (Il suffit de prendre h plus petit que la moitié du plus petit des nombres strictement positifs parmi $|a\pm b|$, $|a\pm c|$ et $|b\pm c|$.) Donc en faisant tendre h vers zéro, on a bien $\mathrm{P}_{a,b,c}(x)-(x+a+b+c)(x-a+b-c)(x-a-b+c)(x+a-b-c)=0$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : Il faut parfois se torturer les méninges pour éviter des calculs pas forcément méchants. C'était surtout pour voir la méthode. Méthode qui est beaucoup plus efficace avec les polynômes à plusieurs indéterminées (qui ne sont pas au programme). En effet, plus il y a de variables...

Dérivation

Un déterminant peut être une fonction d'une (ou plusieurs) variable(s). Il faut savoir la dériver.

Exercice 2.18 ♡♡

Soit a,b,c,d quatre réels. On pose $\Delta(d)=\begin{vmatrix}\cos(a+d) & \sin(a+d) & \cos(b-c)\\ \cos(b+d) & \sin(b+d) & \cos(c-a)\\ \cos(c+d) & \sin(c+d) & \cos(a-b)\end{vmatrix}$.

1. *Calculer $\Delta(b-c-a)$.*
2. *Calculer la dérivée $\Delta'(d)$.*
3. *Conclure.*

Solution :

1. *On a $a+d=b-c$; $b+d=2b-c-a$; $c+d=b-a$. Donc*

$$\begin{aligned}\Delta(b-c-a)&=\begin{vmatrix}\cos(b-c) & \sin(b-c) & \cos(b-c)\\ \cos(2b-c-a) & \sin(2b-c-a) & \cos(c-a)\\ \cos(b-a) & \sin(b-a) & \cos(a-b)\end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix}0 & \sin(b-c) & \cos(b-c)\\ \cos(2b-c-a)-\cos(c-a) & \sin(2b-c-a) & \cos(c-a)\\ 0 & \sin(b-a) & \cos(a-b)\end{vmatrix}\\
&=-(\cos(2b-c-a)-\cos(c-a))\begin{vmatrix}\sin(b-c) & \cos(b-c)\\ \sin(b-a) & \cos(a-b)\end{vmatrix}\\
&=(\cos(c-a)-\cos(2b-c-a))(\sin(b-c)\cos(b-a)-\cos(b-c)\sin(b-a))\\
&=(\cos(c-a)-\cos(2b-c-a))\sin(b-c-(b-a))=(\cos(c-a)-\cos(2b-c-a))\sin(a-c)\\
&=\frac{1}{2}\sin(2a-2c)-\frac{1}{2}(\sin(2b-2c)+\sin(2a-2b))=\frac{1}{2}(\sin(2a-2c)+\sin(2c-2b)+\sin(2b-2a)).\end{aligned}$$

2. *En notant $\mathrm{C}_k(d)$ la k-ième colonne. On a (voir proposition 6.3 p. 232)*

$$\Delta'(d)=\left|\mathrm{C}_1'(d)\mathrm{C}_2(d)\mathrm{C}_3(d)\right|+\left|\mathrm{C}_1(d)\mathrm{C}_2'(d)\mathrm{C}_3(d)\right|+\left|\mathrm{C}_1(d)\mathrm{C}_2(d)\mathrm{C}_3'(d)\right|.$$

(On aurait bien sûr un résultat semblable avec les lignes). On a donc

$$\Delta'(d) = -\begin{vmatrix} \sin(a+d) & \sin(a+d) & \cos(b-c) \\ \sin(b+d) & \sin(b+d) & \cos(c-a) \\ \sin(c+d) & \sin(c+d) & \cos(a-b) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos(a+d) & \cos(a+d) & \cos(b-c) \\ \cos(b+d) & \cos(b+d) & \cos(c-a) \\ \cos(c+d) & \cos(c+d) & \cos(a-b) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos(a+d) & \sin(a+d) & 0 \\ \cos(b+d) & \sin(b+d) & 0 \\ \cos(c+d) & \sin(c+d) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0+0+0$$

3. *Conclusion :* $\Delta(d)$ *ne dépend pas de* d *et* $\forall d \in \mathbb{R}, \Delta(d) = \frac{1}{2}(\sin(2a-2c)+\sin(2c-2b)+\sin(2b-2a))$.
   Plus il y a de variables...

Matrices

Les déterminants sont utiles pour les matrices, pourquoi pas l'inverse ?

Exercice 2.19

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. *Calculer*

$$\begin{vmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix}.$$

Solution : *On a*

$$\begin{pmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Á l'aide d'un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = abcd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = abcd(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a).$$

En additionnant dans la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Donc

$$\begin{vmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix} = -3abcd(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a).$$

Un autre exemple, déjà vu :

Exercice 2.20

Soit a, b, c, x *quatre complexes. Factoriser*

$$P_{a,b,c}(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Solution : *Après une bonne contemplation, il saute aux yeux que :*

$$\begin{pmatrix} x & a & b & c\\ a & x & c & b\\ b & c & x & a\\ c & b & a & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+c+b+a & -x+c+b-a & x-c+b-a & -x-c+b+a\\ x+c+b+a & -x+c+b-a & -x+c-b+a & x+c-b-a\\ x+c+b+a & x-c-b+a & x-c+b-a & x+c-b-a\\ x+c+b+a & x-c-b+a & -x+c-b+a & -x-c+b+a\end{pmatrix}$$

d'où l'égalité :

$$\mathrm{P}_{a,b,c}(x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

et il suffit de vérifier que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{vmatrix}$ *est non nul. Or ses vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux.*

Enfin un exemple qui ressemble plus à une devinette :

Exercice 2.21

Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1-ps & pr-q & qs-r\\ ns-m & 1-nr & mr-s\\ mp-n & nq-p & 1-mq\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & n\\ q & 1 & p\\ r & s & 1\end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1+m^2+n^2 & m+q+np & n+r+ms\\ m+q+np & 1+p^2+q^2 & p+s+qr\\ n+r+ms & p+s+qr & 1+r^2+s^2\end{vmatrix}$$

Solution : *Soit* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & m & n\\ q & 1 & p\\ r & s & 1\end{pmatrix}$. *La deuxième égalité vient de*

$$\mathrm{A}^t\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & m & n\\ q & 1 & p\\ r & s & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & q & r\\ m & 1 & s\\ n & p & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+m^2+n^2 & m+q+np & n+r+ms\\ m+q+np & 1+p^2+q^2 & p+s+qr\\ n+r+ms & p+s+qr & 1+r^2+s^2\end{pmatrix}.$$

Pour la première, on commence par calculer les cofacteurs :

$$\det \mathrm{A}\mathrm{I}_3 = \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1-ps & ns-m & mp-n\\ pr-q & 1-nr & 1-mq\\ qs-r & nq-p & mr-s\end{pmatrix}.$$

En calculant le déterminant des deux membres :

$$(\det \mathrm{A})^3 = \det \mathrm{A}\begin{vmatrix} 1-ps & ns-m & mp-n\\ pr-q & 1-nr & 1-mq\\ qs-r & nq-p & mr-s\end{vmatrix} = \det \mathrm{A}\begin{vmatrix} 1-ps & pr-q & qs-r\\ ns-m & 1-nr & mr-s\\ mp-n & nq-p & 1-mq\end{vmatrix}$$

puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée. Lorsque A *est inversible, on obtient la première égalité en simplifiant par* $\det \mathrm{A}$. *Lorsque* A *n'est pas inversible, la matrice transposée des cofacteurs n'est pas inversible non plus. En effet, lorsqu'on la multiplie par* A *on trouve la matrice nulle. Donc les deux membres de l'égalité sont nuls.*

Polynôme caractéristique

Cette méthode sera utilisée l'an prochain.

Annexe C

Techniques d' analyse

Le Calcul infinitésimal, [...], est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER.
Jean Dieudonné, Calcul Infinitésimal, (1968).

C.1 Majorer-minorer

En algèbre, on s'intéresse particulièrement à des égalités alors que l'analyse est l'art des approximations où les majorations-minorations jouent un rôle essentiel. Dans ce paragraphe, nous allons voir un bon usage des inégalités et étudier quelques erreurs fréquentes qu'il est bon d'analyser pour ne jamais les commettre.

C.1.1 Quelques inégalités classiques

Majorations trigonométriques

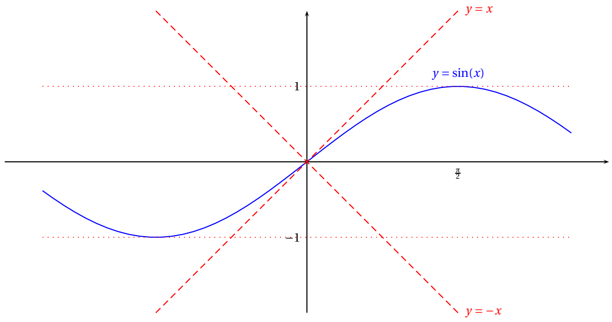
On a les majorations fondamentales en trigonométrie :

♡ **3.1**
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant 1, \quad |\cos(x)| \leqslant 1.$$

Préférer une majoration en valeur absolue à des inégalités lorsque c'est possible.

♡ **3.2**
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$

Cette dernière majoration est surtout intéressante lorsque x est proche de 0.



Exemple 3.1 En utilisant la trigonométrie, on peut majorer une différence de sinus ou de cosinus :

$$|\sin x - \sin y| = \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqslant |x-y|$$

$$|\cos x - \cos y| = \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqslant |x-y|.$$

(On aurait pu également utiliser que les fonctions sin et cos sont 1-lipschitzienne puisque $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\cos'(x)| = |\sin(x)| \leqslant 1$).

Majoration de produits

♡ **3.3**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$$

ce qui permet de majorer ab et $-ab$ par une somme de deux carrés. La démonstration s'obtient en développant $(a+b)^2 \geqslant 0$ et $(a-b)^2 \geqslant 0$.
Pour $2n$ réels $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$,

♡ **3.4**

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Étude de fonctions

Il est souvent utile d'étudier une fonction pour montrer une égalité.

Exemple 3.2 Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$. Définissons les deux fonctions f et g sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sin x - x$ et $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$. Elles sont dérivables et $f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$ ce qui montre que f est décroissante. Donc $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$ d'où la majoration de sin. Ensuite, $g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $g''(x) = -\sin x + x \geqslant 0$ donc g' est croissante, et comme $g'(0) = 0$, g' est positive donc g est croissante et comme $g(0) = 0$, $g(x) \geqslant 0$ d'où la minoration.

	$0 \qquad +\infty$
f'	$-$
g'	$+$
f	$0 \searrow$
g	$0 \nearrow$

Exercice 3.1 ♡
Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Solution : *En posant* $f(x) = \ln(1+x) - x$ *et* $g(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$, $f'(x) = -\frac{x}{x+1} \leqslant 0$ *pour* $x \geqslant 0$ *et* $g'(x) = \frac{x^2}{x+1} \geqslant 0$. *Dresser le tableau de variations de* f *et* g *pour conclure.*

Procéder par inégalités équivalentes

On est souvent amené à se demander si une inégalité est vraie. On peut procéder par équivalences (c'est l'un des rares cas nous vous le conseillons !) pour aboutir à une inégalité triviale.

Exemple 3.3 On veut comparer les deux réels $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Procédons par équivalence en utilisant que $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ sont des fonctions croissantes :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2-\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{3-\sqrt{3}} \\
\iff & 2-\sqrt{2} \leqslant 3-\sqrt{3} \\
\iff & \sqrt{3}-\sqrt{2} \leqslant 1 \\
\iff & 3-2\sqrt{6}+2 \leqslant 1 \\
\iff & \sqrt{6} \geqslant 2 \\
\iff & 6 \geqslant 4
\end{aligned}$$

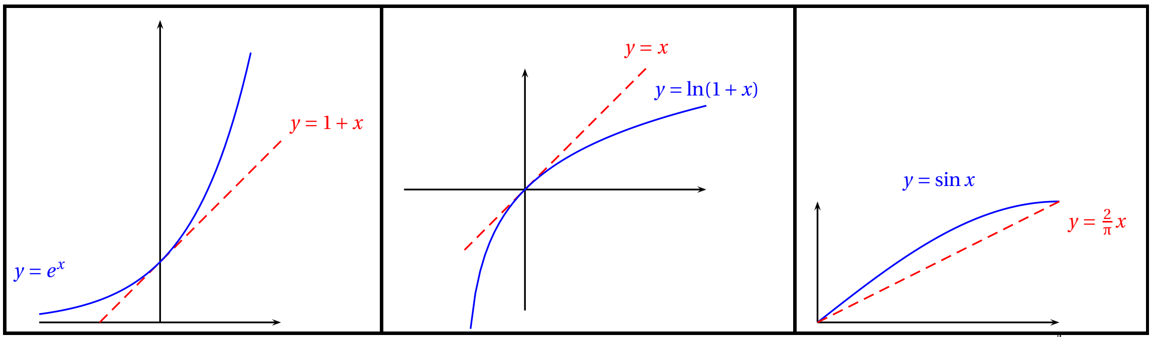
La dernière inégalité étant vraie, on en déduit que $\sqrt{2-\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{3-\sqrt{3}}$.

Utilisation de la convexité

♡ **3.5** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{e^x \geqslant 1 + x}$.

♡ **3.6** $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \boxed{\ln(1+x) \leqslant x}$.

On utilise la convexité (concavité) de l'exponentielle (du logarithme). La courbe est située au dessus (en dessous) de chacune de ses tangentes.



convexité de exp	concavité de ln	concavité de sin

La fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$, donc son graphe se situe au dessus de la corde. On obtient l'inégalité :

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad \sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ étant convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $\alpha \geqslant 1$, on peut utiliser l'inégalité de convexité $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$ pour obtenir l'inégalité

$$(a+b)^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha).$$

La fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ étant convexe sur $\mathbb{R}$. En effet f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^{-x}+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit, d'après la proposition 12.23 p. 482 en prenant les λ_k égaux à $\frac{1}{n}$ que pour tous $(x_1, \ldots, x_n)$ réels,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{x_k}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + e^{x_k}\right).$$

En prenant pour les x_k les $\ln(y_k)$, on obtient pour tous $(y_1, \ldots, y_n)$ réels positifs,

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(y_k)\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + y_k\right),$$

soit

$$\ln\left(1 + \left(\prod_{k=1}^n y_k\right)\right) \leqslant \ln\left(\left(\prod_{k=1}^n 1 + y_k\right)^{\frac{1}{n}}\right),$$

soit, en prenant l'exponentielle des deux membres :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1 + y_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

On applique cette dernière inégalité en prenant pour y_k le quotient de deux nombres positifs b_k et a_k, ce qui donne, pour tous $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ réels positifs,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1 + \frac{b_k}{a_k}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Enfin, en multipliant les deux membres par $\left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}}$, on obtient :

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Cette dernière inégalité - qui signifie que la somme des moyennes géométriques est inférieure à la moyenne géométrique de la somme - reste vraie lorsque l'un (ou plusieurs) des a_k ou b_k est nul, par passage à la limite.
Voir aussi les propositions 12.27 et 12.28 p. 484.

C.1.2 Techniques de majoration

En analyse, on utilise par défaut des *inégalités larges* ($\leqslant, \geqslant$). Une inégalité stricte peut être parfois nécessaire, mais il faut toujours la justifier. Par exemple,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$$

est une inégalité classique. Par contre la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| < |x|$$

est fausse : pour $x = 0$ l'inégalité stricte n'est pas vérifiée.

Majorer des produits-quotients

Attention aux multiplications d'inégalités :

$$a \leqslant b \implies \begin{cases} ac \leqslant bc \text{ si } c \geqslant 0 \\ ac \geqslant bc \text{ si } c < 0 \end{cases}.$$

En pratique, on utilise souvent les valeurs absolues et les termes à majorer sont positifs. Pour majorer un produit $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ de *termes positifs*, il suffit de majorer chaque terme du produit.

> *Exemple 3.4* $u_n = (n^2 + 2n + 1)\ln(n^2 + 1)$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(n^2 + 1) \leqslant n^2$ et que pour $n \geqslant 1$, $2n \leqslant 2n^2$ et $1 \leqslant n^2$, on obtient la majoration grossière :
>
> $$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant (4n^2) \times n^2 = 4n^4.$$

Pour majorer un quotient *de termes positifs*, majorer le numérateur et minorer le dénominateur.

> *Exemple 3.5* Encadrer pour $x \in [2,3]$ $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x + 1}$. Puisque $2 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant x - 1 \leqslant 2$ et $e^2 + 1 \leqslant e^x + 1 \leqslant e^3 + 1$ d'où $\dfrac{1}{e^3+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{e^2+1}$.

> *Exemple 3.6*
>
> $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2 + nk}}{n^3 + k^2 - k}$$
>
> Puisque lorsque $1 \leqslant k \leqslant n$, $k^2 + nk \leqslant 2n^2$ et $n^3 + k(k-1) \geqslant n^3$, on majore
>
> $$0 \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{\sqrt{2n^2}}{n^3} = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 3.2 ♡

Majorer (u_n) par une suite de la forme $\mathrm{C}n^\alpha$ à partir d'un certain rang :

a. $u_n = \dfrac{n^3 + n^2}{n^2 + 1}$

b. $u_n = \dfrac{n+1}{3^{n^2 - n}}$

c. $u_n = \sqrt{n^3 + n^2 - n + 1} - \sqrt{n^3 + 3n}$

Solution :

a. *Pour $n \geqslant 1$, $n^3 + n^2 \leqslant 2n^3$ et $n^2 + 1 \geqslant n^2$ d'où $u_n \leqslant 2n$.*

b. *Pour $n \geqslant 1$, $3^{n^2-n} = (1+2)^{n^2-n} \geqslant 1 + 2(n^2 - n)$ en utilisant la formule du binôme (c'est un cas particulier de l'inégalité de Bernoulli, voir l'exercice 8.30 page 329) et en minorant les termes positifs restants par 0. Par conséquent,*

$$u_n \leqslant \frac{2n}{2n^2 - 2n + 1} \leqslant \frac{2n}{2(n^2 - n)} \leqslant \frac{n}{n^2/2} \leqslant \frac{2}{n}$$

puisque $n^2 - n \geqslant n^2/2$ pour $n \geqslant 2$.

c. *Avec les quantités conjuguées,*

$$u_n = \frac{n^2 - 4n + 1}{\sqrt{n^3 + n^2 + n + 1} + \sqrt{n^3 + n}} \leqslant \frac{2n^2}{2n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

puisque pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant n^2$.

Bonne utilisation des valeurs absolues

Une valeur absolue, un module (ou une norme) permettent de mesurer des *distances* : $|a-b|$ mesure l'écart entre les deux réels (complexes) a et b. Ce sont des outils indispensables en analyse. Par exemple, pour montrer qu'une suite converge vers une limite l, il suffit de majorer la quantité $\varepsilon_n = |u_n - l|$ par une suite qui converge vers 0. L'année prochaine, vous utiliserez des *normes* qui se manipulent comme la valeur absolue et le module. Autant prendre maintenant de bonnes habitudes et utiliser la valeur absolue aussi souvent que possible.
Les propriétés importantes sur les modules-valeurs absolues sont

1. L'inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
2. La minoration de l'inégalité triangulaire : $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|$ qui permet au choix deux minorations d'un module :

$$\begin{cases} |a|-|b| \\ |b|-|a| \end{cases} \leqslant |a+b|.$$

3. Le module d'un produit : $|a \times b| = |a| \times |b|$.

On a par exemple en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|.$$

Exemple 3.7 On définit $f(x) = \dfrac{\sin x - 2\cos x}{e^{\sin x}}$. Majorer $|f(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$|f(x)| \leqslant \frac{|\sin x| + 2|\cos x|}{e^{\sin x}} \leqslant \frac{3}{e^{-1}} = 3e.$$

On a utilisé l'inégalité triangulaire $|\sin x + 2\cos x| \leqslant |\sin x| + 2|\cos x|$, que $|\sin x| \leqslant 1$, que $e^{\sin x}$ était positive pour enlever la valeur absolue, puis que $\sin x \geqslant -1$ pour minorer le dénominateur.

Exemple 3.8 Pour $x \neq 0$, on définit $f(x) = \dfrac{|1-3x^2|-x}{x}$ Minorer $|f(x)|$ par une fonction de type $\mathrm{C}x^\alpha$ pour $|x|$ grand.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{\big||1-3x^2|-x\big|}{|x|} \\ &\geqslant \frac{|1-3x^2|-|x|}{|x|} \\ &= \frac{|3x^2-1|-|x|}{|x|} \\ &\geqslant \frac{3x^2-1-|x|}{|x|} \\ &\geqslant \frac{3x^2-2x^2}{|x|} \\ &\geqslant |x| \end{aligned}$$

On a utilisé la minoration de l'inégalité triangulaire, $\big||1-3x^2|-x\big| \geqslant |1-3x^2|-|x|$ puis l'inégalité triangulaire $|1-3x^2| \leqslant 1+3|x^2|$ et que $|x|+1 \leqslant 2|x|^2$ pour $|x| \geqslant 1$.

Exercice 3.3 ♡
Montrer que la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \quad \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

est bornée.

Solution : *Pour* $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

On a utilisé les inégalités classiques $|\sin\theta| \leqslant |\theta|$ *et* $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

On se sert très souvent de l'inégalité triangulaire pour majorer des sommes et des intégrales :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_n\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_n|$$

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t.$$

Pour les intégrales de Riemann, on utilise également la majoration fondamentale :

$$\boxed{\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant g(x) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Si f est une fonction continue sur un *segment* $[a,b]$, elle est bornée et on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. On se sert très souvent de la majoration :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\|f\|_\infty}$$

Exemple 3.9 On définit la suite d'intégrales

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

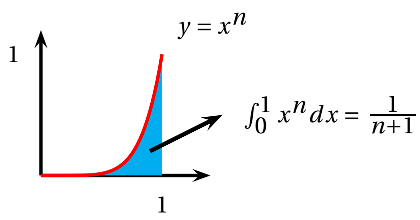
où $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue. Montrer que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La fonction f est continue sur un segment donc est bornée. Notons $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et majorons :

$$|\mathrm{I}_n| = \left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |x^n||f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \|f\|_\infty\,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\|f\|_\infty}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On rencontre souvent en pratique l'intégrale

♡ **3.7**

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$



Multimédia : animation pour voir l'aire $\int_0^1 x^n f(t) dt$ qui tend vers 0

C.1.3 Erreurs de majoration fréquentes

Une faute très fréquente consiste à majorer à l'intérieur des valeurs absolues : $a \leqslant b \implies |a| \leqslant |b|$. C'est faux en général. Par exemple, $-3 \leqslant -2$ et pourtant $|-3| = 3 > 2 = |-2|$.

Exemple 3.10 Voici une erreur typique rencontrée dans une copie : puisque $\sin x \leqslant 1$ et $-\sin y \leqslant 1$, pour $x, y > 0$ on a :

$$\left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin y}{y}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

Si on prend par exemple $x = \pi$ et $y = \pi/2$, l'inégalité obtenue s'écrit $\left|\frac{-2}{\pi}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right| = \frac{1}{\pi}$ qui est évidemment fausse.

Le résultat suivant est classique et souvent posé en devoir :

LEMME 3.1 ♡♡ **Lebesgue**
Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$,

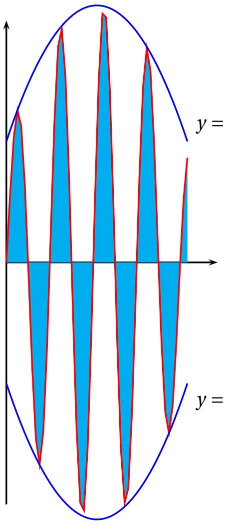
$$\mathrm{I}_n = \int_a^b \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Dans les deux « démonstrations » suivantes, il y a des erreurs de majoration. Trouvez-les ! La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_n| &= \left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \|f\|_\infty \left|\int_a^b \sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \|f\|_\infty \left|\frac{\cos(nb)-\cos(na)}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_n| &\leqslant \int_a^b |f(t)||\sin(nt)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \|f\|_\infty \int_a^b |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \|f\|_\infty \frac{|\cos(nb)|-|\cos(na)|}{n} \\
&\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

Dans la première série de majorations, on a majoré à l'intérieur des valeurs absolues en multipliant par $\sin t$ qui peut être négatif (deux erreurs). Dans la deuxième série, les majorations sont correctes, mais $|\sin(nt)|$ ne se primitive pas en $|\cos(nt)|/n$.

Remarque 3.1 On comprend graphiquement le résultat précédent : lorsque n est grand, la fonction $t \mapsto \sin(nt)$ oscille beaucoup entre a et b et les aires positives compensent les aires négatives :



On comprend également que $\int_a^b f(t)|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t$ ne converge pas vers 0 et que la dernière tentative était vouée à l'échec !

La preuve correcte est instructive et doit être étudiée soigneusement.

Démonstration ♡♡♡ *Puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut intégrer par parties I_n et puisque f et f' sont continues sur le segment $[a,b]$, elles sont bornées :*

$$
\mathrm{I}_n = \left[-\frac{f(t)\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t
$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_n| &\leqslant \frac{|f(b)||\cos(nb)|+|f(a)||\cos(na)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)||\cos(nt)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n} + \frac{\|f'\|_\infty(b-a)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Remarque 3.2 On montre que le résultat précédent reste vrai lorsque f est uniquement continue par morceaux sur $[a,b]$. On commence par le démontrer lorsque f est une fonction indicatrice d'un segment (la fonction indicatrice d'une partie de $\mathbb{R}$ est la fonction qui vaut 1 sur cette partie et 0 partout ailleurs), puis lorsque f est une fonction en escalier et on utilise l'approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.

C.1.4 Suivre son intuition avant de majorer

Pour montrer qu'une suite (u_n) converge vers 0, on majore $|u_n|$. Par contre, pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il ne sert à rien de majorer $|u_n|$, c'est $|u_n - l|$ qu'il faudrait majorer. Avant de se lancer dans une majoration hasardeuse, il est nécessaire de comprendre intuitivement comment se comportent les différents termes.

Exemple 3.11 Étudier la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$. Commençons par écrire les différents termes de la somme d'une autre façon pour comprendre ce qui se passe :

$$u_n = \frac{1}{n!}(1 + 1\times 2 + \cdots + 1\times 2\times\cdots\times n) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)\dots 3} + \frac{1}{n(n-1)\dots 2}.$$

Une erreur fréquente : puisque $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \dots, \dfrac{1}{n(n-1)\dots 2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: bien que chaque terme tende vers 0, *le nombre de termes augmente* avec n. Avec le même raisonnement, on aurait $1 = \underbrace{\dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{1}{n}}_{n \text{ fois}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$!

Nous allons tout de même montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ en écrivant $u_n = 1 + \varepsilon_n$ et en montrant que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour cela, majorons ε_n : si l'on majore tous les termes de ε_n par le plus grand $1/n$, on trouve que $\varepsilon_n \leqslant (n-1)/n$ qui ne tend pas vers 0. Écrivons plutôt

$$0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n} + \frac{(n-2)}{n(n-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exemple 3.12 On pose pour $x > 0$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de F.

b. Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de F.

a. Avec une majoration simple :

$$\forall t \in [x, 2x], \qquad \frac{|\sin t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

on obtient :

$$|\mathrm{F}(x)| \leqslant \int_x^{2x} \frac{|\sin t|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Par conséquent, $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

b. Essayons d'abord un encadrement élémentaire : pour $t \in [0, \pi/2]$,

$$\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t \leqslant t$$

on obtient pour $0 < x < 2x \leqslant \pi/2$, l'encadrement

$$\frac{2}{\pi}\ln 2 = \int_x^{2x} \frac{2t}{\pi t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2.$$

On voit que la fonction F est bornée au voisinage de zéro, mais l'encadrement obtenu ne permet de trouver la limite. Au voisinage de 0, $\sin(t)$ est proche de t : on peut utiliser l'inégalité $t - t^3/6 \leqslant \sin t \leqslant t$ vue dans l'exemple 3.2. On obtient l'encadrement :

$$\ln 2 - \frac{x^2}{4} = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{6}\int_x^{2x} t^2\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$$

et avec le théorème des gendarmes, on en déduit que $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln 2$.

Pour des exemples plus théoriques, lorsqu'on ne dispose pas de majorations explicites des fonctions, il est nécessaire d'utiliser les définitions à ε d'analyse pour justifier les approximations. Voyons deux exemples classiques.

Exemple 3.13 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Étudier la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le graphe de $x \mapsto x^n$ pour n grand montre que x^n est très petit, sauf au voisinage de 1 où il vaut 1. On se doute que la limite va dépendre des valeurs de f au voisinage de 1. Commençons par approximer $f(x)$ par $f(1)$ sur $[0,1]$ pour comprendre ce qui se passe (cela consiste à supposer dans un premier temps que f est constante) :

$$\mathrm{J}_n \approx n f(1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1} f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1).$$

Montrons rigoureusement que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$ en écrivant pour $x \in [0,1]$, $f(x) = f(1) + r(x)$ où r est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $r(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. Par linéarité de l'intégrale,

$$I_n = \frac{n}{n+1} f(1) + \underbrace{n\int_0^1 x^n r(x)\,dx}_{R_n}.$$

On a déjà vu que la première suite convergeait vers $f(1)$. Il nous suffit de traiter le *reste* de notre approximation : montrons que $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour cela, écrivons une démonstration à epsilon. Soit $\varepsilon > 0$, comme $r(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$, il existe $c \in [0,1[$ tel que $\forall x \in [c,1]$, $|r(x)| \leqslant \varepsilon/2$. Coupons notre intégrale en deux :

$$\begin{aligned}|R_n| &\leqslant n\int_0^c |r(x)|x^n\,dx + n\int_c^1 |r(x)|x^n\,dx \\ &\leqslant nc^n\int_0^c |r(x)|\,dx + n\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 x^n\,dx \\ &\leqslant Knc^n + \frac{n\varepsilon}{2(n+1)} = \theta_n.\end{aligned}$$

Nous avons noté $K = \int_0^c |r(x)|\,dx$ qui est une constante indépendante de n. Puisque $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\theta_n \leqslant \varepsilon$ et pour $n \geqslant N$, $|R_n| \leqslant \varepsilon$.

L'exemple précédent est typique d'une démonstration en analyse.

1. On commence par comprendre intuitivement les approximations pertinentes.
2. On met en évidence l'approximation pour isoler le résultat et on se ramène à montrer qu'un reste tend vers 0.
3. On utilise les majorations, les définitions à ε ...pour traiter le reste de l'approximation.

Exemple 3.14 1 Soit $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$. On définit pour $x \geqslant 0$, $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$. Montrons que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$.
On commence par utiliser l'hypothèse en approximant f par l :

$$f(x) = l + r(x) \text{ avec } r(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Cette approximation permet de mettre en évidence la limite de F :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x l\,dt + \frac{1}{x}\int_0^x r(t)\,dt = l + R(x).$$

Il nous suffit de montrer que $R(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Rédigeons pour cela une démonstration à ε.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $r(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall t \geqslant A$, $|r(t)| \leqslant \varepsilon/2$.

Posons $C = \int_0^A |r(t)|\,dt$. Puisque $C/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, il existe $B \geqslant A$ tel que $\forall x \geqslant B$, $C/x \leqslant \varepsilon/2$.

Soit $x \geqslant B$, coupons l'intégrale en deux :

$$|R(x)| = \left|\frac{1}{x}\int_0^A r(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_A^x r(t)\,dt\right| \leqslant \frac{C}{x} + \frac{1}{x}\int_A^x |r(t)|\,dt \leqslant \varepsilon/2 + \frac{(x-A)\varepsilon}{2x} \leqslant \varepsilon.$$

C.2 Dérivation

Contrairement au calcul de primitives où l'on sait primitiver très peu de fonctions à l'aide des fonctions usuelles, on sait dériver une fonction quelconque, aussi compliquée soit-elle. Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques règles simples pour calculer efficacement une dérivée sous forme factorisée. En effet, on se sert souvent du signe d'une dérivée pour étudier les variations d'une fonction, d'où l'intérêt d'obtenir une forme factorisée de ces dérivées.
Rappelons d'abord comment calculer la dérivée d'une expression à l'aide de Maple :

```
MAPLE
f := exp(x) * sin(x^3);
                         f := exp(x) sin(x^3)
> diff(f, x);
                             3                   3   2
                 exp(x) sin(x ) + 3 exp(x) cos(x ) x
> factor(%);
                                3            3   2
                   exp(x) (sin(x ) + 3 cos(x ) x )
```

C.2.1 Dérivées particulières

Homographies

Une homographie est une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Cette fonction est définie sur les deux intervalles $I_1 =]-\infty, -d/c[$ et $I_2 =]-d/c, +\infty[$.
Une homographie se dérive facilement :

♡ **3.8**

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

Il est bon de retenir cette formule (déterminant des coefficients au numérateur, dénominateur au carré), car on rencontre souvent des homographies en pratique. Remarquez que le signe de la dérivée est donné par le signe du déterminant : les variations des homographies sont simples.
La bijection réciproque d'une homographie est encore une homographie : il faut savoir résoudre rapidement l'équation

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (cy-a)x = b-dy \quad x = -\frac{dy-b}{cy-a}.$$

On voit donc que lorsque le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est strictement positif, f définit une bijection de I_1 vers $J_1 =]-\infty, a/c[$ et de I_2 vers $J_2 =]a/c, +\infty[$.

Exercice 3.4 ♡

Dériver les homographies suivantes et déterminer l'expression de leur bijection réciproque.

a. $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x+1}$

b. $g(x) = \dfrac{2-3x}{5+x}$

Solution :

a. $f'(x) = \dfrac{11}{(2x+1)^2}$, $f^{-1}(y) = -\dfrac{y+4}{2y-3}$.

b. *Écrivons* $g(x) = -\dfrac{3x-2}{x+5}$ *d'où* $g'(x) = -\dfrac{17}{(x+5)^2}$ *et* $g^{-1}(y) = -\dfrac{5y-2}{y+3}$.

Exponentielle en facteur

On rencontre souvent en analyse des expressions de la forme

$$f(x) = e^{A(x)} \times B(x)$$

où A et B sont deux fonctions dérivables. On peut mettre $e^{A(x)}$ en facteur dans la dérivée et il est bon de retenir la formule suivante :

♡ **3.9**

$$f(x) = e^{A(x)} B(x), \quad f'(x) = e^{A(x)} \left[B'(x) + A'(x) \times B(x) \right].$$

Cette formule est à la base de la résolution des équations différentielles du premier ordre. Considérons l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Soit $y : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction solution. On considère la fonction auxiliaire définie par $f(x) = e^{\mathrm{A}(x)} \times y(x)$ où A est une primitive de a car lorsqu'on dérive f, on trouve

$$f'(x) = e^{\mathrm{A}(x)}\left[y'(x) + a(x)y(x)\right] = e^{\mathrm{A}(x)} \times b(x).$$

Par conséquent, avec le théorème fondamental, si $x_0 \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{\mathrm{A}(t)} b(t)\,\mathrm{d}t.$$

et on trouve l'expression de y sur l'intervalle I en fonction de la condition initiale $y(0)$:

$$y(x) = e^{-\mathrm{A}(x)} f(x) = y(0)e^{-\mathrm{A}(x)} + e^{-\mathrm{A}(x)} \int_{x_0}^{x} e^{\mathrm{A}(t)} b(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut utiliser la même technique pour des inéquations différentielles :

Exercice 3.5 ♡♡

Soit $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ *une fonction dérivable vérifiant* $f(0) = 1$ *et* $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) + f(x) \leqslant 1$. *Montrer que* f *est bornée.*

Solution : *Considérons la fonction* F *définie par* $\mathrm{F}(x) = e^x f(x)$. *Elle est dérivable et* $\forall x \geqslant 0$,

$$\mathrm{F}'(x) = e^x\left[f'(x) + f(x)\right] \leqslant e^x$$

d'où

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 1 + \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t = e^x$$

et donc

$$f(x) = e^{-x}\mathrm{F}(x) \leqslant 1$$

Il faut savoir dériver successivement une fonction définie par

$$f(x) = e^{\mathrm{A}(x)} \times \mathrm{B}(x)$$

en utilisant de façon répétée la formule précédente. En particulier, pour résoudre des équations différentielles du second ordre, on rencontre souvent le cas où A et B sont des polynômes. Par exemple :

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x^2}\left[x^2 + 1\right] \\
f'(x) &= e^{x^2}\left[2x + (2x)(x^2+1)\right] = 2e^{x^2}\left[x^3 + 2x\right] \\
f''(x) &= e^{x^2}\left[3x^2 + 2 + (2x)(x^3 + 2x)\right] = 2e^{x^2}\left[2x^4 + 7x^2 + 2\right] \\
f^{(3)}(x) &= 2e^{x^2}\left[8x^3 + 14x + 2x(2x^4 + 7x^2 + 2)\right] = 4e^{x^2}\left[2x^5 + 11x^3 + 9x\right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Remarquez que les calculs s'effectuent avec une ligne par dérivée. Pour chaque ligne, à la première étape, appliquer la formule de dérivation, à la deuxième étape, ordonner le polynôme en facteur.

C.2.2 Règle de la chaîne

Il s'agit simplement de la formule de la dérivée d'une fonction composée

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$$

Cette formule s'étend par récurrence à la composée de n fonctions (on dérive *à la chaîne*) :

$$(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)' = (f_1' \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n) \times (f_2' \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n) \times \cdots \times (f_{n-1}' \circ f_n) \times f_n'$$

Remarquez que le résultat est donné sous forme de produit, donc est automatiquement factorisé !
Remarquez aussi que pour une fonction composée, il est parfois plus rapide d'utiliser la « règle des signes »pour les variations d'une fonction (voir 11.4 page 416) que de calculer sa dérivée.

Exemple 3.15 Déterminer la dérivée et les variations de la fonction définie par

$$f(x)=\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{2e^{x^2}+1}{e^{x^2}+1}\right)\right)$$

On calcule avec la règle de la chaîne et la dérivée d'une homographie en une ligne :

$$f'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{2e^{x^2}+1}{e^{x^2}+1}\right)}\times\operatorname{sh}\left(\frac{2e^{x^2}+1}{e^{x^2}+1}\right)\times\frac{1}{(e^{x^2}+1)^2}\times e^{x^2}\times(2x)$$

Tous les facteurs étant toujours positifs sauf le dernier, la fonction est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3.6 ♡♡

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est dérivable et calculer sa dérivée. Les résultats seront factorisés et on déterminera le signe de la dérivée.

a. $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
b. $f(x)=\ln(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1})$
c. $f(x)=\arctan\dfrac{\ln x}{3}$
d. $f(x)=e^x\arctan(e^x)-\ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)$.
e. Pour $k\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\dfrac{k}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$
f. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)$
g. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$
h. $f(x)=x^{(x^2)}$
i. $f(x)=\ln\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{x}{\sin x}$
j. $f(x)=\dfrac{\arctan x}{x}-\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
k. Pour $a\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{4a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{1}{2a}\arctan\dfrac{x}{a}$
l. $f(x)=\arctan\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$
m. $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$
n. $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$
o. $f(x)=\sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x})+\sqrt{1-x}$
p. $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$
q. $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x^x-x^{-x}}{2}\right)$
r. $f(x)=\dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$
s. $f(x)=\log_{e^2}(x^n+\sqrt{x^{2n}+1})$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$
t. $f(x)=\ln[\ln x(\ln\ln\ln x-1)]$.

Solution :

a. *Pour* $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$. *Par conséquent,* $x+\sqrt{x^2+1}>|x|+x\geqslant 0$. *La fonction est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et l'on trouve* $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 0$.

b. *Il faut que* $\sin x>1/2$, *c'est à dire* $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi+\pi/6,2k\pi+5\pi/6[$. *On trouve ensuite* $f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{(2\sin x-1)(2\sin x+1)}}\geqslant 0$.

c. *La fonction* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$f'(x)=\frac{3}{x(9+\ln^2 x)}>0.$$

d. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x)=e^x\arctan e^x>0$.

e. *Il faut que* $x^2>-k$. *Donc si* $k>0$, f *est définie et dérivable sur* $\mathrm{I}=\mathbb{R}$. *Si* $k\leqslant 0$, f *est définie sur* $\left]-\infty,-\sqrt{-k}\right]\cup\left[\sqrt{-k},+\infty\right[$ *et dérivable sur* $\left]-\infty,-\sqrt{-k}\right[\cup\left]\sqrt{-k},+\infty\right[$. *On calcule*

$$f'(x)=\sqrt{x^2+k}.$$

f. *Il faut que* $\cos x>0$ *et* $\sin x>-1$, *c'est à dire* $x\in\cup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi-\pi/2,2k\pi+\pi/2[$. *On trouve que*

$$f'(x)=\frac{2}{\cos^3 x}>0.$$

g. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$. *Puisque* $x^2 \leqslant \dfrac{1+x^4}{2}$, $\dfrac{2x^2}{1+x^4} \leqslant 1$ *et la fonction est définie sur* $\mathbb{R}$. *On a* $\dfrac{2x^2}{1+x^4} = 1$ *si et seulement si* $x = \pm 1$ *et donc* f *est dérivable sur* $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1,1[$ *et* $I_3 =]1,+\infty[$. *On calcule*

$$f'(x) = \frac{4x(1-x^4)}{|1-x^4|(1+x^4)} = \begin{cases} \dfrac{4x}{1+x^4} & \text{si } x \in I_2 \\ -\dfrac{4x}{1+x^4} & \text{si } x \in I_1 \cup I_3 \end{cases}.$$

h. *La fonction* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$f'(x) = x^{x^2+1}(1+2\ln x).$$

i. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$. *Si* x *est élément de cet ensemble :* $f'(x) = \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}$.

j. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$. *Si* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\dfrac{\arctan x}{x^2}$.

k. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $]-\infty,-a[\ \cup\ ]a,+\infty[$ *et pour* x *dans cet ensemble,* $f'(x) = \dfrac{x^2}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}$.

l. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ *et si* x *est élément de cet ensemble,* $f'(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$.

m. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et si* $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

n. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et si* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{x^4+1}}$.

o. *La fonction* f *est définie sur* $[0,1]$ *et dérivable sur* $]0,1[$. *De plus, si* $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

p. *Puisque* $|\sin x| < \sqrt{1+\sin^2 x}$, *la fonction est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

q. *La fonction est définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et* $f'(x) = \dfrac{2(1+\ln x)}{x^x + x^{-x}}$.

r. *La fonction est définie et dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et* $f'(x) = \dfrac{x^{x+1}\ln x(\ln x - 1)}{e^x}$.

s. *La fonction* f *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n}+1}}$.

t. *La dérivée de* f *est* $f'(x) = \dfrac{\ln\ln\ln x}{x\ln x}$.

C.3 Manipulation de bornes supérieures

Dans ce paragraphe, nous allons voir en pratique comment manipuler les bornes supérieures et inférieures définies dans le chapitre sur les nombres réels 9.4 page 342. Avant toute chose, retenez que l'on ne manipule jamais les bornes supérieures en écrivant une suite d'égalités, mais en justifiant des *inégalités*. La technique principale s'appelle le *raisonnement de passage à la borne supérieure* et utilise la définition même de la borne supérieure, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de la partie.

PLAN 3.1 : Passage à la borne supérieure

On veut montrer que la borne supérieure d'une partie A *est majorée par un réel* M. *Il suffit de justifier que* M *est un majorant de la partie :*

1. *Soit* $x \in A$, $\ldots x \leqslant M$.
2. *Alors, puisque* $\sup A$ *est le plus petit des majorants de* A, $\sup A \leqslant M$.

Exemple 3.16 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que $A \cap B \neq \varnothing$. Montrer que les parties $(A \cup B)$ et $(A \cap B)$ possèdent une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$, $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.

– On vérifie facilement que les deux parties sont non vides et majorées ce qui justifie l'existence des bornes supérieures.

– Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$ et si $x \in B$, $x \leqslant \sup B$. Dans les deux cas, $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$ ce qui montre que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit que $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
– Soit $x \in A \cap B$. Puisque $x \in A$, $x \leqslant \sup A$ et puisque $x \in B$, $x \leqslant \sup B$ donc $x \leqslant \min(\sup A, \sup B)$. Le réel $\min(\sup A, \sup B)$ est donc un majorant de $A \cap B$ et par passage à la borne supérieure, on en déduit que $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$.

On ne raisonne jamais directement avec des égalités entre bornes supérieures, mais on *justifie* toujours les égalités en suivant le plan suivant.

PLAN 3.2 : Pour montrer $\sup A = \sup B$

Pour montrer que deux bornes supérieures sont égales, on montre deux inégalités en utilisant deux passages à la borne supérieure.

1. *Montrons que* $\sup A \leqslant \sup B$.
2. *Montrons que* $\sup B \leqslant \sup A$.

Exemple 3.17 Soient deux parties A, B non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{a + b;\ (a, b) \in A \times B\}.$$

Montrons que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

– A et B possèdent une borne supérieure puisque ce sont des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Puisque $A \neq \varnothing$, il existe $a \in A$ et de même, il existe $b \in B$. Alors l'élément $a + b$ appartient à la partie $A+B$ ce qui justifie qu'elle est non vide. Notons M_A un majorant de A et M_B un majorant de B. Soit $x \in A+B$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$ et alors $x \leqslant M_A + M_B$. Nous avons montré que $M_A + M_B$ est un majorant de la partie $A+B$. Par conséquent, $\sup(A+B)$ existe.
– Montrons que $\sup(A+B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Soit $x \in A+B$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tels que $x = a + b$ et alors comme $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$, $x \leqslant \sup A + \sup B$. Le réel $\sup A + \sup B$ est donc un majorant de la partie $A+B$. Puisque $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants, on a $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$.
– Montrons que $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A+B)$. La technique de passage à la borne supérieure permet de majorer une borne supérieure. Isolons donc dans le membre gauche de l'inégalité à montrer une borne supérieure. La propriété que nous voulons montrer s'écrit de façon équivalente

$$\sup(A) \leqslant \sup(A+B) - \sup(B)$$

Pour montrer l'inégalité sous cette forme, il nous faut majorer A. Soit $a \in A$, et $b \in B$, écrivons

$$a = (a + b) - b$$

Comme $(a+b) \in A+B$, $(a+b) \leqslant \sup(A+B)$ d'où $a \leqslant \sup(A+B) - b$ et par passage à la borne supérieure,

$$\sup(A) \leqslant \sup(A+B) - b$$

L'inégalité précédente est valable pour tout élément $b \in B$, donc

$$\forall b \in B, \quad b \leqslant \sup(A+B) - \sup(A)$$

ce qui montre que $\sup(A+B) - \sup(A)$ est un majorant de B. Par passage à la borne supérieure, on en déduit que

$$\sup(B) \leqslant \sup(A+B) - \sup(A)$$

c'est à dire $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A+B)$.

Exercice 3.7 ♡

Reprendre l'exemple 3.16 page 1202 et montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

On dispose d'une technique similaire pour *minorer* une borne inférieure :

PLAN 3.3 : Passage à la borne inférieure

On veut montrer que $\alpha \leqslant \inf A$.

1. *Soit* $x \in A$, $\alpha \leqslant x$ *donc* α *est un minorant de la partie* A.
2. *Puisque* $\inf A$ *est le plus grand des minorants de* A, *il vient que* $\alpha \leqslant \inf A$.

Exemple 3.18 On considère une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Pour un réel $x \in \mathbb{R}$, on définit la *distance* de x à la partie A par :

$$d(x,A) = \inf\{|x-a| \mid a \in A\}.$$

– Vérifions que $d(x,A)$ est bien défini. Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la partie $X = \{|x-a| \mid a \in A\}$ de telle façon que $d(x,A) = \inf X$. Puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$ et alors $r = |x-a| \in X$ ce qui montre que la partie X est non vide. Puisque $\forall a \in A$, $|x-a| \geqslant 0$, la partie X est minorée par 0. La partie X possède donc une borne inférieure.
– Montrons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\left|d(x,A) - d(y,A)\right| \leqslant |x-y|.$$
  Il s'agit de montrer deux inégalités.
  – Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons que
  $$d(x,A) - d(y,A) \leqslant |x-y|.$$
    Écrivons l'inégalité à montrer en isolant à droite une borne inférieure :
    $$d(x,A) - |x-y| \leqslant d(y,A).$$
    Soit $a \in A$. En utilisant la minoration de l'inégalité triangulaire,
    $$|x-a| - |x-y| \leqslant |(x-a)-(x-y)| = |y-a|.$$
    Mais $d(x,A) \leqslant |x-a|$ et donc
    $$d(x,A) - |x-y| \leqslant |y-a|.$$
    Le réel $d(x,A) - |x-y|$ ne dépend plus de a et il est un minorant de l'ensemble $Y = \{|y-a| \mid a \in A\}$. Puisque $d(y,A)$ est le plus grand minorant de Y, il vient que
    $$d(x,A) - |x-y| \leqslant d(y,A).$$
  – Pour montrer que $d(y,A) - d(x,A) \leqslant |x-y|$, il suffit de faire le même raisonnement en échangeant les rôles de x et y.

On utilise très souvent en analyse les notations suivantes :

DÉFINITION 3.1 **Borne supérieure d'une fonction**
Soit une fonction définie sur un partie $A \subset \mathbb{R}$: $f : A \mapsto \mathbb{R}$. On note lorsque ces bornes existent,

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A) = \sup\{f(a) \mid a \in A\} \quad \inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) = \inf\{f(a) \mid a \in A\}.$$

Exemple 3.19 Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide majorée et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante. Comparer $\sup f(A)$ et $f(\sup A)$.
– Montrons que $\sup f(A) \leqslant f(\sup A)$. Soit $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A$ et que $\sup A$ est un majorant de A, $x \leqslant \sup A$. Comme la fonction f est croissante, on a $f(x) \leqslant f(\sup A)$. Le réel $f(\sup A)$ est un majorant de la partie $f(A)$ et par passage à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité annoncée.
– L'autre inégalité est fausse en général comme le montre le contre-exemple suivant. On note $A =]-\infty, 0[$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
  Alors $\sup(A) = 0$, $f(\sup A) = 1$ alors que $f(A) = \{0\}$ et $\sup f(A) = 0$ et donc $\sup f(A) < f(\sup A)$.

Si une fonction f est continue sur un segment $[a,b]$, le théorème 11.48 page 437 affirme qu'elle est bornée. Par conséquent l'ensemble $X = \{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$ est non vide (car $|f(a)| \in X$) et majoré. Il possède une borne supérieure et on note

$$\|f\|_\infty = \sup X = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Exemple 3.20 Soient $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un segment. Montrons que

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

En notant pour une fonction $h : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ $X_h = \{|h(x)| \mid x \in [a,b]\}$, il s'agit de montrer que $\sup X_{f+g} \leqslant \sup X_f + \sup X_g$. Utilisons le raisonnement de passage à la borne supérieure. Soit $t \in X_{f+g}$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $t = |(f+g)(x)| =$

$|f(x)+g(x)|$. Avec l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant \sup X_f + \sup X_g.$$

Le réel $X_f + X_g$ est donc un majorant de la partie X_{f+g} et par passage à la borne supérieure, $\sup X_{f+g} \leqslant \sup X_f + X_g$ ce qui prouve la propriété.
Soit maintenant un réel λ. Montrons que

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\ \|f\|_\infty$$

Avec les notations précédentes, il nous faut montrer que $\sup X_{\lambda f} = |\lambda| \sup X_f$. Procédons par double inégalité.

1. Montrons que
$$\sup X_{\lambda f} \leqslant |\lambda| \sup X_f$$
Soit $t \in X_{\lambda f}$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $t = |\lambda f(x)| = |\lambda|\ |f(x)| \leqslant |\lambda| \sup X_f$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité voulue.
2. Montrons que
$$|\lambda| \sup X_f \leqslant \sup X_{\lambda f}.$$
Le membre gauche à majorer n'est pas une borne supérieure. Écrivons l'inégalité en isolant une borne supérieure. Si $\lambda = 0$, le résultat est clair. Si $\lambda \neq 0$, il nous faut montrer que
$$\sup X_f \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \sup X_{\lambda f}.$$
Soit $t \in X_f$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $t = |f(x)| = \dfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} \sup X_{\lambda f}$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité souhaitée.

C.4 Équivalents

Dans ce paragraphe, nous allons voir la *pratique* des équivalents et des développements limités. Les équivalents sont un outil très puissant en analyse, indispensables dans plusieurs chapitres du cours de math. spé. et agréables à utiliser une fois que l'on a compris certains points. À utiliser sans modération !

C.4.1 Qu'est-ce qu'un équivalent simple ?

On parle d'équivalents de *suites* (au voisinage de $+\infty$) et de *fonctions* (au voisinage d'un point a éventuellement infini). Les techniques utilisées sont tout à fait similaires.
Il y a plusieurs façons de traduire que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$:

1. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang).
2. il existe une suite (ε_n) telle que $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$
3. la *définition de suites équivalentes* (valable même si les suites s'annulent une infinité de fois) :
$$u_n = v_n + w_n \text{ avec } w_n = o(v_n).$$

Pour deux fonctions f, g définies sur un voisinage d'un point a , elles sont équivalentes au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

1. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ (lorsque la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de a)
2. Il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que :
$$\forall x \in V,\ f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x)) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
3. La *définition* : $f(x) = g(x) + h(x)$ où $h(x) = o(g(x))$ au voisinage de a.

Il est nécessaire de bien réfléchir à ces définitions et de ne pas les confondre avec d'autres propriétés :

Exemple 3.21

1. Si $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas nécessairement équivalentes. Par exemple $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, la suite $w_n = -\frac{1}{n^2}$ converge vers 0 et pourtant (u_n) et (v_n) ne sont pas équivalentes.
2. Les suites $u_n = e^{n^2+n}$ et $v_n = e^{n^2}$ ne sont pas équivalentes (former le quotient !).
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: cette propriété est fausse en général. Par exemple, $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$ donne un contre-exemple.

On utilise les équivalents en pratique pour *simplifier* l'expression d'une suite ou d'une fonction en vue de :
- calculer sa limite,
- déterminer son signe à partir d'un certain rang,
- en deuxième année, déterminer la nature de la série $\sum u_n$,
- en deuxième année, voir si la fonction f est intégrable sur un intervalle
- ...

Qu'entend-t-on par un *équivalent simple* d'une suite u_n ? C'est une suite v_n équivalente à u_n formée uniquement de *produits-quotients* de suites de références. Quelques exemples de suites de référence : n^α, k^n, $n!$, $n^\alpha(\ln n)^\beta$, n^{n^2}, ...
Il existe une infinité de suites équivalentes à une suite donnée :

$$n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 + \sin(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2\ln n + 1/\ln n} \dots$$

mais parmi ces suites, il y en a une de référence (ici n^2) qu'on appellera *équivalent simple*. Remarquons qu'un équivalent simple ne fait intervenir *aucune somme*, uniquement des *produits-quotients*. Voici quelques exemples d'équivalents simples :

$$n\sin(n), \quad n^3\ln(n), \quad n^{n!}, \quad \ln(n)^2 e^{3n}, \quad e^{n^2}e^n, \quad \ln(\sin(n^2)), \dots$$

Par contre les expressions suivantes ne sont pas des équivalents simples :
- $v_n = n^2 + n$ car $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{n^2}$
- $v_n = \ln(n^3)$ car $\ln(n^3) = \boxed{3\ln n}$
- $v_n = e^{n^2+n+1/n}$ car $v_n = e^{n^2}e^n e^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{e^{n^2}e^n}$.

Pour déterminer un équivalent d'une suite composée $u_n = f(v_n)$, il est indispensable de déterminer la limite de (v_n). Une erreur grossière courante consiste à écrire $\sin(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors que la suite (v_n) ne converge pas vers 0. En pratique, lorsque la suite (v_n) est compliquée, on commence par chercher un équivalent simple de (v_n) qui permet d'une part de trouver la limite de (v_n) et d'autre part de simplifier l'équivalent de (u_n) ensuite.

Exemple 3.22

$$u_n = \tan\left(\underbrace{\frac{\sin(e^{-n})}{\operatorname{sh}\left(\frac{n}{e^n \ln n}\right)}}_{v_n}\right).$$

Puisque $e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin(e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$. Puisque $\dfrac{n}{e^n\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\operatorname{sh}\left(\dfrac{n}{e^n\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e^n\ln n}$ et donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On peut utiliser l'équivalent usuel de tan en 0 et finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exemple 3.23

$$u_n = \ln(\cos\frac{1}{n})$$

Ici $\cos(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et on connaît un équivalent de $\ln(\theta_n)$ lorsque $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ sous la forme $\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il suffit d'écrire $u_n = \ln(1+v_n)$ où $v_n = \cos(1/n) - 1$ et puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

C.4.2 Suppression des sommes

Puisqu'un équivalent simple n'est formé que de produits-quotients, il faut savoir faire disparaître toutes les sommes dans la recherche d'équivalents. Supposons qu'une suite (u_n) s'écrive comme somme de deux suites : $u_n = v_n + w_n$.

> *Remarque 3.3* **On ne peut pas sommer les équivalents !** Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, on n'a pas toujours $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n + b_n$. Par exemple : $v_n = n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n = n^2 + 1/n$, $w_n = -n^2 + 1/n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^2$. On a $u_n = v_n + w_n = n + 1/n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et pourtant $a_n + b_n = 2/n \dots$

Deux cas se rencontrent souvent en pratique.

L'une des suites est négligeable devant l'autre

Si par exemple $w_n = o(v_n)$, alors $u_n = v_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. *C'est la définition même d'un équivalent.*

> *Exemple 3.24* $u_n = n^2 + \frac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. En effet, $w_n = \dfrac{\sin n}{n} = o(n^2) = v_n$ car $\dfrac{w_n}{v_n} = \dfrac{\sin n}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

> *Exemple 3.25*
> $$u_n = \frac{\ln(\ln n)}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + \frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\ln(\ln n^7)}{\sqrt{n}}$$
> Commençons par utiliser les propriétés du logarithme pour écrire
> $$\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}, \quad \ln(\ln n^7) = \ln(7\ln n) = \ln 7 + \ln(\ln n)$$
> Il est indispensable ensuite de *classer les suites par ordre décroissant d'importance* :
> $$u_n = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + 2\frac{\ln(\ln n)}{\sqrt{n}} + \frac{\ln 7}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}.$$
> En effet, $\ln(\ln n) = o(\ln n)$ puisque $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a également $\dfrac{7}{\sqrt{n}} = o(\ln n/\sqrt{n})$ et $\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}} = o(1/\sqrt{n})$. Les trois dernières suites sont donc négligeables devant $\dfrac{\ln n}{2\sqrt{n}}$ et on en déduit l'équivalent simple :
> $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}.$$

En pratique, on commence par chercher un équivalent simple de chacune des suites (v_n) et (w_n) ce qui permet de les comparer plus facilement.

> *Exemple 3.26*
> $$u_n = \sqrt{1 + \sin\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)} - \cos\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$
> Pour utiliser les équivalents usuels, écrivons
> $$u_n = \underbrace{\left(\sqrt{1 + \sin\frac{\ln n}{n^2}} - 1\right)}_{v_n} + \underbrace{\left(1 - \cos\frac{\ln n}{n}\right)}_{w_n}$$
> avec $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{2n^2} = a_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{2n^2} = b_n$. Puisque $a_n = o(b_n)$, $v_n = o(w_n)$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{2n^2}$.

Les deux suites ont le même ordre de grandeur

On suppose encore que $u_n = v_n + w_n$ et on commence toujours par chercher un équivalent plus simple de v_n et w_n : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Ici, on n'a ni $a_n = o(b_n)$, ni $b_n = o(a_n)$. Bien qu'on ne puisse pas sommer les équivalents, *si la somme n'est pas nulle*, on devine l'équivalent de u_n. Il ne reste qu'à le démontrer en utilisant les définitions.

Exemple 3.27

$$u_n = e^{\frac{1}{2^n}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^n}} - 2$$

Pour utiliser les équivalents usuels, écrivons :

$$u_n = \underbrace{\left(e^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)}_{v_n} + \underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{2^n}} - 1\right)}_{w_n}.$$

Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} = a_n$ et que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = b_n$, en utilisant la définition des équivalents,

$$v_n = \frac{1}{2^n} + \mathrm{o}(\frac{1}{2^n}) \quad w_n = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} + \mathrm{o}(\frac{1}{2^n})$$

d'où

$$u_n = \frac{3}{2}\frac{1}{2^n} + \mathrm{o}(\frac{1}{2^n})$$

d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2^n}$.

Lorsque la somme des équivalents simples a_n et b_n est nulle, utiliser les développements limités (voir paragraphe suivant).

C.4.3 Utilisation des propriétés fonctionnelles

On connaît nos équivalents classiques sous la forme $u_n = f(v_n)$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou $f(v(x))$ avec $v(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Que se passe-t-il lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 0$?

Logarithmes

On connaît un équivalent usuel de $\ln(v_n)$ lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ sous la forme $\ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in]0,+\infty[$, il suffit d'utiliser la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ en écrivant :

$$\ln(v_n) = \ln\left(l \times \frac{v_n}{l}\right) = \ln l + \ln\left(\frac{v_n}{l}\right) \text{ avec } \frac{v_n}{l} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et on peut utiliser l'équivalent classique.

Exemple 3.28

$$u_n = \ln\left(1+\frac{n^2}{n^2+1}\right) - \ln 2$$

Puisque $\dfrac{n^2}{n^2+1} \to 1$, on ne peut pas utiliser l'équivalent classique $\ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$. Écrivons plutôt :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\frac{2n^2+1}{2(n^2+1)} \\ &= \ln\left(1+\left[\frac{2n^2-1}{2(n^2+1)} - 1\right]\right) \\ &= \ln\left(1-\frac{3}{2(n^2+1)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2n^2}. \end{aligned}$$

Remarque 3.4 **Attention à ne pas prendre de logarithmes d'équivalents !** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on n'a pas toujours $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Par exemple si $u_n = 1+1/n$ et $v_n = 1+1/n^2$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et pourtant $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$ alors que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$.
Il est intéressant d'examiner d'où vient le problème. Traduisons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ par $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln(1+\varepsilon_n)$ donc

$$\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{\ln v_n}$$

Il y a un problème lorsque $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c'est à dire lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ comme dans l'exemple ci-dessus.
Par contre, lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 1$ (même 0 ou $+\infty$), on s'aperçoit qu'on a le droit de prendre les logarithmes des équivalents.
Pour éviter d'écrire des bêtises, il vaut mieux retenir qu'on ne peut pas prendre le logarithme d'équivalents et refaire au cas par cas la preuve précédente lorsque nécessaire.

Exemple 3.29 Déterminer un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de $f(x) = \operatorname{argsh}(x)$. On connaît la forme logarithmique (voir l'exemple 2.10 page 1169) :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Puisque $x + \sqrt{x^2+1} = 2x + o(x)$,

$$f(x) = \ln(2x(1+\varepsilon(x))) = \ln x + \ln 2 + \ln(1+\varepsilon(x)) = \ln x + o(\ln x)$$

et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.

Lorsqu'on veut trouver un équivalent de $f(x) = \ln[u(x) + v(x)]$ avec $v(x) = o(u(x))$, factoriser à l'intérieur du logarithme le terme dominant :

$$f(x) = \ln[u(x)(1 + v(x)/a(x))] = \ln u(x) + \ln(1 + v(x)/u(x)) \sim \ln u(x)$$

puisque $v(x)/u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, $\ln(1 + v(x)/u(x)) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Exemple 3.30 Déterminer un équivalent de $f(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$ lorsque $x \to +\infty$. Écrivons

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{2}\left[1 + e^{-2x}\right]\right) = \ln e^x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$$

et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

Exponentielles

On connaît un équivalent classique $(e^{\varepsilon_n} - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n$ lorsque $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Lorsque $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 0$, il suffit d'utiliser la propriété $e^{a+b} = e^a e^b$ en écrivant

$$e^{\varepsilon_n} = e^l \times e^{(\varepsilon_n - l)}$$

Exemple 3.31

$$u_n = e^{\frac{n^2}{n^2+1}} - e^{\frac{n^3}{n^3+1}}$$

Comme $\frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ainsi que $\frac{n^3}{n^3+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, écrivons

$$\begin{aligned} u_n &= e \times e^{(\frac{n^2}{n^2+1} - 1)} - e \times e^{(\frac{n^3}{n^3+1} - 1)} \\ &= e\left[\left(e^{-\frac{1}{n^2+1}} - 1\right) - \left(e^{-\frac{1}{n^3+1}} - 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Mais comme $\left(e^{-\frac{1}{n^2+1}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/n^3$ et que $\left(e^{-\frac{1}{n^3+1}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/n^2 = o(1/n^2)$, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e}{n^2}$.

Remarque 3.5 **On ne peut pas prendre d'exponentielle d'équivalents :** si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on n'a pas toujours $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$. Par exemple si $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$, e^{n^2+n} n'est pas équivalent à e^{n^2}.
Regardons ce qui se passe :

$$\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n}$$

donc $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui n'est pas la même chose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$!

Fonctions puissances

On connaît un équivalent classique de $[(v_n)^\alpha - 1]$ lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ sous la forme $[(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\varepsilon_n$ lorsque $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 1$, on se ramène au cas précédent en écrivant :

$$\left[(v_n)^\alpha - l^\alpha\right] = l^\alpha \left[\left(\frac{v_n}{l}\right)^\alpha - 1\right]$$

avec $v_n/l \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exemple 3.32

$$u_n = \sqrt{\frac{4n+1}{n+1}} - \sqrt[3]{\frac{8n}{n+1}}$$

Écrivons :

$$\begin{aligned} u_n &= 2\left[\left(\sqrt{1+\left(\frac{n+1/4}{n+1}-1\right)}-1\right) - \left(\sqrt[3]{1+\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}-1\right)\right] \\ &= 2\left[\left(\sqrt{1-\frac{3}{4(n+1)}}-1\right) - \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n+1}}-1\right)\right] \\ &= 2(a_n - b_n) \end{aligned}$$

et comme $a_n = -3/(8n) + o(1/n)$, $b_n = -1/(3n) + o(1/n)$, on trouve que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{24n}$.

Quantités conjuguées

Une identité basique très utile pour manipuler des différences de racines carrées (multiplication par les quantités conjuguées) :

♡ **3.10**

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Elle provient simplement de la formule $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Exemple 3.33 Trouver un équivalent de $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

$$u_n = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

C.4.4 Mise sous forme exponentielle

Pour étudier un équivalent d'une suite $u_n = a_n^{b_n}$ où l'exposant dépend de n, utiliser la forme exponentielle :

♡ **3.11**

$$a^b = e^{b\ \ln a}$$

Exemple 3.34 Cherchons un équivalent de $f(x) = x^x - 1$ lorsque $x \to 0$:

$$x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln x$$

puisque $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Exemple 3.35 3 **Un exemple fondamental :** Soit $x \in \mathbb{R}$, étudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Une erreur fréquente consiste à dire que lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $v_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. C'est une forme indéterminée $\boxed{1^\infty}$. En effet, $v_n^n = e^{n\ln v_n}$ et on voit que si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, il y a une forme indéterminée $\infty \times 0$ dans l'exposant.
Écrivons plutôt

$$u_n = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})} = e^{v_n}$$

et cherchons la limite de la suite (v_n). Comme $x/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, avec l'équivalent du logarithme, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \dfrac{x}{n} = x$ et donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et par composée de limites, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$.

Remarque 3.6 La forme exponentielle n'est utile que si l'exposant dépend de la variable. N'en abusez pas. Il serait ridicule d'écrire $(n^2+1)^2 = e^{2\ln(n^2+1)}$ pour trouver un équivalent de cette suite !

C.4.5 Utilisation des développements limités

Les équivalents sont l'outil principal pour obtenir le comportement d'une fonction au voisinage d'un point et sont à utiliser en priorité. Dans certains cas, l'utilisation des développements limités est plus simple, voire nécessaire. Dans ce paragraphe, nous allons voir comment calculer et utiliser les développements limités.
Rappelons que Maple permet d'obtenir des développements limités :

```
MAPLE
 f := sin(x)^3 * tan(x);
                                       3
                      f := sin(x)  tan(x)
> series(f, x = 0, 10);

                   4        6         8      10
                  x  - 1/6 x  + 3/40 x  + O(x  )
```

Attention, si l'on veut un DL à l'ordre n avec un reste en $o(x^n)$, il faut demander à Maple l'ordre $(n+1)$ (Maple donne les restes en $O(x^n)$).

Prévoir les ordres des DL

Lorsqu'on veut obtenir un développement limité d'un produit à l'ordre n, il faut faire un développement limité de chaque terme à l'ordre n et ne garder que les termes de degré inférieur à n dans le produit des parties principales. Si dans un des deux termes, le développement limité commence par x^k avec $k \geqslant 1$, on peut économiser des calculs.

Exemple 3.36 Calculer le développement limité de $f(x) = \tan x \times \sin^2 x$ à l'ordre 5. Nous pouvons utiliser que le développement de $\sin x$ et $\tan x$ commence par x (pas de termes constants) en écrivant $\sin^2 x = x^2 \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ et $\tan x = x\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$. Alors

$$f(x) = x^3 \left[\frac{\sin x}{x}\right]^2 \left[\frac{\tan x}{x}\right].$$

On voit que comme x^3 est en facteur, il suffit d'obtenir un DL de $(\sin x/x)^2$ et de $\tan x/x$ à l'ordre 2 :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3) \qquad \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)$$

$$\frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Et en effectuant le produit des DL,

$$f(x) = x^3 \left[1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right]\left[1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right] = x^3\left[1 + 0x^2 + o(x^2)\right] = x^3 + o(x^5).$$

Dans cet exemple, nous avons utilisé uniquement le DL de sin à l'ordre 3 et le DL de tan à l'ordre 3 (et non pas à l'ordre 5 comme on aurait pu le penser).

Plus généralement, si les développements limités de deux fonctions s'écrivent :

$$\begin{cases} f(x) &= a_k x^k + \dots \\ g(x) &= b_p x^p + \dots \end{cases}$$

il suffit d'écrire

$$f(x)g(x) = a_k b_k x^{k+p} \frac{f(x)}{x^k} \frac{g(x)}{x^p}$$

et pour obtenir un DL à l'ordre n de fg, il suffit de faire un DL à l'ordre $n-(k+p)$ de $f(x)/x^k$ et $g(x)/x^k$. Il suffit donc d'avoir le DL de f à l'ordre $n-p$ et celui de g à l'ordre $n-k$.

Exercice 3.8 ♡

Calculer le DL à l'ordre 13 *de* $f(x) = \operatorname{sh}^3(x)\ln^4(1+x^2)$.

Solution : *Comme* $\operatorname{sh} x = x + \dots$ *et* $\ln(1+x^2) = x^2 - \dots$, *écrivons*

$$f(x) = x^3 \times x^8 \left[\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right]^3 \left[\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]^4.$$

Il suffit d'avoir le DL des deux crochets à l'ordre 2 *:*

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \qquad \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^3 = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^4 = 1 - 2x^2 + o(x^2)$$

et finalement,

$$f(x) = x^{11}\left[1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]\left[1 - 2x^2 + o(x^2)\right] = x^{11}\left[1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right] = x^{11} - \frac{3}{2}x^{13} + o(x^{13}).$$

La même technique est valable pour les composées de DL. Pour calculer un DL à l'ordre n de $f(x) = g(h(x))$, d'après le cours, il nous faut un DL à l'ordre n de g et de h, effectuer la composée des parties régulières et ne conserver que les termes de degré inférieur à n. En pratique, on commence par regarder le premier terme du DL de h et en fonction de ce premier terme, on évalue les ordres nécessaires.

Exemple 3.37 Calculer le DL à l'ordre 4 de $f(x) = \operatorname{sh}(\sin^3 x)$. Puisque $\sin^3 x = x^3 + \dots$, lorsqu'on effectue le DL de sh, $\operatorname{sh}(y) = y + \dots$, en remplaçant y par la partie régulière de $\sin^3 x$, on s'aperçoit que le premier terme est déjà de degré 3. Les autres termes seront des $o(x^4)$ car $(x^3)^2 = x^6 = o(x^4)$ (on peut utiliser également que la fonction f est impaire, donc que le coefficient de x^4 est nul). Il suffit finalement d'utiliser le DL de sin et sh à l'ordre 1 :

$$f(x) = \operatorname{sh}(x^3 + o(x^3)) = x^3 + o(x^4).$$

DL et équivalents

Un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point permet de trouver un équivalent. Si au voisinage de zéro,

$$f(x) = a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \dots + o(x^n)$$

avec $a_k \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_k x^k$.

Exemple 3.38 Trouver un équivalent simple lorsque $x \to 1$ de $f(x) = x^x - x$. Commençons par faire un changement de variables pour se ramener à chercher un équivalent en 0. On pose $h = x - 1$ et on définit la fonction auxiliaire $g(h) = f(1+h) = (1+h)^{1+h} - 1 - h$. On se ramène à chercher un équivalent de g lorsque $h \to 0$. Sous forme exponentielle,

$$g(h) = [e^{(1+h)\ln(1+h)} - 1] - h.$$

Avec l' équivalent usuel, $(e^u - 1) \underset{u\to 0}{\sim} u$, puisque $(1+h)\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h \to 0$, $e^{(1+h)\ln(1+h)} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} h$. On est dans le cas où la somme formelle des équivalents est nulle. La méthode du paragraphe précédent ne s'applique pas. C'est typiquement le cas où l'on utilise les développements limités. Nous avons utilisé le DL de $\ln(1+h)$ à l'ordre 1, poussons le DL à l'ordre supérieur :

$$g(h) = e^{(1+h)(h-h^2/2+o(h^2))} - 1 - h = e^{h+h^2/2+o(h^2)} - 1 - h = 1 + (h + h^2/2) + h^2/2 + o(h^2) - 1 - h = h^2 + o(h^2).$$

Par conséquent, $g(h) \underset{h\to 0}{\sim} h^2$ et donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^2$

Exemple 3.39 Déterminer un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de $f(x) = \arctan(x) - \dfrac{\pi x + 1}{2x + 1}$. On commence toujours par étudier la limite de la fonction (si $f(x) \to l \neq 0$, alors $f(x) \sim l$!). Ici $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et il faut travailler un peu plus. On

cherche un équivalent de chaque terme de la somme : puisque $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi/2$ et $\frac{\pi x+1}{2x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi/2$, on est dans le cas où la somme des équivalents est nulle et on ne peut pas conclure. Utilisons alors les développements limités. Faisons le changement de variables $h = 1/x$ pour se ramener à nos DL en 0 : on définit la fonction $g(h) = f(1/h)$:

$$g(h) = \arctan(1/h) - \frac{\pi + h}{2+h} = \frac{\pi}{2} - \arctan h - \frac{\pi}{2}\frac{1+h/\pi}{1+h/2}.$$

On a utilisé que $\arctan(h) + \arctan(1/h) = \pi/2$ pour $h > 0$. Alors

$$g(h) = \frac{\pi}{2} - (h + \mathrm{o}(h)) - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \mathrm{o}(h)\right) = \frac{\pi-6}{4}h + \mathrm{o}(h).$$

On en déduit que $g(h) \underset{h\to0}{\sim} \frac{\pi-6}{4}h$ et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi-6}{4x}$.

Recherche de limites

Les développements limités sont un outil important, mais nécessitent des calculs souvent pénibles. Par exemple, pour trouver le développement limité d'un produit de fonctions, il faut effectuer un produit de polynômes (utiliser la méthode vue en B.4.2 page 1170). Si l'on veut uniquement trouver la limite d'une fonction qui s'écrit comme produits-quotients, il serait maladroit de calculer un développement limité : il est préférable d'utiliser les équivalents (on peut faire des produits et quotients d'équivalents).

On veut trouver la limite d'une fonction f qui s'écrit comme produit de fonctions f_i lorsque $x \to a$. Voici la démarche typique à suivre :

1. On étudie la limite de chaque fonction f_i et on regarde si la limite de f est évidente.
2. S'il y a des formes indéterminées, on cherche un équivalent de chaque terme f_i du produit. Si $a \neq 0$, on se ramène à des équivalents en zéro avec le changement de variables $h = (x - a)$ ou $h = (a - x)$ (ou $h = 1/x$ lorsque $a = \pm\infty$). On se ramène à chercher des équivalents en 0 de fonctions g_i.
3. Si la fonction g_i est une *somme* de fonctions, et si les sommes d'équivalents sont nulles, utiliser les développements limités pour trouver un équivalent de g_i.
4. On peut faire des produits d'équivalents et on trouve un équivalent de f qui permet de trouver la limite.

Exemple 3.40 Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de

$$f(x) = \frac{1}{x^4}\left(e^{x^2} - \cos x\right)\left[(1+x)^x - 1\right]$$

Il y a plusieurs formes indéterminées dans cette limite. Cherchons un équivalent de chaque facteur :

$$f_1(x) = e^{x^2} - \cos(x) = \left[1 + x^2 + \mathrm{o}(x^2)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right] = \frac{3}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) \underset{x\to0}{\sim} \frac{3}{2}x^2$$

$$f_2(x) = \left(e^{x\ln(1+x)} - 1\right) \underset{x\to0}{\sim} x^2$$

d'où $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x^4} \times \frac{3}{2}x^2 \times x^2 = \frac{3}{2}$ et donc $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} \frac{3}{2}$.

Lorsque la fonction f s'écrit comme *quotient* de fonctions, $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$, on commence par chercher un équivalent du *dénominateur*. Si par exemple, $d(x) \underset{x\to0}{\sim} b_k x^k$ avec $b_k \neq 0$ et qu'on doit utiliser un développement limité pour le numérateur, il suffira de faire un DL à l'ordre k pour conclure :

1. Si $n(x) = a_p x^p + \cdots + \mathrm{o}(x^k)$ avec $p < k$ et $a_k \neq 0$, $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{a_p}{b_k x^{k-p}} \xrightarrow[x\to0]{} \pm\infty$.
2. Si $n(x) = a_k x^k + \mathrm{o}(x^k)$ avec $a_k \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{a_k}{b_k}$ et $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} a_k/b_k$.
3. Si $n(x) = \mathrm{o}(x^k)$, alors $f(x) = \mathrm{o}(1)$ d'où $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$.

Exemple 3.41 Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de $f(x) = \dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x(1-\cos(3x))}$. Commençons par chercher un équivalent du dénominateur : $d(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \times \dfrac{9x^2}{2} = \dfrac{9}{2}x^3$. Pour obtenir la limite de f, il suffit de faire un DL du numérateur à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}
n(x) &= e^{x-x^3/6+o(x^3)} - e^{x+x^3/3+o(x^3)} \\
&= [1+(x-x^3/6)+\frac{1}{2}(x-x^3/6)^2+\frac{1}{6}(x-x^3/6)^3+o(x^3)] \\
&- [1+(x+x^3/3)+\frac{1}{2}(x+x^3/3)^2+\frac{1}{6}(x+x^3/3)^3+o(x^3)] \\
&= -\frac{x^3}{2}+o(x^3).
\end{aligned}$$

D'où $n(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^3/2$ et en prenant les quotients d'équivalents, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1/9$ puis $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/9$.

C.4.6 Étude locale d'une fonction

On se sert souvent des développements limités pour étudier le prolongement d'une fonction en un point. Si une fonction f est continue sur $]0,a]$ et qu'elle possède un développement limité en 0 à l'ordre 1 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$$

alors :

1. $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0$ donc la fonction f se prolonge en une fonction

$$\tilde{f} : \begin{cases} [0,a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

   qui est continue sur $[0,a]$.

2. De plus, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \frac{f(x)-a_0}{x} = a_1 + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1$$

   ce qui montre que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et que $\tilde{f}'(0) = a_1$.

Remarque 3.7 Une fonction $f :]0,a] \mapsto \mathbb{R}$ peut admettre un développement limité à un ordre $n \geqslant 2$ sans qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$. Étudiez attentivement le contre-exemple classique suivant ($n \geqslant 2$) :

$$f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{n+1}\sin(1/x^n) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

– Puisque $\left|x^{n+1}\sin(1/x^n)\right| \leqslant x^{n+1}$, $f(x) = o(x^n)$ et donc f admet un DL à l'ordre n en 0 ($a_0 = \cdots = a_n = 0$).
– La fonction f est donc continue et dérivable en 0 (puisqu'elle admet un DL(0,1)).
– Calculons pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = (n+1)x^n \sin\frac{1}{x^n} - n\cos\frac{1}{x^n}$$

  On voit que f' n'admet pas de limite en 0 (considérer par exemple les suites $x_n = (2n\pi)^{-1/n}$ et $y_n = (2n\pi+\pi/2)^{-1/n}$). La fonction f' n'est donc pas continue en 0 (et à fortiori n'est pas dérivable en 0). La fonction f est donc dérivable sur $[0,1]$ mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

Exemple 3.42 2 Montrer que la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable (et continue) en tout point $x \neq 0$. Étudions ce qui se passe en 0. Effectuons un DL de f en 0 à l'ordre 1 : pour $t \neq 0$,

$$f(t) = \frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)}\right] = \frac{1}{t}\left[1 - (1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2))\right] = -\frac{t}{6} + o(t).$$

On en déduit que $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} a_0 = 0 = f(0)$ donc que f est continue en 0. De plus, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1 = 1/6$. Le DL que nous avons fait ne suffit pas à conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ (voir le contre-exemple ci-dessus). Il nous faut étudier la continuité de la fonction dérivée :

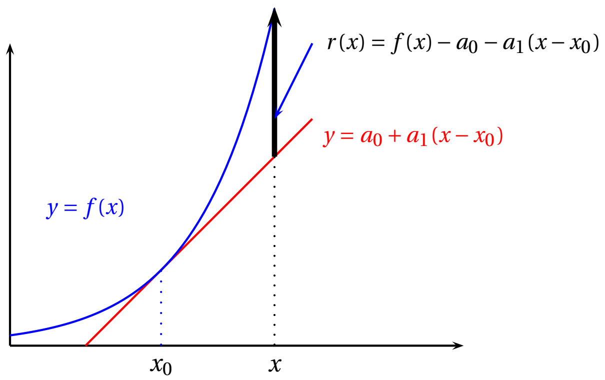
$$f' : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t} & \text{si } t \neq 0 \\ -1/6 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Cherchons la limite de f' lorsque $t \to 0$ en utilisant les équivalents : on a un équivalent immédiat du dénominateur : $d(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^4$. Il suffit de faire un DL à l'ordre 4 du numérateur pour conclure :

$$n(t) = t^2(1 - t^2/2 + o(t^2)) - t^2(1 - t^2/6 + o(t^2)) = -t^4/6 + o(t^4) \underset{t\to 0}{\sim} -t^4/6$$

d'où $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1/6 = f'(0)$. La fonction f' étant continue, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Un développement limité à un ordre supérieur à 2 permet de préciser l'allure locale de la courbe $y = f(x)$. Si au voisinage de x_0, $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, la fonction f est dérivable en x_0 et l'équation de la tangente en x_0 s'écrit $y = a_0 + a_1(x - x_0)$. La quantité $r(x) = f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ représente la mesure algébrique entre la courbe et la tangente :



Puisque $r(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_k(x - x_0)^k$ ($a_k \neq 0$), on obtient sur un voisinage de x_0, le signe de $r(x)$ et donc la position locale de la courbe par rapport à sa tangente (elle dépend du signe de a_k et de la parité de k).

Exemple 3.43 Pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{1}{x}$, on effectue un DL à l'ordre 5 du sinus pour trouver que

$$f(x) = -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{5!} + o(x^3).$$

On en déduit que f est dérivable en 0, que l'équation de la tangente au point $(0,0)$ s'écrit $y = -x/6$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que la courbe se situe au-dessus de la tangente pour $x \in]0,\alpha[$ et au-dessous pour $x \in]-\alpha, 0[$.

C.4.7 Développements asymptotiques

Revenons sur la définition d'un développement limité au voisinage de zéro : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + o(x^k)$. La fonction f s'écrit comme un polynôme (la partie régulière du DL) et un reste $r(x) = x^k \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Nous pouvons écrire par exemple :

$$e^{x \ln x} = 1 + x\ln x + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} + o(x^2 \ln^2 x).$$

En effet, il suffit d'utiliser le fait qu'un développement limité *est une égalité* : $e^u = 1+u+u^2/2+u^2\varepsilon(u)$ et on peut remplacer u par $x\ln x$:

$$e^{x\ln x} = x\ln x + \frac{x^2\ln^2 x}{2} + x^2\ln^2 x\varepsilon(x\ln x).$$

Mais puisque $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et que $\varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{}$, par composée de limites, $\varepsilon(x\ln x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et donc $x^2\ln^2 x\varepsilon(x\ln x) = \mathrm{o}(x^2\ln^2 x)$.

Exemple 3.44 Cherchons un équivalent lorsque $x\to 0$ de $f(x) = x^x - 1 - x\ln x$. Écrivons $f(x) = e^{x\ln x} - 1 - x\ln x = \left[1 + x\ln x + \frac{(x\ln x)^2}{2} + \mathrm{o}(x^2\ln^2 x)\right] - 1 - x\ln x = \frac{x^2\ln^2 x}{2} + \mathrm{o}(x^2\ln^2 x)$ et donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2\ln^2 x}{2}$.

Exemple 3.45 Cherchons un équivalent lorsque $x\to 0$ de $f(x) = (\tan x)^x - x^x$. Écrivons en utilisant le DL(0,3) de tan :

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\ln[x+x^3/3+\mathrm{o}(x^3)]} - e^{x\ln x}\\
&= e^{x(\ln x + \ln(1+x^2/3+\mathrm{o}(x^2)))} - e^{x\ln x}\\
&= e^{x\ln x}\left[e^{x\ln(1+x^2/3+\mathrm{o}(x^2))} - 1\right]\\
&= e^{x\ln x}\left[\frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right]\\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

en effet, puisque $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $e^{x\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Exemple 3.46

On appelle *développement asymptotique* d'une fonction f au voisinage d'un point a, une égalité :

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_k(x) + r(x)$$

où les fonctions f_i sont ordonnées par ordre décroissant d'importance au voisinage du point a : $f_1(x) = \mathrm{o}(f_0(x))$, $f_2(x) = \mathrm{o}(f_1(x))$ ...et $r(x) = \mathrm{o}(f_k(x))$. Si de plus $r(x) = \mathrm{o}(g(x))$, on dit qu'on a un développement asymptotique *à la précision* $g(x)$. Cette notion généralise les développements limités : un développement limité (au voisinage de a) est un développement asymptotique avec les fonctions $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = (x-a)$, $\dots f_k(x) = (x-a)^k$.

Remarque 3.8 Un développement asymptotique donne un équivalent de f : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f_0(x)$.

Exemple 3.47 Trouver un développement asymptotique à la précision $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$ de

$$f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$$

Posons $h = 1/x$ et $g(h) = f(1/h)$. On se ramène à effectuer un développement asymptotique de g à la précision h^2 au voisinage de 0. Écrivons :

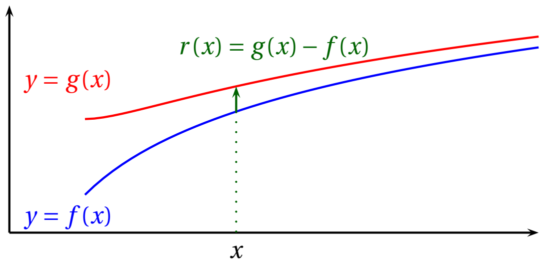
$$\begin{aligned}
g(h) &= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{1+h}{h}\right) + \frac{1+h}{h}\ln h\\
&= \frac{1}{h}\left[\ln(1+h) + h\ln h\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[h\ln h + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \mathrm{o}(h^3)\right]\\
&= \ln h + 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \mathrm{o}(h^2)
\end{aligned}$$

d'où au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = -\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \mathrm{o}(1/x^2).$$

En particulier, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$.

Un développement asymptotique permet de trouver des asymptotes à une courbe. On dit que deux courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont asymptotes au voisinage de a lorsque $g(x) - f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.



Par exemple, pour déterminer une asymptote d'une courbe d'équation $y = f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, on peut effectuer un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$. Si par exemple

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_k}{x^k} + o(1/x^k).$$

En posant $g(x) = a_0 x + a_1$, $r(x) = f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{a_k}{x^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ($a_k \neq 0$) et on en déduit que la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote on détermine la position de la courbe par rapport à son asymptote à l'aide du signe de l'équivalent $\frac{a_k}{x^k}$.

Exemple 3.48 Si $f(x) = (x+2)e^{1/x}$, en posant $h = 1/x$,

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{1+2h}{h} e^h \\ &= \frac{1}{h}(1+2h)(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)) \\ &= \frac{1}{h} + 3 + \frac{5}{2}h + o(h) \end{aligned}$$

et on obtient un développement asymptotique de f lorsque $x \to \pm\infty$:

$$f(x) = x + 3 + \frac{5}{2x} + o(\frac{1}{x})$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x+3$ est asymptote à la courbe $y = f(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$. De plus, puisque $f(x) - [x+3] \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{5}{2x}$, sur un voisinage de $+\infty$, $f(x) - [x+3] \geqslant 0$ ce qui montre que la courbe est située au-dessus de son asymptote et sur un voisinage de $-\infty$, la courbe est située en-dessous de son asymptote.

Un développement asymptotique permet également de trouver des courbes asymptotes plus compliquées que les droites. On effectue en pratique un développement asymptotique avec le dernier terme significatif qui tend vers zéro.

Exemple 3.49 Étudier la branche infinie lorsque $x \to +\infty$ de la courbe d'équation $y = f(x)$ où $f(x) = x^2 e^{\frac{x}{x^2-1}}$. En posant $h = 1/x$,

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{1}{h^2} e^{\frac{h}{1-h^2}} \\ &= \frac{1}{h^2} e^{h+h^3+o(h^3)} \\ &= \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}h + o(h) \end{aligned}$$

d'où $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{7}{6x} + o(\frac{1}{x})$. On en déduit que la parabole d'équation $y = x^2 + x + 1/2$ est asymptote à la courbe et que sur un voisinage de $+\infty$, la courbe est située au-dessus de cette parabole.

C.4.8 Exercices

Exercice 3.9 ♡♡♡

Déterminer un équivalent simple de

a. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+x}\right)$ *lorsque* $x \to +\infty$.

b. $f(x) = \sqrt{\operatorname{th} x} - 1$ *lorsque* $x \to +\infty$.

c. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}\right)$.

d. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt[3]{1+\tan^2(\frac{1}{2^n})} - \cos(\frac{1}{2^n})}$

e. $u_n = e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

f. $u_n = \sqrt{\cos(1/n)} - e^{\sin(1/n^2)}$.

g. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$.

h. $f(x) = \ln(\operatorname{ch} x) - \operatorname{ch}(\ln x)$ *lorsque* $x \to +\infty$.

i. $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$.

j. $u_n = \left[\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n$.

Solution :

a. $\frac{x^3+1}{x^3+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. *Écrivons donc* $f(x) = \ln\left(1+\frac{x^3+1}{x^3+x}-1\right) = \ln\left(1+\frac{-x+1}{x^3+x}\right)$. *Puisque* $\frac{-x+1}{x^3+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$.

b. *Puisque* $\operatorname{th} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, *écrivons* $f(x) = \sqrt{1+(\operatorname{th} x - 1)} - 1$ *et cherchons un équivalent de* $v(x) = \operatorname{th} x - 1 = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} - 1 = -2\dfrac{e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -2e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. *Par conséquent,* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -e^{-2x}$.

c. *Su* $u_n = cos(v_n)$, *la suite* (v_n) *tend vers* $\pi/2$. *Utilisons la trigonométrie :* $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\left[1+\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+2}-1\right)\right]\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+2}-1\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+2}-1\right) = -\frac{\pi}{2}\dfrac{-n+3}{n^2+n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

d. $\alpha_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. $\beta_n = \underbrace{\left[\left(1+\tan^2(1/2^n)\right)^{1/3}-1\right]}_{v_n} + \underbrace{\left[1-\cos(1/2^n)\right]}_{w_n}$. $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}$ *et* $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{4^n}$ *d'où* $\beta_n = \frac{5}{6}\frac{1}{4^n} + o(1/2^n)$ *et donc* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6}{5}\frac{4^n}{n}$.

e. *Écrivons d'abord*

$$u_n = (e^{\theta_n}-1) + (1-\cos n^{-1/4}) = a_n + b_n.$$

Puisque $\ln n = o(n)$, $\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln n/n} \to 0$. *Avec l'équivalent classique de l'exponentielle,* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln n/n}$. *Avec l'équivalent classique du cosinus,* $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/(2\sqrt{n})$ *et comme* $b_n = o(a_n)$, *il vient que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}$.

f. *Pour utiliser les équivalents usuels, écrivons*

$$u_n = \left[\sqrt{1+(\cos 1/n - 1)} - 1\right] - \left[e^{\sin(1/n^2)} - 1\right] = a_n + b_n.$$

On trouve que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/2n^2$ *et* $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$. *Donc avec la définition d'un équivalent,* $a_n = -1/2n^2 + o(1/n^2)$ *et* $b_n = 1/n^2 + o(1/n^2)$ *et donc* $u_n = 1/2n^2 + o(1/n^2)$. *Finalement,* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/2n^2$.

g. *En utilisant les quantités conjuguées, écrivons :*

$$u_n = \frac{2}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)} = \frac{2}{v_n w_n}.$$

Ensuite, on cherche un équivalent de chaque partie du produit. Puisque $\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $n+\sqrt{n^2+1} = 2n + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$. *Donc* $\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$. *De même,* $\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ *et ensuite* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2n}$. *On fait de même pour* w_n : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ *et finalement,* $u_n \sim \dfrac{1}{4\sqrt{2}n^{3/2}}$.

h. *Utilisons la propriété du logarithme pour écrire* $\ln(\operatorname{ch} x) = \ln\left(\frac{e^x}{2}(1+e^{-2x})\right) = x - \ln 2 + \ln(1+e^{-2x}) = x + o(x)$ *et ensuite* $\operatorname{ch}(\ln x) = \frac{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}{2} = \frac{x-1/x}{2} = \frac{x}{2} + o(x)$. *Alors* $f(x) = \frac{3}{2}x + o(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}x$.

i. *Sous forme exponentielle,*

$$u_n = e^{n\ln n \ln\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]} = e^{a_n}$$

et $a_n = n\ln n \ln\left[1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln n}{n\ln n} = 1$ *d'où* $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et donc* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e$.

j. *Sous forme exponentielle :* $u_n = e^{n\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{a_n}$ *Utilisons ensuite la formule de trigonométrie :*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{3}+\tan\frac{1}{n}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}} \sim \sqrt{3}.$$

On n'a pas le droit de prendre l'exponentielle d'équivalents ! Formons toutefois le quotient :

$$\theta_n = \frac{u_n}{e^{n\ln\sqrt{3}}} = e^{n\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{1}{n}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}}\right)} = e^{a_n}$$

avec

$$a_n = n\ln\left(1+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)\tan\frac{1}{n}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}}\right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)$$

donc $\theta_n \to e^{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}$ *et donc*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n\ln\sqrt{3}+(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}})} = e^{(\frac{4\sqrt{3}}{3})}(\sqrt{3})^n.$$

Exercice 3.10 ♡♡♡

Déterminer les limites :

a. $f(x) = \left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ *lorsque* $x \to 1$.

b. $f(x) = [\ln(1+e^{-x})]^{1/x}$ *lorsque* $x \to +\infty$.

c. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2(x)}$ *lorsque* $x \to 0$.

d. $f(x) = \left[\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{x\ln x}$ *lorsque* $x \to +\infty$.

e. $f(x) = \dfrac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$ *lorsque* $x \to 1^+$.

f. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \dfrac{1}{\ln^2(1+x)}$ *lorsque* $x \to 0$.

g. $f(x) = \dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ *lorsque* $x \to 1$.

Solution :

a. *Par le changement de variables* $h = x-1$, *on se ramène à chercher la limite lorsque* $h \to 0$ *de*

$$g(h) = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi h}{4}\right)^{-1/\tan(\pi h/2)} = \exp\left[-\frac{1}{\tan\frac{\pi h}{2}}\ln\left(1+\frac{2\tan\pi h/4}{1-\tan\pi h/4}\right)\right]$$

et avec les équivalents usuels, on trouve que la limite vaut $1/e$.

b. *Sous forme exponentielle,*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right)}$$

Mais puisque $\ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$, *on peut écrire* $\ln(1+e^{-x}) = e^{-x}\times\theta(x)$ *avec* $\theta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. *Alors*

$$\frac{1}{x}\ln\left(\ln(1+e^{-x})\right) = -1 + \frac{\ln(\theta(x))}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1.$$

Finalement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1/e$.

c. *Si* $f(x) = n(x)/d(x)$ *alors* $d(x) \underset{x\to0}{\sim} x^2$ *et* $n(x) = \ln(1-(1-\cos(3x))) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{9x^2}{2}$ *d'où finalement* $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} -9/4$.

d. *Sous forme exponentielle,* $f(x) = e^{x\ln x\ln\left[1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right]}$. *Avec l'équivalent classique du logarithme,* $\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$ *d'où* $x\ln x\ln(1+\ln(1+1/x)/\ln x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ *et finalement* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e$.

e. *Avec le changement de variables $h = x - 1$, on se ramène à chercher la limite lorsque $h \to 0^+$ de*

$$g(h) = \frac{(1+h)^{1+h} - 1 - h}{\ln(1+\sqrt{h(2+h)})}.$$

Puisque $d(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{2h}$, il suffit de faire un DL à l'ordre 1 du numérateur :

$$n(h) = e^{(1+h)(h+\mathrm{o}(h))} - 1 - h = \mathrm{o}(h)$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.

f. *Réduisons au même dénominateur $f(x) = \dfrac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \ln^2(1+x)}$. Le dénominateur $d(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et il suffira de faire un DL du numérateur $r(x)$ à un ordre inférieur à 4 pour conclure. On trouve que $n(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^3$ et donc que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -1/x$ d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$.*

g. *Avec le changement de variables $h = x - 1$, on se ramène à chercher la limite lorsque $h \to 0$ de*

$$g(h) = \frac{3(1-\sqrt[3]{1+h}) - 2(1-\sqrt{1+h})}{6(1-\sqrt{1+h})(1-\sqrt[3]{1+h})}.$$

Avec l'équivalent usuel $(1+h)^\alpha - 1 \underset{h\to 0}{\sim} \alpha h$, on trouve un équivalent du dénominateur : $d(h) \underset{h\to 0}{\sim} h^2$. Il suffit de faire un DL à l'ordre 2 du numérateur :

$$n(h) = 3\left[1 - \left(1 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{9} + \mathrm{o}(h^2)\right)\right] - 2\left[1 - \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \mathrm{o}(h^2)\right)\right] = \frac{h^2}{12} + \mathrm{o}(h^2).$$

Finalement, $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1}{12}$.

C.5 Étude de suites récurrentes, vitesse de convergence

C.5.1 Étude d'une suite récurrente

Dans ce paragraphe, nous allons voir quelques techniques pour étudier une suite définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Nous allons citer quelques résultats hors programme dans le but de dégager quelques méthodes générales. Dans la pratique des exercices, n'utilisez pas ces théorèmes, mais rédigez des démonstrations (essentiellement des récurrences simples) pour retrouver ces résultats.

Une procédure Maple permet de calculer le n-ième terme d'une suite récurrente

MAPLE

```
terme := proc(f, u0, n)
  local u, i;
  u := u0;
  for i from 1 to n do
    u := f(u) #u = u_i
  od;
  u;  #u = u_n
end;

f := x -> x^2
terme(f, 2, 3);
```

On peut également calculer la liste des n premiers termes de la suite

MAPLE

```
listetermes := proc(f, u0, n)
  local u, i, l;
  u := u0;
  l := u0;
  for i from 1 to n do
    u := f(u);
    l := l, u;
  od;
  [l];
end;
```

DÉFINITION 3.2 Intervalle stable
On dit qu'un intervalle I est *stable* par la fonction f lorsque $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \in \mathrm{I}$.

PROPOSITION 3.2 La suite récurrente reste dans un intervalle stable
Si I est un intervalle stable par la fonction f et si $u_0 \in \mathrm{I}$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathrm{I}$.

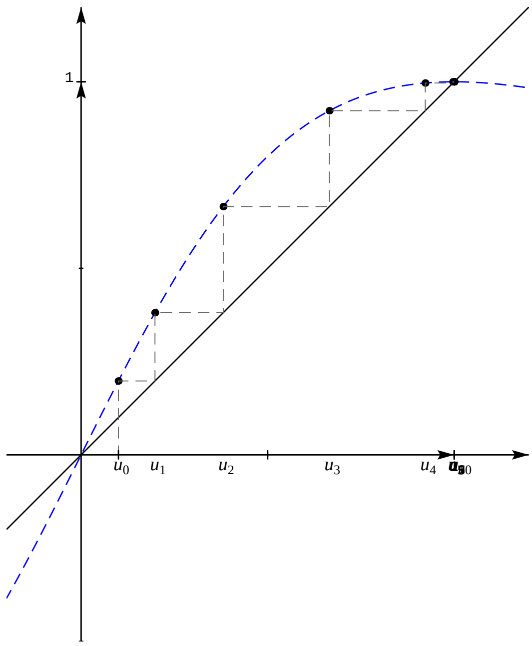
Démonstration *Par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a supposé que $u_0 \in \mathrm{I}$. Supposons la propriété vraie au rang n, $u_n \in \mathrm{I}$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et que I est stable par f, $f(u_n) \in \mathrm{I}$.*

Le résultat suivant est fondamental car il permet de trouver les limites éventuelles d'une suite récurrente.

PROPOSITION 3.3 ♡ Limites possibles de (u_n)
Si la suite (u_n) converge vers une limite finie l, et si la fonction f est *continue* au point l, alors l est un *point fixe* de la fonction f : $f(l) = l$.

Démonstration *Si (u_n) converge vers l, alors la suite extraite (u_{n+1}) converge vers la même limite l. De plus, d'après le théorème 11.22 page 426, comme la fonction f est continue au point l, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(l)$. Par unicité de la limite, on doit avoir $l = f(l)$.*

Les deux résultats précédents montrent qu'il est important d'étudier les intervalles stables par la fonction f et les points fixes de f. Un point fixe d'une fonction se lit facilement sur un dessin : il correspond à l'intersection du graphe de f avec la première bissectrice. Lors de l'étude d'une suite récurrente, on commencera donc par représenter sur le même dessin le graphe de la fonction et la première bissectrice. On peut ainsi deviner le comportement de la suite (u_n) en représentant les premiers termes de la suite par « ricochets »sur la première bissectrice.



Multimédia : Animation pour représenter l'évolution d'une suite récurrente avec des ricochets sur la première bissectrice

Le dessin permet également de visualiser les intervalles stables intéressants, en général limités par les points fixes de la fonction.

L'étude générale d'une suite récurrente peut être très compliquée, et une suite récurrente aussi simple que $u_0 \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda\, u_n(1-u_n)$ est un sujet de recherche récent ! Nous allons étudier uniquement le cas le plus simple où la fonction f est *monotone* sur un intervalle stable I.

PROPOSITION 3.4 **Cas où f est croissante sur un intervalle stable**
On suppose que la fonction f est *continue* et *croissante* sur un intervalle I *stable* et que $u_0 \in$ I.

1. Si $u_0 \leqslant f(u_0)$, la suite (u_n) est croissante.
2. Si $u_0 \geqslant f(u_0)$, la suite (u_n) est décroissante.

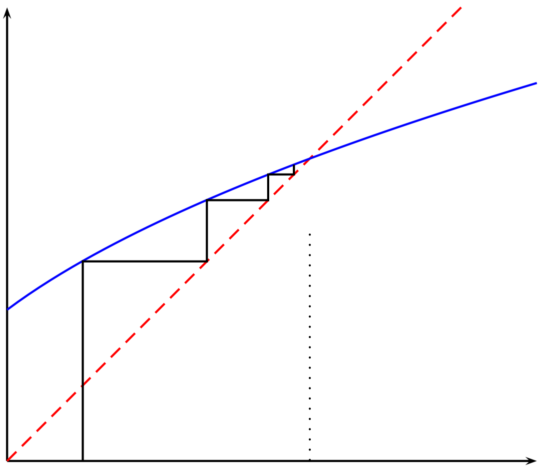
Démonstration *On a déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in$ I. Supposons par exemple que $u_0 \leqslant f(u_0)$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$. La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons-la vraie au rang n : $u_n \leqslant u_{n+1}$. Puisque f est croissante sur* I*, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.*

Remarque 3.9 Si de plus l'intervalle I est borné, alors la suite (u_n) converge en vertu du théorème de la limite monotone et sa limite ne peut être qu'un point fixe de f. Cela nous suffit en général pour conclure.

Exemple 3.50 Étudions la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \end{cases}.$$

Introduisons la fonction $f : \begin{cases} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{4+3x} \end{cases}$. Elle est continue sur $[0,+\infty[$ et un point fixe $l \geqslant 0$ de f vérifie $l^2 = 4+3l$, c'est-à-dire $l = 4$.



On justifie ce que l'on voit sur le dessin en appliquant le théorème précédent. Les intervalles $\mathrm{I}_1 = [0,4]$ et $\mathrm{I}_2 = [4,+\infty[$ sont stables par la fonction continue f.

- Si $u_0 \in [0,4]$, puisque $u_0 \leqslant f(u_0)$, la suite (u_n) est croissante. Puisqu'elle est majorée par 4, elle converge et ce ne peut être que vers l'unique point fixe de f donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.
- Si $u_0 \in [4,+\infty[$, puisque $u_0 \geqslant f(u_0)$, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 4, elle converge et ce ne peut être que vers l'unique point fixe de f donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.

Nous avons donc montré que $\forall u_0 \geqslant 0,\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.

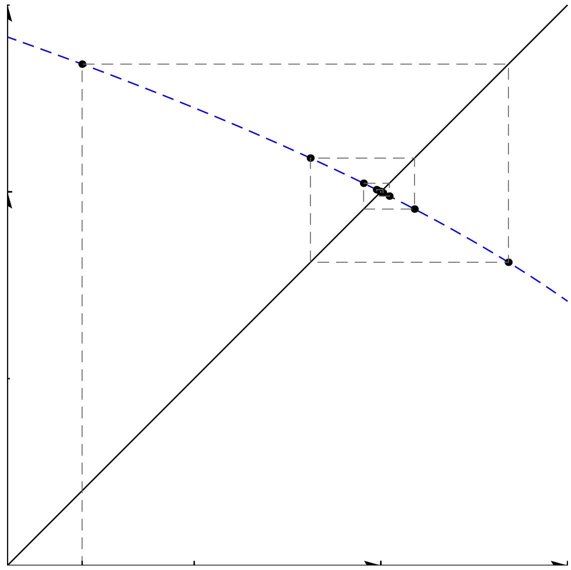
Remarque 3.10 Dans l'étude d'une suite récurrente, il est intéressant d'étudier le signe de la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$ qui donne la position du graphe de f par rapport à la première bissectrice et qui permet de connaître le signe de $f(u_0) - u_0$.

PROPOSITION 3.5 **Cas d'une fonction décroissante sur un intervalle stable**
On suppose que la fonction f est continue et *décroissante* sur un intervalle I *stable* et que $u_0 \in$ I. Alors les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Démonstration *Notons $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$. On calcule*

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n)$$

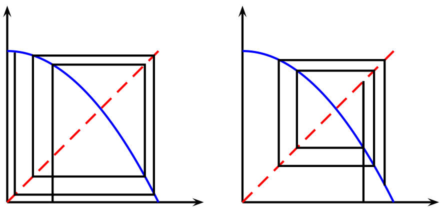
et de même $w_{n+1} = f\circ f(w_n)$. Les deux suites vérifient la même relation de récurrence associée à la fonction $g = f\circ f$. Puisque la fonction f est décroissante sur I, la fonction g est croissante sur I et les deux suites (v_n) et (w_n) sont monotones. Si $u_0 \leqslant f\circ f(u_0)$, alors $u_1 \geqslant f\circ f(u_1)$ et d'après la proposition 3.4, la suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante. Si par contre $u_0 \geqslant f\circ f(u_0)$, alors $u_1 \leqslant f\circ f(u_1)$ donc (v_n) est décroissante et (w_n) est croissante.



Remarque 3.11 La preuve précédente montre qu'il peut être intéressant d'étudier le signe de la fonction définie par $\theta(x) = f\circ f(x) - x$.

Exemple 3.51 Étudions la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1-u_n^2 \end{cases}$$



Introduisons la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array}\right.$. On vérifie facilement que l'intervalle $\mathrm{I} = [0,1]$ est stable par f donc que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0,1]$. La fonction f est décroissante sur I et admet un unique point fixe $l\in[0,1]$ vérifiant $l^2+l-1=0$ c'est-à-dire $l = (\sqrt{5}-1)/2$. On calcule $g(x) = f\circ f(x) = 1-(1-x^2)^2$ puis $g(x)-x = x(1-x)(x^2+x-1)$. Les points fixes de g dans $[0,1]$ sont donc 0, l et 1. En utilisant le théorème précédent,

- Si $0\leqslant u_0 < l$, puisque $g(u_0)\geqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante. Puisque (u_{2n}) est décroissante minorée par 0, elle converge d'après le théorème de la limite monotone et ce ne peut être que vers un point fixe x de g. Par passage à la limite dans l'inégalité $u_{2n}\leqslant u_0$, on obtient que $x\leqslant u_0 < l$ d'où la seule possibilité $x=0$. Nous avons donc montré que $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Le même raisonnement montre que $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la suite (u_n) est donc divergente.
- Si $l < u_0 \leqslant 1$, comme $g(u_0)\leqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) décroissante. Elles convergent toutes les deux vers l ce qui montre en vertu du théorème 10.24 page 363 que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

C.5.2 Vitesse de convergence d'une suite

On s'intéresse dans ce paragraphe à la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite. Votre calculatrice sait faire des opérations simples comme l'addition, la multiplication et la division de nombres décimaux. Lorsque vous tapez 2 suivi de la touche « racine », votre calculatrice utilise un *algorithme* qui calcule une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ en n'effectuant que des additions, multiplications et divisions.

Certaines suites convergent vers $\sqrt{a}$ très lentement et demandent un grand nombre de termes pour obtenir une approximation satisfaisante alors que d'autres convergent très rapidement et il suffit de calculer quelques termes pour obtenir une précision à neuf chiffres.
Considérons une suite (u_n) qui converge vers une limite finie l. Nous noterons

$$\varepsilon_n = |u_n - l|$$

l'erreur commise en approximant la limite l par le n-ième terme de notre suite. La vitesse de convergence de la suite (u_n) vers sa limite est la vitesse de convergence de la suite d'erreurs (ε_n) vers 0. Nous voulons connaître le nombre n de termes à calculer pour que cette précision soit inférieure à une valeur $\varepsilon = 10^{-p}$ donnée. Pour fixer les idées, supposons que notre suite soit une suite récurrente et qu'à chaque terme le calcul de $f(x)$ prenne 10^{-6} secondes à notre calculatrice. Nous noterons T le temps total de calcul pour aboutir à une précision de 10^{-10}.

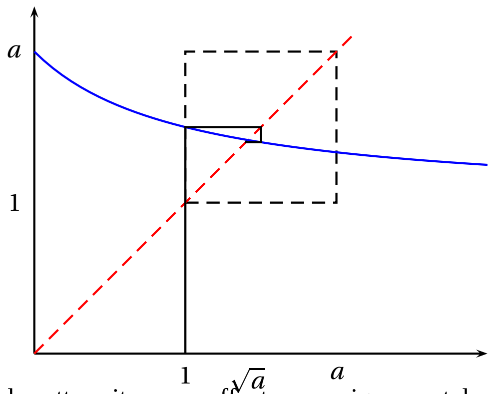
- Si $\varepsilon_n = 1/n$, pour que $\varepsilon_n \leqslant 10^{-p}$, il faut prendre $n = 10^p$. Il faut calculer 10^{10} termes de notre suite ce qui nécessite un temps de calcul $T = 10^4$ secondes ou environ 3 heures ...
- Si $\varepsilon_n = 1/n^2$, n vaut $10^{p/2}$ et $T = 10^{-1}$: un dixième de seconde.
- Si $\varepsilon_n = 1/10^n$, $n = p$ et $T = 10^{-5}$ secondes.

On utilise le vocabulaire suivant pour classifier les vitesses de convergences :

- Si $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, (par exemple si $\varepsilon_n = 1/n^\alpha$), on parle de *convergence lente*.
- Si $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} k \in]0,1[$ (par exemple si $\varepsilon_n = k^n$), on parle de *convergence géométrique*.
- Si $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, (par exemple si $\varepsilon_n = 1/n!$), on parle de *convergence rapide*.

Exemple 3.52 Étudions un premier algorithme de calcul de la racine carrée d'un nombre $a > 1$ basé sur la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + a}{u_n + 1} \end{cases}$$



Pour calculer les termes successifs de cette suite, nous effectuons uniquement des additions et des divisions. Définissons la fonction associée : $f : \begin{cases} [0,+\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+a}{x+1} \end{cases}$. C'est une homographie de dérivée $f'(x) = \dfrac{1-a}{(x+1)^2} < 0$ et on vérifie facilement en étudiant les variations de f que l'intervalle $I = [1, a]$ est stable. On calcule $f(x) - x = \dfrac{(\sqrt{a}-x)(\sqrt{a}+x)}{x+1}$ et on voit que la fonction f admet un unique point fixe $l = \sqrt{a}$ dans l'intervalle I. En utilisant le théorème 3.5 page 1221, on vérifie que la suite (u_{2n}) est croissante, que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et qu'elles convergent toutes les deux vers $\sqrt{a}$ ce qui montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{a}$. Étudions la vitesse de convergence de cette suite. Définissons la suite $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{a}$. On obtient une relation de récurrence simple :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{u_n + a}{u_n + 1} - \sqrt{a} = \frac{u_n + a - \sqrt{a}(u_n+1)}{u_n + 1} = \frac{1-\sqrt{a}}{u_n+1}\varepsilon_n$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{a}$, on en déduit que

$$\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} = k < 1$$

La convergence de cette suite est donc géométrique.

Il existe une classe importante de suites récurrentes définies à l'aide d'une fonction f contractante. La convergence d'une telle suite est assurée par le théorème suivant que vous étudierez dans un cadre plus général en deuxième année.

THÉORÈME 3.6 **Point fixe en dimension un**
Soit $f : [a,b] \mapsto [a,b]$ une fonction *contractante*, c'est-à-dire une fonction k-lipschitzienne de rapport $k \in [0,1[$:

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k|x-y|.$$

Alors :

1. La fonction f possède un unique point fixe $l \in [a,b]$.
2. Pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.
3. La convergence est géométrique : $|u_n - l| \leqslant \mathrm{C}k^n$ où C est une constante.

Démonstration *Remarquons que la fonction f est continue sur l'intervalle stable $\mathrm{I} = [a,b]$ puisqu'elle est lipschitzienne. Définissons la fonction g par $g(x) = f(x) - x$. Puisque $f(a) \geqslant a$, $g(a) \geqslant 0$ et puisque $f(b) \leqslant b$, $g(b) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $l \in [a,b]$ tel que $g(l) = 0$, c'est-à-dire $f(l) = l$. Montrons l'unicité d'un point fixe de f. Supposons que $l, l' \in [a,b]$ vérifient $f(l) = l$ et $f(l') = l'$. En majorant la différence en valeur absolue, on obtient $|l-l'| = |f(l) - f(l')| \leqslant k|l-l'|$ d'où $(1-k)|l-l'| \leqslant 0$ et puisque $1-k > 0$, il vient que $l = l'$. En utilisant que l est un point fixe, majorons*

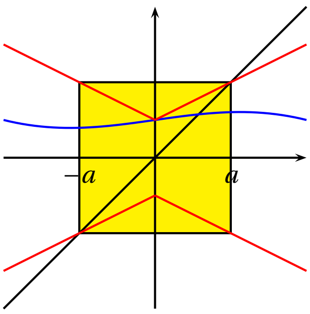
$$|u_{n+1} - l| = \left|f(u_n) - f(l)\right| \leqslant k|u_n - l|$$

Une récurrence simple montre qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant |u_0 - l|k^n$.

Remarque 3.12 On vérifie en pratique qu'une fonction est contractante en calculant sa dérivée et en montrant que $\sup|f'| \leqslant k < 1$. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction contractante, on peut montrer en utilisant les outils de math. sup. qu'elle admet un segment $\mathrm{I} = [-a,a]$ stable puis appliquer le théorème précédent. Puisque f est k-lipschitzienne, grâce à la minoration de l'inégalité triangulaire, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| - |f(0)| \leqslant |f(x) - f(0)| \leqslant k|x|$$

et donc $|f(x)| \leqslant |f(0)| + k|x|$. Le graphe de la fonction f est situé dans la région délimitée par les courbes d'équation $y = |f(0)| + k|x|$ et $y = -|f(0)| - k|x|$. La première bissectrice coupe ces courbes en a et $-a$ où $a = |f(0)|/(1-k)$. On vérifie facilement que le segment $[-a,a]$ est stable par f et d'après le théorème précédent, la fonction f admet un unique point fixe $l \in \mathbb{R}$ situé dans le segment $[-a,a]$.



Exemple 3.53 Étudions une autre suite récurrente qui permet également de calculer une valeur décimale approchée de $\sqrt{a}$:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

Remarquons que le calcul de u_n ne fait intervenir ici aussi que des additions et des divisions. Introduisons la fonction $f : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right) \end{cases}$. On calcule $f'(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{2x^2}$ et $f(x) - x = \dfrac{a - x^2}{2x}$. On en déduit que f possède un unique point fixe $l = \sqrt{a}$ ainsi que la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

- Si $0 < u_0 \leqslant \sqrt{a}$, alors $u_1 \geqslant \sqrt{a}$ et on se ramène au cas suivant.
- Si $u_0 \geqslant \sqrt{a}$, comme l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable par f, et que f est croissante sur cet intervalle avec $f(x) \leqslant x$, on vérifie que la suite (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{a}$. Elle converge donc vers $\sqrt{a}$.

Considérons désormais l'erreur commise en approximant $\sqrt{a}$ par u_n : $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{a}$. On obtient facilement une relation de récurrence liant ε_{n+1} à ε_n.

$$\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} = \frac{\varepsilon_n^2}{2u_n}$$

Puisque $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant u_1$, on en déduit que

$$0 \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant C\varepsilon_n^2$$

où $C = 1/(2u_1)$. Lorsque la suite d'erreurs vérifie une telle relation, on dit que la convergence est *quadratique*. Pour comprendre la signification pratique d'une telle convergence, regardons le cas d'une suite d'erreurs (e_n) vérifiant $e_{n+1} \leqslant e_n^2$. Si u_n est une valeur approchée de sa limite à 10^{-p} près, $(e_n \leqslant 10^{-p})$, alors comme $e_{n+1} \leqslant e_n^2$, le terme suivant u_{n+1} sera une valeur approchée à 10^{-2p} près. Le nombre de décimales communes entre u_n et sa limite *double* à chaque itération. On peut calculer la liste $[\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n]$ avec Maple (nous avons pris $a = 2$) :

MAPLE
```
liste_erreurs := proc(n)
   local u, l, rac2;
   rac2 := evalf(sqrt(2));
   u := 1.;
   l := NULL;
   for i from 1 to n do
      l := l, u - rac2;
      u := (u + 2/u) / 2;
   od;
   [l];
end;

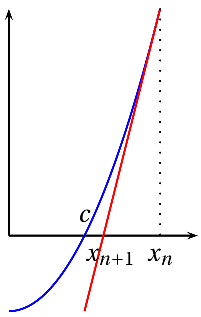
Digits := 30; liste_erreurs(10);
```

On obtient la liste d'erreurs

$$[-0.41421, 0.08578, 0.00245, 2.45 \times 10^{-6}, 1.59 \times 10^{-12}, 8.99 \times 10^{-25}, 0, 0, 0, 0]$$

On voit que u_5 est déjà une approximation de $\sqrt{2}$ avec 24 décimales exactes. À partir de u_6, l'erreur est inférieure à la précision de 30 décimales définie par la variable `Digits`.

La suite précédente est un cas particulier de la méthode de Newton qui permet de trouver une valeur approchée du zéro d'une fonction. Supposons que x_n soit une première valeur approchée de l'unique zéro c de la fonction g sur l'intervalle I. L'idée consiste à approximer le graphe de g par sa tangente au point x_n. L'intersection de cette tangente avec l'axe (Ox) va fournir une meilleure valeur approchée de c :



Si l'on suppose la fonction g dérivable sur I et que g' ne s'annule pas sur I, l'équation de la tangente au point $(x_n, g(x_n))$ s'écrit $Y = g(x_n) + g'(x_n)(X - x_n)$. On cherche $x_{n+1} = X$ pour que $Y = 0$ et on trouve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Si l'on prend la fonction g définie par $g(x) = x^2 - a$ qui s'annule en $\pm\sqrt{a}$, on retrouve notre suite récurrente $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$.

Multimédia : Une applet maple pour voir l'effet d'une convergence quadratique, géométrique sur le nombre de décimales exactes

C.6 Fractions rationnelles, primitives

Dans ce paragraphe, nous allons voir des techniques pour calculer une primitive d'une fonction sur un intervalle. Il est indispensable de comprendre que l'on ne sait calculer une primitive que d'un nombre très restreint de types de fonctions. Il est donc primordial de reconnaître des classes de fonctions que l'on saura primitiver et de connaître les algorithmes correspondants.

La première classe intéressante de fonctions que l'on sait primitiver est formée des fractions rationnelles. L'algorithme est basé sur leur décomposition en éléments simples. Nous commençons donc par étudier la pratique de cette décomposition. On obtient la décomposition d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$ avec Maple en utilisant la commande `convert` :

```
MAPLE
> F := (X^5 + 1) / (X^3 - X)^2;
                                     5
                                    X  + 1
                              F := ---------
                                     3    2
                                   (X  - X)
> convert(F, parfrac, X);
                  1             1           1      1
          1/2 -------- - 1/4 ----- + 5/4 ----- + ----
                     2          X - 1       X + 1    2
              (X - 1)                               X
```

On calcule une primitive avec Maple en utilisant la commande `int` :

```
MAPLE
 f := x / (x^3+1);
                                      x
                               f := ------
                                     3
                                    x  + 1
> int(f, x);
                               2
  - 1/3 ln(x + 1) + 1/6 ln(x  - x + 1) +
     1/3 sqrt(3) arctan(1/3 (2 x - 1) sqrt(3))
```

C.6.1 Décomposition pratique dans $\mathbb{C}$

Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes : $F = \frac{P}{Q}$ où Q est un polynôme unitaire. Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme est scindé. Le polynôme Q peut donc s'écrire $Q = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_n)^{\alpha_n}$. La forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ s'écrit alors :

$$F = E + \left(\frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}}\right) + \cdots + \\ + \left(\frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}}\right)$$

où la partie entière $E \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme et où les coefficients $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ sont complexes.

Calcul de la partie entière

1. Lorsque $\deg(P) < \deg(Q)$, $E = 0$. Lorsque $d = \deg(P) - \deg(Q) \geqslant 0$, E est un polynôme de degré d.
2. Lorsque $d = 0$, E est un polynôme constant qui s'obtient directement : $E = a_p$ où a_p est le coefficient de plus haut degré de P.
3. Lorsque $d \geqslant 1$, E est le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Exemple 3.54 $F = \frac{X^3 + 1}{X^2 - 3X + 2} = (X + 3) + \frac{7X - 5}{X^2 - 3X + 2}$.

On se ramène alors à décomposer $\frac{R}{Q}$ où R est le reste de la division de P par Q (avec une partie entière nulle).

Calcul du coefficient associé à une pôle simple

Lorsque $\alpha_i = 1$, on dit que le pôle a_i est *simple*.

Exemple 3.55

$$\frac{7X - 5}{(X - 1)(X - 2)} = \frac{\lambda}{X - 1} + \frac{\mu}{X - 2}$$

et on cherche les coefficients λ et μ. Il suffit de multiplier la décomposition par $(X - a_i)$ et de prendre $x = a_i$ dan la fraction restante :

$$\frac{7X-5}{X-2} = \lambda + \mu\frac{X-1}{X-2}.$$

En prenant $x = 1$, on trouve que $-2 = \lambda$. De même, en multipliant par $(X-2)$:

$$\frac{7X-5}{X-1} = \lambda\frac{X-2}{X-1} + \mu$$

et en prenant $x = 2$, on trouve que $9 = \mu$. On écrit alors la décomposition complète :

$$\frac{X^3+1}{(X-1)(X-2)} = (X+3) + \frac{-2}{X-1} + \frac{9}{X-2}.$$

Calcul des coefficients associés à un pôle multiple

Il existe une méthode qui permet de calculer tous les coefficients λ_{ij} (division selon les puissances croissantes d'un polynôme), mais elle est hors programme et en pratique l'ordre des pôles est généralement inférieur à 2. Nous préférons vous montrer une technique plus utile.

Exemple 3.56 Décomposons la fraction

$$F = \frac{X^3}{(X-1)^2(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-2)} + \frac{d}{(X-2)^2}.$$

1. Multiplions par X les deux membres :

$$\frac{X^4}{(X-1)^2(X-2)^2} = a\frac{X}{X-1} + b\frac{X}{(X-1)^2} + c\frac{X}{(X-2)} + d\frac{X}{(X-2)^2}.$$

   En faisant $x \to +\infty$, on obtient *toujours* une relation intéressante. Ici, $1 = a + c$. Il suffit donc de trouver l'un des deux coefficients a et c et on connaît automatiquement l'autre.

2. Les coefficients b et d sont simples à déterminer. Il suffit de multiplier les deux membres par $(X-1)^2$:

$$\frac{X^3}{(X-2)^2} = a(X-1) + b + c\frac{(X-1)^2}{(X-2)} + d\frac{(X-1)^2}{(X-2)^2}.$$

   En prenant ensuite $x = 1$, on tire $b = 1$. De la même façon, en multipliant par $(X-2)^2$ puis en prenant $x = 2$, on tire $d = 8$.

3. Il suffit enfin de prendre une valeur particulière pour x afin d'obtenir une nouvelle relation liant a et c. Ici, pour $x = 0$, on a

$$0 = -a + b - c/2 + d/4 = -a - c/2 + 3.$$

   On a les deux relations

$$\begin{cases} a + c & = 1 \\ 2a + c & = 6 \end{cases}$$

   et l'on tire $a = 5$, $c = -4$.

4. La décomposition s'écrit donc :

$$\frac{X^4}{(X-1)^2(X-2)^2} = \frac{5}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{4}{(X-2)} + \frac{8}{(X-2)^2}.$$

C.6.2 Décomposition pratique dans $\mathbb{R}$

Considérons une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$. La décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur s'écrit :

$$Q = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_n)^{\alpha_n} (X^2 + b_1X + c_1)^{\beta_1} \dots (X^2 + b_pX + c_p)^{\beta_p}$$

Alors la fraction F s'écrit de façon unique :

$$\begin{aligned}F = E + \Bigg[\left(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}}\right) + \dots \\ + \left(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\right)\Bigg] \\ + \Bigg[\left(\frac{\mu_{11}X+\delta_{11}}{X^2+b_1X+c_1} + \frac{\mu_{12}X+\delta_{12}}{(X^2+b_1X+c_1)^2} + \dots + \frac{\mu_{1\beta_1}X+\delta_{1\beta_1}}{(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}}\right) + \dots \\ + \left(\frac{\mu_{p1}X+\delta_{p1}}{X^2+b_pX+c_p} + \frac{\mu_{p2}X+\delta_{p2}}{(X^2+b_pX+c_p)^2} + \dots + \frac{\mu_{p\beta_p}X+\delta_{p\beta_p}}{(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

où la partie entière $E \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme nul ou de degré $d = \deg P - \deg Q$, et tous les λ_{ij}, μ_{ij}, δ_{ij} sont des réels. Le premier groupe est formé *d'éléments simples de première espèce* et le second groupe d'*éléments simples de seconde espèce*.

Nous allons voir sur des exemples simples comment calculer les coefficients de cette décomposition.

Exemple 3.57 1

$$F = \frac{1}{X^3+1}$$

1. Commençons par factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le dénominateur : $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$. La décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit donc
$$\frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$
2. On calcule facilement le coefficient du pôle simple en multipliant par $(X-1)$ et en prenant $x=1$: $a = 1/3$.
3. En multipliant par X et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve une relation entre coefficients : $0 = a+b$ d'où $b = -1/3$.
4. Il ne reste que le coefficient c à déterminer. En prenant $x=0$, on a la relation $1 = a+c$ d'où $c = 2/3$.
5. La décomposition s'écrit donc :
$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1} - \frac{X-2}{X^2-X+1}\right)$$

Exemple 3.58

$$F = \frac{1}{X^4+1}$$

Le polynôme $Q = X^4+1$ est bicarré. On obtient sa décomposition en suivant la technique du paragraphe B.4.4 :

$$X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).$$

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit :

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{X}+1}.$$

Le plus rapide lorsqu'il n'y a pas de pôles simples consiste à réduire au même dénominateur :

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{[a+c]X^3 + [\sqrt{2}(a-c)+(b+d)]X^2 + [(a+c)+\sqrt{2}(b-d)]X + (b+d)}{X^4+1}.$$

On obtient ainsi un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a+c & = 0 \\ \sqrt{2}(a-c)+(b+d) & = 0 \\ b-d & = 0 \\ b+d & = 1 \end{cases} \text{ d'où } b = d = 1/2, a = -1/2\sqrt{2} = -c.$$

La décomposition s'écrit donc :

$$\frac{1}{X^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{X^2+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} - \frac{X^2-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right).$$

C.6.3 Primitives de fractions rationnelles

Rappelons qu'on dit qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f *sur un intervalle* I lorsque F est dérivable et que $F' = f$. Toute fonction f continue possède une primitive (théorème fondamental de l'analyse) et toutes les primitives de f diffèrent d'une constante. Dans les calculs qui suivent, on ne notera pas les constantes de primitivation. On ne définira pas non plus les intervalles sur lesquels on cherche les primitives (ils sont définis à partir des pôles de la fraction). Ne pas confondre primitive $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (une fonction) avec une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (un réel). Les méthodes que nous allons voir s'appliquent également au calcul d'intégrales : il suffit de ne pas oublier de modifier les bornes lors d'un changement de variables.
On veut calculer une primitive d'une fraction rationnelle $F(x) = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$. On commence par décomposer la fraction en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et on doit alors primitiver des éléments simples de première espèce et de deuxième espèce.

Primitives des éléments simples de première espèce

On connaît une primitive sur $I_1 =]-\infty, a[$ ou $I_2 =]a, +\infty[$ de :

♡ **3.12**

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \begin{cases} -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} & \text{si } k \neq 1 \\ \ln|x-a| & \text{si } k = 1 \end{cases}.$$

Remarque 3.13 Ces primitives se rencontrent très souvent en pratique. Il suffit de retenir que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ (le dénominateur ne doit pas s'annuler) :

♡ **3.13**

$$\int (x-a)^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}.$$

et d'écrire

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} = \frac{-1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

Primitive des éléments simples de seconde espèce

Il est bon de connaître par coeur deux primitives fondamentales que l'on rencontre souvent dans les calculs :

♡ **3.14**

$$\begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} & = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} & = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \end{cases}.$$

Pour primitiver un élément simple de seconde espèce

$$F(x) = \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x$$

on procède *dans l'ordre suivant* :

1. **Éliminer x du numérateur :**

$$F(x) = \frac{a}{2}\left(\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2b/a-p}{(x^2+px+a)^k}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{a}{2}\int \frac{u'(x)}{u^k(x)}\,\mathrm{d}x + C\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}.$$

   On sait primitiver :

$$\int \frac{u'(x)}{u^k(x)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{(k-1)u^{k-1}(x)} & \text{pour } k \geqslant 2 \\ \ln|u(x)| & \text{pour } k = 1 \end{cases}.$$

   On se ramène donc à trouver une primitive $G(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$.

2. **Mettre le trinôme sous forme canonique :** on écrit

$$x^2+px+q = (x+p/2)^2 + (q-p^2/4) = (x-\alpha)^2 + a^2$$

   où $a = \sqrt{4q-p^2}/2$ ($\Delta = p^2-4q < 0$ puisque le trinôme est irréductible). On effectue ensuite le changement de variables $y = x+p/2$ et on se ramène à primitiver

$$G_k(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+a^2)^k}$$

Lorsque $k=1$, $G_1(y)=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{y}{a}$ et pour $k\geqslant 2$,

3. **Intégrer par parties** $G_{k-1}(y)$ **:**

$$\begin{aligned}
G_{k-1}(y) &= \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+a^2)^{k-1}}\\
&= \frac{y}{(y^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{y^2+a^2-a^2}{(y^2+a^2)^k}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{y}{(y^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1)\left[G_{k-1}(y)-a^2G_k(y)\right].
\end{aligned}$$

On exprime alors $G_k(y)$ en fonction de $G_{k-1}(y)$ et en itérant, en fonction de $G_1(y)$ que l'on sait calculer.

Exemple 3.59 Calculons $F(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$. On a décomposé la fraction en éléments simples dans l'exemple 3.57 page 1228 : $F(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x=\ln|x+1|-G(x)$. On écrit alors

$$G(x)=\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{3}{2}H(x)$$

avec $H(x)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+3/4}$. Avec le changement de variables $y=(x-1/2)$, on calcule $K(y)=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y}{\sqrt{3}}$ et donc $H(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ et finalement,

$$F(x)=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Exemple 3.60 Calculons $F(x)=\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

$$F(x)=\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1/2)^2+3/4]^2}}_{G(x)}.$$

Avec le changement de variables $y=x+1/2$ et en posant $a=\sqrt{3}/2$, on est amené à calculer $H_2(y)=\dfrac{\mathrm{d}y}{(y^2+a^2)^2}$. En intégrant par parties

$$H_1(y)=\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+a^2}=\frac{y}{y^2+a^2}+2\int \frac{y^2+a^2-a^2}{(y^2+a^2)^2}=\frac{y}{y^2+a^2}+2H_1(y)-2a^2H_2(y)$$

on trouve que $H_2(y)=\dfrac{1}{2a^2}\left[\dfrac{y}{y^2+a^2}+\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{y}{a}\right)\right]$ d'où $G(x)=\dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ et finalement

$$F(x)=\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

C.6.4 Primitives $\int F(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$, règles de Bioche

On sait en théorie primitiver des fonctions définies par $f(x)=\dfrac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}$ où $P(X,Y)$ et $Q(X,Y)$ sont des polynômes en deux variables (sommes-produits de X et Y). Par exemple :

- $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x+\cos x}{\sin x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ où $F(X,Y)=\dfrac{X^3+Y}{X+Y^2}$.
- $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\tan^3 x}\,\mathrm{d}x$ où $F(X,Y)=\dfrac{X/Y}{1+X^3/Y^3}=\dfrac{XY^2}{X^3+Y^3}$.

On définit *l'élément différentiel* $\omega(x) = F(\sin x, \cos x)\,dx$ et on regarde s'il est invariant par l'un des trois changements de variables $x \mapsto -x$, $x \mapsto \pi - x$, $x \mapsto \pi + x$. Par exemple, pour calculer $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx$,

$$\omega(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx$$

– $\omega(-x) = \frac{(-\sin x)(\cos x)}{-\sin^3 x + \cos^3 x}(-\,dx) = \frac{\sin x \cos x}{-\sin^3 x + \cos^3 x} \neq \omega(x)$.
– $\omega(\pi - x) = \frac{(\sin x)(-\cos x)}{\sin^3 x - \cos^3 x}(-\,dx) \neq \omega(x)$.
– $\omega(\pi + x) = \frac{(-\sin x)(-\cos x)}{-\sin^3 x - \cos^3 x}\,dx = -\omega(x)$.

L'élément différentiel n'est invariant par aucun des changements de variables.
Pour $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$,
– $\omega(-x) = \omega(x)$.
– $\omega(\pi - x) = \omega(x)$.
– $\omega(\pi + x) = \omega(x)$.

L'élément différentiel est invariant par chaque changement de variables.
Les règles de Bioche (hors programme) suggèrent un changement de variables intéressant qui ramène le calcul à une primitive d'une fraction rationnelle :

1. Si $\omega(-x) = \omega(x)$, faire le changement de variables $t = \cos(x)$.
2. Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, faire le changement de variables $t = \sin(x)$.
3. Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, faire le changement de variables $t = \tan x$.
4. Si $\omega(x)$ n'est invariant par aucune des trois transformations, faire le changement de variables $t = \tan(\frac{x}{2})$.

Remarque 3.14 Ces règles sont faciles à mémoriser : parmi les trois fonctions $\sin, \cos, \tan$, $\cos$ est la seule invariante par $x \mapsto -x$, $\sin$ est la seule invariante par $x \mapsto \pi - x$ et $\tan$ est la seule invariante par $x \mapsto \pi + x$.

Exemple 3.61

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 1}\,dx$$

On voit que $\omega(-x) = \omega(x)$. Comprenons pourquoi le changement de variables $t = \cos x$ va fonctionner : $dt = -\sin x\,dx$ d'où $F(x) = -\int \frac{(-\sin x\,dx)}{1 + (1 - \cos^2 x)}$ et on se ramène à calculer la primitive de la fraction rationnelle :

$$G(t) = \int \frac{dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}}\right|$$

d'où finalement

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \cos x}{\sqrt{2} + \cos x}.$$

Exemple 3.62

$$F(x) = \int \tan x\,dx$$

1. $\omega(-x) = \omega(x)$, on peut donc effectuer le changement de variables $t = \cos(x)$, $dt = -\sin(x)\,dx$:

$$F(x) = -\int \frac{(-\sin x\,dx)}{\cos x}$$

$$G(t) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t|$$

   d'où $F(x) = -\ln|\cos x|$.

2. $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on peut effectuer le changement de variables $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)\,dx$:

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}(\cos x\,dx) = \int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x}(\cos x\,dx)$$

$$G(t) = \int \frac{t}{1 - t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2 - 1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|t^2 - 1|$$

   d'où $F(x) = -\frac{1}{2}\ln|1 - \sin^2 x| = -\ln|\cos x|$.

3. $\omega(\pi+x)=\omega(x)$, on peut effectuer le changement de variables $t=\tan x$, $\mathrm{d}t=(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. En utilisant la relation $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$:

$$F(x)=\int \tan x\cos^2 x\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$G(t)=\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

d'où

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x}=-\ln|\cos x|.$$

Exemple 3.63

$$F(x)=\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

$\omega(x)$ n'est invariant par aucune des trois transformations. On utilise le changement de variables général $t=\tan\frac{x}{2}$:

♡ **3.15**

$$\begin{cases}\sin(x) &= \dfrac{2t}{1+t^2}\\ \cos(x) &= \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan(x) &= \dfrac{2t}{1-t^2}\\ \mathrm{d}x &= \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\end{cases}.$$

$$G(t)=\int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

d'où $F(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)$.

Remarque 3.15 En toute rigueur, les changements de variables de cette section ne sont valables que sur certains intervalles. Par exemple dans le dernier calcul, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2+\cos(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. Mais le changement de variables $t=\tan(x/2)$ n'est défini que sur les intervalles $J_k=](2k-1)\pi,(2k+1)\pi[$. La primitive que nous avons obtenue n'est pas définie pour $x=(2k+1)\pi$. On s'aperçoit tout de même que $F(x)\xrightarrow[x\to(2k+1)\pi]{}\pm\pi/\sqrt{3}$ et on peut donc « recoller »les différentes primitives en ajustant les constantes d'intégration pour obtenir une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Il suffit ensuite de vérifier que la fonction obtenue est dérivable en chacun des points $(2k+1)\pi$ et que sa dérivée coïncide avec la valeur de f en ces points...

On rencontre souvent dans les calculs les primitives de Wallis :

$$W_k(x)=\int \sin^k x\,\mathrm{d}x$$

1. Lorsque k est impair, $W_{2p+1}(x)=\displaystyle\int (1-\cos^2 x)^p x\sin x\,\mathrm{d}x$. Par le changement de variables $y=\cos x$, on se ramène à primitiver un polynôme $-\displaystyle\int (1-y^2)^p\,\mathrm{d}y$.
2. Lorsque k est pair et petit, on peut linéariser $\sin^{2p} x$. Par exemple,

$$W_2(x)=\int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}.$$

3. Lorsque k est pair et supérieur à 4, utiliser une intégration par parties pour trouver une relation de récurrence :

$$\begin{aligned}W_{2p+2}(x)&=\int \sin^{2p+1} x\sin x\,\mathrm{d}x\\ &=-\sin^{2p+1} x\cos x+(2p+1)\int \sin^{2p} x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\\ &=-\sin^{2p+1} x\cos x+(2p+1)[W_{2p}(x)-W_{2p+2}(x)].\end{aligned}$$

On exprime $W_{2p+2}(x)$ en fonction de $W_{2p}(x)$ et on itère cette relation pour exprimer $W_{2p}(x)$ en fonction de $W_0(x) = x$.

Voir l'exercice 13.95 page 584.

C.6.5 Primitives $\int F(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$

Puisque $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, on peut utiliser le changement de variables $y = e^x$ qui conduit à une primitive de fraction rationnelle en y. On peut également utiliser les règles de Bioche. On remplace dans $\omega(x)$, $\operatorname{sh}(x)$ par $\sin(x)$ et $\operatorname{ch}(x)$ par $\cos(x)$. Si les règles de Bioche indiquent le changement de variables $y = \cos(x)$ (resp. $\sin(x)$, $\tan x$), on utilise le changement de variables $y = \operatorname{ch}(x)$ (resp. $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{th}(x)$).

Exemple 3.64 Calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch} x(2+\operatorname{sh}^2 x)}\,dx$. On notant $\omega(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x(2+\sin^2 x)}$, $\omega(-x) = \omega(x)$, $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ et $\omega(\pi + x) = \omega(x)$. On peut utiliser plusieurs changements de variables :

1. $t = \operatorname{sh} x$ donne $G(t) = \displaystyle\int \frac{t^3}{(1+t^2)(2+t^2)}\,dt$.
2. $t = \operatorname{ch} x$ donne $G(t) = \displaystyle\int \frac{t^2-1}{t(1+t^2)}\,dt$.
3. $t = \operatorname{th} x$ donne $G(t) = \displaystyle\int \frac{t^3}{2-t^2}\,dt$.
4. $t = e^x$ donne $G(t) = \displaystyle\int \frac{(t^2-1)^3}{t(t^2+1)(t^4+6t^2+1)}\,dt$.

Les fractions rationnelles à primitiver ne sont pas toutes agréables ! Le mieux ici est d'utiliser le changement de variables $t = \operatorname{th} x$ pour calculer

$$G(t) = -\frac{t^2}{2} - \ln|t^2 - 2|$$

puis

$$F(x) = -\frac{\operatorname{th}^2(x)}{2} - \ln(2 - \operatorname{th}^2 x) + C$$

C.6.6 Primitives avec des racines

Deux types de primitives avec radicaux sont à connaître :

Primitives $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Ce sont des primitives de fractions rationnelles en x et en une racine n-ième d'une homographie. Dans la notation précédente, $F(X,Y)$ est une fraction rationnelle. Par exemple :

- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+x}{x^2+x\sqrt{x+1}}\,dx$ où $F(X,Y) = \dfrac{X+Y}{X^2+XY}$
- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+2}}\,dx$ où $F(X,Y) = \dfrac{X}{X^2+1}Y$.

Pour calculer ces primitives, on effectue le changement de variables $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, $x = -\dfrac{dy^n - b}{cy^n - a}$, $dx = \dfrac{ad-bc}{(cy^n-a)^2}ny^{n-1}\,dy$ et on se ramène au calcul d'une primitive de fraction rationnelle.

Exemple 3.65 Calculer $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}$ sur l'intervalle $I =]0,1[$. On effectue le changement de variables

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \quad dx = \frac{4y}{(y^2+1)^2}$$

et on se ramène à calculer la primitive

$$G(y) = 4\int \frac{y^2}{(y^2-1)(y^2+1)}\,dy.$$

La décomposition de la fraction rationnelle s'écrit

$$\frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)} = \frac{1/4}{X-1} - \frac{1/4}{X+1} + \frac{1/2}{X^2+1}$$

et on trouve que $G(y) = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + 2\arctan y$. Après simplifications :

$$F(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On peut utiliser ensuite les quantités conjuguées pour écrire

$$F(x) = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Exemple 3.66 Calculer une primitive $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$.

On reconnaît une primitive de notre type avec ici $\sqrt[6]{x}$ qui est une racine sixième d'une homographie et $F(X,Y) = \frac{1}{Y^3+Y^2}$.
Avec le changement de variables $y = \sqrt[6]{x}$, $x = y^6$, $dx = 6y^5\,dy$, on se ramène à calculer

$$G(y) = 6\frac{y^3}{1+y}\,dy$$

et en effectuant la division euclidienne de X^3 par $(X+1)$:

$$\frac{y^3}{1+y} = y^2 - y + 1 - \frac{1}{1+y}$$

on calcule

$$G(y) = 2y^3 - 3y^2 + 6y - 6\ln|y+1|$$

d'où finalement

$$F(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}).$$

Primitives $\int F(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Ce sont des primitives de fractions rationnelles en x et en une *racine carrée* d'un *trinôme*. Par exemple, on sait calculer :

– $\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ avec $F(X,Y) = \frac{X+Y}{X^2+Y}$,
– $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^{3/2}}\,dx$ avec $F(X,Y) = \frac{X^4+1}{X(X^2+1)Y}$.

Il est bon de connaître par coeur les primitives fondamentales ($a>0$) :

♡ **3.16**

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) & (I =]-a,a[) \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{a}\right) & (I = \mathbb{R}) \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{argch}\left(\frac{x}{a}\right) & (I =]a,+\infty[) \end{cases}.$$

Si le trinôme possède deux racines réelles $\alpha < \beta$ et on veut calculer par exemple une primitive sur $I =]\alpha,\beta[$, $F(x) = \int F(x,\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)})\,dx$ le plus rapide consiste à se ramener à une racine d'une homographie en factorisant $(x-\alpha)$:

Exemple 3.67 Calculons $F(x) = \int \sqrt{x(1-x)}\,dx$ sur $I =]0,1[$. En écrivant $F(x) = \int x\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$, on se ramène à une primitive du paragraphe précédent. Le changement de variables $y = \sqrt{(1-x)/x}$, $x = 1/(y^2+1)$ mène au calcul de

$$G(y) = -2\int \frac{y^2}{(y^2+1)^3}\,dy = \frac{y}{2(y^2+1)^2} - \frac{y}{4(y^2+1)} - \frac{1}{4}\arctan y.$$

On trouve finalement

$$F(x) = \frac{2x-1}{4}\sqrt{x(1-x)} - \frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Dans l'algorithme général de calcul de ces primitives, on commence par réduire le trinôme sous forme canonique. Par un premier changement de variables affine $y = (x-a)/b$, on se ramène à calculer une primitive de la forme :

1. $\int F(y, \sqrt{1-y^2})\,dy$: on effectue alors le changement de variables $y = \sin\theta$ (ou $y = \cos(\theta)$). Avec la formule de trigonométrie $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\sqrt{1-\sin^2\theta} = |\cos\theta|$ et on se ramène à une primitive de type $\int F(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ que l'on sait calculer.
2. $\int F(y, \sqrt{1+y^2})\,dy$: on effectue le changement de variables $y = \operatorname{sh}\theta$. Avec la formule de trigonométrie $\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$, on élimine la racine : $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\theta} = \operatorname{ch}\theta$ et on se ramène à une primitive du type $\int F(\operatorname{sh}\theta, \operatorname{ch}\theta)\,d\theta$ que l'on sait calculer.
3. $\int F(y, \sqrt{y^2-1})\,dy$: on effectue le changement de variables $y = \operatorname{ch}\theta$ car $\sqrt{\operatorname{ch}^2\theta - 1} = |\operatorname{sh}\theta|$ et on se ramène à une primitive de type $\int F(\operatorname{sh}\theta, \operatorname{ch}\theta)\,d\theta$.

Exemple 3.68 Calculer $F(x) = \int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$. On réduit le trinôme à l'intérieur de la racine :

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]^2+1}$$

et par le premier changement de variables $y = (2x+1)/\sqrt{3}$, on se ramène au calcul de $G(y) = \frac{3}{4}\int \sqrt{y^2+1}\,dy$. Ensuite, avec la changement de variables $y = \operatorname{sh}\theta$, $dy = \operatorname{ch}\theta\,d\theta$, on se ramène à

$$H(\theta) = \frac{3}{4}\int \operatorname{ch}^2\theta\,d\theta.$$

Il suffit de linéariser $\operatorname{ch}^2\theta = \frac{\operatorname{ch}(2\theta)+1}{2}$ pour calculer

$$H(\theta) = \frac{3}{16}\operatorname{sh}(2\theta) + \frac{3}{8}\theta$$

$$G(y) = \frac{3}{8}\left(y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{argsh}(y)\right)$$

$$F(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4} + \ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}).$$

Remarque 3.16 Les primitives $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$, $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$, $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ se calculent plus rapidement en intégrant par parties. Par exemple :

$$F(x) = \int \sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

d'où l'on tire

$$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{argsh}(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

C.6.7 $\int f(x^\alpha)\frac{dx}{x}$

Lorsque la primitive à calculer s'écrit sous la forme $\int f(x^\alpha)\frac{dx}{x}$, on peut utiliser le changement de variables $y = x^\alpha$. En effet,

$$\frac{dy}{y} = \alpha\frac{dx}{x}$$

et on se ramène à calculer la primitive $\int f(y)\frac{\mathrm{d}y}{y}$ qui est plus simple.

Exemple 3.69 Pour calculer $F(x) = \int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$, il suffit d'écrire

$$F(x) = \int \frac{x^4}{(x^2+1)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

et de faire le changement de variables $y = x^2$, $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x}$ pour se ramener à la primitive

$$G(y) = \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{(y+1)^2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{y}{(y+1)^2}\,\mathrm{d}y$$

et on trouve $G(y) = \frac{1}{y+1} + \ln|y+1|$ puis $F(x) = \frac{1}{x^2+1} + \ln(x^2+1)$.

Exemple 3.70 Calculons $F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$. Cette primitive ne fait pas partie des classes connues, mais avec le changement de variables $y = x^4$, $\frac{\mathrm{d}y}{y} = 4\frac{\mathrm{d}x}{x}$, on se ramène à calculer

$$G(y) = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y\sqrt{y+1}}\,\mathrm{d}y$$

C'est une fraction rationnelle en y et en une racine nième d'une homographie. Avec le changement de variables $u = \sqrt{y+1}$, $y = u^2 - 1$, on se ramène à calculer

$$H(u) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2-1)} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$

Finalement,

$$F(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^4+1}+1}$$

Exemple 3.71 Calculer pour $a > 0$, $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}\,\mathrm{d}x$. En écrivant

$$F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^4-x^4}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

le changement de variables $y = x^2$ mène au calcul de

$$G(y) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^4-y^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{a^2}$$

d'où finalement $F(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}$

C.6.8 Intégration par parties

On sait calculer des primitives de type $\int e^x P(x)\,\mathrm{d}x$. Il suffit d'intégrer plusieurs fois par parties en dérivant le polynôme.

Exemple 3.72 Calculer $\int (x^2-x+3)e^{2x}\,\mathrm{d}x$. Une première intégration par parties donne :

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2-x+3) - \underbrace{\int (x-1/2)e^{2x}\,\mathrm{d}x}_{G(x)}$$

et une deuxième permet de calculer

$$G(x) = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} - \frac{1}{2}\int e^{2x}$$

Finalement, $F(x) = \dfrac{(x^2-2x+4)e^{2x}}{4}$.

Exemple 3.73 Calculer $F(x) = \int e^x \sin(x)\,dx$. La première méthode consiste à intégrer deux fois par parties pour retrouver $F(x)$:

$$F(x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - F(x)$$

d'où $F(x) = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$.
La deuxième méthode consiste à utiliser qu'un sinus ou un cosinus s'exprime à l'aide des exponentielles imaginaires. On primitive une fonction à valeurs complexes et on prend ensuite la partie réelle :

$$F(x) = \operatorname{Im}\left(\int e^x e^{ix}\,dx\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right)$$

$$F(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^x(1+i)(\cos x + i\sin x)}{2}\right) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

Le seul espoir pour calculer des primitives faisant intervenir ln, arctan, arcsin,. . .consiste à intégrer par parties. En effet, les dérivées de ces fonctions sont des fractions rationnelles ou des racines de trinômes. On espère ainsi se ramener à l'une des classes de fonctions que l'on sait primitiver.

Exemple 3.74 Calculer $F(x) = \int \arctan(x)\,dx$. En primitivant par parties,

$$F(x) = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Exemple 3.75 $F(x) = \int \dfrac{\ln(x+1)}{x}\,dx$. Si l'on intègre par parties en dérivant ln,

$$F(x) = \ln(x)\ln(x+1) - \int \frac{\ln x}{x+1}\,dx$$

et la nouvelle primitive fait encore intervenir un logarithme. On ne sait pas primitiver cette fonction à l'aide des fonctions usuelles.

C.6.9 Exercices

Exercice 3.11 ♡♡

Calculer une primitive $F(x) = \int \dfrac{x+2}{x+1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,dx$ *sur l'intervalle* $I =]-1,1[$.

Solution : *En posant* $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x = \frac{-y^2+1}{y^2+1}$, $dx = -\frac{4y}{(y^2+1)^2}$ *et on se ramène au calcul de*

$$G(y) = -2\int \frac{y^2(y^2+3)}{(y^2+1)^2}\,dy$$

$$G(y) = y + \int \frac{dy}{y^2+1} - 2\int \frac{dy}{(y^2+1)^2}$$

et en utilisant la technique du paragraphe C.6.3, on trouve que

$$F(x) = -(1-x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Exercice 3.12 ♡♡

Calculer $F(x) = \int \dfrac{1}{x(x^2+x+1)^2}$.

Solution : *Décomposons la fraction rationnelle en éléments simples :*

$$\frac{1}{X(X^2+X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1+X}{X^2+X+1} - \frac{1+X}{(X^2+X+1)^2}$$

On primitive chacun des éléments simples. Pour calculer la dernière primitive, procéder dans l'ordre :

1. *Éliminer le x du numérateur :* $\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.
2. *Par réduction du trinôme et un changement de variables, se ramener à* $\int \frac{dy}{(y^2+1)^2}$
3. *On calcule cette dernière primitive en intégrant par partie* $\int \frac{dy}{(y^2+1)}$.

On trouve finalement,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{-x+1}{3(x^2+x+1)} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$

Exercice 3.13 ♡♡

Calculer $F(x) = \int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\,dx$.

Solution : *En intégrant par parties,*

$$F(x) = x\arctan\frac{x-1}{x-2} + \underbrace{\int \frac{x}{2x^2-6x+5}\,dx}_{G(x)}$$

On calcule ensuite la primitive de la fraction rationnelle :

$$G(x) = \frac{1}{4}\int \frac{4x-6}{2x^2-6x+5}\,dx + \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{2x^2-6x+5}\,dx}_{H(x)}$$

et

$$H(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-3/2)^2+1/4} = \arctan(2x-3)$$

d'où

$$F(x) = x\arctan\frac{x-1}{x-2} + \frac{1}{4}\ln|2x^2-6x+5| + \frac{3}{2}\arctan(2x-3)$$

Exercice 3.14 ♡♡

Calculer $F(x) = \int \frac{dx}{x^3(x^2+1)}$.

Solution : *On écrit* $F(x) = \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\frac{dx}{x}$ *et avec le changement de variables* $y = x^2$, $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$,

$$G(y) = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2(y+1)}$$

On décompose la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{y+1}$$

En multipliant par y^2 (resp. $y+1$) et en prenant $y=0$ (resp. $y=-1$), on tire $b=1$, $c=1$. En multipliant par y et en faisant tendre y vers $+\infty$, on obtient la relation $0 = a+c$.

$$G(y) = -\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\ln|y+1|$$

$$F(x) = -\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + \ln(x^2+1)$$

Exercice 3.15 ♡♡

Calculer $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Solution : *On décompose la fraction rationnelle avec l'astuce suivante pour profiter de la parité :*

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{X}^3+\mathrm{X}}{(\mathrm{X}^2+2)^2} = \frac{a\mathrm{X}+b}{\mathrm{X}^2+2} + \frac{c\mathrm{X}+d}{(\mathrm{X}^2+2)^2}$$

Comme $\mathrm{F}(-\mathrm{X}) = -\mathrm{F}(\mathrm{X})$, $b = d = 0$. *En multipliant par* x *et en faisant tendre* x *vers* $+\infty$, *on tire* $a = 1$. *En divisant par* X *et en prenant* $x = 0$, *on tire* $b = -1$. *On a donc*

$$\frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x-1}{(x^2+2)^2}$$

Ensuite,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(3/2) + \left[\frac{1}{2(x^2+2)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}$$

et en intégrant par parties $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}$, *on tire*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan(1/\sqrt{2}) + \frac{1}{12}$$

et finalement,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exercice 3.16 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x) = \int \frac{x^2\ln x}{(x^3+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

Solution : *Commençons par écrire*

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{(x^3+1)^3}\ln(x^3)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Par le changement de variables $u = x^3$, $\frac{\mathrm{d}u}{u} = 3\frac{\mathrm{d}x}{x}$, *on se ramène à calculer*

$$\mathrm{G}(u) = \frac{1}{9}\int \frac{\ln u}{(u+1)^3}\,\mathrm{d}u$$

et avec une intégration par parties,

$$\mathrm{G}(u) = \frac{1}{9}\left(-\frac{\ln|u|}{2(u+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)^2}\right)$$

On décompose la fraction

$$\frac{1}{u(u+1)^2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2}$$

et on calcule

$$\mathrm{G}(u) = \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + \frac{1}{u+1}$$

et finalement,

$$\mathrm{F}(x) = -\frac{1}{12}\frac{\ln|x|}{(1+x^3)^2} + \frac{1}{6}\ln|x| + \frac{1}{18(x^3+1)} - \frac{\ln|x^3+1|}{18}$$

Exercice 3.17 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

Solution : *Avec Bioche, on a* $\omega(-x) = \omega(x)$ *et on effectue donc le changement de variables* $t = \cos x$ *:*

$$\mathrm{G}(t) = -\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2 t^5} = -\int \frac{1}{(1-t^2)^2 t^4}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Avec le changement de variables $y = t^2$, $\mathrm{d}y/y = 2\,\mathrm{d}t/t$, on se ramène à calculer

$$\mathrm{H}(y) = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2 y^3}$$

Il faut alors décomposer cette fraction rationnelle :

$$\frac{1}{(y-1)^2 y^3} = \frac{3}{y} + \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{3}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2}$$

On a calculé directement le coefficient de $(y-1)^2$ et de y^3. Pour calculer les autres, on a retranché $1/y^3$ aux deux membres, simplifié et calculé le coefficient de $1/y^2$ en multipliant par y^2 et en prenant $y = 0$ et ainsi de suite. On obtient alors

$$\mathrm{H}(y) = -\frac{3}{2}\ln|y| + \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2} + \frac{3}{2}\ln|y-1| + \frac{1}{2(y-1)}$$

puis

$$\mathrm{F}(x) = 3\ln|\tan x| + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\sin^2 x}$$

Exercice 3.18 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{th} x}$.

Solution : *Avec la règle de Bioche, on effectue le changement de variables $t = \operatorname{th} x$, $\mathrm{d}t = (1-t^2)\,\mathrm{d}x$:*

$$\mathrm{G}(t) = \int \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

La décomposition de la fraction rationnelle s'écrit :

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+1)} = \frac{1/4}{t+1} - \frac{1/4}{t-1} + \frac{1/2}{(t-1)^2}$$

d'où $\mathrm{G}(t) = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right| - \dfrac{1}{2(t-1)}$ *et finalement*

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x + 1}{\operatorname{th} x - 1}\right| - \frac{1}{2(\operatorname{th} x - 1)}$$

Exercice 3.19 ♡♡

Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\frac{dt}{t}$.

Solution : *C'est une fraction rationnelle en t et en la racine nième d'une homographie. Posons donc $u = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$:*

$$t = \frac{u^2+1}{-u^2+1} \qquad dt = \frac{4u}{(1-u^2)}du$$

Donc

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}du$$

et en décomposant en éléments simples cette fraction rationnelle,

$$\frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u-1} - \frac{2}{u^2+1}$$

on trouve finalement :

$$\mathrm{I} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{\pi}{3}$$

Exercice 3.20 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

Solution : *On primitive une fraction rationnelle en x et une racine d'un trinôme qui est déjà réduit sous forme canonique. Le changement de variables $x=\operatorname{sh} t$ donne*

$$\mathrm{G}(t)=\int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t=\int \frac{e^t+1/e^t}{2e^t}=\frac{t}{2}-\frac{e^{-2t}}{4}$$

En remplaçant t par $\operatorname{argsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, on trouve que

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})^2}$$

Exercice 3.21 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ *sur l'intervalle* $\mathrm{I}=]1,+\infty[$.

Solution : *En multipliant par les quantités conjuguées :*

$$\mathrm{F}(x)=\int \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\,\mathrm{d}x$$

on se ramène au calcul de deux primitives simples. Le plus rapide consiste à intégrer par parties pour calculer $\mathrm{G}(x)=\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ *et* $\mathrm{H}(x)=\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. *On trouve finalement :*

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\operatorname{argsh} x+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)$$

Exercice 3.22 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$.

Solution : *La fonction à primitiver ne fait pas partie des classes connues. Essayons le changement de variables $z=x^2$. On se ramène à primitiver* $\mathrm{G}(z)=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{\mathrm{d}z}{z^{3/2}(1+z)^{3/2}}$. *En écrivant*

$$\mathrm{G}(z)=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^3\left(\frac{z+1}{z}\right)^{3/2}}$$

On se ramène à une primitive de la forme $\int \mathrm{F}(z,\sqrt[n]{\frac{az+b}{cz+d}})\,\mathrm{d}z$ *que l'on sait calculer avec le changement de variables* $y=\sqrt{\dfrac{z+1}{z}}$, $z=\dfrac{1}{y^2-1}$, $\mathrm{d}z=-\dfrac{2y}{(y^2-1)^2}$. *On se ramène à calculer*

$$\mathrm{H}(y)=-\int \frac{y^2-1}{y^2}\,\mathrm{d}y=-y-\frac{1}{y}$$

d'où finalement,

$$\mathrm{F}(x)=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 3.23 ♡♡

Calculer $\mathrm{F}(x)=\int \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *sur l'intervalle* $\mathrm{I}=]-1,1[$.

Solution : *La fonction à primitiver ne fait pas partie des classes qu'on a vues. Essayons d'éliminer une racine carrée avec le changement de variables* $x = \sin t$ *sur l'intervalle* $\mathrm{J} =]-\pi/2, \pi/2[$ *:*

$$\mathrm{G}(t) = \int \frac{\sqrt{1+|\cos t|}}{|\cos t|} \cos t \, \mathrm{d}t = \int \sqrt{1+\cos t} \, \mathrm{d}t$$

En effet, $\cos t > 0$ *sur* J*. On n'a toujours pas à primitiver une fonction qui entre dans les catégories connues. Avec la trigonométrie,* $1 + \cos t = 2\cos^2(t/2)$*, on a*

$$\mathrm{G}(t) = \sqrt{2} \int \cos(t/2) \, \mathrm{d}t = 2\sqrt{2} \sin(t/2)$$

d'où finalement

$$\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\arcsin(x)}{2}\right)$$

Annexe D

Conseils

Heureux comme une rivière
qui peut suivre son cours
sans sortir de son lit.
Graffiti anonyme en salle de classe. XXe siècle.

D.1 Conseils d'étude

D.1.1 Attitude pendant le cours

Il est très important d'être parfaitement concentré pendant les heures de cours. Ne jamais vous dire que si vous ne comprenez pas quelque chose sur le moment, vous aurez le loisir de reprendre ce point chez vous. Un quart d'heure d'inattention vous prendra plus d'une heure à rattraper et vous n'aurez matériellement pas le temps de combler ces lacunes plus tard. Il est donc important de se présenter au cours en bonne condition ; pour cela il est indispensable d'adopter un rythme de vie équilibré et en particulier de bien dormir pour arriver en cours parfaitement reposé.

En ce qui concerne la prise de notes, tout dépend de votre faculté à écrire rapidement. Votre professeur doit boucler un programme très chargé, et par moments il est obligé d'accélérer. Le plus important est de comprendre l'essentiel pendant le cours, quitte à ne pas tout écrire. Notez précisément les définitions et les énoncés des théorèmes, mais ne notez pas les phrases complètes pendant le cours, utilisez des abréviations. Il faut être en permanence attentif à ce que dit votre professeur et comprendre les idées qu'il exprime, quitte à ne pas tout noter.

Après chaque cours le soir, faites une synthèse de ce que vous avez vu pendant la journée en mettant en évidence les points importants. Vous devez vous présenter au cours suivant en ayant en tête les définitions du cours précédent. Le moindre retard dans votre travail peut avoir des répercussions importantes par la suite.

D.1.2 Bien comprendre les définitions et les hypothèses de théorèmes

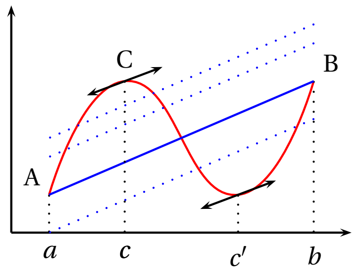
Les définitions ainsi que les théorèmes du cours sont très importants, vous aurez à les utiliser pendant les devoirs et elles vous serviront à comprendre la suite du cours. Une erreur fréquente consiste à vouloir aller trop vite lors des révisions en ne se contentant que d'une connaissance superficielle. Il est normal de passer du temps à bien réfléchir aux définitions et aux hypothèses des théorèmes. En particulier, prenez l'habitude de chercher vos propres exemples, contre-exemples et de faire le maximum de schémas pour vous imprégner de ces connaissances fondamentales.

Prenons l'exemple du théorème des accroissements finis :

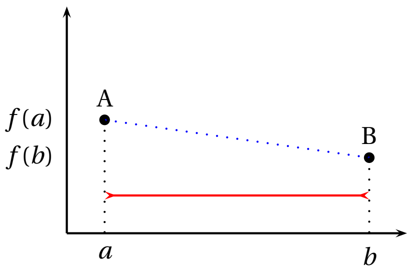
THÉORÈME 4.1 **Accroissements finis**
Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les hypothèses :

1. f est continue sur le segment $[a,b]$,
2. f est dérivable sur $]a,b[$,

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.



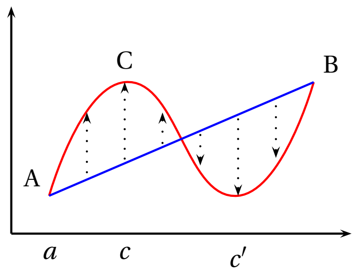
Pour comprendre ce théorème, essayons de visualiser le résultat. On peut écrire $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la pente de la corde joignant les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Le réel $f'(c)$ représente la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $C = (c, f(c))$. Si l'on place une règle joignant les points A et B et qu'on déplace cette règle en maintenant sa pente, on va rencontrer au moins une tangente à la courbe. On voit sur notre dessin que le c du théorème n'est pas nécessairement unique.
Réfléchissons aux hypothèses du théorème. Pour parler de $f'(c)$ où $c \in]a, b[$, il faut supposer que f est dérivable sur $]a, b[$. Si l'on suppose uniquement que f est continue sur $]a, b[$, le résultat peut être faux comme le montre le contre-exemple suivant :



La conclusion du théorème dit qu'il existe un réel c *intérieur* au segment $[a, b]$. Le fait que $c \neq a$ et $c \neq b$ est important dans les applications. On peut se demander si ce théorème reste valable lorsque la fonction est à valeurs complexes. La réponse est négative. Si l'on considère la fonction $f : \begin{cases} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{cases}$, on a bien f qui est continue sur $[0, 2\pi]$, f dérivable sur $]0, 2\pi[$ mais $f(1) - f(0) = 0$ et pour tout $c \in]0, 2\pi[$, $f'(c) = ie^{ic} \neq 0$.

D.1.3 Faire une synthèse des points importants d'une démonstration

Prenez l'habitude de *résumer* les points importants d'une démonstration en quelques phrases et schémas. C'est ainsi que vous les retiendrez sur le long terme. Prenons l'exemple du théorème des accroissements finis. Si l'on observe le schéma précédent, on s'aperçoit que le point C rend extrémale la hauteur entre la courbe et la corde $[AB]$ ce qui nous conduit à introduire une bonne fonction auxiliaire.



L'équation de la corde s'écrit $y = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ d'où la fonction auxiliaire définie par

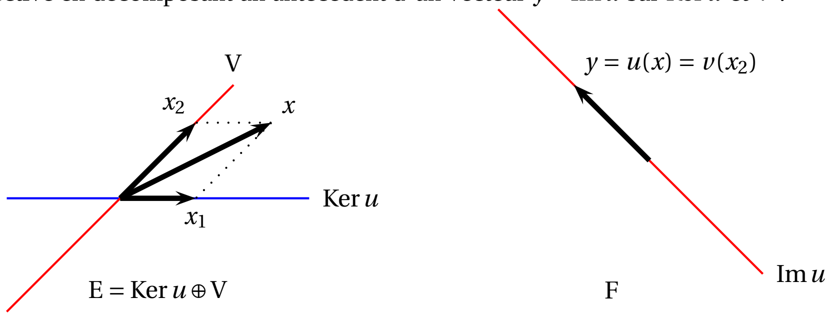
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On a $f(b) = f(a) = 0$ et il suffit d'appliquer le théorème de Rolle (en vérifiant les hypothèses) à cette fonction auxiliaire.
Sur une fiche, vous pouvez résumer les idées de cette démonstration :
– Introduire la fonction auxiliaire et faire le dessin ci-dessus.
– Vérifier les hypothèses de Rolle pour cette fonction auxiliaire.
– En déduire qu'elle admet un extremum.
Prenons un autre exemple typique, le théorème du rang :

THÉORÈME 4.2
Soit $u : \mathrm{E} \mapsto \mathrm{F}$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels avec E de dimension finie. On a la formule du rang :

$$\dim \mathrm{E} = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \mathrm{rg}(u)$$

On résume la démonstration avec les points suivants :
– Vérifier que $\mathrm{Im}\, u$ est isomorphe à tout supplémentaire V de $\mathrm{Ker}\, u$.
– Pour vérifier cet isomorphisme, considérer la restriction v de u à V.
– Vérifier que v est surjective en décomposant un antécédent d'un vecteur $y \in \mathrm{Im}\, u$ sur $\mathrm{Ker}\, u$ et V :



– Utiliser que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{Im}\, u$ et que $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{V}$.

D.2 Conseils de rédaction

Vous préparez des épreuves écrites de concours. Contrairement au baccalauréat, les examinateurs n'ont pas de consignes d'indulgence pour vous attribuer artificiellement des points, mais leur but est de vous classer par rapport aux autres candidats. Si vous rendez une copie mal rédigée, illisible où il manque des arguments essentiels, ou au contraire, si vous utilisez trois pages pour un calcul qui ne nécessite que deux lignes, vous serez inévitablement pénalisé. Il est très important de s'entraîner pendant les deux années de préparation à rédiger de façon correcte vos devoirs pour prendre de bonnes habitudes et être bien préparé pour les concours. Voici quelques mauvaises habitudes à perdre :
– Écrire directement sur votre copie la première idée qui vous passe par la tête (quelquefois au crayon de papier ...)
– Commencer une phrase ou une démonstration et s'arrêter en plein milieu ! Au lieu de montrer votre inconsistance au correcteur (n'espérez pas gagner quelques centièmes de points ainsi), mieux vaut ne rien écrire.
– Effectuer un calcul directement sur votre copie en détaillant toutes les étapes de façon maladroite.
– Sauter une question dont vous ne trouvez pas la solution immédiatement, quitte à y revenir ensuite en écrivant dans la marge, en mettant une astérisque demandant au correcteur de se reporter à la dernière page ...
– Utiliser des formules de type « c'est évident », « trivialement »...
– Citer vaguement un théorème : « d'après un théorème »sans vérifier ses hypothèses d'application.
– Écrire de façon très compacte sans jamais passer à la ligne. Les quelques centimes d'euros que vous économisez en feuilles n'intéresseront certainement pas votre correcteur qui tient à sa vue !
– Écrire trop gros en utilisant quelques dizaines de feuilles doubles pour un problème qui n'en nécessite que deux.

Il faut au contraire :
– **Utiliser impérativement un brouillon** sur lequel vous pouvez chercher les idées de démonstrations, faire des calculs longs ...C'est uniquement une fois que vous avez les idées claires sur la façon de procéder que vous rédigez au propre le calcul ou la démonstration.
– Si vous vous apercevez que vous avez fait une erreur, n'utilisez pas l'effaceur ni le blanco (perte de temps et souvent illisible), mais barrez proprement ce que vous avez écrit et recommencez.
– Une fois que vous avez trouvé une idée de preuve, prenez le temps de vous demander s'il n'y a pas moyen de la simplifier encore. Repérez les points importants qu'il faudra mettre en évidence au propre, ainsi que les détails que vous pourrez minimiser dans la rédaction définitive. Faites de même pour un calcul, ne recopiez pas toutes les étapes, mais uniquement les plus importantes.
– **Encadrez les résultats de calculs** demandés.
– Ne cherchez pas à grappiller des points, mais traitez les questions les unes après les autres en passant un minimum de temps à chaque question. Ce temps n'est jamais perdu car vous aurez mieux assimilé l'énoncé, repéré que le résultat peut servir par la suite et vous serez moins bloqué sur les questions suivantes.
– Numérotez correctement les questions que vous traitez en laissant un espace blanc si vous n'avez pas trouvé le résultat. Vous pourrez compléter cet espace par la suite et le correcteur suivra votre copie selon l'ordre du problème.
– Pour rédiger une démonstration ou un calcul, passez souvent à la ligne, centrez des formules ...Le but est de mettre en évidence les points importants et de montrer à votre correcteur que vous les avez vus.

- Tirez un trait horizontal pour séparer chaque question, vous facilitez ainsi la lecture de votre copie.
- Si vous devez utiliser un résultat précédent du problème, citez précisément le numéro de la question où ce résultat a été démontré. De même, respectez scrupuleusement les notations de l'énoncé.
- Si vous utilisez un théorème du cours, citez-le précisément (il a souvent un nom), et surtout *vérifiez ses hypothèses précises* avant de l'appliquer (vous montrez ainsi que vous connaissez votre cours).
- Évitez trop de phrases longues et verbeuses, allez à l'essentiel. Au contraire, une copie avec uniquement des formules est illisible. Il faut savoir trouver le juste milieu. N'abusez pas des abréviations et essayez de rédiger des phrases simples mais correctes.
- N'utilisez jamais les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ dans vos démonstrations, mais des mots comme « donc », « par conséquent »...

Si on vous demande une démonstration, commencez par travailler au brouillon :

- Bien analyser l'énoncé pour comprendre ce que vous devez montrer. Demandez-vous la nature de chaque objet manipulé (vecteur, application ...).
- Écrire le plan de démonstration au brouillon.
- Chercher un brouillon l'idée de la démonstration. Pour cela,
  - Essayez de voir un lien entre le résultat à démontrer et un point du cours ou une question précédente du problème.
  - Faites éventuellement des schémas pour trouver l'idée.
  - N'hésitez pas à chercher un exemple ou à traiter la question dans un cas plus simple, ou à faire des hypothèses supplémentaires.
- Demandez-vous dans quel ordre vous devez introduire les objets nécessaires.

Une fois que vous pensez que vous avez bien compris l'idée, vous pouvez rédiger au propre :

- Commencez par citer le résultat que vous allez démontrer.
- Si vous voulez montrer une équivalence ou une égalité d'ensembles, procédez systématiquement par double implication ou double inclusion.
- Rédigez la démonstration *en respectant le plan*.
- Mettez en évidence les points importants (en soulignant, en passant à la ligne ...).
- Une fois votre preuve rédigée, relisez-la en vous assurant que chaque objet est bien introduit et que le plan a été respecté.
- Si un schéma n'est pas suffisant à lui seul, il peut illustrer votre démonstration. N'hésitez pas à le reproduire sur votre copie.

Annexe E

Formulaires

E.1 Trigonométrie

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

Formules de factorisation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2\cos x \sin x \end{aligned}$$

Tangente du demi-angle

En notant $t = \tan\frac{x}{2}$, on a :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

E.2 Trigonométrie hyperbolique

PROPOSITION 5.1 ♡

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.2 ♡
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x-y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x-y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.3 ♡
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

PROPOSITION 5.4 ♡
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\right] \\ \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)\right] \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y)\right] \\ \operatorname{ch}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1) \\ \operatorname{sh}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1) \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.5 ♡
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= 2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2} \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y &= 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y &= 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2} \\ \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y &= 2\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}\operatorname{ch}\frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

Proposition 5.6 ♡
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{th}(x+y)=\frac{\operatorname{th}x+\operatorname{th}y}{1+\operatorname{th}x\operatorname{th}y}$$
$$\operatorname{th}(x-y)=\frac{\operatorname{th}x-\operatorname{th}y}{1-\operatorname{th}x\operatorname{th}y}$$

Proposition 5.7 ♡
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, posant $t=\operatorname{th}\dfrac{x}{2}$, on a :

$$\operatorname{th}x=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$$
$$\operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$$

E.3 Dérivées des fonctions usuelles

Dans tout le formulaire, les quantitées situées au dénominateur sont supposées non nulles

Dérivées des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ où $n\in\mathbb{N},\quad n\geqslant 2$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\quad k\in\mathbb{Z}$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

Domaine de définition et de dérivabilité des fonctions usuelles

- $\operatorname{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{ch}:\mathbb{R}\to[1,+\infty[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{th}:\mathbb{R}\to]-1,1[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\operatorname{argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{argch}:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.
- $\operatorname{argth}:]-1,1[\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $]-1,1[$.

- $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est dérivable sur $]-1,1[$.

- arccos : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]-1,1[$.
- arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Domaine de définition et de dérivabilité des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
a^x $(a>0)$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$
$\log_a x$ $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1-\mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\coth(x)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{sh^2(x)}$
$\mathrm{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{argch}(x)$	$]+1,+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{argth}(x)$	$]-1,1[$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opérations et dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$, λ désignant une constante

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$

$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$ $(n \in \mathrm{N},\ n \geqslant 1)$

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

En particulier,si $u>0$: $\forall a \in \mathbb{R}$, $(u^a)' = \alpha u' u^{a-1}$

E.4 Primitives des fonctions usuelles

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est **une** primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont **uniques à une constante près** notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	$\lambda x + C$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln\|x\| + C$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \ln x - x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est **une** primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont **uniques à une constante près** notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
a^x $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
x^α $(a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
$\operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}(x) + C$
$\operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(x) + C$
$1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{th}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{argsh}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]+1, +\infty[$	$\operatorname{argch}(x) + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1, 1[$	$\operatorname{argth}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x) + C$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.$(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
- Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I.)
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.

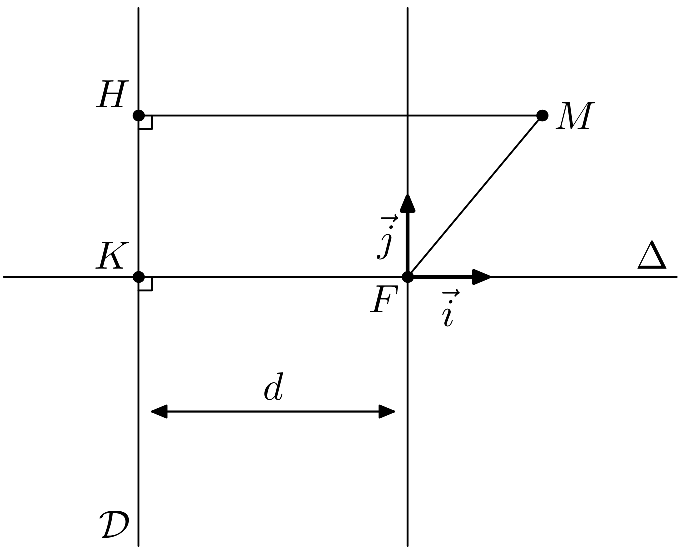
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

En particulier, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\begin{cases} \frac{1}{a+1} u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u + C & \text{si } a = -1 \end{cases}$$

E.5 Coniques

E.5.1 Définition et équation générale d'une conique $\mathscr{C}$



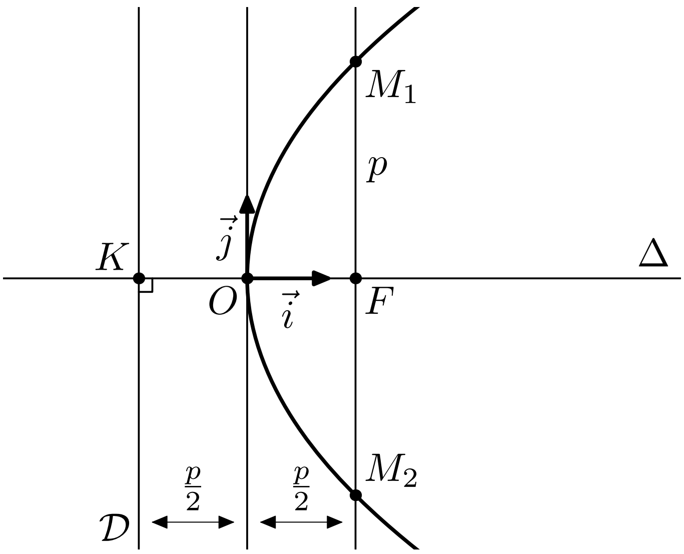
Soit $\mathscr{D}$ une droite, F un point n'appartenant pas à $\mathscr{D}$ et e un réel strictement positif.
La conique de directrice $\mathscr{D}$, de foyer F et d'excentricité e est donnée par l'ensemble des points M du plan
tels que :

$$d(\text{M}, \text{F}) = e\ d(\text{M}, \mathscr{D})$$

L'équation cartésienne de cette conique dans le repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$x^2 + y^2 = e^2\ (x + d)^2$$

E.5.2 Parabole $\mathscr{P}$ ($e = 1$)



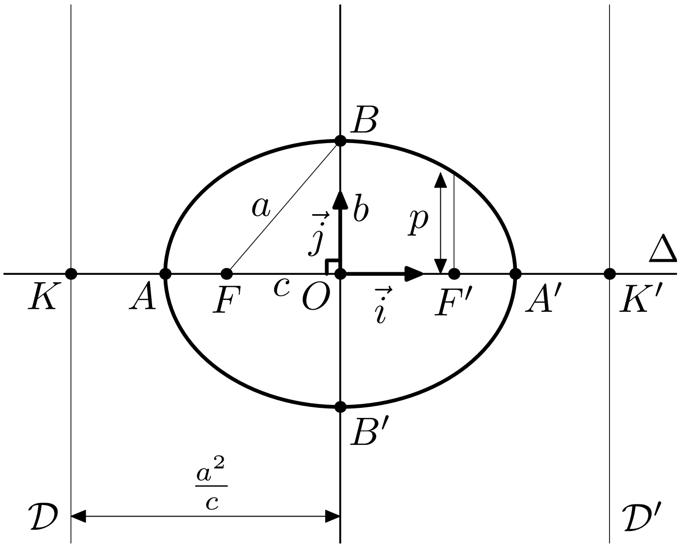
$$y^2 - 2px = 0$$

$$p = d(\text{F}, \mathscr{D})$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{p\ t^2}{2} \\ y(t) = p\ t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{D} : \quad x = -\frac{p}{2}$$

E.5.3 Ellipse $\mathscr{E}$ $(0 < e < 1)$



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$a = \frac{ed}{1-e^2} \qquad b = \frac{ed}{\sqrt{1-e^2}} \qquad c = \frac{e^2 d}{1-e^2} \text{ où } d = d(\mathrm{F}, \mathrm{D})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad c = ea$$

$$e = \frac{c}{a} \qquad p = \frac{b^2}{a} \qquad d = \frac{b^2}{c}$$

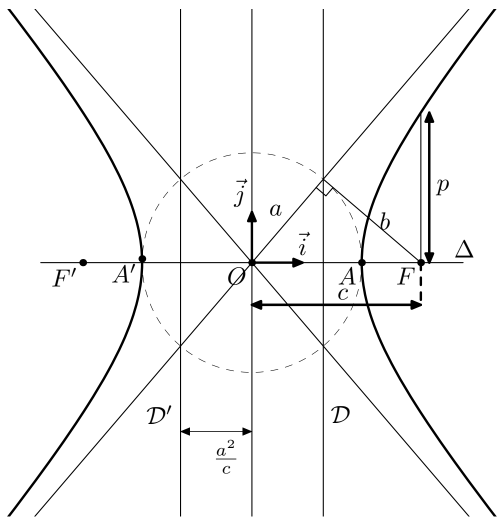
$$\mathrm{OA} = a \qquad \mathrm{OB} = b$$

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} : t \in [-\pi, \pi]$$

$$\mathscr{D} : \quad x = -\frac{a^2}{c}$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \iff \mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a$$

E.5.4 Hyperbole $\mathscr{H}$ $(e > 1)$



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$a = \frac{ed}{e^2-1} \qquad b = \frac{ed}{\sqrt{e^2-1}} \qquad c = \frac{e^2 d}{e^2-1} \text{ où } d = d(\mathrm{F}, \mathrm{D})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad c = ea$$

$$e = \frac{c}{a} \qquad p = \frac{b^2}{a} \qquad h = \frac{b^2}{c}$$

$$\mathrm{OF} = c \qquad \mathrm{OA} = a$$

$$\begin{cases} x(t) = a\cosh t \\ y(t) = b\sinh t \end{cases} : t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x(t) = -a\cosh t \\ y(t) = b\sinh t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{D} : \quad x = \frac{a^2}{c}$$

$$\mathrm{M} \in \mathscr{E} \iff \left|\mathrm{MF}' - \mathrm{MF}\right| = 2a$$

E.6 Limites usuelles

Limites usuelles

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad x\ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to1]{} 1 \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$$

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \qquad \frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$$

De manière plus générale

Soient α, β et γ des **réels strictement positifs**.

- En $+\infty$:

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

- En 0 et $-\infty$:

$$x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow[x\to0]{} 0 \qquad \text{et} \qquad |x|^\alpha e^{\gamma x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

Suite géométrique

$$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \text{diverge si } a \in]-\infty,-1] \\ 0 \text{ si } a \in]-1,1[\\ 1 \text{ si } a = 1 \\ +\infty \text{ si } a \in]1,+\infty[\end{cases}$$

E.7 Équivalents usuels et croissances comparées

Comparaison des suites de référence

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors :

$$(\ln n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right) \qquad n^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a^n\right) \qquad a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!) \qquad n! \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$$

Équivalents classiques pour les suites

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors :

$$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad [1-\cos u_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$$

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \left[e^{u_n}-1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \left[(1+u_n)^\alpha - 1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n \ (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

Comparaison des fonctions usuelles

Soient α, β et γ des **réels strictement positifs**.

- En $+\infty$:

$$(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right)$$

- En 0 et $-\infty$:

$$|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad e^{\gamma x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

Équivalents classiques pour les fonctions en 0

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{argsh} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{argth} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

De manière plus générale

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ alors :

$$\ln\left(1+f(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \sin\left(f(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \tan\left(f(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

$$\cos\left(f(x)\right)-1 \underset{x\to a}{\sim} -\frac{\left(f(x)\right)^2}{2} \qquad e^{f(x)}-1 \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \left(1+f(x)\right)^\alpha-1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha f(x) \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

E.8 Développements limités

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$

$$\heartsuit \quad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4\cdots+x^{2n}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)$$

Fonctions exponentielle et hyperboliques

$$\heartsuit \quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

$$\heartsuit \quad \operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\heartsuit \quad \operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \tanh x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$$

Fonctions trigonométriques

$$\heartsuit \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\heartsuit \quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$$

Fonction logarithme

$$\rightsquigarrow \quad \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

$$\heartsuit \quad \ln(1-x) = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

Fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\heartsuit \quad (1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

Cette dernière formule appliquée à $\alpha = \frac{1}{2}$ et $n = 2$ donne :

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Fonctions réciproques

$$\rightsquigarrow \quad \arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$$
$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{argth} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$$
$$\rightsquigarrow \quad \arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$$
$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{argsh} x = x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$$
$$\rightsquigarrow \quad \arccos x = \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}-\cdots+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$$

La dernière s'obtient en remarquant que $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.
Légende : ♡ = à savoir par coeur, $\rightsquigarrow$ = à savoir retrouver rapidemment.

E.9 Espaces vectoriels

Dans tout la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$. $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Sous-espace vectoriel

Soit $F \subset E$, une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E si et seulement si :

1. $F \neq \varnothing$
2. F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (x,y)\in E^2,\quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\quad \alpha x+\beta y\in F$$

Remarque : si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0 \in F$.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soient n vecteurs de E : $v_1,\dots,v_n$. On a :

$$Vect(v_1,\dots,v_n)=\{\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n \mid \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}$$

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $v_1,\dots,v_n$.

Sous-espaces supplémentaires

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** si et seulement si ils vérifient :

(H1) $E = F + G$

(H2) $F \cap G = \{0\}$

Caractérisation des sous-espaces supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. On a équivalence entre :

1. $E = F \oplus G$ (c'est à dire F et G sont supplémentaires).
2. $\forall x\in E,\quad \exists!(x_1,x_2)\in F\times G:\quad x = x_1+x_2$ (c'est à dire, **tout** vecteur de E se décompose de manière **unique** comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.)

Dans toute la suite $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Application linéaire

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \quad \boxed{f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)}$$

Á propos de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle :

1. – **Noyau de** f et on note $\operatorname{Ker} f$ le sous-ensemble de E : $\boxed{\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = 0_{\mathrm{F}}\}}$
   – **Image de** f et on note $\operatorname{Im} f$ le sous-ensemble de F : $\boxed{\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}\}}$.
2. $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

1. f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$.

Projecteurs et symétries

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. Tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ s'écrit d'une manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{E}_1$ et $x_2 \in \mathrm{E}_2$. Soit p et s deux applications de E dans E. On dit que :

1. p est le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2 si $p : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 \end{cases}$
2. s est une symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 si $s : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{cases}$

Propriétés des projecteurs et des symétries

Avec les notations de l'encadré précédent :

1. p et s son linéaires : $p, s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. $s = 2p - \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.
3. $\operatorname{Ker} p = \mathrm{E}_2$ et $\operatorname{Im} p = \mathrm{E}_1$.
4. $\operatorname{Ker} s = \{0\}$ et $\operatorname{Im} s = \mathrm{E}$ (autrement dit s est un automorphisme de E).
5. $p(x) = x \iff x \in \mathrm{E}_1$ (E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p).

Caractérisations des projecteurs et des symétries

Soient $p, s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
2. s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}$.

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E

1. On montre que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.
2. On montre que $\mathrm{F} \neq \varnothing$ (la pluspart du temps on montre que $0 \in \mathrm{F}$).
3. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(u,v) \in \mathrm{E}^2$. On montre que $\alpha u + \beta v \in \mathrm{F}$.

Pour montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. **Montrons que la somme est directe :** Il faut donc montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. ... donc $x = 0$.
2. **Montrons que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$:** Soit $x \in \mathrm{E}$. Posons $x_1 = \ldots$. Posons $x_2 = \ldots$. On a bien :

1. $x_1 \in \mathrm{F}$. 2. $x_2 \in \mathrm{G}$. 3. $x = x_1 + x_2$.

4 méthodes pour montrer qu'une partie F de E est un sev de E

Soit F une partie de E. Pour montrer que F est un sev de E, on peut :

1. Montrer que F est non vide et stable par combinaison linéaire.
2. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect\,(\mathrm{A})$ où A est une famille de vecteurs de E à déterminer.
3. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\, f$ où f est une application linéaire à déterminer.
4. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\, f$ où f est une application linéaire à déterminer.

Pour montrer qu'une application est linéaire

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soient $u, v \in \mathrm{E}$.
2. Montrons que : $\boxed{f\left(\alpha u + \beta v\right) = \alpha f(u) + \beta f(v)}$

Remarque : si f est linéaire alors $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.

Pour montrer qu'un endomorphisme ...

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. f est **bijectif** si et seulement si il existe $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\boxed{f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}}$. Si une telle application g existe alors $f^{-1} = g$.
2. f est une **projection** si et seulement si $\boxed{f \circ f = f}$.
3. f est une **symétrie** si et seulement si $\boxed{s \circ s = \mathrm{id}}$.

Index

C

D

E

F

G

H

I

Q

R

S

T

U

V

W